УДК 517.977

В. А. МАЛКИН

РЕШЕНИЕ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ НЕГРАДИЕНТНОГО СЛУЧАЙНОГО ПОИСКА

Военная академия Республики Беларусь

В статье рассматривается способ численного решения двухточечной краевой задачи при определении оптимального управления динамической системой с помощью принципа максимума Понтрягина. Определение начальных условий сопряженной системы уравнений осуществляется методом неградиентного случайного поиска.

Метод неградиентного случайного поиска основан на применении стохастических процедур к решению целого ряда задач, в том числе и детерминированных. При решении задачи определения оптимального управления динамической системой с использованием принципа максимума Понтрягина требуется найти такие начальные условия сопряженной системы уравнений, при которых значения переменных этой системы удовлетворяют известным конечным условиям $Y(t_k)$.

Решение задачи заключается в случайном выборе вектора начальных условий из некоторой области значений, численном интегрировании основной и сопряженной систем и последующей статистической обработке полученных результатов. Статистическая обработка осуществляется с целью получения математического ожидания и СКО тех значений начальных условий, при которых конечные значения попадают в некоторую область Θ_0 *относительно точки* $Y(t_k)$. *Для обеспечения репрезентативности выборки, по которой производится оценка математического ожидания и СКО, предлагается адаптивная рекуррентная процедура поиска с поэтапным уменьшением размера области* Θ_0. *Выборочные оценки параметров распределения являются основой для определения начальных условий сопряженной системы уравнений на следующем этапе поиска.*

Приводится пример решения задачи для объекта управления первого порядка. Полученные результаты подтверждают возможность применения предлагаемого подхода к решению задачи синтеза оптимального управления динамической сис темой с использованием принципа максимума Понтрягина.

Ключевые слова: *динамическая система, оптимальное управление, принцип максимума Понтрягина, метод неградиентного случайного поиска.*

Введение

Двухточечная краевая задача возникает при определении оптимального управления динамической системой с использованием принципа максимума Понтрягина [1]. Принцип максимума сформулирован как необходимый признак оптимальности для нелинейных систем и необходимый и достаточный признак для линейных систем управления.

Решение задачи оптимизации заключается в определении такого вектора управления динамической системой U, который удовлетворяет заданным ограничениям $U \in U_0$ и обеспечивает экстремум функционалу качества

$$\Psi = \int_{t_0}^{t_k} L(X,U,t)dt ,$$

где X – n-мерный вектор состояния системы, U – m-мерный вектор управления, $[t_0, t_k]$ – интервал функционирования системы.

Общая процедура поиска оптимального управления в соответствии с принципом максимума заключается в расширении пространства состояния путем добавления n+1-й координаты $x_{n+1} = \dot{\Psi}$ и отыскании такого управления, которое обеспечивает максимум функции Гамильтона $H(X,Y,U,t_0,t_k)$:

$$U = \arg\max_{U \in U_0} H(X,Y,U,t_0,t_k), \tag{1}$$

где Y – n+1-мерный вектор состояния сопряженной системы.

Вектор состояния динамической системы удовлетворяет дифференциальным уравнениям:

$$\dot{x}_i = f_i(X,U,t), \; x_i(t_0) = x_{i0}, \; i = 1,2,...,n+1. \tag{2}$$

Уравнения сопряженной системы имеют вид:

$$\dot{y}_i = \varphi_i(X,Y,U,t) = -\sum_{j=1}^{n+1} y_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \; i = 1,2,...,n+1. \tag{3}$$

При этом для системы сопряженных уравнений (3) известны конечные условия интегрирования $y_i(t_k)=0$ $(i=1,2,...,n)$, $y_{n+1}(t_k)=-1$.

Функция Гамильтона определяется соотношением

$$H(X,Y,U,t_0,t_k)=\sum_{i=1}^{n+1} y_i f_i .$$

Таким образом, поиск оптимального управления сводится к решению двух задач: отысканию максимума функции (1) по вектору U и решению двух систем дифференциальных уравнений (2) и (3) с частично заданными начальными и конечными условиями. Поскольку в большинстве случаев вторая задача не имеет точного аналитического решения, для ее решения используются численные методы интегрирования. При этом появляется неопределенность в выборе начальных условий для сопряженной системы уравнений $y_i(t_0)$, $i = 1, 2, ..., n + 1$. Обычно начальные условия задаются произвольно и затем с помощью итерационной процедуры осуществляется поиск таких значений $y_i(t_0)$, при которых переменные $y_i(t_k)$ будут удовлетворять заданным конечным значениям. Какие-либо общие подходы к построению детерминированных итерационных процедур поиска вектора начальных условий $Y(t_0)$ отсутствуют. Все зависит от конкретных особенностей задачи и опыта исследователя.

В статье предлагается способ отыскания начальных значений сопряженной системы при решении задач оптимизации с использованием принципа максимума Понтрягина, основанный на применении метода неградиентного случайного поиска (НСП) [3, 4].

Постановка и решение задачи

Пусть задана динамическая система, описанная в пространстве состояний дифференциальными уравнениями (2). Заданы начальный t_0 и конечный t_k моменты функционирования системы. Для решения задачи оптимизации осуществляется численное интегрирование уравнений (2) и (3) на интервале $[t_0, t_k]$ при заданных начальных условиях системы уравнений (2). Вектор оптимального управления $U_{\text{опт}}(X,Y)$ находится на каждом шаге интегрирования в соответствии с формулой (1). Для сопряженной системы уравнений (3) известны значения координат вектора состояния в конечный момент времени $Y(t_k)$. Требуется найти такие начальные значения координат вектора $Y(t_0)$, при которых с учетом определения $U_{\text{опт}}(X,Y)$ из соотношения (1) фазовые траектории основной и сопряженной систем будут удовлетворять уравнениям (2) и (3), а значения фазовых координат сопряженной системы в конечный момент времени будут равны y_{ik} $(i = 1, 2, ..., n + 1)$.

Рассматривается решение данной задачи методом неградиентного случайного поиска. Метод НСП заключается в случайном выборе начальной точки $Y(t_0)$ из некоторой области G_0 (рис. 1), получении решения систем уравнений (2) и (3) и последующей статистической обработке результатов.

В результате проведения N циклов интегрирования систем уравнений (2) и (3) запоминаются те значения вектора $Y(t_0)$, при которых обеспечивается попадание вектора $Y(t_k)$ в заданную область G_{0k}, содержащую требуемое конечное значение Y_k (событие Θ). В результате статистической обработки координат y_{0i}, удовлетворяющих событию Θ, определяются оценки их математического ожидания m_i^{Θ} и среднеквадратического отклонения σ_i^{Θ}. Для следующего цикла интегрирования начальные значения координат сопряженной системы определяются по формуле

$$y_{0i}(k+1)=m_i^{\Theta}(k)+\sigma_i^{\Theta}(k)e_{\text{г}},\ i = 1, 2, ..., n + 1, \tag{4}$$

где $e_{\text{г}}$ – центрированная равномерно распределенная случайная величина с единичной дисперсией.

В качестве границы области G_0 выбирается сфера с центром в точке Y_k и заданным радиусом R. На первом этапе решения задачи суще-

Рис. 1. Выбор начальных условий в методе НСП

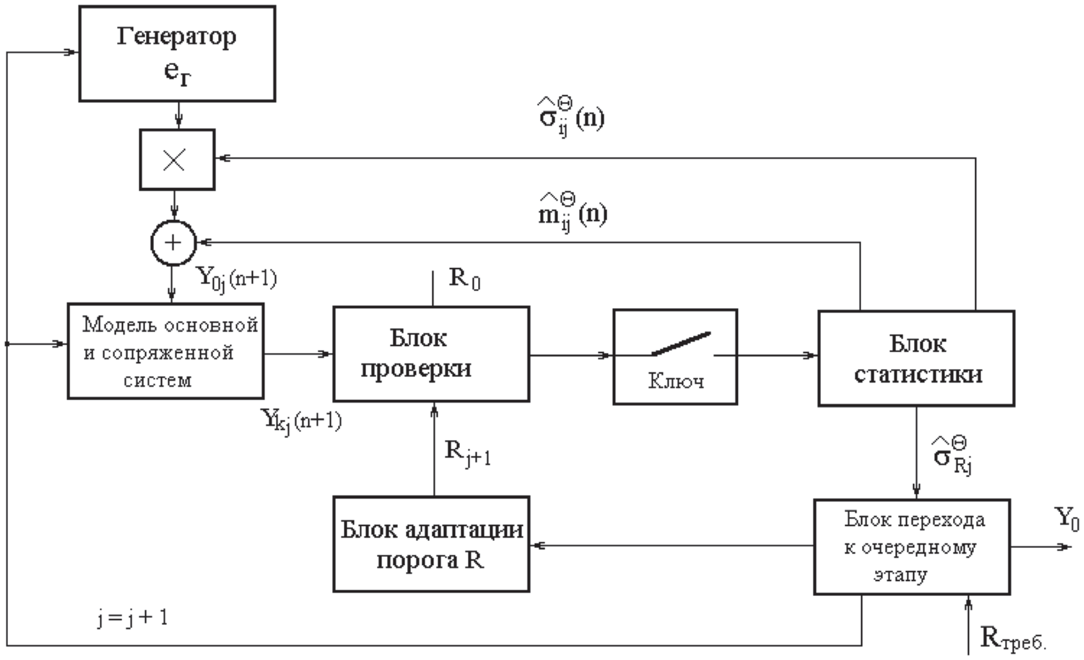

Рис. 2. Структурная схема определения начальных условий сопряженной системы

ствует большая неопределенность в выборе области начальных условий сопряженной системы, что может привести к малой вероятности выполнения события Θ. Поэтому на начальных этапах решения задачи величина R должна выбираться достаточно большой, чтобы обеспечить репрезентативность выборки начальных значений, для которых выполняется событие Θ. С другой стороны, величина R характеризует точность решения задачи и должна удовлетворять требованию $R < R_{треб}$, где $R_{треб}$ – требуемая точность решения задачи.

Из этого следует, что процесс поиска решения должен быть поэтапным с адаптацией на каждом этапе значения величины R. Адаптация величины R может осуществляться по оценке СКО разброса модуля значений вектора $\left|Y_k^{\Theta} - Y_k\right|$ на предыдущем этапе решения задачи:

$$R(j) = \alpha\hat{\sigma}_R(j-1), \qquad (5)$$

где $\hat{\sigma}_R(j-1)$ – оценка СКО вектора $\left|Y_k^{\Theta} - Y_k\right|$ на предыдущем этапе, $0 < \alpha < 1$ – коэффициент, определяемый экспериментально в процессе решения задачи.

Окончание решения задачи выполняется по условию $R < R_{треб}$. Структурная схема решения задачи определения начальных условий сопряженной системы методом НСП представлена на рис. 2.

Пример

Требуется найти оптимальное управление $u_0(t)$ для объекта, описываемого уравнением первого порядка $\dot{x}(t) = -5x(t) + u(t),\ x(0) = x_0$, которое минимизирует функционал

$$\Psi = 0{,}5\int_0^{T_k}(x^2(t) + u^2(t))dt. \qquad (6)$$

Для поиска оптимального управления используем принцип максимума Понтрягина. Сделаем замену переменных $x(t) = x_1(t)$ и увеличим размерность пространства состояний, включив в него координату $x_2(t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\dot{x}_2(t) = 0{,}5x_1^2(t) + 0{,}5u^2(t),\ x_2(0) = 0.$$

Тогда уравнения для составляющих вектора состояния основной системы будут иметь вид (аргумент t опущен):

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = f_1 = -5x_1 + u,\ x_1(0) = x_0,\\ \dot{x}_2 = f_2 = 0{,}5x_1^2 + 0{,}5u^2,\ x_2(0) = 0,\end{cases} \qquad (7)$$

Сопряженная система уравнений в соответствии с соотношением (3) будет иметь вид:

$$\begin{cases}\dot{y}_1 = -y_2x_1 + 5y_1,\ y_1(T_k) = 0,\\ \dot{y}_2 = 0,\ y_2(T_k) = -1,\end{cases} \qquad (8)$$

Из второго уравнения системы (8) следует, что $y_2(t) = \text{const} = -1$. Тогда гамильтониан H будет равен

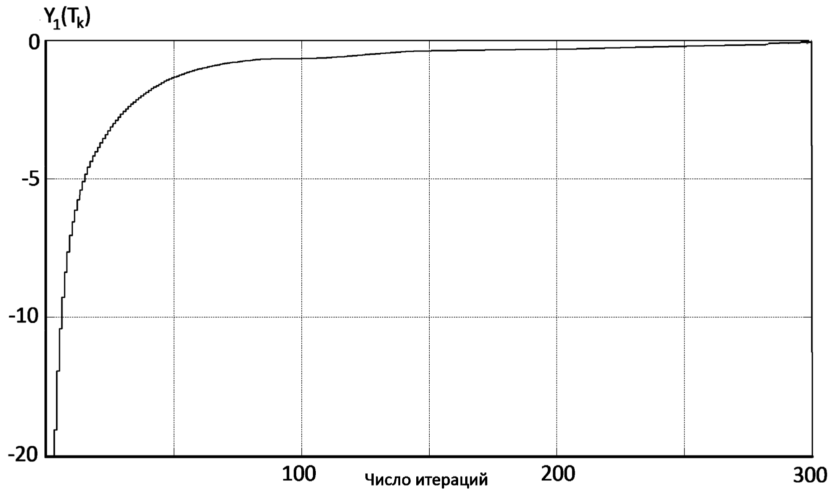

Рис. 3. Процесс приближения $y_1(T_k) \to 0$ при решении задачи методом НСП

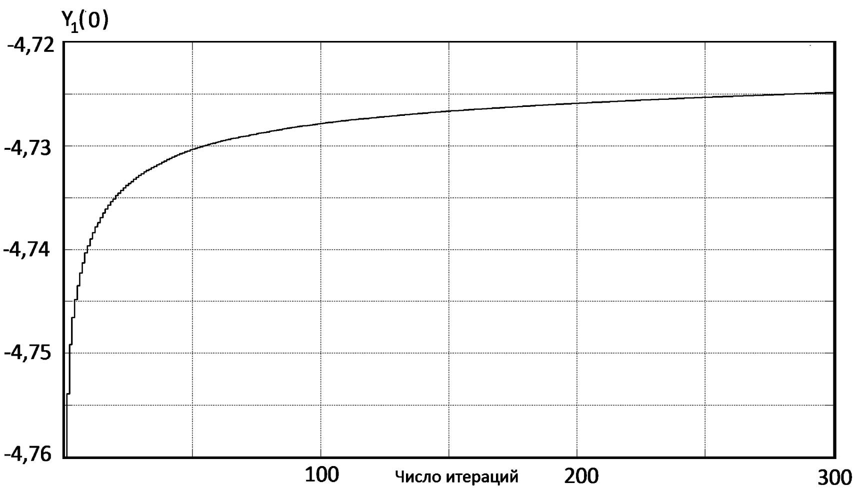

Рис. 4. Процесс приближения $y_1(0) \to y_{10}$ при решении задачи методом НСП

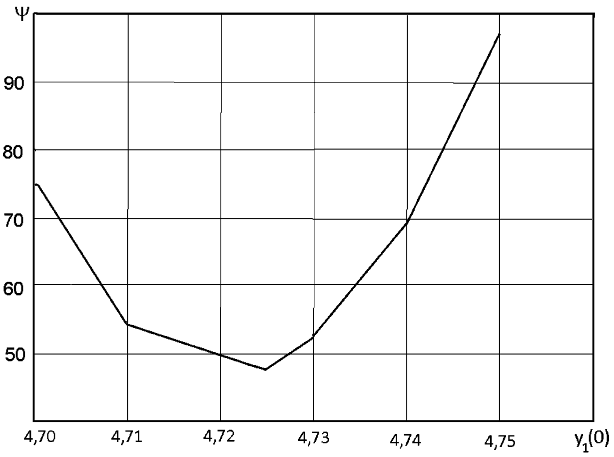

Рис. 5. Зависимость критерия оптимальности от начального условия сопряженной системы

$$H = \sum_{i=1}^{2} y_i f_i = -5x_1 y_1 + y_1 u - 0,5x_1^2 - 0,5u^2.$$

Максимум величины H в открытой области управления определяется из соотношения $\dfrac{\partial H}{\partial u} = y_1 - u = 0$. Следовательно, оптимальное управление будет равно $u_0 = y_1$.

Искомое решение получается путем интегрирования системы уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -5x_1 + y_1, \;\; x_1(0) = x_0, \\ \dot{y}_1 = 5y_1 + x_1, \;\; y_1(T_k) = 0, \end{cases} \qquad (9)$$

Задаваясь значением величины $y_1(0) = -5$ и применяя рекуррентный алгоритм (4), получаем искомое значение $y_{10} = -4{,}725$. Численное интегрирование системы уравнений (9) осуществлялось в среде MATLAB.

Обсуждение результатов

На графиках рис. 3 и рис. 4 показаны итерационные процессы приближения $y_1(T_k) \to 0$ и $y_1(0) \to y_{10}$ в процессе поиска решения методом НСП.

График зависимости критерия оптимальности (6) от начального условия y_{10} представлен на рис.5. Из представленного графика видно, что полученное методом НСП решение обеспечивает минимум критерия оптимальности. Для обеспечения приближения конечного значения $y_1(T_k)$ к нулю с погрешностью R = 0,01 потребовалось j = 300 этапов решения задачи при количестве испытаний на каждом этапе n = 100. Общее число итераций – $3{\cdot}10^4$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Понтрягин, Л. С.** Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. – М.: Наука, – 1969.
2. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А. А. Красовского. – М.: Наука, 1987.
3. **Гладков, Д. И.** Оптимизация систем неградиентным случайным поиском / Д. И. Гладков. – М.: Энергоиздат, 1984.
4. **Казаков, И. Е.** Методы оптимизации стохастических систем / И. Е. Казаков, Д. И. Гладков. – М.: Наука, 1987.
5. **Фельдбаум, И. Е.** Основы теории оптимальных автоматических систем / И. Е. Фельдбаум. – М.: Наука, – 1966.
6. **Казаков, И. Е.** Оптимизация динамических систем случайной структуры / И. Е. Казаков, В. М. Артемьев. – М.: Наука, 1980.
7. **Брайсон, А. Е.** Прикладная теория оптимального управления / А. Е. Брайсон, Хо Ю Ши. – М.: Мир, 1972.
8. **Вентцель, Е. С.** Исследование операций / Е. С. Вентцель. – М.: Дрофа, 2006.
9. Методы классической и современной теории автоматического управления: / Под ред. К. А. Пупкова, Н. Д. Егупова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. – Т4: Теория оптимизации САУ.

Поступила 01.03.2016

V. A. MALKIN

TWO-POINT BOUNDARY PROBLEM SOLUTION BY NON-GRADIENT RANDOM SEARCH METHOD

Military Academy of the Republic of Belarus

The numerical solution of two-point boundary problem when determining optimal control of dynamical system by means of Pontryagin's maximum principle is considered. The initial conditions of conjugate set of equations are determined by use of non-gradient random search method.

The non-gradient random search method based on application of stochastic procedures for range of problems solving, including the deterministic ones. When solving the task of optimal control estimation of dynamical system by means of Pontryagin's maximum principle the initial conditions of conjugate set of equations must be determined, provided that dynamical system's variables values meet the known terminal conditions $Y(t_k)$.

The problem's solution lie in random selection of vector of initial conditions in some actual range, numerical integration of basic and conjugate systems and subsequent processing of findings. Statistic processing gives the mean and RMS estimations of initial conditions values, providing terminal conditions values hit in some domain Θ_0 *relative to* $Y(t_k)$ *point. For the purpose of ensuring of representative sampling for mean and RMS values estimation the adaptive recurrent search procedure with step-by-step domain* Θ_0 *contraction is introduced. The initial conditions of conjugate set of equations on the next search stage are determined on a base of sample estimates of distribution's parameters.*

The example problem solution for thirst-order control object is given. The findings confirm the possibility of proposed approach utilization for optimal control synthesis of dynamical system by means of Pontryagin's maximum principle.

Keywords: *dynamical system, optimal control, Pontryagin's maximum principle, non-gradient random search method.*

Малкин Виталий Александрович, доктор технических наук, профессор. Профессор кафедры авиационных радиоэлектронных систем учреждения образования «Военная академия Республики Беларусь». Сфера научных интересов: системный анализ, системы управления и наведения пилотируемых и беспилотных летательных аппаратов.