

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ MATHCAD В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ПО КУРСУ ТММ

Бокун Г.С., Вихренко В.С., Гапанюк Д.В.

*Bases of computer laboratory work on modeling of dynamics of the machine unit in various modes are stated. Advantages of use of analytical computer transformations for solution of the differential equation of the machine unit movement supposed by last versions of MATHCAD are shown.*

Ранее была показана эффективность применения MATHCAD при организации курсового проектирования [1]. Изложенные подходы [2] можно усовершенствовать, отказавшись от использования одно- и многомерных массивов при разработке соответствующего программного обеспечения для учебного процесса. На примере возможной компьютерной лабораторной работы покажем, как применение функциональных представлений в MATHCAD позволяет, с одной стороны, лучше и легче усвоить методы ТММ, а с другой служит хорошей практикой по применению современных компьютерных технологий при реализации этих методов.

Дополнительные возможности, заложенные в последних версиях MATHCAD, допускают использование многоуровневых функциональных вложений и, в результате, позволяют решать задачи динамического синтеза в функциональном виде, приблизив программирование к «формульным записям» учебника по ТММ, что значительно облегчает понимание материала.

Кроме этого, операторы MATHCAD, решающие дифференциальное уравнение движения машины, требуют представления всех величин в функциональном виде. Поэтому с самого начала целесообразно динамические характеристики механизмов, определенные для конечного числа положений, представить в функциональной форме.

Найденный в форме одномерного массива приведенный момент инерции механизма  $I_{pr}$  с помощью процедур интерполяции преобразуется в функцию обобщенной координаты. Для этого используются значения величины приведенного момента инерции ( $y$ ) для двенадцати положений кривошипа, характеризуемых значениями его угла поворота ( $x$ )

$$x := \left( \frac{0\pi}{180} \quad \frac{30\pi}{180} \quad \dots \quad \frac{360\pi}{180} \right)^T, \quad (1)$$

$$y := (0,25 \ 0,32 \ 0,27 \ 0,18 \ 0,40 \ 0,53 \ 0,34 \ 0,20 \ 0,27 \ 0,32 \ 0,15 \ 0,04 \ 0,25)^T. \quad (2)$$

С помощью процедур

$$vs := pspline(x, y), \quad (3)$$

$$I_{pr}(\alpha) := \text{int } erp(vs, x, y, \alpha) \quad (4)$$

получим  $I_{pr}$  как функцию угла поворота кривошипа  $\alpha$  (см. рис. 1).

Для дальнейшего понадобится производная  $\frac{dI_{pr}}{d\alpha}$ , которую получим, записав

$$DI_{pr}(\alpha) := \frac{d}{d\alpha} I_{pr}(\alpha). \quad (5)$$

Аналогично, используя значения величин приведенного момента сил сопротивления  $u$  для двенадцати положений  $xx$ , приходим к зависимости  $M_{pc}(\alpha)$

$$xx := \left( \frac{0\pi}{180} \quad \frac{30\pi}{180} \quad \dots \quad \frac{360\pi}{180} \right)^T, \quad (6)$$

$$yy := (50 \ 670 \ 1050 \ 1720 \ 2000 \ 902 \ -600 \ -1200 \ -901 \ -505 \ -202 \ -6050)^T, \quad (7)$$

$$vs := pspline(xx, yy), \quad (8)$$

$$M_{pc}(\alpha) := \text{int } erp(vs, xx, yy, \alpha). \quad (9)$$

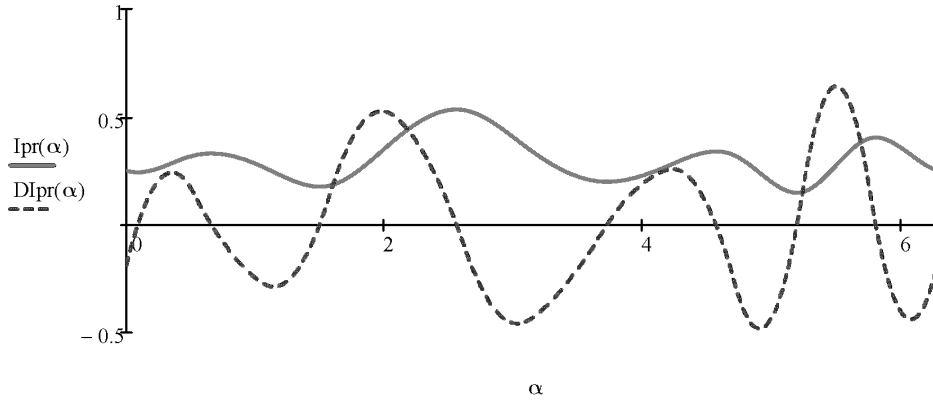


Рис. 1. Зависимость приведенного момента инерции (4) и его производной (5) от угла поворота кривошипа  $\alpha$ .

Интегрируя  $M_{pc}(\alpha)$ , находим работу сил полезных сопротивлений  $A_{pc}(\alpha)$  и изменение кинетической энергии  $\Delta K(\alpha)$  в зависимости от величины обобщенной координаты  $\alpha$

$$A_{pc}(\alpha) := \int_0^{\alpha} M_{pc}(\alpha) d\alpha, \quad (10)$$

$$Md := A_{pc}(2\pi) / 2\pi, \quad (11)$$

$$\Delta K(\alpha) := Md \cdot \alpha - A_{pc}(\alpha), \quad (12)$$

здесь  $Md$  – момент двигателя (рассматривается случай, когда  $Md = const$ ).

Анализируя график, отражающий изменение  $\Delta K$  (см. рис. 2), определяя экстремальные значения этой функции, находим наибольшее изменение функции  $\Delta K$ , необходимое для расчета момента инерции маховика  $I_{\max 0}$ .

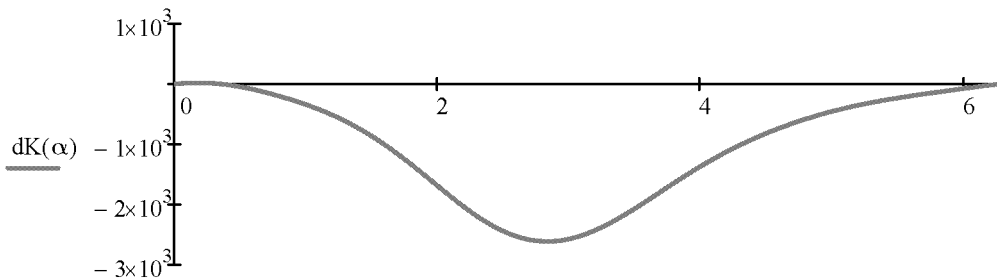


Рис. 2. Изменение кинетической энергии

Из графика  $\Delta K(\alpha)$ , следует

$$d1 := \text{Minimize}(\Delta K, 2\pi) = \Delta K_{\min} := \Delta K(d1), \quad (13)$$

$$d2 := \text{Maximize}(\Delta K, 2\pi) = \Delta K_{\max} := \Delta K(d2), \quad (14)$$

$$\Delta K_{naib} := \Delta K_{max} - \Delta K_{min}. \quad (15)$$

По среднему значению угловой скорости ( $\omega_{cp} = \omega(0)$ ) и коэффициенту неравномерности работы находим момент инерции маховика

$$I_{max0} := \frac{\Delta K_{naib}}{\delta \omega_{(0)}^2}. \quad (16)$$

Тогда

$$I_{pr}(\alpha) := I_{pr}(\alpha) + I_{max0} \quad (17)$$

Вычисляем начальное значение кинетической энергии, а также кинетическую энергию  $K = K(\alpha)$  в зависимости от угла поворота  $\alpha$

$$K(0) = 0,5 I_{pr}(0) \omega^2(0), \quad (18)$$

$$K(\alpha) := K(0) + \Delta K(\alpha). \quad (19)$$

Теперь рассчитываем угловую скорость  $\omega = \omega(\alpha)$  и представляем ее графически (см. рис. 3)

$$\omega(\alpha) := \sqrt{\frac{2 \cdot K(\alpha)}{I_{pr}(\alpha)}}. \quad (20)$$

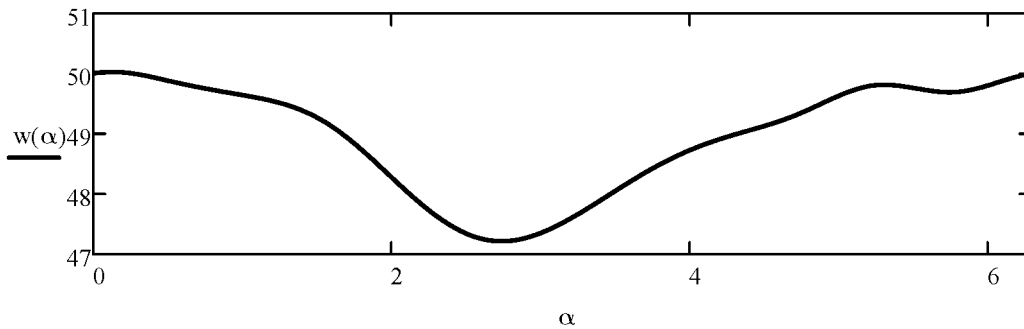


Рис. 3. Изменение угловой скорости звена привода

Двумя способами ведем расчет углового ускорения

$$\epsilon 1(\alpha) := \omega(\alpha) \frac{d\omega(\alpha)}{d(\alpha)}, \quad (21)$$

$$\epsilon 2(\alpha) := \frac{md - M_{pc}(\alpha) - 0,5\omega^2(\alpha)DI_{pr}(\alpha)}{I_{pr}(\alpha)} \quad (22)$$

и строим графики функций  $\epsilon 1$  и  $\epsilon 2$  (рис. 4).

Далее рассмотрим решение дифференциального уравнения движения машины с учетом механической характеристики двигателя.

Зависимость момента двигателя, приведенного к приводному звену механизма, определяется по формуле [3]

$$M_{\partial} = 2\lambda_k U M_{\dot{a}.i} \frac{(n_{\dot{a}\dot{n}} - n_{\dot{a}\dot{e}})(n_{\dot{a}\dot{n}} - n_{\partial})}{(n_{\dot{a}\dot{n}} - n_{\partial})^2 + (n_{\dot{a}\dot{n}} - n_{\dot{a}\dot{e}})^2}, \quad (23)$$

где  $U$  – передаточное отношение привода,  $M_{\dot{a}.i}$  – значение номинального момента двигателя,  $n_{\dot{a}\dot{n}}$ ,  $n_{\dot{a}\dot{e}}$  и  $n_{\dot{a}}$  – синхронная, критическая и текущая частоты вращения ротора, соответственно.

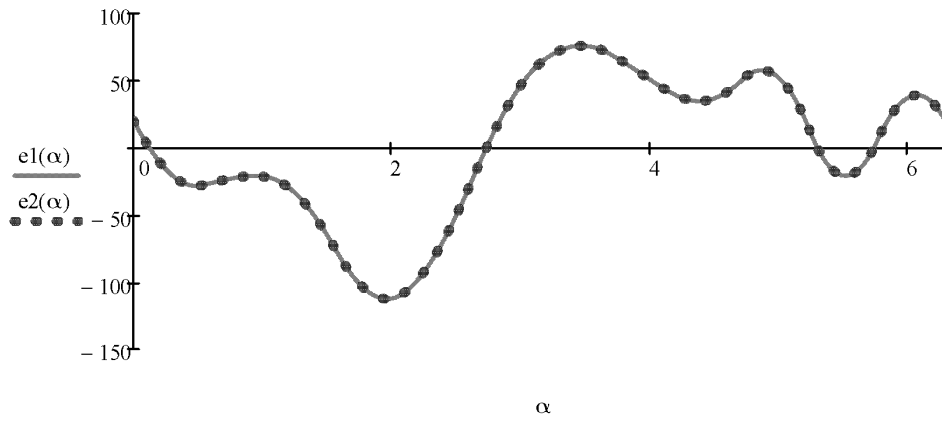


Рис. 4. Изменение углового ускорения звена приведения

Для расчета параметров в приведенной формуле сначала вычислим среднюю эффективную мощность, потребляемую механизмом

$$N_{cp} = Md \cdot \omega(0). \quad (24)$$

Тогда мощность двигателя с учетом к.п.д. привода ( $\eta = 0,9$ ) составляет

$$N_{\bar{a}} = N_{cp} \cdot \eta \text{ Вт.}$$

По таблице из [3] выбираем двигатель, с требуемыми характеристиками ( $\eta_{\bar{a}}; \lambda_k; N_{\bar{a}i}; n_{\bar{a}i}$ ). Вычисляем  $M_{\bar{a}i} = \frac{N_{\bar{a}i}}{\omega_{\bar{a}i}}$ . Вычисляем передаточное отношение при-

вода  $U = \frac{n_{\bar{a}i}}{n_{cp}}$ . Находим  $n_{\bar{a},k} = n_{\bar{a},\bar{n}} - \lambda_e (n_{\bar{a}\bar{n}} - n_{\bar{a}i})$ . Тогда формула для расчета  $\dot{I}_{\bar{a}}$  дает зависимость между моментом на валу двигателя и его угловой скоростью.

В свою очередь, обозначив зависимость угловой скорости ведущего звена от угла его поворота как  $\omega l(\alpha)$ , запишем

$$n_{\bar{a}} = \frac{\omega l(\alpha) \cdot U \cdot 30}{\pi}. \quad (25)$$

В итоге можем записать зависимость  $M_{\bar{a}} = M_{\bar{a}}(\omega l(\alpha))$ .

Для решения дифференциального уравнения и исследования переходных режимов функции  $I_{pr}(\alpha)$ ,  $DI_{pr}(\alpha)$  и  $M_{pc}(\alpha)$  необходимо преобразовать в периодические с периодом  $2\pi$ . Для этого используем процедуру

$$\tau(\alpha) := \alpha - 2\pi \cdot \text{trunc}\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right). \quad (26)$$

Решим дифференциальное уравнение, записав вычислительный блок Given

$$\omega l(\alpha) = \frac{M_d(\omega l(\alpha)) - M_{pc}(\tau(\alpha)) - 0,5 DI_{pr}(\tau(\alpha)) \cdot \omega l^2(\alpha)}{I_{pr}(\tau(\alpha)) \cdot \omega l(\alpha)}$$

$$\omega l(0) = 50$$

$$\omega l := \text{Odesolve}(\alpha, 20\pi).$$

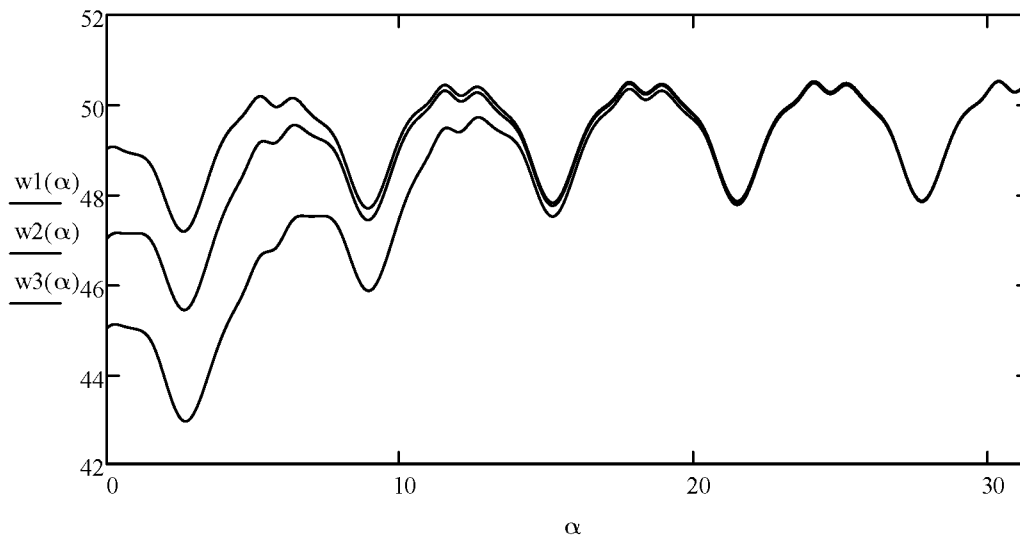


Рис. 5. Зависимости угловой скорости звена приведения при различных начальных условиях

В итоге получим искомую зависимость  $\omega_l = \omega_l(\alpha)$  на интервале в 10 периодов. Рассмотрим эту зависимость при различных значениях  $\omega_l(0)$  (см. рис. 5). Затем данное уравнение используется для анализа различных режимов работы механизма при разнообразных условиях.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бокун, Г.С. Применение информационных технологий для учебного проектирования механизмов / Г.С. Бокун, В.С. Вихренко, С.А. Гляков // Теоретическая и прикладная механика. – Минск, 2005. – Вып. 18. – С. 215–220.
2. Гляков, С.А. Компьютерная механика. Динамический и кинематический анализ механических систем / С.А. Гляков [и др.]; под ред. М.А.Журавкова. – Мн.: БГУ, 2006. – 375 с.
3. Попов, С.А. Курсовое проектирование по теории механизмов и механике машин / С.А. Попов, Г.А. Тимофеев. – М.: Высшая школа, 2004. – 460 с.