Белорусский государственный университет, Минск
Белорусский национальный технический университет, Минск

РАЗРАБОТКА ФУНКЦИЙ ПОЛЬЗОВАТЕЛЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Босяков С.М., Царева А.А., Скляр О.Н.

In this paper presents the basic user functions development results, which are implemented in task solution in theoretical and applied mechanics with the use of functional programming possibilities offered by the computer system Mathematica. Examples of implementation of the above mentioned functions in task solution on kinematics of a point in curve-wave orthogonal coordinates.

При решении многих задач теоретической и прикладной механики, допускающих применение функций для проведения определенных или типовых расчетов и вычислений, целесообразно применение систем компьютерной математики, реализующих функциональное программирование. В настоящей работе представлены результаты разработки собственных функций пользователя пакета *Mathematica* [1], предназначенных для решения задач кинематики и динамики точки в криволинейных ортогональных координатах.

Для заданной системы криволинейных координат коэффициенты Ламе определяются следующим соотношением [2]:

$$H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2},\ i = \overline{1,3}. \qquad (1)$$

Для автоматизации подсчета коэффициентов Ламе в системе *Mathematica* разработана функция `LameCoefficients[H,{q1,q2,q2},{x,y,z}]`, которая выполняет генерацию списка подстановок вида `H[xi]→expr` для коэффициентов Ламе в соответствии с соотношением (1). Здесь аргументом `H` является обозначение коэффициентов Ламе, список `{q1,q2,q2}` содержит обозначения для криволинейных координат, список `{x,y,z}` – выражения, связывающие декартовы и криволинейные координаты. Ниже приведено определение функции `LameCoefficients`.

```
LameCoefficients[H_,{q1_,q2_,q3_},{x_,y_,z_}]:=
Thread[{H[q1],H[q2],H[q3]}→PowerExpand[Simplify[{
Sqrt[D[x,q1]^2+D[y,q1]^2+D[z,q1]^2],
Sqrt[D[x,q2]^2+D[y,q2]^2+D[z,q2]^2],
Sqrt[D[x,q3]^2+D[y,q3]^2+D[z,q3]^2]}]]]
```

Отметим, что в теле функции для упрощения результирующих выражений для коэффициентов Ламе можно использовать функцию `Simplify` с условиями `{q1>0,q2>0, q3>0}` для криволинейных координат. В качестве примера проведем расчет коэффициентов Ламе для цилиндрической системы координат:

```
CoefficientsLame[H,{ρ,φ,z},{ρ Cos[φ],ρ Sin[φ],z}]
```

```
{H[ρ]→1,H[φ]→ρ,H[z]→1}
```

Проекции скорости на оси криволинейных координат задаются следующим соотношением [3]:

$$v_q = H_i \frac{dq_i}{dt}, i = \overline{1,3}, \qquad (2)$$

где H_i – коэффициенты Ламе.

Для расчета проекций векторов скорости на оси криволинейных координат в системе *Mathematica*, соответствующих формуле (2) разработана функция `Velocity[v,{q1,q2,q3},{x,y,z}]`, где аргумент `v` обозначает скорость. Функция определена следующим образом:

```
Velocity[v_,{q1_,q2_,q3_},{x_,y_,z_}]:=
Thread[{v[q1],v[q2],v[q3]}(Simplify[PowerExpand[
FullSimplify[Table[(LameCoefficients[h,{q1,q2,q3},
{x,y,z}][[i,2]]/.{q1→q1[t],q2→q2[t],q3→q3[t]})
D[{q1,q2,q3}[[i]][t],t],{i,1,3}]]]]]
```

Для формулировки выражений, связывающих декартовые и криволинейные координаты, применим функцию `CoordinatesToCartesian[pt,coordsys]` стандартного пакета `Calculus` расширения системы *Mathematica*. Она позволяет выражать декартовы координаты через координаты тринадцати систем криволинейных ортогональных координат: цилиндрической, сферической, параболического цилиндра, параболоидальной, эллиптического цилиндра, вытянутого эллипсоида вращения, сжатого сфероида, биполярной, бисферической, тороидальной, конической, софокусных эллипсоидов, софокусных параболоидов. Рассчитаем проекции векторов скорости на оси криволинейных координат и модуль скорости для сферической системы координат.

```
<<Calculus`VectorAnalysis`

Sphsys = CoordinatesToCartesian[{ρ,ψ,φ},Spherical]

{ρ Cos[φ] Sin[ψ],ρ Sin[φ] Sin[ψ],ρ Cos[ψ]}

Velocity[v,{ρ,ψ,φ},Sphsys]
```

[redacted]

Определим функцию, предназначенную для вычисления проекций векторов ускорения на оси криволинейных координат. Предварительно зададим функцию `KEnergy[T,{q1,q2,q3},{x,y,z}]`, позволяющую осуществлять генерацию выражения для кинетической энергии. Аргументом `T` данной функции является обозначение энергии. Кинетическая энергия определяется из соотношения [3]:

$$T = \frac{1}{2}\left(H_1^2 \left(\frac{dq_1}{dt}\right)^2 + H_2^2 \left(\frac{dq_2}{dt}\right)^2 + H_3^2 \left(\frac{dq_3}{dt}\right)^2 \right). \qquad (3)$$

Согласно формуле (3) функцию `KEnergy` определим следующим образом:

```
KEnergy[w_,{q1_,q2_,q3_},{x_,y_,z_}]:=(w→Simplify[
PowerExpand[Simplify[(1/2) Sum[D[{q1,q2,q3}[[i]][t],t]^2
(LameCoefficients[h,{q1,q2,q3},{x,y,z}][[i,2]]/.
{q1→q1[t],q2→q2[t],q3→q3[t]})^2,{i,1,3}]]]])
```

Вычислим кинетическую энергию точки для сферической системы координат:

```
KEnergy[w,{ρ,ψ,φ},Sphsys]
```

w □ $\frac{1}{2}$ [illegible]

Проекции ускорения на оси криволинейных координат имеют вид [3]:

$$w_{qi} = \frac{1}{H_i}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right). \tag{4}$$

Функция `Acceleration[a,{q1,q2,q3},{x,y,z}]` для расчета проекций ускорения на оси криволинейных координат определяется аналогично рассмотренной выше функции `Velocity`:

```
Acceleration[a_,{q1_,q2_,q3_},{x_,y_,z_}]:=Thread[{a[q1],a[q2],a[q
3]}→Simplify[PowerExpand[FullSimplify[Table
[1/(LameCoefficients[h,{q1,q2,q3},{x,y,z}][[i,2]]/.{q1→q1[t],
q2→q2[t],q3→q3[t]})(D[D[KEnergy[w,{q1,q2,q3},{x,y,z}][[2]],
D[{q1,q2,q3}[[i]][t],t]],t]-D[KEnergy[w,{q1,q2,q3},{x,y,z}][[2]],
{q1,q2,q3}[[i]][t]]),{i,1,3}]]]]]
```

Заметим, что при нахождении проекций ускорения с применением этой функции следует предварительно загрузить функции `KEnergy` и `LameCoefficients`. Рассчитаем проекции ускорения для определенной выше сферической системы координат:

```
Acceleration[w,{ρ,ψ,φ},Sphsys]
```

[illegible]

Разработанные функции могут использоваться для решения теоретических и прикладных задач механики деформируемого твердого тела, механики сплошной среды и теории упругости в численном и символьном виде.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wolfram, St. The Mathematica Book. Fourth Edition. Cambridge: Wolfram Media/Cambridge University Press, 1999.
2. Лурье, А. И. Теория упругости / А.И. Лурье; М. Наука, 1970. – 940 с.
3. Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах // Т. 3. Специальные главы механики / М.И.Бать; под редакцией Г.Ю. Джанелидзе – М.: Наука, 1973. – 488 с.