Министерство образования

Республика Беларусь

Белорусский Национальный Технический Университет

Конспект лекций по математике для студентов инженерно-технических специальностей

Часть I

Электронное учебное издание

Минск БНТУ 2005

Авторы: Барминова Л.А., Глинская Е.А.,
Кондратьева Н.А., Латышева И.Г., Мелешко А.Н.,
Михнова Р.В., Прусова И.В., Роговцов Н.Н.

Электронная версия: Алифанова И.Л.

Редакция: Нифагин В.А., Бокуть Л.В.

Рецензент: к.т.н., доцент кафедры «Высшая математика №1» БНТУ В.И.Юринок

РАЗДЕЛ 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ, ЛОГИКИ И ОБЩЕЙ АЛГЕБРЫ

§1. Некоторые исторические сведения

Археологические исследования древних стойбищ, пещер, в которых жили далекие предки современного человека, указывают на то, что 30 - 40 тысяч лет тому назад наиболее выдающиеся представители эпохи палеолита уже обладали интеллектуальными способностями, сравнимыми с творческим потенциалом исследователей нашего времени. Примерно в те давние времена зародились первые представления о *числе* и счете, были построены достаточно совершенные календарные системы, а также созданы достаточно изящные произведения искусства (статуэтки животных). Во 2-ом десятке тысяч лет до нашей эры человечество, несмотря на Ледниковую эпоху, сумело создать весьма точные календари, которые позволяли предсказывать даже время наступления солнечных и лунных затмений. Примером такого календаря является, в частности, ритуальный жезл из бивня мамонта, который был найден в 1972 г. в Хакасии (его возраст составлял примерно XVIII тыс. лет).

Несравненно более высокий уровень интеллектуальной деятельности был достигнут в течение эпохи неолита (VIII-III тыс. лет до н. э.). В конце этой эпохи появились первые (ранние) цивилизации (Древние царства Египта, Шумер), в недрах которых зародилась архитектура, первые истоки философии, математики и инженерной мысли. В частности, около 3400г. до н. э. в Шумере были изобретены гончарный круг и колесо, представлявшие наиболее симметричные искусственные объекты, созданные в те времена руками человека. Кроме того, несколько позднее были изобретены весы и клещи, использование которых было неявно основано на законах рычага. В конце неолита была создана письменность (Шумер, Древний Египет), что позволило *фиксировать* и *сохранять* информацию и первые "научные" знания. Это обстоятельство существенно способствовало возникновению астрономии, математики и первых элементов физики в бронзовом веке (III-I тыс. лет до н.э.).

В эпоху бронзового века были сделаны первые попытки упорядочения данных опытов и наблюдений. В Древнем Египте около 2500г. до н.э. были введены единицы измерения длины, веса, объёма, времени. В Шумере, Древнем Египте, а затем в Вавилоне, были разработаны системы исчисления и процедуры выполнения арифметических операций. К тому же появились первые школы и первые математические работы. Древнейший манускрипт египетской математики был написан около 2000 лет до н.э. Ахмесом. Древними египтянами были созданы развитые календари, одна из модификаций которого (юлианский календарь) использовалась в Европе вплоть до XVI века н.э. Ремесленники и художники Древнего Востока (особенно египтяне) создали вес возможные изящные типы узоров на плоскости, которые соответствуют всем 17 типам симметричных орнаментов, которые только и могут реализовываться.

Колоссальный прорыв был достигнут человечеством в 1-ом тысячелетии до н.э. (железный век). Несмотря на то, что в эпоху бронзового века мудрецы Древнего Востока могли производить достаточно сложные вычисления, находить площади и объёмы относительно простых фигур (например, треугольников, трапеций, пирамид, цилиндров и т.п.) и решать некоторые другие задачи, они не создали развитого *рационального мышления,* которое основывается на использовании логических умозаключений, обобщений и элементов анализа, синтеза, Такое *мышление, подход* к решению разнообразных задач было разработано древними греками, Они, в частности, создали философию, логику, первые основы современной математики и физики. Среди выдающихся представителей Древней Греции нужно отметить Фалеса (ок. 624 - ок. 547 гг. до н.э.), Пифагора (VI в. до н.э.), Платона (428 или 427 - 348 или 347 гг. до н.э.), Аристотеля (ок.384 - ок,322 гг. до н.э.), Евклида (III в. до н.э.), Архимеда (ок. 287-212 гг. до н.э.), Апполония (ок. 260-ок.170 гг. до н.э.), Диофанта (III в. н.э.). Древнегреческим математикам принадлежит честь создания евклидовой геометрии, а также некоторых других разделов геометрии, которые только частично будут затронуты в курсе "Высшая математика". В частности, Апполоний исследовал некоторые важные свойства-эллипса и гиперболы.

Пифагорейцы являются создателями основ математического естествознания. В частности, они знали некоторые закономерности колебаний струн звуковых инструментов. Архимед первым доказал логическую разумность законов рычага и установил свой знаменитый закон Архимеда, используя для этого очень интересные и изящные геометрические построения и логические умозаключения. Диофант наряду с учёными Древнего Китая и Древней Индии создал основы алгебры, подлинный расцвет которой начался только в конце 1-го тысячелетия н.э. в работах арабских математиков.

Значительные успехи в области алгебры, тригонометрии, приближённых вычислений, создания удобных систем исчисления были достигнуты в XI-XV вв. в странах Древнего Востока. Кроме того, ряд выдающихся результатов был получен учёными этих стран в области астрономии.

Интеллектуальное пробуждение Западной Европы после падения Римской империи (476 г. н. э.) наступило только в XI-XIII вв. н. э. Значительную роль в этот процесс внесли школы при монастырях и первые университеты, появившиеся в XII в. в Париже, Болонье, а в XIII в. в Падуе, Оксфорде, Кембридже, Неаполе, Риме и т.д. Наиболее значительным вкладом европейских учёных в первой половине 2-го тысячелетия н. э. является формирование основных понятий механики (скорость, ускорение, сила и т.п.), построение функций типа $y = x^a$, a - любое действительное число, а также развитие логических форм мышления (в рамках схоластических учений). Кроме того, европейским художникам эпохи Возрождения удалось установить эмпирическим путем ряд законов перспективы (они относятся к области проективной геометрии). Среди этих художников и учёных особо выделялся Леонардо да Винчи (1452-1519 гг.).

Начиная со второй половины 2-го тысячелетия н.э. европейские учёные, инженеры, изобретатели внесли наибольший вклад в развитие человеческой цивилизации. В XVI в. были, в частности, решены алгебраические уравнения 3 и 4-ой степеней, были введены комплексные числа. У. Гильберт (1544-1603 гг., англ., физик) впервые использовал метод физического моделирования магнитного поля Земли, а Симон Стевин (1548-1620 г.г, нидерл. физик, матем. и инженер) использовал для доказательства закона равновесия тела, опирающегося на наклонную плоскость, невозможность существования вечного движения.

В XVII в. было создано интегральное и дифференциальное исчисление, заложены основы аналитической геометрии, сформулированы законы Кеплера, построено здание классической механики, введены понятия рядов, бесконечных произведений, цепных дробей, определены логарифмические и показательные функции, созданы первые элементы теории дифференциальных уравнений, сформулированы первые теоремы проективной геометрии.

В XVIII в. чрезвычайно сильно были разработаны аналитические методы, а также введены двукратные, трёхкратные и иные интегралы, исследованы многие элементарные и более сложные функции. Кроме этого, в те времена зародилась математическая физика, аналитическая механика, начали усиленно развиваться методы вычислений, зародилась теория функций комплексного переменного.

В XIX в. продолжал усиленно развиваться математический анализ, значительных успехов добились в области проективной и дифференциальной геометрии. В этом же веке были заложены основы современной алгебры, теории дифференциальных уравнений, теории вероятностей. Тогда же было разработано векторное и тензорное исчисление и даны плодотворные применения математических методов к решению физических и инженерных задач. Существенного прогресса в XIX в. добились в области теории чисел и построения более строгих и общих математических теорий, что позволило сразу охватывать и анализировать целые классы математических объектов. Это обстоятельство существенно расширило область применения математики, ее эффективность и гибкость.

В XVIII-XIX вв. математика в значительной мере абстрагировалась от своих истоков, что дало возможность конструировать математические объекты и развивать теории, которые сыграли неоценимую роль, в частности, в разработке физических теорий (термодинамики, статистической механики, квантовой механики, общей теории относительности). Математики в XIX и особенно в XX вв. исследовали не только количественные характеристики различных объектов, но и изучали качественные их стороны и свойства.

В XX в. математические исследования отличались уже весьма высокой степенью абстракции, широко использовались, при моделировании разнообразных процессов и применялись при проведении качественного и количественного анализа реальных технических конструкций. Математика в XX в. стала неотъемлемой частью не только науки, но и технического прогресса. Без использования ее методов невозможно решить практически ни одну сложную техническую проблему, строить физические теории, объясняющие поведение тех или иных физических объектов, явлений, процессов. Более того, без употребления образов, символов, языка, математических конструкций, методов вычислений, теорем и т.п., которые созданы и доказаны в недрах математики, по сути невозможно объяснить закономерности окружающего мира, фиксировать информацию, проводить анализ свойств объектов и делать правильные выводы о их свойствах, а также нельзя надеяться на реализацию наукоемких технических проектов.

Итак, человеческий интеллект, который является продуктом развития человечества в течение многих и многих тысячелетий, стал огромной движущей силой, развивающей человеческое сообщество. Наряду с другими науками математика играет в этом процессе не последнюю роль.

§ 2. Элементарные понятия теории множеств.

Элементарные понятия интуитивной («наивной») теории множеств. Операции над множествами. Диаграммы эйлера-венна. Примеры множеств и доказательств тождеств теории множеств

Математика - абстрактная наука, которая посредством специальных символов, знаков, образов, умозаключений и т.д. изучает реальные или искусственно построенные объекты, конструкции, а также их совокупности. В XIX в. математики стали в явной форме осознавать, что результаты их труда и теории, созданные ими, имеют гораздо более общий смысл, а область применимости математики гораздо шире по сравнению с исходными постановками задач или целями, которые ставились в начале исследований. Именно абстрактность математических построений позволяет применять математические теории для изучения внешне разнородных объектов, а также объединять совокупности объектов в единое целое по некоторым отвлеченным признакам. Одной из теорий, которая способствовала процессу повышения уровня абстрагирования математических исследований, является теория множеств, созданная Г. Кантором (1845-1918 гг.; немец, мат.; род. в С. - Петербурге) в XIX веке.

Определение 1.1. Множество образуется из элементов, обладающих некоторыми свойствами и находящимися в некоторых отношениях между собой или с элементами других множеств.

Существенным моментом канторовского абстрактного понимания множества является то, что собрание, совокупность предметов, объектов само рассматривается как один предмет, объект, т.е. мыслится как ***единое*** *целое.* Основной упор в нем делается не на отдельные предметы, а на их собрания, совокупности. В обычном разговорном языке аналогами понятия множества являются слова "стая", "компания", "стадо" и т.п.

Замечание 1.1. Данное выше определение множества не накладывает ограничений на природу предметов, элементов, входящих в множество.

Со времён Г. Кантора под множеством стали понимать (в подавляющем числе случаев) нечто ***актуально данное*** (даже если эти множества трудно обозреть или представить). Примеров множеств, которые согласуются с данными выше "определениями" (дать строгое определение множества весьма сложно, ибо это по сути неопределяемое понятие) можно привести довольно много. Таковыми являются, в частности, множества натуральных чисел, целых, рациональных и действительных чисел. Они обозначаются буквами N, Z, Q, R.

Для обозначения множества используют фигурные скобки {...}. Если элементы множества можно перечислить или задать способ, алгоритм их перечисления, то все элементы множества записывают внутри этих скобок. Например, $N = \{1,2,3,\dots\}$. Множествами являются, например, следующие совокупности: $\{1,5,6\}$; $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, где n - натуральное число; все люди, живущие в данный момент на Земле; все студенты, сидящие в этой аудитории; все звезды, видимые невооруженным глазом. Множества будем обычно обозначать прописными буквами какого-либо алфавита. Элементы множеств, из которых они состоят, будем обозначать строчными буквами.

Пусть A - множество. Тогда элементы этого множества будем обозначать, например, таким образом: a, a_1, a_2 и т.п. Для обозначения факта вхождения, принадлежности элемента a множеству A используют знак $\in$ и пишут $a \in A$. Если a не является элементом A, то пишут $a \overline{\in} A$ или $a \notin A$. Запись $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ означает, что $a_1 \in A, \dots, a_n \in A$. Если множество A состоит только из элементов $a_1, a_2, \dots, a_n$, то пишут $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

Важнейшим понятием в математике является понятие ***равенства***.

Определение 1.2. Два множества равны в том и только в том случае, когда они состоят из одних и тех же элементов.

Равенство двух множеств X и Y обозначают посредством соотношения $X = Y$, а неравенство $X \neq Y$. Обозначение множества посредством фигурных скобок, удобное для явного задания множеств, которые составлены из небольшого числа элементов, легко различимых, весьма неудобно для задания множеств с большим числом элементов и практически неприменимо для бесконечных множеств, имеющих бесконечно много элементов. Для обозначения множеств в этом случае тоже используют фигурные скобки, но внутрь их ставят некоторое высказывание, предложение $P(x)$, которое может быть либо истинным либо ложным. Точнее говоря множество X обозначают так $\{x\backslash$. При этом данная запись читается следующим образом: X - множество всех таких x, что $P(x)$ - истинное высказывание. Предложение, утверждение $P(x)$ определяет некоторое ***свойство*** элементов множества X. Для обозначения множеств используют и такие записи $\{x \setminus x\in X$ *и* $P(x)\} = \{x\in X \setminus P(x)\}$. Эта запись означает, что в качестве элементов множества $\{x\in X \setminus P(x)\}$ берутся все $x \in X$, которые обладают свойством $P(x)$.

В теории множеств, кроме отношений $\in$ и $=$, используется еще и несколько других отношений между множествами.

Определение 1.3. Пусть A и B - множества. Будем говорить, что A ***включено*** (содержится) в B и писать $A \in B$ (или $A \subseteq B$), если каждый элемент множества A принадлежит B. Множество A называется подмножеством B. Обозначение $B\supset A$ эквивалентно $A\subset B$. Если же множество А не содержится в множестве В, т. е. существует объект, принадлежащий А, но не принадлежащий В, то пишут $A \not\subset B$.

Определение 1.4. Будем говорить, что A ***строго включено*** в B или A - истинное подмножество B, если $A\subset B$ (или $A\subseteq B$), но $A\neq B$.

Теорема 1.1. Если $A\subset B$, и $B\subset A$, то $A=B$.

Доказательство. Из $A\subset B$, следует, что любой элемент множества A принадлежит B. С другой стороны, из $B\subset A$ следует, что любой элемент множества B принадлежит A. Поэтому любой элемент, не принадлежащий A не принадлежит B. Отсюда следует, что $A = B$. Теорема доказана.

Замечание 1.2. Отношения принадлежности и включения различны.

Например, хотя $X \subset X\left(X \subseteq X\right)$, имеет место соотношение $X\notin X$.

Определение 1.5. Множество, которое не имеет элементов, называется пустым множеством и обозначается через $\varnothing$.

Замечание 1.3. Пустое множество является подмножеством любого множества.

Действительно, отношение $\varnothing \subset A$ означает, что из $x\in\varnothing$ следует $x\in A$.

Хотя элементов, принадлежащих множеству $\varnothing$, нет, но требование, чтобы любой элемент множества $\varnothing$ принадлежал A, нужно считать выполненным; оно, во всяком случае, не нарушается. Нарушением было бы существование такого элемента x, что $x \in \varnothing$ и $x \notin A$; но именно потому, что не существует объекта, принадлежащего $\varnothing$, этого быть не может. Таким образом, для любого множества A имеет место $\varnothing \subset A$.

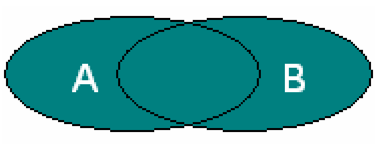
Образовывать новые множества из уже имеющихся можно посредством операций над множествами.

Определение 1.6. Под ***объединением (соединением, суммой)*** $A \bigcup B$ (или $B \bigcap A$) множеств A и B понимается множество всех элементов, которые являются элементами множества A и B, т. $A \bigcup B = \{x \setminus x \in A$ или $x \in B\}$ (слово "или" имеет неисключающий смысл).

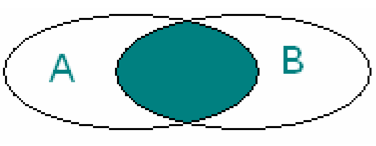
Определение 1.7. Под ***пересечением*** (произведением) $A \bigcap B$ (или $B \bigcap A$) множеств A и B будем понимать множество всех элементов, являющихся элементами обоих множеств A и B, т.е. $A \bigcap B = \{x \setminus x \in A$ и $x \in B\}$.

Определение 1.8. Под абсолютным дополнением множества A (оно обозначается через $\overline{A}$) понимают множество $\{x \setminus x \notin A\}$, Относительным дополнением (или ***разностью*** множеств X и A) называется множество $X \bigcap \overline{A}$ и обозначается через $X \setminus A$ (или X-A).

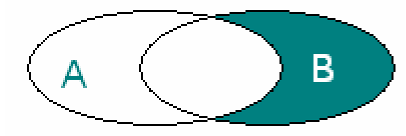
Смысл операций над множествами становится очевидным, если воспользоваться диаграммами Эйлера-Венна, которые приведены ниже в серии рисунков 1.1.



$A \bigcup B$



$A \bigcap B$



B/A

Рис. 1.1. Диаграммы Эйлера-Венна.

Операции над множествами обладают рядом замечательных свойств, некоторые из которых приведены ниже.

Теорема 1.2. Для любых множеств A, B, C справедливы следующие тождества:

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C, \qquad A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C, \qquad (1.1)$$

$$A\cup B=B\cup A, \qquad A\cap B=B\cap A, \qquad (1.2)$$

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C), \qquad A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C), \qquad (1.3)$$

$$A\cup\varnothing=A, \qquad A\cap U=A, \qquad (1.4)$$

$$A\cup\overline{A}=U, \qquad A\cap\overline{A}=\varnothing \qquad (1.5)$$

где U - универсальное множество, включающее в себя все множества A, B, C и т.п. Первая строчка тождеств называется законами ***ассоциативности,*** вторая - законами коммутативности, а третья - законами ***дистрибутивности***.

Данные тождества, а также другие тождества, нетрудно доказать с использованием определений равенства множеств и операций над множествами. Их также наглядно можно проиллюстрировать, если использовать диаграммы Эйлера-Венна.

Докажем для примера только первое из тождеств (1.1) и тождество (1.2). Справедливость тождеств (1.2) сразу следует из определений операций $\cup$ и $\cap$, ибо одновременные замены A на B и B на A не приводят к изменениям множеств $A\cup B$ и $A\cap B$.

Докажем теперь справедливость тождества $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$.

Из определения операции $\bigcup$ вытекает, что $B \subset B \cup C$. Следовательно, заменив в множестве $A \bigcup B$ множество B на $B \bigcup C$, мы не можем получить множество, которое не содержит хотя бы одного элемента из множества $A \bigcup B$. Поэтому имеет место $A \bigcup B \subset A \bigcup (B \bigcup C)$. С другой стороны, из $C \subset B \bigcup C$ и $B \bigcup C \subset A \bigcup (B \bigcup C)$ следует, что $C \subset A \bigcup (B \bigcup C)$. В свою очередь, из справедливости $A \bigcup B \subset A \bigcup (B \bigcup C)$ и $C \subset A \bigcup (B \bigcup C)$ следует верность $(A \bigcup B) \bigcup C \subset A \bigcup (B \bigcup C)$. Данное соотношение справедливо для любых множеств *A, B, C*. Поэтому, заменяя *A* на С, а *C* на *A*, получаем, что $(C \bigcup B) \bigcup A \subset C \bigcup (B \bigcup A)$. Но и $(C \bigcup B) \bigcup A \subset A \bigcup (B \bigcup C)$ и $C \bigcup (B \bigcup A) = (A \bigcup B) \bigcup C$. С учетом этих равенств и предыдущего соотношения получим, что $A \bigcup (B \bigcup C) = (A \bigcup B) \bigcup C$. Наконец, из верности соотношений $(A \bigcup B) \bigcup C \subset A \bigcup (B \bigcup C)$ и $A \bigcup (B \bigcup C) = (A \bigcup B) \bigcup C$ и теоремы 1.1 следует справедливость первого из тождеств (1.1).

Замечание 1.4. Множество, образованное из всех подмножеств любого непустого множества *M*, вместе с определенными выше операциями $\bigcup, \bigcap, \backslash$ и отношением включения (строгого или нет), фиксируемого символами $\subset, \subseteq, \supset, \supseteq$, образует специфическую алгебру множеств. Эта алгебра существенно отличается по своим свойствам, например, от алгебраических свойств обычных вещественных чисел.

§ 3. Декартовы произведения. Отношения

Декартовы произведения. Отношения, их классификация, примеры отношений; применения отношения эквивалентности

Одним из наиболее общих и важных математических понятий является "отношение", которое используется для обозначения, "описания", какой-либо связи между объектами, предметами, самими понятиями и т.п. При определении понятия отношения исходят из представления о множествах упорядоченных пар, троек и т.д.

Определение 1.9. Пусть X и Y- множества, а $\{x,y\}$ - множество, состоящее из двух элементов $x \in X$, $y \in Y$. Под упорядоченной парой будем понимать множество $(x,y) = \{\{x\},\{x,y\}\}$, в котором указано, какой из элементов считается первым, а другой - вторым (x - первый элемент).

Определение 1.10. Упорядоченной тройкой элементов, предметов $x, y, z (x \in X, y \in Y, z \in Z)$ называется множество $\{(x,y,z)\}$, в котором x-первый элемент, y - второй, а z-третий.

Определение 1.11. Упорядоченной n-кой называется множество $\{(a_1, a_2, ..., a_n)\}$, где $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, ..., a_n \in A_n$ причём a_1 - первый элемент, a_2 - второй,..., a_n - n-ый элемент. При этом обычно фигурные скобки удаляются из обозначения n-и, т.е. пишут $(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Определение 1.12. Декартовым (прямым) произведением $A \times B$ будем называть множество, состоящее из всех упорядоченных пар вида (a,b), где $a \in A, b \in B$.

Определение 1.13. Бинарным отношением ρ- будем называть множество упорядоченных пар $(x, y)(x \in X, y \in Y)$, которое является подмножеством множества $A \times B$.

Выражения $(x, y) \in \rho$ и $x\rho y$ считаются ***равноценными.*** При этом говорят, что x находится в отношении ρ к y в том и только в том случае, когда $x\rho y$.

Примерами отношений являются следующие: $x = y$, $x<y$, $x>y$, $x = y$, отношение подобия. Если $X=Y$ то отношение $\rho \subset X \times X$ называется бинарным отношением, заданным на множестве X.

Определение 1.14. Отношение σ называется менее общим, чем отношение τ, а τ- более общим, чем σ, если для любых элементов a и b из $a\sigma b$ следует $a\tau b$.

Например, на множестве всех фигур на плоскости можно определить отношения равенства и подобия. Так как равные фигуры всегда подобны, то отношение равенства является менее общим, чем отношение подобия.

Определение 1.15. Проекцией элемента $c=(a,b)\in A\times B$, где $a\in A,b\in B$, на множество A будем называть элемент a. Если $M\subset A\times B$, то проекцией M на A будем называть множество тех элементов из A, которые являются проекциями элементов из M на A.

Определение 1.16. Сечением $x=a$ множества M называется множество элементов $y\in B$, для которых $(a,y)\in M$.

Пусть теперь $A=B$. В этом случае, как уже было отмечено выше, будем говорить, что отношения заданы на множестве A.

Определение 1.17. Отношение σ называется рефлексивным, если для любого элемента $a\in A$ имеет место $a\sigma\ a$.

Примерами рефлексивных отношений являются равенство отрезков, подобие фигур, включение $\subset$.

Определение 1.18. Отношение σ называется симметричным, если для любых $a,b\in A$ из $a\sigma b$ следует $b\sigma a$.

Примерами симметричных отношений являются перпендикулярность, параллельность прямых и подобие фигур.

Определение 1.19. Отношение σ называется транзитивным, если для любых $a,b\in A$ из $a\sigma b$ следует $b\sigma a$.

Примерами транзитивных отношений являются отношения равенства отрезков, подобия фигур, отношение "меньше" для чисел.

Определение 1.20. Отношение σ называется связным, если для любых различных элементов $a,b\in A$ имеет место по крайней мере одно из отношений $a\sigma b$ и $b\sigma a$. Если данные условия не выполняются, то отношение называется несвязным. Например, отношение "левее" связно, а отношение равенства отрезков несвязно.

Определение 1.21. Отношение ρ, заданное на множестве *X*, называется отношением эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Это отношение зачастую обозначают знаком ~.

Определение 1.22. Разбиением χ множества *A* называют совокупность множеств $A_1,...,A_r$, любые два из которых не имеют общих элементов и которые удовлетворяют соотношению $A = A_1 \cup ... \cup A_r = \bigcup_{i=1}^{r} A_i$.

Замечание 1.5. Отношение эквивалентности ρ, заданное на множестве *A* ***разбивает*** его на классы эквивалентности $A_1,...,A_r$. Все элементы любого из множеств A_k эквивалентны друг другу (находятся в отношении ρ друг к другу) и выполняются соотношения $A = \bigcup_{i=1}^{r} A_i$, $A_m \cap A_s = \varnothing$ для любых $m \neq s \left(m, s = \overline{1, r}\right)$.

Замечание 1.6. Тождество (отношение тождества) представляет собой предельный случай отношения эквивалентности, т.к. единственным элементом, равным какому-либо данному элементу, является этот самый элемент. Разбиение множества, определяемое отношением тождества, есть самое полное разбиение. Класс эквивалентности, порождаемый каким-либо элементом, состоит из одного этого элемента.

Однако, чтобы два элемента были ρ - эквивалентны, они должны быть сходны только ***в одном***, а именно находиться между собой в отношении ρ. Класс ρ-эквивалентности состоит из всех элементов, которые ***неразличимы*** с точки зрения отношения ρ. Следовательно, произвольное отношение эквивалентности на множестве *A* определяет на *A* ***обобщённую форму равенства***. С этой точки зрения все элементы одного класса эквивалентности можно отождествить, т.е. приписать всем его элементам ***одно и то же свойство***.

Очень важной областью применения отношений эквивалентности является ***формализация*** математических и иных понятий. Эта формализация носит название определений через абстракцию. Суть этой процедуры состоит в определении понятия как совокупности (множества) всех предметов, объектов и т.п., обладающих каким-либо ***свойством***, характеризующим это понятие.

Например, понятие ***направления*** определяется как класс эквивалентности, состоящий из параллельных между собой прямых. Понятие ***геометрической формы*** определяется как класс эквивалентности, связанный с отношением подобия.

§ 4. Функции одной и нескольких переменных. Последовательности

Функции (отображения), их классификация. Композиция и обращение функций. Способы задания функций одной и нескольких переменных. Последовательности (в частности, числовые). Понятие о метрическом пространстве.

Функция, отображение, соответствие, оператор, преобразование наряду с понятиями множества, отношения являются одним из наиболее важных математических понятий. В зависимости от контекста эти перемены могут использоваться как синонимы, так и в них может быть вложен различный смысл.

Определение 1.23. Отношение $\sigma \subset A \times B$, где A и B - множества, называется функциональным, если для любых $x \in A$ сечение $\sigma(x)$ отношения σ, то x содержит не более одного элемента (или один и только один).

Напомним, что под сечением $x = a$ множества $M \subset A \times B$ называется множества тех элементов из B, для которых $(a, y) \in M$ (множество же $A \times B$ состоит из всех упорядоченных пар (x, y), где $x \in A$, а $y \in B$). Отметим еще, что именно подмножество M и задает отношение σ.

Определение 1.24. Если сечение отношения σ по любому элементу из A содержит один и только один элемент (т.е. оно не пусто), то функциональное отношение σ называется всюду определенным.

Определение 1.25. Отношение σ^{-1} (обратное к σ) между элементами $b \in B$ и $a \in A$ имеет место тогда и только тогда, когда имеет место $a\sigma b$.

Примерами обратных друг к другу отношений являются $<$ и $>$, $\subset$ и $\supset$.

Определение 1.26. Если обратное отношение σ^{-1} к σ также функционально, то отношение σ также функционально, то отношение σ называется взаимнооднозначным.

Определение 1.27. Любое функциональное соотношение (взаимнооднозначное или нет) определяет функцию (отображение) f, связанную с этим отношением. Сечение $\sigma(x)$ (т.е. все $y \in B$, для которых $(x, y) \subset M$ или имеет место $x\sigma y$) множества M (функционального отношения) по $x \in A$ называют образом аргумента x для функции f и обозначают через $y = f(x)$ и называют значением функции. Элемент x называют переменной или аргументом функции $f(x)$.

Определение 1.28. Сечение $\sigma^{-1}(y)$обратного отношения σ^{-1} по $y \in B$ называют прообразом y для функции f.

Определение 1.29. Множество всех $x \in A$ таких, что существует $f(x)$ (т.е. $\sigma(x)$ не пусто), называется областью определения функции, связанной с функциональным отношением σ.

Если функция f определена всюду, т.е. ее область определения совпадает с А, то говорят, что f - отображение множества А в В и пишут $f: A \to B$ или $A \xrightarrow{f} B$.

Следует отметить, что функцию (отображение) f можно трактовать как закон, правило, алгоритм и т.д., согласно которому любому элементу $x \in A$ можно сопоставить единственный элемент $y \in B$.

Определение 1.30. Под равными функциями f и g понимают функции, имеющие одинаковые области определения и удовлетворяющие условию $f(x) = g(x)$ для любого x из этой области.

Определение 1.31. Множество $f(A)$ всех значений $f(x) \in B$, когда $x \in A$, называется образом множества А.

Определение 1.32. Пусть образ $f(A)$ равен В. Тогда говорят, что имеет место отображение А на В или f - сюръективное отображение.

Определение 1.33. Если f - функция, связанная с функциональным взаимно-однозначным отношением σ, то функция, связанная с σ^{-1}, обозначается f^{-1}. В этом случае f называется инъективной функцией (отображением), а f^{-1} - обратной функцией.

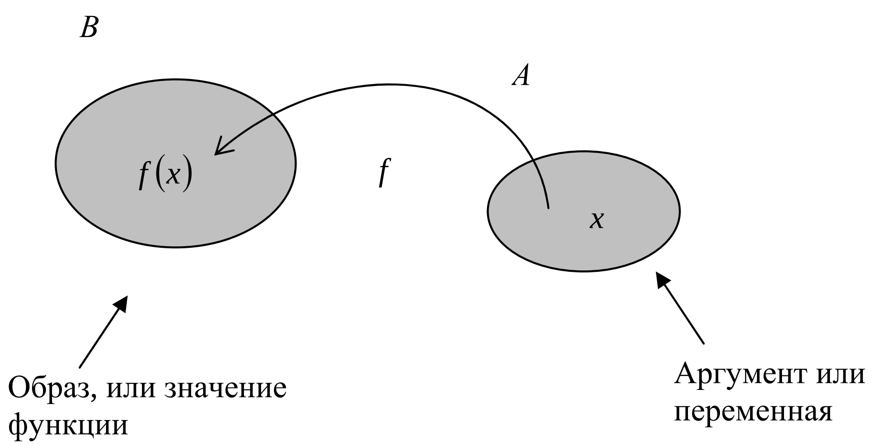
Отметим, что иньективная функция $f: A \to B$ называется также вложением. Для иньективной функции (отображения) из равенства $f(x) = f(y)$ следует, что $x = y$ $(x, y \in A)$.

Определение 1.34. Биективными (взаимно однозначными) отображениями или биекциями называют отображения одновременно сюръективные и инъективные. Биекция обозначается так $f: A \leftrightarrow B$. При этом множества A и B называют равномощными.

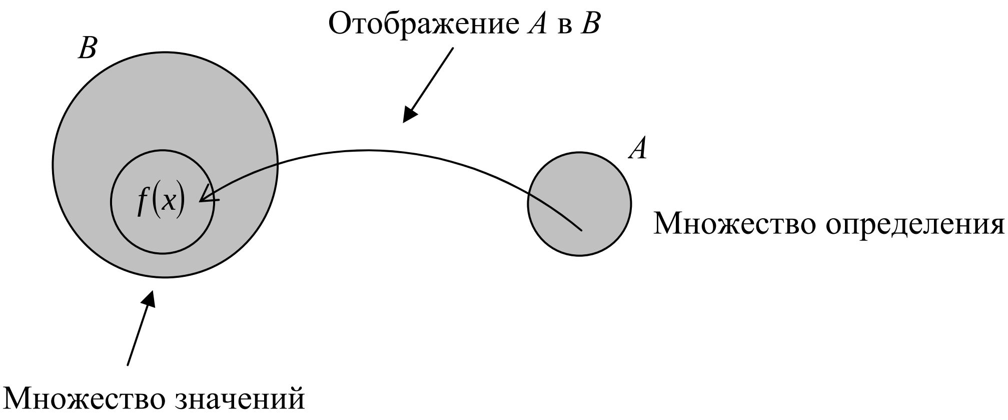
Определение 1.35. Если существует биективное отображение множества A на множество $N = \{1,2,3,...\}$, то А называется счетным множеством.

Смысл основных определений, данных выше пояснен на рисунках 1.5.

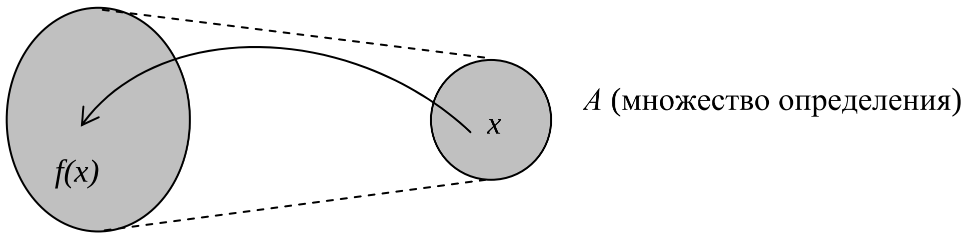
a)



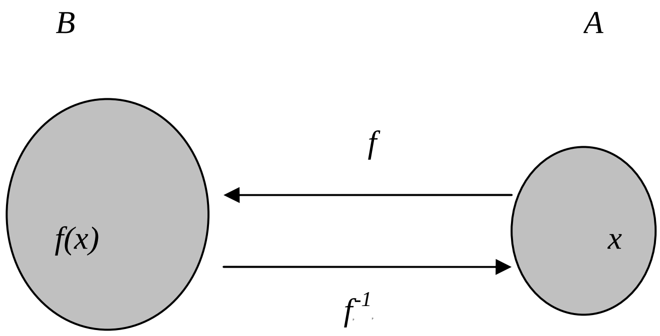
b)



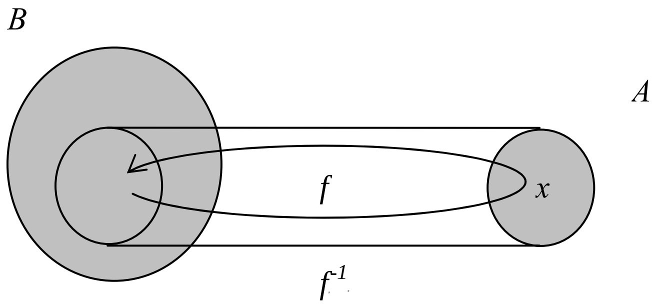
c) Отображение A ***на*** B, или сюръективное отображение B (множество значений)



d) f – инъективная функция, f^{-1} - обратная функция.



e) Инъективное отображение.



f) Биективное отображение

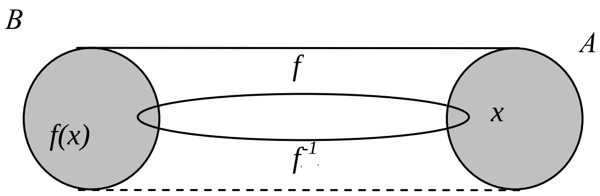


Рис. 2.1. Типы отображений

Определение 1.36. Пусть $y = f(x)$ - функция, определенная на множестве A со значениями в множестве B, а $z = g(y)$ - функция, определенная на B со значениями на множестве C. Если для любого $x \in A$ называется такое $z \in C$, что $z = g(f(x)) = (gof)(x)$, то полученная таким образом функция, определенная на A со значениями в C, называется композицией (или суперпозицией) функцией g и f и обозначается через $fog = fg$ и т.п.

Частным случаем этого определения является следующее: если $f : A \to B$, а $g : B \to C$, то $gf : A \to C$.

Отметим, что под обращением функций понимается отыскание обратных функций по заданным функциям.

Функции могут задаваться различными способами. В частности, их можно задавать явно в виде аналитических выражений и таблиц. Родственным к явному заданию функции с помощью определенных алгоритмов получения y по известному x. С другой стороны функции можно задавать неявным образом. Одним из важных способов неявного задания функций является задание их в виде решения (решений) уравнения (уравнений) того или иного типов.

В математике часто пользуются переменными, которые называются индексами. Пусть f – функция, определенная на множестве I индексов. Если $i \in I$, то соответствующее значение функции $f(i)$ обозначается через f_i.

Определение 1.37. Рассмотрим множество B, в котором функция f принимает свои значения. Под семейством элементов в B, занумерованных посредством I, понимают отображение $f : I \to B$.

Хотя бы семейство есть не что иное как отображение, его удобно представлять себе в виде совокупности объектов из B и записывать в виде символа $\{f_i\}_{i \in I}$.

Определение 1.38. Если множество индексов I совпадает с N или $Z = \{\ldots,-2,1,0,1,2,\ldots\}$, то соответствующая функция называется последовательностью, а каждое ее значение – членом последовательности. Если множество значений функции f является подмножеством множества действительных чисел, то последовательность называется числовой.

Выше было введено понятие функции (отображения) одной переменной (аргумента). По аналогии можно определить и функции нескольких переменных.

Определение 1.39. Под функцией n переменных $(n \geq 1)$ будем понимать функцию, аргументом которой являются упорядоченные n-и. Другими словами, это такая функция $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)(x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots x_n \in A_n)$, которая ставит в соответствие любой $n-e(x_1, x_2, \ldots x_n)$ не более одного элемента $z \in Z$.

Используя понятие отображения можно дать определение одного из важнейших математических понятий, каковым является метрическое пространство.

Определение 1.40. Множеством M называется метрическим пространством, если любой паре (x, y) элементов (точек), где $x, y \in M$, поставлено в соответствие неотрицательное число $\rho(x,y)$, называемое расстоянием (или метрикой пространства M) между этими элементами и справедливы такие свойства:

a) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ для любых $x,y\in M$ (аксиома симметрии);

b) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ тогда и только тогда, когда $x=y$ (аксиома множества);

c) $\rho(x,y)+\rho(y,z)\geq\rho(x,z)$ для любых $x,y,z\in M$ (аксиома треугольника).

Замечание 1.7. В одном и том же множестве можно вводить различные метрики.

Простейшим примером метрического пространства является множество точек прямой, на которой введено обычное понятие длины отрезка (т.е. расстояния между точками прямой). Если A и B – две точки на данной прямой, то функция двух переменных $\rho(A,B)$, играющая роль расстояния, определяется в данном случае посредством равенства $\rho(A,B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|$, $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ - длина вектора $\overrightarrow{AB}$.

§ 5. Алгебраические операции

На основе понятия отображения можно дать строгое определение очень важному математическому понятию, каковым является алгебраическая операция.

Определение 1.41. Рассмотрим декартово произведение $X^n=X\times X\times\ldots\times X$ всех n-к $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ $(A_1=A_2=\ldots=A_n=X)$. Под n - арной внутренней алгебраической операцией в X будем понимать функцию n переменных, определенную в X^n и принимающую значения только в X.

Если n = 2, то алгебраическая операция называется бинарной. Для обозначения этой операции используют различные символы, например, 0, +, -, *, x.

Пусть на множестве M задана бинарная алгебраическая операция, т.е. любой паре $(a,b)\in M*M$ поставлен в соответствие единственный элемент $C\in M$, т.е. $a\circ b=a*b=ab=C$.

Определение 1.42. Бинарная алгебраическая операция * называется <u>ассоциативной</u>, если для любых $a,\ b,\ c \in M$ имеет место равенство $a*(b*c)=(a*b)*c$.

<u>Примерами</u> ассоциативных операций является сложение и умножение чисел. Но операция возведения в степень не является ассоциативной, т.к. в общем случае $\left(a^b\right)^c \neq a^{\left(b^c\right)}$. В частности, $\left(2^3\right)^2 \neq 2^{\left(3^2\right)}$.

Определение 1.43. Бинарная алгебраическая операция * называется коммутативной, если для любых $a,b \in M \quad a*b=b*a$.

Пусть на множестве М заданы две бинарные внутренние алгебраические операции * и $\circ$.

Определение 1.44. Говорят, что операция $\circ$ <u>дистрибутивна</u> относительно операции *, если для любых $x,y,z \in M$ имеют место равенства: $x\circ(y*z)=(x\circ y)*(x\circ z),\ \ (x*y)\circ z=(x\circ z)*(y\circ z)$.

Кроме бинарных алгебраических операций в алгебре рассматриваются обратные алгебраические операции. <u>Примерами</u> таковых для операций сложения и умножения чисел являются операции вычитания и деления.

Пусть на множестве M задана бинарная внутренняя алгебраическая операция $\circ$, т.е. любым $U,r \in M$ поставлен в соответствие единственный элемент $(U\circ r)=b \in M$. Отметим, что элемент $b \in M$ может сопоставляться и другой паре элементов U_1,r_1, т.е. может быть $(U_1\circ r_1)=b$. Можно поставить такую задачу: найти все такие $U,r \in M$, для которых $U\circ r=b$, где b - некоторый фиксированный элемент из M. Данная задача сводится к решению уравнений следующих двух типов: $a\circ x=b, y\circ a=b,$ где x,y - неизвестные элементы из M, а a,b - произвольные фиксированные элементы из M. Если указанные уравнения имеют единственные решения для любых $a,b \in M$, то можно любой паре $(a,b)\in M\times M$ поставить в соответствие однозначно определенные элементы $x,y \in M$. В этом случае исходная операция $\circ$ порождает две внутренние бинарные алгебраические операции, которые называются соответственно правой и левой обратными операциями по отношению к исходной операции $\circ$.

Замечание 1.8. Если исходная алгебраическая операция коммуникативна, то обе обратные операции совпадают друг с другом.

Отметим еще, что в алгебре используется также и внешние алгебраические операции, их примером является операция умножения вектора на число.

§ 6. *Основные понятия исчисления высказываний.*

Сформулируем теперь простейшие понятия исчисления высказываний.

Определение 1.45. В логике под ***высказыванием*** понимают осмысленное утвердительное предложение, т. е. повествовательное предложение, о котором в рамках определённого контекста можно говорить, что оно ***истинно*** или ***ложно***.

Высказывание является термином логики, а предложение - чисто лингвистическое понятие. Приведём несколько примеров высказываний и предложений, которые не являются высказываниями. Высказываниями будут следующие утверждения: «Аист - насекомое»; «Фалес - философ»; «Пётр и Виктор - братья». Предложения: «Сколько стоит автомобиль?», «Идите сюда!» - не являются высказываниями.

В исчислении высказывании можно ***расчленять*** высказывания только до тех пор, пока их составляющие также будут высказываниями. Это ограничивает произвол в выборе расчленения сложных высказываний, которые могут состоять из совокупности ***простых высказываний*** (они не подлежат дальнейшему расчленению). Теперь уточним, что же в исчислении высказываний понимают под простыми высказываниями. В математических и других рассуждениях часто встречаются осмысленные утвердительные предложения, образованные посредством видоизменения других таких предложений с помощью слов "не", "и", "или", "если..., то" и "тогда и только тогда, когда". Эти пять слов или комбинаций слов называются ***сентенциональными связками.*** В исчислении высказываний под ***простыми*** предложениями понимают также высказывания, которые не содержат эти связки или сами по себе усматриваются в качестве ***неразложимых.***

Будем обозначать высказывания прописными буквами.

Определение 1.46. Под высказыванием $\overline{A}$ будем понимать высказывание "не A" т.е. отрицание А.

Определение 1.47. Высказывание *A/\B,* полученное из высказываний *A* и *B* с помощью связки "и", называется ***конъюнкцией*** этих высказываний (символ $\wedge$ - заменитель "и").

Определение 1.48.Высказывание $A \vee B$, образованное из двух высказываний *A, B* посредством связки "или" ($\vee$ имеет смысл "или"), называется ***дизъюнкцией*** этих предложений. Связка "или" здесь употребляется не в разделительном смысле (либо - либо).

Определение 1.49. Высказывание «если *A,* то *B*» называется ***импликацией,*** причём A - посылка, а B - следствие. Такое высказывание символически записывается в виде $A \Rightarrow B$.

Определение 1.50. Высказывание *"A* тогда и только тогда, когда *B"* называется эквиваленцией ***(двойной импликацией)*** и обозначается $A <=> B$.

В исчислении высказываний при использовании символической записи используется ряд условных соглашений, вводящих субординацию для выполнения действий с использованием знаков -, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$. Очередь выполнения логических операций в сложных высказываниях производится в порядке следования написанных выше символов, если нет скобок.

Обратимся теперь к ***истинностным*** значениям высказываний, построенных с использованием связок -, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$. Для краткости "истинность" и ложность" будет обозначаться буквами T и F. Истинностный смысл, который придаётся ложным высказываниям, которые содержат связки, иллюстрируется следующими таблицами:

Таблица 1.1.

Отрицание		Конъюнкция			Дизъюнкция			Импликация			Эквиваленция		
P	$\overline{P}$	P	Q	$P \wedge Q$	P	Q	$P \vee Q$	P	Q	$P \Rightarrow Q$	P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
T	F	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	T	F	F	T	F	T	T	F	F	T	F	F
		F	T	F	F	T	T	F	T	T	F	T	F
		F	F	F	F	F	F	F	F	T	F	F	T

Эти таблицы являются по сути определениями, естественным образом согласованными с пониманием смысла сентенциональных связок.

Рассмотрим непустое множество осмысленных предложений. Расширим это множество с помощью присоединения к нему всех предложений, которые можно образовать, используя многократно и всевозможными способами различные связки. Элементами такого расширенного множества будем называть ***формулами***. Элементы исходного множества называются ***простыми*** или ***элементарными формулами***, а остальные – ***составными формулами***. Простые формулы, входящие в составную, называются ее простыми компонентами.

Пусть простыми компонентами формулы B служат $B_1, B_2, ..., B_n$. Запишем формально формулу B в виде $B = f(B_1, B_2, ..., B_n)$, причем под f следует понимать правило, в соответствии с которым образуется формула B на основе компонент $B_1, B_2, ..., B_n$ и сентенциональных связок. Истинные значения формулы B можно представить в виде таблицы из 2^n строк, каждая из которых изображает одно из возможных распределений T и F, приписываемых компонентам $B_1, B_2, ..., B_n$. Эта таблица имеет следующий вид:

Таблица 1.2.

B_1	B_2	B_3	$\dots$	B_n	B
b_{11}	b_{12}	b_{13}	$\dots$	b_{1n}	b_1
b_{21}	b_{22}	b_{23}	$\dots$	b_{2n}	b_2

…	…	…	…	…	…
b_{n1}	b_{n2}	b_{n3}	…	b_{nn}	b_n

Здесь под символами b_i и b_{ij}, где $i, j = \overline{1, n}$, надо понимать T или F, причем различные строчки, содержащие только символы b_{ij} должны отличаться друг от друга хотя бы одним истинностным значением символов, входящих в них. Заметим, что таблица 1.1. содержит фактически пять таблиц типа 1.2.

Весьма важную роль в логике играют формулы истинное значение которых есть T при любых истинностных значениях приписываемых простым компонентам таких формул. Такие формулы называются тождественно истинными, общезначимыми или тавтологиями. Известными тавтологиями являются следующие:

$$\models P \vee \overline{P} \text{ (закон исключения третьего)} \qquad (1.6)$$

$$\models \overline{\left(P \vee \overline{P}\right)} \text{ (закон противоречия)} \qquad (1.7)$$

$$\models P = \overline{\overline{P}} \Leftrightarrow P \text{ (закон двойного отрицания)} \qquad (1.8)$$

Здесь символ $\models$ является символом общезначимости.

Другим важным понятием логики является понятие ***эквивалентности (равносильности)*** формул. Пусть P и Q формулы, объединение множеств простых компонент которых есть $\{P_1,...,P_m\}$. Тогда будем считать формулу P эквивалентной (равносильной) формуле Q, если они равны как истинностные функции для перечня переменных $P_1,...,P_m$, где каждое P_r входит в качестве простого компонента по меньшей мере в одну из формул P и Q. Следует отметить, что отношение равносильности на каждом множестве формул есть отношение ***эквивалентности***.

§ 7. Элементы исчисления предикатов и теории вывода.

Для решения многих математических проблем приходится использовать целый ряд более сложных построений, разработанных в логике.

Отметим некоторые факты из ***исчисления предикатов***. Исчисление высказываний ограничивается изучением структуры предложений в терминах предложений-компонент, т.е. рассматривает простые предложения как нечто целое. Это сужает возможности использования исчисления высказываний для вывода многих математических результатов, а также для анализа структуры умозаключений. В ***исчислении*** предикатов проводится разделение предложений на составляющие, каковыми являются ***субъекты*** (подлежащие) и ***предикаты*** (сказуемые). Это исчисление обобщает исчисление высказываний. В ***исчислении*** предикатов проводится разделение предложений ***разделение*** предложений на составляющие, каковыми являются ***субъекты*** (подлежащие) и ***предикаты*** (сказуемые). Это исчисление обобщает исчисление высказываний. В исчислении предикатов вводятся высказывания, отнесенные к предметам, объектам. В нем используются три дополнительных логических понятия, которые называются ***термами, предикатами и кванторами***. Это позволяет записывать очень многое из того, что содержится в математических и иных рассуждениях.

Рассмотрим некоторое множество M, которое назовем ***предметной областью***. Строчные буквы 2-й половины латинского алфавита и символы будем применять для обозначения неопределенных элементов множества M. Эти элементы будем называть ***предметными*** переменными (в качестве их могут, в частности, выступать неизвестные корни, решения уравнений, а также переменные величины). Строчные буквы 1-й половины латинского алфавита будем использовать в качестве названий конкретных элементов (предметов, объектов и т.п.) из M (т.е. они будут заменять имена собственные). Такие элементы называются ***индивидуальными предметами*** или ***предметными постоянными***.

Определение 1.51. Предметные переменные и предметные постоянные (в виде собственных имен или описаний), вместе взятые, называются ***термами***.

Замечание 1.9. Грамматическая функция переменных подобна функции местоимений и нарицательных имен в обычном языке, а функция предметных постоянных подобна роли имен собственных.

В грамматике ***предикат*** есть слово (или группа слов) в предложении, которое выражает, что говорится о субъекте. В логике слово «предикат» используют в более общем смысле, чем в грамматике. Поясним сказанное. Пусть $a, b, c, d \in M$. Тогда высказывания об этих элементах (предметах) будем обозначать в виде $P(a), Q(b), K(c, d)$ и т.д., где $P(a)$ и $Q(b)$ - соответственно высказывания о предметах c и d и т.д. Такого рода высказываний символы типа $P(x), Q(y)$ и $K(u, v)$ и т.д. ставят в соответствие предметам x, y и u, v и т.д. значения T (истина) и F (ложь). Однако эти высказывания становятся определенными, когда x, y и u, v и т.д. заменены на фиксированные элементы из M. Выражения $P(a), Q(b), K(c, d)$ представляют собой уже вполне определенные высказывания. Высказывание типа $P(x), Q(y), K(u, v), H(x, y, u)$ и т.д. представляют собой функции, определенные на множествах $M, M \times M, M \times M \times M$ и принимающие значения на множестве $\{T, F\}$. Это означает, что для любых конкретных $x, y, (u, v), (x, y, u)$ высказывания $P(x), Q(y), K(u, v), H(x, y, u)$ становятся истинными или ложными т.е. принимают значения T или F.

Определение 1.52. Неопределенные высказывания называются ***логическими функциями*** или ***предикатами***.

Предикат $P(x)$, зависящий от одной переменной x, позволяет выразить ***свойство*** предмета x. ***Примерами*** свойств являются следующие: «и есть гипербола», «v есть равнобедренный треугольник».

Кроме операций $-, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ алгебры высказываний в исчислении предикатов используют еще две новые операции. Пусть $P(x)$ - предикат, принимающий значение T или F для каждого элемента $x \in M$. Тогда под выражением $\forall x P(x)$ принимается высказывание ***истинное***, когда $P(x)$ истинно для любого x из M, и ***ложное*** в противном случае. Заметим, что это высказывание ***не зависит*** от x.

Определение 1.53. Символ $\forall x$ называется ***квантором всеобщности***.

Рассмотрим теперь некоторый предикат $Q(x)$. Свяжем с ним формулу $\exists x Q(x)$ от x ***не зависит***.

Определение 1.54. Знак $\exists x$ называется ***квантором существования***.

Под областью действия квантора, входящего в некоторую формулу, понимают ту часть формулы, к которой он относится (при этом двусмысленность применением скобок). При отсутствии скобок символы $\forall$ и $\exists$ действуют, как операция - , на ближайший объект формулы.

Ниже приведены ***примеры*** формул в вычислении предикатов.

Пример 1.1. Для любых действительных x имеет место равенство

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \left(\forall x \in R \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1\right).$$

Пример 1.2. Для $\forall x \in R$ справедливо $x < 2^x$.

Пример 1.3. $\exists x \in R$, для которого выполняется равенство $x^2 + x - 2 = 0$.

Рассмотрим еще один пример, иллюстрирующий полезность использования понятий исчисления предикатов.

Пример 1.4. Рассмотрим два определения легкой контрольной работы:

1. Контрольная работа называется легкой, если ***каждую*** задачу решил ***хотя бы один*** ученик.
2. Контрольная работа называется легкой, если ***хотя бы один*** ученик решил ***все*** задачи.
   a) Может ли контрольная работа быть легкой в смысле первого определения и трудной (не легкой) в смысле второго?
   b) Может ли работа быть легкой в смысле второго определения и трудной в смысле первого?

Решение.

a) Да, может. Такой контрольной будет, например, контрольная работа, в которой количество задач равно количеству учеников, причем первый ученик решил только первую задачу, второй – только вторую, третий – только третью и т.д.

b) Нет, не может. Из того, что существует ученик, решивший все задачи, следует, что каждая задача решена хотя бы одним учеником (например, тем, который решил все задачи).

Замечание к задаче. Этот пример показывает, что в высказывании $(\forall x)(\exists y)A(x,y)$.

Обратимся теперь к рассмотрению вопросов, связанных с проблемой ***вывода*** высказываний, утверждений, формул из некоторой совокупности исходных высказываний, утверждений, формул.

Определение 1.55. Будем говорить, что высказывание P ***следует*** из высказывания Q и писать $P \supset Q$ (здесь символ отношения $\supset$ не имеет смысла отношения ***включения*** одного множества в другое), если из справедливости высказывания Q автоматически следует справедливость высказывания P.

Так, **например**, если P есть высказывание «вчера весь день был пасмурным», а Q - «вчера весь день шел дождь и небо было затянуто тучами», то $P \supset Q$. Но $P \supset Q$ не имеет места, ибо высказывание «вчера весь день был пасмурным» может быть верным тогда, когда справедливо утверждение «вчера весь день шел снег и все небо было затянуто тучами», т.е. из справедливости P автоматически не следует верность Q.

Определение 1.56. Установление факта связи двух высказываний P и Q посредством отношения $\supset$ называется ***выводом***. В записи $P \supset Q$ высказывание Q называется условием, а высказывание P - ***заключением или следствием***.

Определение 1.57. Пусть имеет место $P \supset Q$. Тогда зачастую говорят, что P - ***необходимое условие*** истинности Q (ибо для того, чтобы имело место Q, ***необходимо***, чтобы имело место также и P), а Q - ***достаточное условие*** истинности P (ибо для того, чтобы имело место P, вполне достаточно, чтобы было истинным Q).

Определение 1.58. Если $P \supset Q$ и $Q \supset P$, то говорят, что справедливость P представляет собой ***необходимое*** и ***достаточное*** условие того, что Q имеет место (и наоборот, Q доставляет такое же условие для справедливости P).

Отношение $\supset$ между двумя высказывания P и Q (т.е. $P \supset Q$) связано с логической операцией $\Rightarrow$ (импликацией) между этими высказываниями. Но при этом $P \supset Q$ соответствует $Q \Rightarrow P$. Из определения импликации следует, что высказывание $Q \Rightarrow P$ истинно для всех тех и только тех случаях, когда имеет место $P \supset Q$. Следует подчеркнуть, что сложное высказывание $Q \Rightarrow P$ можно образовать для любых высказываний P и Q, причем оно, как и любое другое высказывание, может оказаться ложным или истинным. Однако отношение $P \supset Q$ связывает ***лишь некоторые*** пары высказываний.

Построение ***теории вывода*** (т.е. ***принципов рассуждения***) является одной из наиболее важных задач логики. Разработка теории вывода сводится к получению критериев для решения чисто «техническим» путем вопроса о том, можно ли некоторую цепь рассуждений, основываясь на ее форме, считать правильной. Такая цепочка рассуждений представляет собой конечную последовательность высказываний, приводимых в обоснование утверждения, что самое последнее высказывание в данной последовательности (***заключение***) можно вывести из некоторых начальных высказываний (они называются ***аксиомами*** или ***постулатами***) в соответствии с ***правилами вывода***, установленными в какой-либо логической системе. Исчисления высказываний и предикатов непосредственно используются в теории вывода, так как они дают критерии (вместе с различными конкретными формами их применения) для решения вопроса о том, когда заключительному предложению рассуждения нужно приписать истинное значение T при условии истинности каждой посылки.

Высказывание Q тогда и только тогда является логическим следствием высказывания P, когда $\models P \Rightarrow Q$. В общем случае выяснение вопроса о том, какие высказывания являются логическими следствиями других высказываний (в рамках исчисления высказываний) сводится к выяснению того, какие высказывания представляют собой ***тавтологии***.

Весьма важным вопросом в логике является проблема непротиворечивости.

Определение 1.59. Множество $\{P_1, P_2, ... P_m\}$ высказываний называется ***непротиворечивым*** в исчислении высказываний, если существует по меньшей мере одно такое распределение истинных значений простых компонент, для которого все $P_1, P_2, ... P_m$ принимают одновременно значение T.

Определение 1.60. Множество $\{P_1, P_2, ... P_m\}$ есть ***противоречивое множество***, если при всяком распределении истинных значений простых компонент по меньшей мере одно из $P_k \in \{P_1, P_2, ... P_m\}$ $\left(k = \overline{1, m}\right)$ получает значение F.

Определение 1.61. Противоречием будем называть формулу, которая всегда принимает значение F.

Замечание 1.10. Множество высказываний противоречиво, если из него в качестве логического следствия можно вывести противоречие.

§8. Понятие о математических структурах, моделях.

Определение 1.62. Под математическим моделированием понимают замещение исследования свойств оригинала (физического, химического, экономического и т.д.) изучением математической абстрактной модели, которая фиксирует (отражает) все его существенные стороны, свойства. Математическая модель – образ оригинала в некотором множестве математических символов, понятий, конструкций, операций и т.д.

В рамках «чистой» математики также широко понятие математической структуры, которому придают более узкое содержание по сравнению со смыслом, вложенным в понятие математического моделирования согласно определению 3.18. Математические структуры используются при построении математических моделей реальных объектов, явлений и процессов. Простота и одновременно универсальная приложимость математики в значительной степени связаны с тем, что в ней постоянно приходится сталкиваться с ограниченным набором основных математических структур.

Определение 1.63. Под математической структурой будем понимать множество $S=\{M_1,...,M_r;\sigma_1,...,\sigma_k;\nu_1,...,\nu_p\}$, состоящее из определенного набора исходных множеств $M_1,...,M_r(r\in N)$, совокупности отношений $\sigma_1,...,\sigma_k(k\in N)$ и набора $\nu_1,...,\nu_p(p\in N)$ внутренних и внешних алгебраических операций.

Замечание 1.11. Основные свойства отношений $\sigma_1,...,\sigma_k$ и алгебраических операций $\nu_1,...,\nu_p$, фигурирующих в определении 3.19, задаются аксиомами, которые обязательно должны быть включены в полное описание математической структуры.

Замечание 1.12. Содержание связанной математической структурой S математической теории (например, стереометрии, теории вещественных чисел) составляет изучение дальнейших свойств отношений $\sigma_1,...,\sigma_k$ и алгебраических операций $\nu_1,...,\nu_p$, которые можно вывести из аксиом.

В последующих лекциях будет приведен целый ряд конкретных примеров математических структур, которые широко используются в математике и ее приложениях в физике и технике.

§9. Поле комплексных чисел

Поле комплексных чисел как пример математической структуры. Свойства алгебраических операций над комплексными числами.

Для грамотного введения понятие комплексного числа и поля комплексных чисел следует ввести в рассмотрение одну из важных математических структур, играющую основополагающую роль при описании реального мира.

Определение 1.64. Пусть G - непустое множество, на котором задана бинарная алгебраическая операция «*». Множество G будем называть группой, если выполняются следующие аксиомы (свойства):

1^0. для $\forall a,b,c \in G \quad (a*b)*c = a*(b*c)$ (ассоциативность);

2^0. $\exists e \in G$ такой, что $ea = a$ для $\forall a \in G$ (e - единичный элемент группы);

3^0. для $\forall a \in G \ \exists a^{-1} \in G$, для которого имеет $a^{-1}*a = e$ (a^{-1} - обратный элемент к элементу a);

Замечание 1.13. В группе справедливы равенства $a*e = a$ и $a*a^{-1} = e$ для $\forall a \in G$.

Определение 1.65. Если в группе G для $\forall a,b \in G$ верно равенство $a*b = b*a$, то группа называется абелевой или коммутативной.

Пример 1.5. Множества вещественных и целых чисел по отношению к операцию сложения являются абелевой группой.

Замечание 1.14. Группа является примером математической структуры, позволяющей описывать свойства симметрии.

Более сложным по сравнению с группой являются понятие поля, которое также представляет собой пример важней математической структуры.

Определение 1.66. Пусть P – непустое множество, на котором определены две внутренние бинарные алгебраические операции «+» и «*». Данное множество называется полем, если имеют место следующие аксиомы:

1^0. Множество P – абелева группа по отношению к операции «+»;

2^0. Справедливы законы дистрибутивности

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad (b+c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a;$$

3^0. Множество P содержит хотя бы один элемент, отличный от нуля (под нулем 0 понимается элемент, обладающий свойства $a + 0 = a$ для $\forall a \in P$);

4^0. Множество $P \setminus \{0\}$ является группой по отношению к операции «*», которая является коммутативной.

Замечание 1.15. Множества рациональных и вещественных чисел являются полями.

Перейдем к описанию поля комплексных чисел.

Определение 1.67. Пусть C - множества, элементами которого являются любые пары $(x,y)\in R\times R$, где R - множество вещественных чисел. Допустим, что на C заданы две внутренние бинарные алгебраические операции «+» (сложение) и «*» (умножение), определенные для $\forall(a,b),(c,d)\in C$ с помощью равенств

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d), \tag{1.9}$$

$$(a,b)*(c,d)=(a*c-b*d,a*d+b*c), \tag{1.10}$$

где знаки «+», «-» и «*», стоящие внутри скобок в правых частях (1.9), (1.10) имеют смысл обычных операций сложения, вычитания и умножения вещественных чисел. Тогда множества C является полем, которое называется полем комплексных чисел. При этом любой элемент $(x,y)\in R\times R$ называется комплексным числом.

Замечание 1.16. Операции «+» и «*», определенные равенствами (1.9), (1.10), обладают всеми основными свойствами аналогичных операций сложения и умножения действительных чисел. Эти операции коммутативны и ассоциативны, связаны законом дистрибутивности и для них существуют обратные операции – вычитание и деление (кроме деления на нуль; в качестве нуля в C выступает элемент (0,0)).

Замечание 1.17. Операции вычитания и деления комплексных чисел в C для $\forall a,b,c,d\in R$, задаются соответственно посредством равенств.

$$(a,b)-(c,d)=(a-c,b-d) \tag{1.11}$$

$$\frac{\alpha}{\beta}=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right), \tag{1.12}$$

где $\alpha=(a,b),\beta=(c,d)$ **(для упрощения в (1.12.) опущен знак «*»).**

Замечание 1.18. В качестве единичного элемента e в C выступает элемент $(1,0)\cdot(a,b)=(a,b)\cdot(1,0)=(a,b)$ для $\forall(a,b)\in C$.

Определение 1.68. Два комплексных числа (a,b) и (c,d) называются равными, если $a=c$ и $b=d$.

Замечание 1.19. Множество (поле) комплексных чисел C является математической структурой.

§ 10. Формы представления комплексных чисел

Различные формы представления комплексных чисел и их геометрическая интерпретация. Формула Муавра, Эйлера, извлечение корней их комплексных чисел.

Для лучшего понимания смысла комплексных чисел представляет интерес дать геометрическую интерпретацию поля комплексных чисел. Пусть дана фиксированная точка O на плоскости A. Проведем через нее две взаимно перпендикулярные оси X и Y (оси абсцисс и ординат). Любой точке $P \in A$ в этой системе координат можно сопоставить пару (x, y), где x - абсцисса, а y - ордината точки $P(x, y \in R)$. Если система координат фиксирована, то соответствие пар $(x, y) \in R \times R$ и точек плоскости является биективным.

Однако, на множестве C заданы операции сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел. Поэтому необходимо еще дать геометрическую интерпретацию и этим операциям. Пусть даны две произвольные точки P_1 и P_2 на A, которые имеют в выбранной системе координат соответственно такие координаты: (x_1, y_1) и (x_2, y_2) (x_1 и x_2 - абсциссы точек P_1 и P_2, а y_1 и y_2 - их ординаты). Под «суммой» точек P_1 и P_2 будем понимать точку P_3 с координатами $(x_3, y_3) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, а под «разностью» точек P_1 и P_2 будем подразумевать точку P_4 с координатами $(x_4, y_4) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$. В свою очередь под «умножением» точек P_1 и P_2 будем понимать точку P_5, которая имеет координаты $(x_5, y_5) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_2)$. Если точка P_2 не совпадает с началом координат, то можно определить и «частное» точек P_1 и P_2. При выполнении данного условия под результатом «деления» точки P_1 на P_2 будем подразумевать точку P_6, которая имеет координаты

$(x_6, y_6) = \left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right)$. Описанные выше операции над точками плоскости полностью согласуются с операциями над комплексными числами. В этом нетрудно убедиться, если сравнить выписанные выше соотношения с формулами (1.9 – 1.12).

Покажем теперь, что множество C является расширением (доопределением) множества действительных чисел. Для этого надо доказать, что $R \subset C$ и операции над элементами из C в частных случаях совпадают с операциями над вещественными числами. Рассмотрим все точки (элементы из C) вида $(a,0)$ и поставим им в соответствие действительные числа $a \in R$. Применение к этим точкам (элементам) равенств (1.9) и (1.10) приводит к соотношениям

$$(a,0) + (b,0) = (a + b,0), \tag{1.13}$$

$$(a,0) \cdot (b,0) = (a \cdot b,0), \tag{1.14}$$

т.е. точки $(a,0),(b,0)$ складываются и перемножаются друг с другом так же, как и соответствующие действительные числа.

Замечание 1.20. Множество всех точек, лежащих на оси абсцисс, рассматриваемы как часть множества комплексных чисел, по своим алгебраическим свойствам ничем не отличается от множества действительных чисел, обычным образом изображенного точками прямой линии.

Из сказанного следует, что можно не различать точку $(a,0)$ и действительное число a, т.е. всегда можно полагать $a = (a,0)$. В частности, нуль (0,0) и единица (1,0) в C оказываются обычными действительными числами 0 и 1.

В математике широко используется более компактная запись комплексных чисел по сравнению с приведенной выше.

Определение 1.69. Элемент $(0,1) \in C$ назовем мнимой единицей $i = (0,1)$. При этом $i \cdot i = i^2 = -1$.

Умножим теперь действительное число $b=(b,0)$ на $i=(0,1)$. Учитывая равенство (4.2) получим, что $bi=(b,0)\cdot(0,1)=(0,b)$. Следовательно, число bi лежит на оси ординат и имеет ординату b, причем все точки оси ординат представимы в виде таких произведений.

Пусть теперь $z=(a,b)$ - произвольная точка из C. Из равенства $(a,b)=(a,0)+(0,b)=a+ib$ следует более компактная алгебраическая форма записи комплексного числа, т. е. $z=a+ib$.

Определение 1.70. Число a называется действительной частью $\operatorname{Re} z=a\in R$ комплексного числа $z\in C$. Соответственно число $b=\operatorname{Im} z\in R$ называется мнимой частью комплексного числа $z\in C$. Числа bi, где $b\in R$, называют чисто мнимыми.

Замечание 1.21. Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их вещественные части.

В рамках алгебраических представлений комплексных чисел z_1 и z_2 в виде $z_1=a+bi, z_2=c+di$ с учетом равенства $i^2=-1$ несложно чисто формально осуществить над z_1 и z_2 операции сложения, вычитания, умножения и деления. Имеют место такие равенства:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i, \tag{1.15}$$

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i, \tag{1.16}$$

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i, \tag{1.17}$$

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i. \tag{1.18}$$

Соотношения (1.15) - (1.18) допускают простую геометрическую интерпретацию. Сумме z_1+z_2 соответствует комплексное число, которое сопоставляется точке, которая является концом вектора, полученного при сложении векторов, исходящих из начала координат и заканчивающихся в точках P_1 и P_2, изображающих комплексные числа z_1 и z_2. Несложно понять и смысл разности, если учесть как вычитаются векторы друг из друга.

Для того, чтобы дать геометрическую интерпретацию операций умножения и деления комплексных чисел необходимо ввести ряд новых понятий, описывающих комплексные числа.

Определение 1.71. Модулем $|z|$ комплексного числа $z = x + yi = x + iy$ будем называть арифметический корень $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Определение 1.72. Комплексное число $\bar{z} = x - iy$ называется комплексно сопряженным к числу $\bar{z} = x + iy$.

Определение 1.73. Аргументом $\varphi = \arg z$ комплексного числа z называется угол между положительным направлением оси абсцисс и направлением из начала координат в точку, которая сопоставляется z (знак $\arg z$ определяется так же, как и в тригонометрии). При этом $\arg z$ задается с точностью до $2k\pi$, где k - любое целое число.

Имеют место формулы

$$x = \operatorname{Re} z = |z|\cos\varphi, y = \operatorname{Im} z = |z|\sin\varphi \tag{1.19}$$

С учетом (1.19) получим тригонометрическую форму записи комплексного числа.

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{1.20}$$

Пусть $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Тогда с учетом определения операции умножения, равенства $i^2 = -1$ и элементарных тригонометрических формул получим, что

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \tag{1.21}$$

Из (1.21) следует, что имеют место соотношения

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \arg(z_1 + z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi, \tag{1.22}$$

где $k \in Z = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$.

Аналогичным образом получим

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{|z_2|(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{|z_1|}{|z_2|}\frac{(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2+\sin^2\varphi_2}=$$
$$=\frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)) \tag{1.23}$$

Из (1.23) получим

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg z_1-\arg z_2+2k\pi, \tag{1.24}$$

где $k\in Z$.

Из (1.21), (1.22) следует, что точку, изображающую произведение комплексных чисел z_1 и z_2, можно получить, если вектор, сопоставляемый z_1, повернуть против часовой стрелки на угол $\arg z_2$, а затем «растянуть» его в $|z_2|$ раз. В свою очередь из (1.23), (1.24) видно, что $z_2^{-1}=\dfrac{1}{z_2}=|z_2|^{-1}(\cos(-\varphi_2)+i\sin(-\varphi_2))$. Это означает, что для получения точки P^*, соответствующей z_2^{-1}, надо сначала от точки P_2, сопоставляемой z_2, перейти к точке P_3, лежащей на расстоянии $|z_2|^{-1}$ от нуля на том же луче, котором лежит P_2, а затем перейти к точке, симметричной P_3 относительно действительной оси. Результат же деления z_1 на z_2 можно получить из z_2^{-1} посредством умножения этого комплексного числа на z_1, геометрическая интерпретация которого была дана выше.

Описанные выше свойства операций над комплексными числами позволяют получить еще ряд важных формул. Используя формулу (1.21) и метод математической индукции, можно доказать, что имеет место формула Муавра

$$z^m=|z|^m(\cos m\varphi+i\sin m\varphi), m\in\{0,1,2,\ldots\} \tag{1.25}$$

Замечание 1.22. Формула (4.17) справедлива для любых $m\in Z$.

Определение 1.74. Под символом $r_0=z^{\frac{1}{n}}$ понимают правило, закон, который сопоставляет комплексному число $z\in C$ все то множество комплексных чисел, n-е степени которых равны z. При этом операция, связанная с отысканием функции $\omega = z^{\frac{1}{n}}$, называется извлечением корня n- ой степени из z.

Пусть дано комплексное число $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. В соответствии с формулой Муавра получим с учетом этих формул

$$\omega^n = |\omega|^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{1.26}$$

Приравнивая действительные и мнимые части комплексных чисел в (1.26) придем к таким равенствам:

$$|\omega|^n \cos n\psi = |z|\cos\varphi, |\omega|^n \sin n\psi = |z|\sin\varphi. \tag{1.27}$$

Если возвести эти равенства в квадрат и сложить, то получим, что $|\omega|^{2n} = |z|^2$. Следовательно

$$|\omega| = \sqrt[n]{|z|}. \tag{1.28}$$

Это означает, что модуль любого корня r_0 определяется однозначно по модулю $|z|$. Из (1.27), (1.28) следует, что должны выполняться равенства $\cos n\psi = \cos\varphi, \sin n\psi = \sin\varphi$. Эти соотношения будут выполняться тогда и только тогда, когда $n\psi = \varphi + 2k\pi,$ где $k \in Z$. Итак имеет место

$$\psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, k \in Z \tag{1.29}$$

Замечание 1.23. Извлечение корня n- й степени из любого комплексного числа всегда возможно и дает n различных значений. Все значения корня n- й степени расположены на окружности радиуса $\sqrt[n]{|z|}$ с центром в нуле и делят эту окружность на n равных частей. При этом справедлива формула

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \tag{1.30}$$

где $k \in \{0,1,2,...,n-1\}, n \ge 2$.

Пример 1.5. Найти все корни из единицы.

Единицу можно представить в виде $1 = 1 + 0i = 1(\cos 0 + i \sin 0)$, т.е. можно положить $|1| = 1$ и $\arg 1 = 0$. Тогда в соответствии с формулой (1.30) имеем

$$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, k \in 0,1,2,...,n-1.$$

В дальнейшем при изучении раздела «Числовые последовательности» будет введено понятие числа e
(e - основание натуральных логарифмов), которое является трансцендентным числом $(2 < e < 3)$. В XIII веке Л. Эйлером (1707 – 1783 гг., швейцарский математик и физик) была получена следующая формула Эйлера:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y), \tag{1.31}$$

которая верна для $\forall z \in C$. Из (1.31) видно, что $\left|e^z\right| = e^x$.

Кроме алгебраической и тригонометрической форм записи комплексного числа существует еще экспоненциальная форма его записи. Запишем z в тригонометрической форме $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Из (1.31) следует, что $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$ (это частный случай формулы Эйлера). С другой стороны действительное число $|z|$ с учетом свойств логарифмов можно записать в виде $|z| = e^{\ln|z|}$, где $\ln|z| = \log_e|z|$. Принимая во внимание эти выражения, получим, что комплексное число z представимо в такой экспоненциальной форме:

$$z = e^{\ln|z| + i\varphi} = e^{\ln|z| + \arg z}. \tag{1.32}$$

РАЗДЕЛ 2. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

§1. Матрицы, их классификация и свойства

Ниже будут изложены только базовые понятия линейной алгебры, которая к настоящему времени является одним из наиболее разработанных разделов математики, результаты которого широко используется в приложениях. К тому же в этом разделе будет введен в рассмотрение ряд важных математических структур.

Определение 2.1. Прямоугольную таблицу

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \tag{2.1}$$

где все a_{ij} - числа из поля вещественных или комплексных чисел $(i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n})$; будем называть матрицей размерности $m \times n = [m \times n]$. Если $m = n$, то матрица A называется квадратной, а в противном случае – прямоугольной. Числа, составляющие матрицу, называются ее элементами.

В (2.1) первый индекс в a_{ij} обозначает номер строки, а второй индекс – номер столбца. Матрицы обычно обозначают прописными буквами какого-либо алфавита, а их элементы – строчными буквами.

Замечание 2.1. Кроме символа $[\dots]$ для обозначения матриц используются так же пары круглых или квадратных скобок. Для краткости матрицы зачастую записывают в видах $[a_{ij}], (a_{ij}), \|a_{ij}\|$. Кроме того для матриц используют также обозначение (a_i).

Определение 2.2. Две матрицы A и B называются равными, если их размерности совпадают и $a_{ij} = b_{ij}$ для $\forall i = \overline{1, m}$ и $\forall j = \overline{1, n}$.

Определение 2.3. Прямоугольная матрица, состоящая из одного столбца или одной строки, будем называть соответственно вектор-столбцом или вектор-строкой.

Определение 2.4. Квадратная матрица вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (2.2)$$

называется диагональной. Если $a_{ii} = 1$ для $\forall i = \overline{1,n}$, обозначается буквой E. При этом говорят, что в диагональных матрицах отличны от нуля только элементы, стоящие на <u>главной диагонали</u> матрицы.

Определение 2.5. Квадратная матрица $A = (a_{ij})$ называется верхней треугольной (нижней треугольной), если равны нулю все элементы, расположенные под главной диагональю (над главной диагональю).

Определение 2.6. Матрица A называется комплексной, если среди ее элементов существует хотя бы один элемент, не принадлежащий R (т.е. множеству действительных чисел). Если же все элементы матрицы A вещественны, то A называется вещественной матрицей.

Определение 2.7. Квадратная матрица называется симметричной, если равенство $a_{ij} = a_{ji}$ выполняется для $\forall i, j = \overline{1,n}$.

Определение 2.8. Матрица A называется нулевой, если все ее элементы равны нулю.

Классификация матриц, приведенная выше, является неполной и будет дополнена после введения операции над матрицами и понятия определителя.

Над матрицами можно производить ряд операций.

Определение 2.9. Пусть $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ - матрицы размерности $m \times n$. Тогда под их суммой $C=A+B$ понимают матрицу $C=(c_{ij})$, которая имеет размерность $m \times n$ и при этом для $\forall i=\overline{1,m}$ и $\forall j=\overline{1,n}$ верно равенство $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

Пример 2.1.

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 5 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 6 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 5 \\ 9 & 1 & 5 \\ 4 & 8 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Теорема 2.1. Пусть A, B, C - произвольные матрицы размерности $m \times n$. Тогда имеют место соотношения:

$$A+B=B+A, \tag{2.3}$$

$$(A+B)+C=A+(B+C) \tag{2.4}$$

Справедливость теоремы следует из свойств коммутативности и ассоциативности операции сложения чисел, а так же из определения операции сложения матриц.

Замечание 2.2. Множество всех матриц одной размерности по отношению к операции сложения матриц является абелевой группой.

Определение 2.10. Произведением $C=AB$ двух прямоугольных матриц

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nq} \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

называется матрица

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1q} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mq} \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

У которой элемент, стоящий на пересечении i - ой строки и j - го столбца, равен «произведению» i - ой строки матрицы A на j -ый столбец матрицы B, т.е.

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\left(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,q}\right) \tag{2.7}$$

Пример 2.2.

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 & d_1 & e_1 & f_1 \\ c_2 & d_2 & e_2 & f_2 \\ c_3 & d_3 & e_3 & f_3 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3 & a_1d_1+a_2d_2+a_3d_3 & a_1l_1+a_2l_2+a_3l_3 & a_1f_1+a_2f_2+a_3f_3 \\ b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3 & b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3 & b_1l_1+b_2l_2+b_3l_3 & b_1f_1+b_2f_2+b_3f_3 \end{pmatrix}$$

Замечание 2.3. Операция умножения прямоугольных матриц выполнима лишь в том случае, когда число столбцов в первом сомножителе равно числу строк во втором. Умножение всегда выполнимо для квадратных матриц одной размерности.

Замечание 2.4. Умножение матриц не является коммутативным, т.е. в общем случае $AB\neq BA$.

Пример 2.3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Теорема 2.2. операция умножения матриц является ассоциативной, т.е. для любых трех матриц A,B,C, для которых определены произведения $AB,(AB)C,BC,A(BC)$ имеет место равенство

$$(AB)C=A(BC) \tag{2.8}$$

Теорема 2.3. Если для матриц A,B,C имеют смысл матрицы $A+B,(A+B)C,AC,BC,B+C,A(B+C)$, то имеют место распределительные (дистрибутивные) законы

$$(A+B)C=AC+BC, \tag{2.9}$$

$$A(B+C)=AB+AC\,. \tag{2.10}$$

Операции сложения и умножения матриц являются внутренними алгебраическим операциями. Введем теперь внешнего бинарную алгебраическую операцию, каковой является операция умножения числа на матрицу.

Определение 2.11. Произведением матрицы $A=(a_{ij})(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n})$ на число α называется матрица $B=(b_{ij})=\alpha B$, элементы которой получаются из элементов матрицы A умножением их на число α, т.е.

$$b_{ij}=\alpha a_{ij} \text{ для } \forall i=\overline{1,m} \text{ и } \forall j=\overline{1,n} \tag{2.11}$$

Теорема 2.4. Операция умножения матрицы на число обладает следующими свойствами:

$$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B, (\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A, \tag{2.12}$$

$$(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A), 1A+A$$

При этом матрицы A и B должны иметь одинаковую размерность.

Определение 2.12. Матрицы называются коммутирующими, если $AB=BA$.

Замечание 5.5. Для любой квадратной матрицы A имеет место равенство

$$AE=EA, \tag{2.13}$$

причем единичная матрица E должна иметь ту же размерность, что и матрица A.

Определение 2.13. Пусть $A=(a_{ij})$ - матрица размерности $m\times n$. Матрицу A' (или A^T) будем называть транспонированной к A, если она имеет размерность $m\times n$ и $a'_{rs}=a_{sr}$ для $\forall r=\overline{1,n}$ и $\forall s=\overline{1,m}$.

Определение 2.14. Матрицу $A^*=(a^*{}_{rs})$ будем называть сопряженной к A (размерность A равна $m\times n$), если ее размерность равна $n\times m$ и $a^*{}_{rs}=\overline{a}_{sr}$ для $\forall r=\overline{1,n}$ и $\forall s=\overline{1,m}$ (черта над символом a_{sr} означает операцию комплексного сопряжения).

Определение 2.15. Квадратная матрица A называется эрмитовой, если $A^*=A$.

Пример 2.4.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix}, A'=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример 2.5.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & -1 & 0 \\ 1-i & 0 & 2 \end{pmatrix}, A=A^{*}.$$

§ 2. Определители

Определители, простейшие их свойства и способы вычисления

Выше было введено понятие матрицы и определены алгебраические операции над множеством матриц (а так же множествами матриц и чисел). Ниже введем новое важное понятие (понятие определителя), которое имеет смысл функции, заданной на множестве квадратных матриц. При этом для каждой размерности таких матриц существует своя функция, причем все эти функции, вообще говоря, могут быть связаны друг с другом. Введение определителей позволило расширить круг операций, производимых над матрицами.

Рассмотрим систему двух линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}, \qquad (2.14)$$

коэффициенты которой составляют матрицу $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Непосредственно из (2.14) несложно получить систему

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2 \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21} \end{cases} \qquad (2.15)$$

Допустим, что $\Delta_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. Тогда из (2.15) найдем

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \qquad (2.16)$$

Нетрудно убедиться, что (2.16) удовлетворяет системе (2.14). Знаменатель и числители в (2.16) по простому правилу выражаются через элементы матрицы A и матриц

$$\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{21} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

Действительно знаменатель в (2.16) равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали матрицы A минус произведение элементов второй диагонали матрицы A. Это число называется ***определителем второго порядка*** и равно

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{2.18}$$

С другой стороны числители в (2.16) можно соответственно представить в виде следующих определителей второго порядка:

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{21} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{12} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}. \tag{2.19}$$

С учетом (2.16), (2.17), (2.19) решение системы (2.14) при $\Delta_2 \neq 0$ можно записать в такой форме

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{21} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{2.20}$$

Итак, решение системы (2.14) при $\Delta_2 \neq 0$ компактно представляется посредством отношений определителей 2-го порядка.

Аналогичным образом может быть получено решение системы из 3-х уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{2.21}$$

с матрицей коэффициентов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

Если умножить обе части первого из уравнений (2.21) на число $(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})$, обе части второго уравнения на $a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}$, обе части третьего на $a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}$, а затем сложить все три уравнения, то несложно убедиться в том, что коэффициенты при x_1 и x_2 окажутся равными нулю, т.е. данные неизвестные одновременно исключаются. В итоге получим равенство

$$\begin{gathered} (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32})x_1 = \\ = \Delta_3 x_1 = b_1 a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2 a_{32} - a_{13}a_{22}b_3 - a_{12}b_2 a_{33} - b_1 a_{23}a_{32}. \end{gathered} \tag{2.23}$$

Коэффициент при x_1 в (2.23) называется ***определителем третьего порядка***, соответствующим матрице (2.22). Он записывается в виде следующего символа:

$$\begin{gathered} \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{gathered} \tag{2.24}$$

Правило вычисления определителя Δ_3 является достаточно простым и называется ***правилом треугольника*** или правилом ***Саррюса***. Во-первых, в (2.24) входят произведения только тех элементов из матрицы (2.22), которые входят в различные строки и столбцы. Со знаком плюс берутся произведения тех элементов, которые соединены отрезками прямых, изображенных в левой части рис. 5.1. Соответствующие произведения элементов, которые берутся со знаком минус, указаны в правой части рис. 5.1.

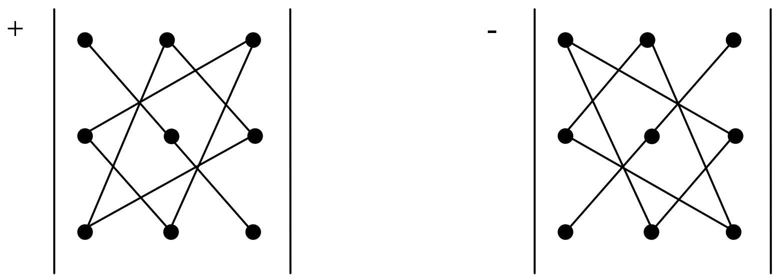


Рис. 5.1. Иллюстрация к правилу Саррюса.

Если $\Delta_3 \neq 0$, то решение системы (5.21) можно записать таким образом

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{21} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_3}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_3}, x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\Delta_3}. \qquad (2.25)$$

Впервые понятия об определителях указанных выше частных типов появилось в конце XVII в. в исследованиях Г.В. Лейбница (1646-1716 гг.; немецкий философ и ученый).

Введем теперь понятие определителя произвольного порядка. Для того, чтобы пояснить, что представляют собой такие определители нужно ввести некоторые понятия и знать некоторые свойства конечных множеств.

Рассмотрим множество M, содержащее n элементов. Все элементы этого множества можно перенумеровать с помощью чисел $1,2,...,n$, т.е. ввести биективное соответствие между множеством M и множеством $\{1,2,...,n\}$. Если мы не интересуемся индивидуальными свойствами элементов, то изучение свойств конечного множества M можно свести к изучению свойств множества $\{1,2,...,n\}$. Следует отметить, что процедура нумерации элементов из M носит субъективный характер, и ее можно произвести и иными способами. При построении теории определителей оказалось весьма важным выяснить степень этого произвола и исследовать взаимосвязи между различными способами нумерации элементов множества M. Изучение этого вопроса фактически сводится к различным вариантам упорядочения элементов множества M или различным способам расположения чисел $1,2,...,n$.

Определение 2.16. Всякое расположение чисел $1,2,...,n$ в виде n-и $(i_1, i_2,..., i_n)$, где все числа $i_1, i_2,...i_n$ попарно различны и принадлежат множеству $\{1,2,...,n\}$, перестановкой из n чисел (или из n символов).

Определение 2.17. Полное количество указанных в определении 2.16 n-к называется числом перестановок.

Теорема 2.5. Число различных перестановок из n символов равно $n! = n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1$ («эн-факториал).

Доказательство. Первый символ i_1 в перестановке $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ можно выбрать из множества $\{1,2,\ldots,n\}$ n способами. После удаления этого символа из множества $\{1,2,\ldots,n\}$ в нем останется $(n-1)$-о число. Следовательно, на место второго символа i_2 можно поставить любое из оставшихся чисел. Таких возможностей имеется $(n-1)$. Поэтому число способов выбора двух первых символов i_1 и i_2 равно $n(n-1)$. Данную процедуру выбора можно продолжить. В итоге получим искомое $n!$ способов построения перестановок из n символов (строгое доказательство этого факта проводится методом математической индукции).

Определение 2.18. Будем говорить, что в перестановке $\{1,2,\ldots,n\}$ числа i_l и i_m ($l, m \in \{1,2,\ldots n\}$ и $l \neq m$) составляет ***инверсию***, если $i_i > i_m$ и i_i стоит в этой перестановке ранее i_m. Перестановка называется ***четной***, если ее символы составляют (в сумме) четное число инверсий, и ***нечетной*** – в противоположном случае.

Пример 2.6. Перестановка $(1,2,\ldots,n)$ будет четной при любом n, так как все элементы в ней расположены в порядке возрастания.

Пример 2.7. Перестановка (451326) содержит 7 инверсий и поэтому является нечетной.

Пример 2.8. Перестановка (83524671) содержит 16 инверсий и поэтому является четной.

Замечание 5.6. При $n \geq 2$ число четных перестановок из n равно числу нечетных, т.е. равно $\frac{1}{2}n!$.

Обобщением определителей второго и третьего порядков (см. формулы (2.18) и (2.24)) является понятие ***определителя*** n-о ***порядка***.

Определение 2.19. Определителем n-о порядка $|A| = \det A$, соответствующим квадратной матрице $A = (a_{ij})$, где $i, j = \overline{1,n}$, будем называть алгебраическую сумму

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(i_1, i_2, \dots i_n)} (-1)^{t(i_1, i_2, \dots, i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}, \tag{2.26}$$

в которую входят всевозможные произведения n элементов матрицы A, взятых по одному из каждой строки и из каждого столбца. При этом под $t(i_1, i_2, \dots, i_n)$ понимается полное число инверсий, которое соответствует перестановке $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ ($i_1, i_2, \dots, i_n$ - попарно различные числа из множества $\{1, 2, \dots, n\}$). Каждое слагаемое в (2.26) называется членом определителя.

В соответствии с теоремой 2.5. и замечанием 2.6. сумма 2.26. содержит $n!$ членов, причем в ней величина $(-1)^{t(i_1, i_2, \dots, i_n)}$ в $\frac{n!}{2}$ случаях будет иметь знак плюс, а в $\frac{n!}{2}$ случаях – знак минус.

Замечание 2.7. При $n = 2$ и $n = 3$ выражение (2.26) совпадает соответственно с формулами (2.18) и (2.24).

Рассмотрим теперь множество B_n, составленное из всех квадратных матриц размерности $n \times n$. Тогда соотношение (2.24) сопоставляет каждой матрице $A \in B_n$ комплексное (или вещественное) число. Следовательно определитель n-о порядка можно трактовать как функцию, область определения которой есть множество B_n. При этом множество значений этой функции будет совпадать в общем случае с множеством комплексных чисел. Если рассматривается подмножество $\tilde{B}_n$ множества B_n, которое состоит только из всех вещественных квадратных матриц, то определитель n-о порядка будет представлять собой вещественную функцию, причем областью ее определения будет являться $\tilde{B}_n$. При этом множество ее значений будет совпадать с множество вещественных чисел.

На определитель n-о порядка можно так же смотреть как на функция n^2 переменных, ибо матрица A размерности $n \times n$ содержит n^2 элементов, которые входят в сумма (2.26). Данная функция может быть вещественной или комплексной в зависимости от того, каковы сами элементы матрицы A (т.е. они все вещественные или среди них есть комплексные числа).

Из Определение 2.19 видно, что определитель n-о порядка представляет собой достаточно сложную математическую конструкцию. Кроме того, непосредственное использование определения 2.19 практически непригодно для непосредственного отыскания определителей даже при относительно небольших n (за исключением ситуации, когда $n=2$ или $n=3$). Поэтому будет весьма полезно сформулировать те общие свойства определителей, учет которых существенно упрощает их вычисление.

Теорема 2.6. Определитель n-о порядка для $\forall n \in N$ обладает следующим свойствами:

1. Определители исходной квадратной матрицы A и транспонированной A^T к ней равны друг другу, т.е. $\det A = \det A^T$;
2. Если один определитель получен из другого перестановкой двух строк (или столбцов), то все члены первого определителя будут членами и во втором, но с обратными знаками, т.е. от перестановки двух строк (или столбцов) определитель меняет лишь знак;
3. Если одна из строк (или столбцов) состоит из одних нулей, то определитель равен нулю;
4. Определитель, содержащий две одинаковые строки (или столбца) равен нулю;
5. Если все элементы некоторой строки (столбца) определителя умножить на некоторое число α, то сам определитель умножится на α;
6. Определитель, содержащий две пропорциональные строки, равен нулю;
7. Если все элементы i-й строки определителя представлены в виде сумма двух слагаемых: $a_{ij} = b_j + c_j$, $j = \overline{1,n}$, то определитель равен сумме двух определителей, у которых все строки, кроме i-й, - такие же, как и в

заданном определителе, а i-я строка в одном из слагаемых состоит из элементов $b_1,...,b_n$, а в другом – из элементов $c_1,...,c_n$.

8. Если одна из строк определителя может быть получена посредством умножения некоторого набора других строк на некоторые числа и последующего сложения результатов этого умножения (сложение осуществляется только над числами, стоящими в одних и тех же столбцах), то определитель равен нулю;
9. Определитель не меняется, если к элементам одной из его строк прибавляются соответственные элементы другой строки, умноженные на одно и то же число.

Поскольку величина $n!$ очень быстро растет при увеличении n (например, 3!=6, 4!=24, 5!=120, 6!=720), то формула (2.26) практически никогда не используются в процессе вычислений. Для вычисления определителей применяются специальные вычислительные процедуры, построенные с учетом общих или специфических свойств тех или иных определителей.

Одним из общих способов вычисления определителей является сведение определителей одного порядка к рассмотрению определителей более низкого порядка.

Определение 2.20. Пусть дана квадратная матрица $A=(a_{ij})$. Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя $|A|=\det A$ будем называть определитель матрицы, полученной из A посредством удаления i-й строки и j-о столбца. Миноры M_{ij} - это определители $(n-1)$-о порядка.

Определение 2.21. Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя $\det A$ будем называть величину $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

Теорема 2.7. Определитель $\det A$ n-о порядка для $\forall i=\overline{1,n}$ можно представить в виде

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}A_{is} \qquad (2.27)$$

Представление (2.27) называется разложением определителя по i-й строке.

Формула (2.27) сводит вычисление определителя n-о порядка к отысканию n определителей $(n-1)$-о порядка.

Замечание 2.8. Вычисление ил упрощение определителя $\det A$ с помощью формулы (2.27) достигается в тех случаях, когда хотя бы часть элементов i-й строки определителя обращается в нуль.

Замечание 2.9. С помощью свойства 9 (см. теорему 2.6) можно в любой строке (или столбце) заменить нулями все элементы, кроме одного.

Замечание 2.10. Возможно разложить любой определитель n-о порядка по элементам j-о столбца $\left(j=\overline{1,n}\right)$ с помощью формулы

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{sj}A_{sj} \qquad (2.28)$$

Теорема 2.8. Если A и B - квадратные матрицы одной и той же размерности, то будет справедливо равенство $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

§ 3. *Обратная матрица*

Обратная матрица, теорема существования и единственности

Определение 2.22. Квадратная матрица A называется невырожденной (неособенной), если $\det A \neq 0$. В противном случае матрица A называется вырожденной (особой).

Определение 2.23. Квадратная матрица B называется обратной к квадратной матрице A, если выполняются равенства $BA = AB = E$, причем единичная матрица E имеет ту же размерность, что и матрица A.

Теорема 2.9. Если матрица A является невырожденной, то для нее существует единственная обратная матрица $B = A^{-1}$, которая дается выражения

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}\tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1n}\\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \tilde{a}_{n1} & \tilde{a}_{n2} & \dots & \tilde{a}_{22}\end{pmatrix}, \tag{2.29}$$

где $\tilde{a}_{ij}=A_{ji}$ для $\forall i,j=\overline{1,n}$.

Докажем только единственность. Пусть существуют две различные обратные матрицы B_1 и B_2 для матрицы A. Из определения обратной матрицы следует, что тогда должны выполняться равенства $B_1A=AB_1=E, B_2A=AB_2=E$. Умножим, например, равенство $AB_1=E$ слева на B_2. Тогда получим $B_2(AB_1)=B_2E=B_2$. С другой стороны $B_2(AB_1)=(B_2A)B_1=EB_1=B_1$. Следовательно $B_1=B_2$, что противоречит исходному предположению. Следовательно, может существовать только одна обратная матрица.

Замечание 2.11. Обратная матрица A^{-1}, если она существует, является невырожденной.

Справедливость замечания следует из равенств $\det\left(AA^{-1}\right)=\det E=\det A\det A^{-1}=1$, при получении которых принята во внимание теорема 2.8.

§ 4. Формулы Крамера

Матричный способ решения систем n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными. Формулы Крамера.

Определение 2.24. Системой n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными называют следующую систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{212}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases} \tag{2.30}$$

где $x_1,\dots,x_n$ - искомые величины, а коэффициенты $b_1,\dots,b_n$ и элементы a_{ij} для $\forall i,j=\overline{1,n}$ считаются заданными. При этом предполагается, что искомые и заданные величины являются элементами множеств вещественных или комплексных чисел.

Определение 2.25. Система (2.30) называется совместной ил разрешимой, если существует хотя бы один набор чисел $x_1,\dots,x_n$, для которого все уравнения системы (2.30) обращаются в истинные равенства.

Систему (2.30) можно записать в матричной форме:

$$Ax = b \tag{2.31}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}. \tag{2.32}$$

Определение 2.26. Матрица A называется основной матрицей системы (2.30), а вектор-столбец – вектором-столбцом свободных членов.

Теорема 2.10. Если $\det A \neq 0$, то система (2.30) имеет единственное решение, которое можно представить в следующем виде:

$$x = A^{-1}b\,. \tag{2.33}$$

Доказательство. Из того факта, что $\det A \neq 0$ следует существование обратной матрицы A^{-1} для матрицы A. Если теперь умножить (2.31) слева на A^{-1} и учесть равенство $A^{-1}A = E$, то перейдем к искомому решению (2.33).

Получение решения системы (2.30) посредством формулы (2.33) называется матричным способом решения этой системы. Для отыскания всех элементов (компонент) вектора-столбца x надо найти матрицу A^{-1}. Однако решение (2.33) можно переписать в иной форме, которая позволяет находить любую компоненту $x_1,\dots,x_n$ без отыскания всей обратной матрицы. Для вывода соответствующих формул запишем (6.5) в явной форме:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}. \tag{2.34}$$

Если теперь воспользоваться правилами умножения матриц и умножения числа на матрицу, то несложно получить равенство

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta}\left(A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n\right) \\ \frac{1}{\Delta}\left(A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{n2}b_n\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{1}{\Delta}\left(A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{n1n}b_n\right) \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Из (2.35) с учетом определения равенства матриц и формулы разложения определителя по элементам столбца находим, что имеют место соотношения:

$$x_i = \frac{1}{\Delta}\left(A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \dots + A_{ni}b_n\right) = \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\dots a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1}\dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1}\dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2}\dots a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1}\dots a_{nn} \end{vmatrix}, \quad i = \overline{1,n}. \quad (2.36)$$

Формулы (2.37) называются формулами Крамера (Г. Крамер; 1704 – 1752 г.г.; швейцар. матем.) Заметим, что Г. Крамером в 1750 г. было дано общее определение детерминанта (определителя). Следует подчеркнуть, что непосредственное использование матричного метода решения системы (2.30) и формул Крамера неудобно при достаточно больших n. Вследствие этого в линейной алгебре разработан целый ряд методов, позволяющих более эффективно решать системы линейных алгебраических уравнений. Надо еще обратить внимание на то, что с помощью формул Крамера можно находить при необходимости только отдельные компоненты вектора-столбца x, не отыскивая x целиком.

§ 5. Базис системы векторов

Линейно-координатное пространство R_n. Линейно зависимые и независимые системы векторов в R_n. Понятие о базисе системы векторов.

В данном пункте будет введен ряд важных понятий линейной алгебры, которые будут служить основой для введения такой важной математической структуры как линейное (векторное) пространство.

Пусть P - поле действительных или комплексных чисел. Рассмотрим множество R_n, элементами которого являются всевозможные упорядоченные набора из n чисел из P, т.е. все элементы, принадлежащие R_n, представляют собой n-и. Графически эти n-и можно записывать в виде векторов-строк или векторов-столбцов, которые являются соответственно матрицами размерности $1\times n$ и $n\times 1$. Будем пока для определенности записывать указанные n-и и только в виде векторов-строк и называть их векторами. Итак, рассмотрим множество всех $n-k$ (векторов) вида $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, где все $x_i\in P$ для $\forall i=\overline{1,n}$ (для краткости n-а обозначена символом x. На этом множестве введем внутреннюю бинарную алгебраическую операцию сложения любых двух $n-k$ в соответствии со следующим правилом:

$x+y=(x_1,x_2,...,x_n)+(y_1,y_2,...,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,...,x_n+y_n)(y=(y_1,y_2,...,y_n))$.

Это определение суммы $n-k$ идентично правилу сложения матриц размерности $l\times n$.

Введем также внешнюю алгебраическую операцию умножения чисел из R_n. Эту операцию дадим посредством такого закона: $\alpha(x_1,x_2,...,x_n)=\alpha x=(\alpha x_1,\alpha x_2,...,\alpha x_n)$, где α - любое число из P, а x - любой элемент из R_n. Данная операция является частным случаем операции умножения числа на матрицу.

Введенное выше множество R_n обладает целым рядом свойств, которые имеют весьма общий характер. Множество R_n представляет собой пример важной математической структуры. Используя определения введенных выше операций и свойства чисел из поля P можно доказать, что справедлива

Теорема 2.11. Множество R_n с введенными операциями сложения элементов из R_n и умножения чисел из P на элементы из R_n характеризуются следующим набором свойств:

1. $x + y = y + x$ для $\forall x, y \in R_n$;
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$ для $\forall x, y, z \in R_n$; $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$;
3. существует единственный элемент $0 \in R_n$ такой, что $x + 0 = x$ для $\forall x \in R_n$; ($0 = (0,0,...,0) - n - a$, состоящая из n нулей);
4. для $\forall x \in R_n$ существует единственный противоположный элемент $(-x) \in R_n$ такой, что $x + (-x) = 0$;
5. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ для $\forall \alpha, \beta \in P$ и $\forall x \in R_n$;
6. $lx = x$ для $\forall x \in R_n$ (1 – единичный элемент поля P относительно операции умножения чисел);
7. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ для $\forall \alpha, \beta \in P$ и $\forall x \in R_n$;
8. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ для $\forall \alpha \in P$ и $\forall x, y \in R_n$.

Среди следствий этих свойств нужно отметить такие $(-x) = (-x_1, -x_2, ..., -x_n) = (-1)(x_1, x_2, ..., x_n)$ для $\forall x \in R_n$; $\alpha 0 = \alpha(0,0,...,0) = 0$ для $\forall \alpha \in P$; если $\alpha x = 0$, то либо $\alpha = 0 \in P$ либо $x = 0$. Кроме того, множество R_n обладает еще целым рядом полезных свойств, связанных с понятием размерности. Для разъяснения смысла этого понятия введем некоторые определения.

Определение 2.27. Под системой векторов будем понимать некоторое непустое упорядоченное множество $\{a_1, a_2, ..., a_s\}$, состоящее из векторов множества R_n. Эта система зачастую записывается просто в виде упорядоченного набора элементов (векторов) из R_n. Эта система зачастую записывается просто в виде упорядоченного набора элементов (векторов) из R_n, т.е. в виде $a_1, a_2, ..., a_s$.

Определение 2.28. Система векторов $a_1, a_2, ..., a_s$ называется линейно независимой, если соотношение $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ..., \alpha_s a_s = 0$ может быть справедливым тогда и только тогда, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_s \in P$. Если же данное равенство выполняется для некоторого набора чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$, который содержит хотя бы одно нулевой число из P, то система $a_1, a_2, ..., a_s$ называется линейно зависимой.

Определение 2.29. Подсистемой векторов системы $a_1, a_2, ..., a_s$ будем называть любое упорядоченное подмножество векторов из этой системы.

Определение 2.30. Будем говорить, что вектор $a \in P$ линейно выражается через систему векторов $a_1, a_2, ..., a_s$, если его можно представлять в виде $a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_s a_s$, где $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s \in P$. Если система $a_1, a_2, ..., a_s$ является линейно независимой, то числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$ называются коэффициентами (компонентами) разложения вектора a по системе векторов $a_1, a_2, ..., a_s$.

Определение 2.31. Пусть дана система векторов $a_1, a_2, ..., a_s$ из R_n. Рассмотрим ее всевозможные непустые упорядоченные линейно независимые подсистемы векторов. Выберем среди этих подсистем такие, которые содержат максимальное число векторов. Обозначим это число через r и будем называть рангом системы векторов $a_1, a_2, ..., a_s$. При этом все векторы, входящие в какую-либо линейно независимую подсистему, содержащую r векторов будем называть системой базисных векторов (или базисом) системы $a_1, a_2, ..., a_s$.

Замечание 2.12. Пусть непустая система векторов $a_1, a_2, ..., a_s$ имеет ранг r, а $\vec{a}_{i_1}, \vec{a}_{i_2}, ..., \vec{a}_{i_r}$ - базис данной системы $(i_1, i_2, ..., i_r \in \{1, 2, ..., s\}$. Тогда любой вектор системы $a_1, a_2, ..., a_s$ может быть линейно выражен через базисные векторы.

Замечание 2.13. Множество R_n обычно называют линейно-координатным пространством. Если рассмотрение ограничивается только изучением подмножества векторов (векторов-строк или векторов-столбцов) вида $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, где все $x_1, x_2, ..., x_n \in R$, то R_n называют и арифметическим пространством (при этом однако вводится еще понятие «близости» между векторами). Кроме этого, R_n называют пространством n измерений.

Интересен вопрос о максимальном ранге возможных систем векторов, взятых из R_n. Во-первых, легко проверить справедливость следующего равенства

$$x = (x_1, x_2, \ldots x_n) = x_1 l_1 + x_2 l_2 + \ldots + x_n l_n \tag{2.37}$$

где

$$l_1 = (1,0,\ldots,0), \ldots, l_n = (0,0,\ldots,1). \tag{2.38}$$

Для этого достаточно воспользоваться определением операций сложения векторов и умножения векторов на числа. Можно также строго доказать, что система векторов $l_1, l_2, \ldots, l_n$ содержит максимальное число линейно независимых векторов из R_n.

Определение 2.32. Базисом пространства R_n будем называть линейно независимую систему векторов из R_n, через которую линейно выражается $\forall x \in R_n$.

Теорема 2.12. Система векторов $l_1, l_2, \ldots, l_n$ является базисом в R_n. Число n является максимальным количеством векторов, входящих в произвольный базис пространства R_n.

В силу теоремы 2.12. говорят, что пространство R_n n-мерно.

§ 6. Ранг матрицы, элементарные преобразования

Ранг матрицы и элементарные преобразования матрицы. Методы вычисления рангов матриц. Теорема о базисном миноре.

Определение 2.33. Под рангом матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

понимается ранг системы вектор-строк $\overrightarrow{a_1} = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}), \overrightarrow{a_2} = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}), \ldots, \overrightarrow{a_m} = (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn})$ этой матрицы.

Определение 2.34. Выберем в прямоугольной матрице A размерности $m \times n$ произвольные k строк и k столбцов $(k \le \min(m,n))$. Элементы, стоящие на пересечении этих строк и столбцов, составляют квадратную матрицу k-го порядка, определитель которой называют минором k-го порядка матрицы A.

Теорема 2.13. Если все миноры k-го порядка матрицы A равны нулю, то равны нулю и все миноры высших порядков.

Верность теоремы следует из формул разложения определителя по элементам какой-либо строки или какой-либо строки или какого-либо столбца.

Теорема 2.14. (Теорема о ранге матрицы или теорема о базисном миноре).

Наивысший порядок отличных от нуля миноров матрицы A равен рангу этой матрицы.

Теорема о базисном миноре указывает на один из методов практического вычисления ранга системы векторов из R_n. Для вычисления этого ранга надо составить матрицу, для которой векторы системы служат векторами-строками, и найти ранг данной матрицы. Для упрощения процедуры вычисления ранга матрицы можно поступить в соответствии со следующим правилом (методом) окаймляющих миноров:

При вычислении ранга матрицы следует переходить от миноров меньших порядков к минорам больших порядков. Если уже найден минор k-о порядка D, отличный от нуля, то требуется вычислить лишь миноры $(k+1)$-о порядка, окаймляющие минор D. Если все они равны нулю, то ранг матрицы равен k. Если же среди миноров $(k-1)$-го порядка есть не равный нулю минор D, то процедуру следует продолжить, те. Начать вычисление всех миноров порядка $(k+2)$, которые окаймляют минор D_1. Если все они равны нулю, то ранг матрицы будет равен $(k+1)$. Когда же хотя бы один из миноров $(k+2)$ порядка будет не равен нулю, то процедуру нужно повторить и т.д.

Теорема 2.15. Ранги исходной и транспонированной матриц совпадают.

Данная теорема указывает на то, что ранги систем вектор-строк и вектор-столбцов матрицы равны друг другу.

Теорема 2.16. Определитель n-го порядка равен нулю тогда и только тогда, когда между его строками существует линейная зависимость, т.е. хотя бы одна строка линейно выражается через другие.

Для отыскания ранга матрицы удобен метод, который не связан с теоремой о ранге. При этом он не требует при своей реализации вычисления определителей. Однако в общем случае он применим только тогда, когда нам надо знать лишь ранг и не требуется найти сами строки (столбцы), которые составляют максимальную линейно независимую систему. Сами эти строки, столбцы называются базисными. Изложим только суть этого метода.

О

1^0. Перемена мест двух строк или двух столбцов;

2^0. Умножение строки (или столбца) на произвольное отличное от нуля число;

3^0. прибавление к одной строке (или столбцу) другой строки (столбца), умноженной на некоторое число.

Теорема 2.17. Элементарные преобразования не меняют ранга матрицы. Ранг матрицы не изменяется при удалении из нее нулевых векторов-строк и векторов-столбцов.

Определение 2.35. Будем говорить, что матрица A размерности $s \times n$ имеет диагональную форму, если все ее элементы равны нулю, кроме элементов $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{rr} \left(0 \le r \le \min(s, n)\right)$, равных единице.

Замечание 2.14. Ранг матрицы, имеющей диагональную форму, равен r.

Верность замечания следует из теоремы о базисном миноре.

Теорема 2.18. Любую матрицу можно с помощью элементарных преобразований привести к диагональной форме.

Замечание 2.15. При нахождении ранга матрицы нужно посредством элементарных преобразований привести матрицу к диагональной форме и сосчитать число единиц, стоящих на «главной» диагонали.

§ 7. Свойства систем линейных уравнений

Общие свойства произвольных систем линейных алгебраических уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Однородные системы, фундаментальная система решений

Определение 2.36. Под произвольной системой линейных алгебраических уравнений будем понимать следующую систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{212}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n = b_s, \end{cases} \tag{2.39}$$

где $s, n \in N$. При этом $x_1, x_2, ..., x_n$ - искомые величины числа, а $b_1, b_2, ..., b_n$ и a_{ij} для $\forall i = \overline{1, S}$ и $\forall j = \overline{1, n}$ считаются заданными числами.

Определение 2.37. Матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{s1} & a_{s2} & \ldots & a_{sn} \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{s1} & a_{s2} & \ldots & a_{sn}b_s \end{pmatrix} \tag{2.40}$$

называются соответственно основной и расширенной матрицами системы (2.39). Последний столбец в матрице $\tilde{A}$ называется столбцом свободных членов.

Определение 2.38. Система (2.39) называется однородной, если $b_1 + b_2 + \ldots + b_s = 0$. Если же хотя бы одно из чисел $b_1, b_2, ..., b_s$ отлично от нуля, то (2.39) называется неоднородной системой.

Замечание 2.16. Ранг матрицы $\tilde{A}$ равен рангу матрицы A или на единицу больше последнего.

Доказательство. Возьмем максимальную линейно независмую систему векторов-столбцов матрицы A. Она будет являться линейно независимой и в матрице $\widetilde{A}$. Если столбец свободных членов через нее линейно выражается, то ранг матрицы A и $\widetilde{A}$ равны. В противном случае, посредством присоединения к этой системе столбца свободных членов мы получим линейно независимую систему столбцов матрицы $\widetilde{A}$, которая будет в ней максимальной (ее ранг на единицу больше ранга матрицы A).

Замечание 2.17. Система линейно алгебраических уравнений может быть записана в матричной форме

$$Ax = b, \tag{2.41}$$

где $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T, b = (b_1, b_2, ..., b_s)^T$.

Определение 2.39. Система (2.39) называется разрешимой или совместной, если существует хотя бы один набор чисел $x_1, x_2, ..., x_s$, для которых все уравнения этой системы обращаются в истинные равенства. В противном случае говорят, что система (2.39) является несовместной или неразрешимой.

Теорема 2.18. (Теорема Кронекера-Капелли). Система линейных алгебраических уравнений (2.39) совместна тогда и только тогда, когда ранги основной и расширенной матриц равны друг другу.

Сформулируем теперь схему решения произвольной системы линейных алгебраических уравнений в виде следующего алгоритма.

Пусть дана совместная система линейных алгебраических уравнений (2.39) и пусть основная матрица A этой системы имеет ранг r. Возьмем в A r линейно независимых строк и оставим в системе (2.39) только те уравнения, коэффициенты которых вошли в выбранные базисные r строк. В данные уравнениях оставим в левых частях такие r неизвестных, для которых определитель из коэффициентов при них отличен от нуля. Остальные неизвестные назовем свободными и перенесем в правые части уравнений. Придавая свободным неизвестным произвольные числовые значения и вычисляя значения остальных неизвестных (это можно сделать, в частности, с помощью правила Крамера), получим все решения системы (2.39).

Из данного метода отыскания решений системы (2.39) следует такая

Теорема 2.19. Система (2.39) совместна и имеет единственное решение тогда и только тогда, когда ранг ее основной матрицы равен числу неизвестных.

Отметим сейчас некоторые свойства однородных систем линейных алгебраических уравнений

Пусть в системе (2.39) все $b_1, b_2, ..., b_s$ равны нулю. Тогда из теоремы Кронекера – Капелли следует, что она будет совместной. Этот результат очевиден, так как однородная система, соответствующая (2.39), всегда имеет нулевое решение (0,0,…,0).

Допустим теперь, что матрица A имеет ранг r. Если $r = n$, то нулевое решение будет единственным решением системы (7.1) при $b_1 = b_2 = ... = b_s = 0$. Это непосредственно следует из формул Крамера. Однако при $r < n$ однородная система линейных алгебраических уравнений будет иметь и решения, отличные от нулевого.

Теорема 2.20. Однородная система n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными тогда и только тогда обладает нулевыми решениями, когда определитель этой системы равен нулю.

Теорема 2.21. Пусть дана однородная система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{212}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + ... + a_{sn}x_n = 0, \end{cases} \tag{2.42}$$

и вектор-столбец $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ является решением этой системы. Тогда для любого числа k вектор-столбец $kx = (kx_1, kx_2, ..., kx_n)^T$ также будет решением системы (7.4). Если $x = (y_1, y_2, ..., y_n)^T$ еще один вектор-столбец, являющийся решением (2.42), то и вектор-столбец $\alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1, ..., \alpha x_n + \beta y_n)^T$, где α, β - произвольные числа, будет являться решением системы (2.42).

Справедливость теоремы непосредственно следует из однородности системы (2.42) и условий самой теоремы.

Определение 2.40. Любая максимальная линейно независимая система решений (т.е. векторов-столбцов матриц размерности $n \times 1$) однородной системы (2.42) называется ее фундаментальной системой решений.

Замечание 2.18. Вектор-столбец $(n - й)$ тогда и только тогда будет решением системы (2.42), когда он является линейной комбинацией векторов-столбцов, составляющих фундаментальную систему ее решений.

Теорема 2.21. Если ранг матрицы r коэффициентов однородной системы (2.42) меньше числа неизвестных n, то любая фундаментальная система ее решений состоит из $(n - r)$ решений.

Определение 2.41. Однородная система линейных алгебраических уравнений, полученная из неоднородной системы (2.39) с помощью замены свободных членов (т.е. $b_1, b_2, ..., b_s$) нулями, называется ***приведенной системой*** для (2.39).

Теорема 2.23 Общее решение неоднородной системы (2.39) можно представить в виде

$$x = x_0 + \alpha_1 q_1 + ... + \alpha_{n-r} q_{n-r} \qquad (2.43)$$

здесь x_0 - некоторое частное решение системы (2.39); $q_1, ..., q_{n-r}$ - фундаментальная система решений приведенной системы для (2.39); $\lambda_1, ..., \lambda_{n-r}$ - произвольные числа.

§ 8. Метод Гаусса

Метод Гаусса (метод исключения неизвестных)

При решении различного рода уравнений, встречающихся в математике и ее приложениях, приходится сталкиваться с анализом двух основных проблем. К первой относится проблема качественного исследования уравнений. Надо дать ответы, в частности, на следующие вопросы: Разрешимо ли уравнение или система уравнений? Имеет ли уравнение или система уравнений единственное решение или нет? Какова структура общего решения?

Другой проблемой является непосредственное построение, отыскание искомых решений рассматриваемых уравнений или систем уравнений. При этом чрезвычайно важно разработать эффективные алгоритмы решения уравнений или систем уравнений, которые позволяли бы отыскивать эти решения с минимальными затратами и с гарантированной точностью.

Выше мы рассматривали, в основном, только элементы качественной теории систем линейных алгебраических уравнений. Теперь же перейдем к изложению одного из эффективных методов решения таких систем, каковым является метод Гаусса (К.Ф. Гаусс; 1777 - 1855; немец. ученый).

Определение 2.42. Две системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}^{(0)}x_1 + a_{12}^{(0)}x_2 + \ldots + a_{1n}^{(0)}x_n = b_1^{(0)}, \\ a_{21}^{(0)}x_1 + a_{22}^{(0)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(0)}x_n = b_2^{(0)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}^{(0)}x_1 + a_{s2}^{(0)}x_2 + \ldots + a_{sn}^{(0)}x_n = b_s^{(0)}, \end{cases} \tag{2.44}$$

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_{m1}x_1 + a'_{m2}x_2 + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m, \end{cases} \tag{2.45}$$

с n неизвестными называются ***эквивалентными***, если они обе одновременно совместны или несовместны и обладают одним и тем же множеством решений.

Замечание 2.19. Если расширенные матрицы систем (2.44) и (2.45) можно получить друг из друга посредством элементарных преобразований, производимых только над их векторами-строками, то системы (2.44) и (2.45) будут эквивалентны.

Замечание 2.20. Если основные матрицы систем (2.44), (2.45) возможно получить друг из друга только посредством перестановки их векторов-столбцов, то между множествами их решений можно установить биективное соответствие, сводящееся к перестановке переменных $x_1, x_2, ..., x_n$.

Пусть нам дана произвольная система линейных алгебраических уравнений (2.44) с n неизвестными, т.е. будем предполагать, что все векторы-столбцы основной матрицы системы (2.44) не являются нулевыми. Заметим сразу, если в (2.44) в каком-либо из уравнений все коэффициенты левой части равны нулю, а его правая часть отлична от нуля, то система (2.44) будет несовместной. Это следует из того, что не может выполняться равенство $0x_1 + 0x_2 + ... + 0x_n = b_i^{(0)}$, где $b_i^{(0)} \neq 0$.

Допустим, что в (2.44) отсутствует уравнение такого типа. В этом случае можно исключить x_1 из $(s-1)$-го уравнения системы (2.44), (считаем, что $s \geq 2$; при $s = 1$ имели бы только одно уравнение). Поскольку первый вектор-столбец основной матрицы системы (2.44) ненулевой, то с помощью перестановки уравнений системы (2.44) всегда можно добиться того, чтобы $a_{11}^{(0)} \neq 0$.

Итак, пусть в (2.44) $a_{11}^{(0)} \neq 0$. Исключим неизвестные x_1 из всех уравнений системы (2.44), кроме первого. Это можно сделать посредством умножения первого уравнения на $\left(a_{21}^{(0)} / a_{11}^{(0)}\right)$ и вычитания результата из соответствующих частей второго уравнения. Затем обе части первого уравнения, умноженные на число $\left(a_{31}^{(0)} / a_{11}^{(0)}\right)$, вычтем из соответствующих частей третьего уравнения. Данную процедуру следует применить и к другим уравнениям системы (2.44) (вплоть до s-го). В результате указанных операций система (2.44) преобразуется в ***эквивалентную*** ей систему линейных алгебраических уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} a_{11}^{(0)}x_1 + a_{12}^{(0)}x_2 + ... + a_{1n}^{(0)}x_n = b_1^{(0)}, \\ \qquad a_{22}^{(0)}x_2 + ... + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad a_{s2}^{(0)}x_2 + ... + a_{sn}^{(1)}x_n = b_s^{(1)}, \end{cases} \tag{2.46}$$

где

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(0)} - a_{1j}^{(0)} \frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}, \quad b_i^{(1)} = b_i^{(0)} - b_1^{(0)} \frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} \qquad \textbf{(2.47)}$$

для всех i, j. При этом в (2.46) пока формально включены уравнения вида $0x_1 + 0x_2 + ... + 0x_n = 0$, которые могут возникнуть при исключении неизвестной x_1 из 2-го, 3-го и т.д. уравнений системы (2.44).

Если среди уравнений системы (2.46), начиная со второго, есть уравнения вида $0x_1 + 0x_2 + ... + 0x_n = b_i^{(1)}$, где $b_i^{(1)} \neq 0$, то система (2.46) (и соответственно (2.44) будет несовместной. Если же таковых уравнений нет, то процесс исключения неизвестных следует продолжить по предыдущей схеме. Однако его уже надо будет применить к части системы (2.46), которая включает в себя все уравнения, начиная со второго. На втором этапе исключается неизвестное x_2 из всех уравнений этой части, кроме первого (для системы (2.46) это второе уравнение). На третьем этапе исключается x_3 и т.д. если в процессе преобразований мы не встретим уравнений, в которых все коэффициенты при неизвестных равны нулю (при этом правые части этих уравнений отличны от нуля), то после $(s-1)$-го этапа придем к системе

$$\begin{aligned} a_{11}^{(0)}x_1 + a_{12}^{(0)}x_2 + ... + a_{1k}^{(0)}x_s &+ a_{1,s+1}^{(0)}x_{s+1} + ... + a_{1n}^{(0)}x_n = b_1^{(0)}, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + ... + a_{2k}^{(1)}x_s &+ a_{2,s}^{(1)}x_{s+1} + ... + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{ss}^{(s-1)}x_s &+ a_{s,s+1}^{(s-1)}x_{s+1} + ... + a_{sn}^{(s-1)}x_n = b_s^{(s-1)}, \end{aligned} \qquad (2.48)$$

которая ***эквивалентна*** системе (2.44). Если же в процессе преобразований исходной системы (2.44) нам встретятся уравнения, удовлетворяющиеся тождественно, то система (2.48) будет состоять из меньшего, чем s, числа уравнений (формально это соответствует тому, что в (2.48) s надо заменить на число $s_1 < s$.) Следует отметить, что для приведения исходной системы (2.44) к виду (2.47) может понадобиться также операция перестановки порядка символов (неизвестных) $x_1, x_2, ..., x_n$.

В результате процедуры исключения неизвестных в предположении совместности системы (2.44) (т.е. когда метод исключения не приводит к появлению уравнений типа $0x_1 + 0x_2 + ... + 0x_n = b \neq 0$) могут реализоваться следующие два случая: s или s_1 равно n; s или s_1 меньше n.

Пусть s или s_1 равно n. Тогда последнее уравнение имеет вид $a_{nn}^{(n-1)} x_n = b_n^{(n-1)}$, где $a_{nn}^{(n-1)} \neq 0$. Из него получим $x_n = \left(b_n^{(n-1)} / a_{nn}^{(n-1)}\right)$. Из предпоследнего уравнения находим x_{n-1}, затем из третьего от конца уравнения - x_{n-2} и т.д. Переходя к уравнениям с меньшими номерами постепенно найдем все неизвестные вплоть до x_1. Отсюда следует, что при $s = n$ система имеет единственное решение.

Допустим теперь, что s и s_1 меньше n. Тогда s или s_1 неизвестных будут базисными, а остальные $(n - s)$ или $n - s_1$ - свободными. В этом случае из последнего уравнения системы (2.48) выражаем x_s или x_{s_1} через $x_{s+1}, x_{s+2}, ..., x_n$ (или $x_{s_1+1}, x_{s_1+2}, ..., x_n$). Затем из предпоследнего уравнения находим x_{s-1} (или x_{s_1-1}) через свободные переменные и т.д. В этом случае система имеет бесконечное множество решений. Для того, чтобы получить некоторое частное решение системы (2.44), надо придать определенные числовые значения свободным переменным.

Итак, метод Гаусса (метод исключения неизвестных) позволяет установить совместность или несовместность системы линейных алг6ебраических уравнений, а также дает возможность найти ее решение, если оно существует. При этом, однако, надо подчеркнуть, что процесс отыскания решений может быть связан с выполнением большого числа арифметических операций, в процессе которых может происходить накопление ошибок. В силу этого, разработка корректных способов вычислений и качественный, количественный анализ, допускаемых при этом погрешностей весь важен для практических приложений математики.

§9. Понятие о методе прогонки

При решении очень многих важных и разнообразных прикладных проблем приходится решать системы линейных алгебраических уравнений очень высокого порядка (они могут содержать сотни, тысячи и даже десятки тысяч уравнений). К счастью, многие из этих систем имеют специальную структуру, позволяющую создавать различные эффективные численные методы их решения. Ниже будет кратко рассмотрен один из таких методов, который представляет собой частный вариант метода исключения неизвестных и применяется для решения систем линейных алгебраических уравнений, имеющих «ленточную» структуру основной матрицы системы.

Определение 2.43. Квадратная матрица $A=\left(a_{ij}\right)$ размерности $n\times n\left(n>0\right)$, называется якобиевой (или матрицей Якоби), если $a_{ij}=0$ при $\left|i-j\right|>1$, где $i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$.

Введем следующие обозначения: $\tilde{c}_i=a_{ii}$ для $\forall i=\overline{1,n}$; $\tilde{b}_i=-a_{i,i+1}$ и $\tilde{a}_i=-a_{i+1,i}$ для $\forall i=\overline{1,n-1}$. Тогда якобиеву матрицу можно записать в виде

$$A=\begin{bmatrix} \tilde{c}_1 & -\tilde{b}_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -\tilde{a}_1 & \tilde{c}_1 & -\tilde{b}_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -\tilde{a}_2 & \tilde{c}_2 & -\tilde{b}_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \tilde{c}_{n-1} & -\tilde{b}_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -\tilde{a}_{n-1} & \tilde{c}_n \end{bmatrix}. \qquad (2.49)$$

Матрицы типа (2.49) называют также ленточными, ибо совокупность элементов, отличных от нуля, расположена на главной диагонали, под диагональю и над диагональю и имеет визуально ленточный вид.

Рассмотрим теперь систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} c_0x_0-b_0x_1=f_0, & i=0, \\ -a_ix_{i-1}+c_ix_i-b_ix_{i+1}=f_i, & 1\le i\le n-1, \\ -a_nx_{n-1}+c_nx_n=f_n, & i=n \end{cases} \qquad (2.50)$$

относительно неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$. Остальные величины в (2.50) считаются известными. Основная матрица A данной системы является якобиевой матрицей и имеет размерность $(n+1)\times(n+1)$.

При больших n необходимо пользоваться экономичными методами решения систем (2.49), при реализации которых число необходимых действий было бы пропорционально числу неизвестных. Одним из таких методов является метод прогонки, к изложению которого и переходим. В этом методе используется идея метода исключения неизвестных. Итак, проведем исключение неизвестных в системе (2.50). Предварительно введем такие обозначения: $\alpha_1 = b_0 / c_0$, $\beta_1 = f_0 / c_0$. Перепишем теперь (2.50) в виде

$$\begin{cases} x_0 - \alpha_0 x_1 = \beta_1, & i = 0, \\ -a_i x_{i-1} + c_i x_i - b_i x_{i+1} = f_i, & 1 \le i \le n-1, \\ -a_n x_{n-1} + c_n x_n = f_n, & i = n \end{cases} \tag{2.51}$$

Возьмем первые два уравнения (2.51) $x_0 - \alpha_0 x_1 = \beta_1$, $-a_i x_0 + c_1 x_0 - b_1 x_2 = f_1$. Умножим первое уравнение на a_1 и сложим со вторым уравнением. Получим $(c_1 - a_1\alpha_1)x_1 - b_1 x_2 = f_1 + \alpha_1\beta_1$ или после деления на $(c_1 - a_1\alpha_1)$ $x_1 - \alpha_2 x_2 = \beta_2$, $\alpha_2 = \dfrac{b_1}{c_1 - \alpha_1 a_1}, \beta_2 = \dfrac{f_1 + a_1\beta_1}{c_1 - \alpha_1 a_1}$. Все остальные уравнения системы (2.52) x_0 не содержат. Поэтому на этом этапе первый шаг процесса исключения заканчивается. В результате получим новую «укороченную» систему

$$\begin{cases} x_1 - \alpha_2 x_2 = \beta_2, & i = 1, \\ -a_i x_{i-1} + c_i x_i - b_i x_{i+1} = f_i, & 2 \le i \le n-1, \\ -a_n x_{n-1} + c_n x_n = f_n, & i = n \end{cases} \tag{2.52}$$

которая не содержит неизвестное x_0 и имеет аналогичную (2.51) форму (фактически эта форма не изменилась, т.е. осталась инвариантной по отношению к действию исключения неизвестной x_0).

Если система (2.52) будет решена, то неизвестное x_0 найдется по формуле $x_1 = \alpha_1 x_1 + \beta_1$. К системе (2.52) можно снова применить описанный способ исключения неизвестных. На втором шаге будет исключено x_1, на третьем x_2 и т.д. В результате l-го шага получим систему для неизвестных $x_l, x_{l+1}, ..., x_n$

$$\begin{cases} x_l - \alpha_{l+1}x_{l+1} = \beta_{l+1}, & i = l, \\ -a_i x_{i-1} + c_i x_i - b_i x_{i+1} = f_i, & l+1 \le i \le n-1, \\ -a_n x_{n-1} + c_n x_n = f_n, & i = n \end{cases} \tag{2.53}$$

и формулы для нахождения x_i с номерами $i \le l-1$

$$x_i = \alpha_{i+1}x_{i+1} + \beta_{i+1}, \qquad i = l-1, l-2, ..., 0. \tag{2.54}$$

При этом коэффициенты α_i и β_i находятся по формулам

$$\alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - a_i\alpha_i}, \ \beta_{i+1} = \frac{f_i + a_i\beta_i}{c_i - a_i\alpha_i}, \ i = 1, 2, ..., \ \alpha_1 = \frac{b_0}{c_0}, \ \beta_1 = \frac{f_0}{c_0} \tag{2.55}$$

Полагая в (2.53) $l = n-1$, получим систему для x_n и x_{n-1}

$$x_{n-1} - \alpha_n x_n = \beta_n, \quad -a_n x_{n-1} + c_n x_n = f_n,$$

из которой найдем $x_n = \beta_{n+1}$, $x_{n-1} = \alpha_n x_n + \beta_n$. Объединяя эти равенства с (2.54) $l = n-1$, получим окончательные формулы для нахождения неизвестных

$$\begin{aligned} & x_i = \alpha_{i+1}x_{i+1} + \beta_{i+1,} \quad i = n-1, n-2, ..., 0, \\ & x_n = \beta_{n+1}, \end{aligned} \tag{2.55}$$

где α_i и β_i находятся по рекуррентным формулам

$$\begin{aligned} & \alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - a_i\alpha_i}, \quad i = 1, 2, ..., n-1, \ \alpha_1 = \frac{b_0}{c_0}, \\ & \beta_{i+1} = \frac{f_i + a_i\beta_i}{c_i - a_i\alpha_i}, \quad i = 1, 2, ..., n, \ \beta_1 = \frac{f_0}{c_0}. \end{aligned} \tag{2.56}$$

Итак, формулы (2.55), (2.56) описывают метод Гаусса, который в применении (2.50) получил специальное название – ***метод прогонки***. Коэффициенты α_i и β_i называют ***прогоночными*** коэффициентами. Формулы (2.56) описывают ***прямой ход прогонки***, а (2.55) – ***обратный ход***. Так как значения x_i находятся здесь последовательно при переходе от $i+1$ к i, то формулы (2.55), (2.56) называют иногда формулами ***правой прогонки***.

В заключение укажем порядок счета по формулам метода прогонки. Начиная с α_1 и β_1, по формулам (2.56) определяются и запоминаются прогоночные коэффициенты α_i и β_i. Затем по формулам (2.55) находится решение $x_0, x_1, ..., x_n$ системы (2.50).

§ 10. Линейные векторные пространства

Линейные векторные пространства, подпространства. Базис линейного пространства. Евклидово и унитарное пространства. Неравенство Коши-Буняковского

Линейное векторное пространство является непосредственным обобщением пространства R_n.

Определение 2.44. Непустое множество L будем называть линейным (векторным) пространством над полем P (вещественных или комплексных чисел), если выполняются такие условия:

a) На множестве L определена внутренняя бинарная алгебраическая операция + (сложение), подчиняющаяся таким аксиомам:

1^0 $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ для $\forall \vec{x}, \vec{y} \in L$ (коммутативность);

2^0 $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$ для $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in L$ (ассоциативность);

3^0 Существует единственный нулевой элемент $\vec{0} \in L$ такой, что $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$ для $\forall \vec{x} \in L$;

4^0 Для каждого элемента $\vec{x} \in L$ существует единственный противоположный элемент $(-\vec{x})$ такой, что $\vec{x} + \overrightarrow{(-x)} = \vec{0}$ для $\forall \vec{x} \in L$;

(пункты 1^0 – 4^0 означают, что L - абелева группа относительно операции сложения векторов).

b) Каждой паре $(\alpha, \vec{x}) \in P \times L (\alpha \in P, \vec{x} \in L)$ сопоставлен единственный элемент (вектор) $\alpha \vec{x} \in L$ (т.е. задана внешняя алгебраическая операция), причем данное соответствие удовлетворяет такому набору аксиом:

5^0 $\alpha\left(\beta\vec{x}\right)=(\alpha\beta)\vec{x}$ для $\forall\alpha,\beta\in P$ и $\forall\vec{x}\in L$ (ассоциативность);

6^0 $1\vec{x}=\vec{x}$ для $\forall\vec{x}\in L$, где 1 – единичный элемент для P;

c) Операция сложения и умножения связаны между собой дистрибутивными законами:

7^0 $\alpha\left(\vec{x}+\vec{y}\right)=\alpha\vec{x}+\alpha\vec{y}$ для $\forall\alpha\in P$ и $\forall x,y\in L$;

8^0 $(\alpha+\beta)\vec{x}=\alpha\vec{x}+\beta\vec{x}$ для $\forall\alpha,\beta\in P$ и $\forall x\in L$.

Определение 2.45. Если $P=R$, то линейное векторное пространство L над R называется вещественным линейным векторным пространством. Если же $P=C$ (C - поле комплексным чисел), то линейное пространство L над C (C - поле комплексных чисел), то линейное пространство L над C называется комплексным линейным пространством.

Замечание 2.21. В любом линейном пространстве L имеют место такие соотношения:

$$\left(-\vec{x}\right)=(-1)\vec{x} \text{ для } \forall\vec{x}\in L; \alpha\vec{0}=\vec{0}\ \forall\alpha\in P;$$

$$\text{если } \alpha\vec{x}=\vec{0}, \text{ то либо } \alpha=0\in P, \text{ либо } \vec{x}=\vec{0}\in L.$$

Пример 2.9. Пусть P - множество рациональных чисел (оно является полем), а $L=R$. Под сложением элементов из L будем понимать сложение вещественных чисел, а под умножением – умножение вещественных чисел из L на рациональные числа из P. Тогда L - линейное векторное пространство.

Пример 2.10. Множество R_n для $\forall n\in N$ является линейным векторным пространством.

Определение 2.46. Пусть $\overrightarrow{b_1},\overrightarrow{b_2},...,b_s$ - система вектор из линейного пространства над полем P. Тогда множество всех векторов вида $\alpha_1\overrightarrow{b_1}+\alpha_2\overrightarrow{b_2}+...+\alpha_1\overrightarrow{b_s}$, где $S\in N$ и $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s\in P$, называется линейной оболочкой этой системы векторов.

Определение 2.47. Любое множество линейного пространства L, которое само является линейным пространством относительно тех же алгебраических операций, называется линейным подпространством пространства L.

Замечание 2.22. Линейная оболочка системы векторов $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, ..., \overrightarrow{b_s}$ из линейного пространства L является линейным подпространством пространства L.

Определение 2.48. Базисом линейного пространства L называется любая линейно независимая система векторов, через которое линейно выражается каждый вектор пространства.

Замечание 2.23. Понятие линейной зависимости и независимости системы векторов определяется в линейном пространстве так же, как и в пространстве R_n.

Определение 2.49. Если базис пространства L содержит n векторов, то пространство L называется n- мерным. В противном случае пространство L называют бесконечномерным.

Теорема 2.24. Количество векторов в различных базисах конечномерного линейного пространства L не зависит от выбора базиса в L, т.е. является инвариантом.

Определение 2.50. Число n векторов, входящих в базис конечномерного линейного пространства L, называется размерностью этого пространства и обозначается символом $n = \dim L$.

Пусть дано n- мерное линейное пространство L, которое обозначим через L_n. Пусть $\overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_2}, ..., \overrightarrow{l_n}$ - некоторый его базис. По определению базиса любой $\vec{x} \in L_n$ можно разложить по векторам этого базиса, т.е. представить $\vec{x}$ в виде

$$\vec{x} = x^1 \overrightarrow{e_1} + ... + x^n \overrightarrow{\ln}, \tag{2.57}$$

где $x^1, ..., x^n$ - числа из поля P (вещественных или комплексных чисел; символы над x имеют смысл индексов, а не степеней).

Определение 2.51. Набор чисел $x^1,...,x^n$ в разложении (2.57) называется <u>контравариантными компонентами</u> (координатами) вектора в базисе $\vec{l}_1,...,\vec{l}_n$. При этом все векторы, принадлежащие L_n, называют контравариантными векторами.

Теорема 2.25. Для любого вектора $\vec{x}$ линейного пространства L_n разложение (8.1) по заданному базису $\vec{l}_1,...,\vec{l}_n$ единственно.

В линейном пространстве L отсутствуют такие понятия как длина вектора и углы между ними. Дадим сначала определение унитарного пространства, в котором можно ввести понятия длины и ортогональности (аналог перпендикулярности).

Определение 2.52. Комплексное линейное пространство L называется <u>унитарным</u>, если каждой паре векторов $\vec{x},\vec{y} \in L$ поставлено в соответствие комплексное число $(\vec{x},\vec{y})$, называемое скалярным произведением, причем выполняются следующие аксиомы:

1^0 $(\vec{x},\vec{y}) = \overline{(\vec{y},\vec{x})}$ для $\forall \vec{x},\vec{y} \in L$ (черта – знак комплексного сопряжения);

2^0 $(\vec{x}+\vec{y},\vec{z}) = (\vec{x},\vec{z}) + (\vec{y},\vec{z})$ для $\forall \vec{x},\vec{y},\vec{z} \in L$;

3^0 $(\lambda\vec{x},\vec{y}) = \lambda(\vec{x},\vec{z})$ для $\forall \vec{x},\vec{y} \in L$ и $\lambda \in C$;

4^0 $(\vec{x},\vec{x}) > 0$ при $\vec{x} \neq \vec{0}, (\vec{0},\vec{0}) = 0$

Замечание 2.24. В унитарном пространстве справедливо равенство $(\vec{x},\lambda\vec{y}) = \lambda(\vec{x},\vec{y})$.

Определение 2.53. Длиной вектора в унитарном пространстве называют неотрицательную величину $|\vec{x}| = +\sqrt{(\vec{x},\vec{x})}$.

Определение 2.54. Говорят, что векторы $\vec{x},\vec{y}$ из унитарного пространства ортогональны, если $(\vec{x},\vec{y}) = 0$.

Пример 2.11. Унитарным пространством будет являться множество всех вектор-строк (вектор-столбцов) с операциями, определенными таким же образом, как и в R_n, если скалярное произведение определить с помощью формулы $\left(\vec{x},\vec{y}\right)=\sum_{i=1}^{n}x_i\overline{y_i}$, где $\vec{x}=\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ и $\vec{y}=\left(y_1,\ldots,y_n\right)$.

Определение 2.55. Вещественное линейное пространство L_e называется евклидовым, если любой паре $\vec{x},\vec{y}\in L_e$ поставлено в соотношение вещественное число $\left(\vec{x},\vec{y}\right)$, называемое скалярным произведением, причем выполнены аксиомы 2^0, 3^0, 4^0 из определения 2.33., а первая аксиома заменена на условие $\left(\vec{x},\vec{y}\right)=\left(\vec{y},\vec{x}\right)$ для $\forall\vec{x},\vec{y}\in L_e$.

Пример 2.12. Пространство R_n становится евклидовым пространством, если скалярное произведение в нем ввести с помощью равенства $\left(\vec{x},\vec{y}\right)=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$.

Определение 2.56. Вектор $\vec{x}\in L_e$ называется нормированным, если $\left|\vec{x}\right|=+\sqrt{\left(\vec{x},\vec{x}\right)}=1$.

Определение 2.57. Система векторов из L_e называется нормированной, если нормированы все ее векторы.

Определение 2.58. Система векторов $\vec{l_1},\ldots,\vec{l_n}$ из n- го евклидового пространства (т.е. L_e - n- е линейное пространство) называется ортонормированной, если она нормирована и $\left(\vec{l_i},\vec{l_j}\right)=0$ для любых i и j, для которых $i\neq j$.

Замечание 2.25. В любом конечномерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

Теорема 2.26. (Неравенство Коши – Буняковского). Для $\forall\vec{x},\vec{y}\in L_e$ справедливо неравенство

$$\left(\vec{x},\vec{y}\right)^2\leq\left(\vec{x},\vec{x}\right)\left(\vec{y},\vec{y}\right) \tag{2.58}$$

Доказательство. Если $\vec{y} = 0$, то неравенство выполняется автоматически. Пусть $\vec{y} \neq \vec{0}$. Рассмотрим вектор $\vec{x} - \lambda \vec{y}$, где λ - любое вещественное число. Из определения скалярного определения следует, что $\left(\vec{x} - \lambda \vec{y}, \vec{x} - \lambda \vec{y}\right) \geq 0$. Отсюда получим, что $\left(\vec{x}, \vec{x}\right) - 2\lambda\left(\vec{x}, \vec{y}\right) + \lambda^2\left(\vec{y}, \vec{y}\right) \geq 0$. Это неравенство справедливо для любых $\lambda \in R$. Следовательно, дискриминант квадратного трехчлена относительно λ будет неположительным, т.е. $\left(\vec{x}, \vec{y}\right)^2 \leq \left(\vec{x}, \vec{x}\right)\left(\vec{y}, \vec{y}\right)$, что и требовалось доказать.

Определение 2.59. Два вектора $\vec{x}, \vec{y}$ из евклидового пространства называется коллинеарными, если либо $\vec{x} = \lambda \vec{y}$, либо $\vec{y} = \mu \vec{x}$ для некоторых λ и $\mu \in R$.

Замечание 2.26. Неравенство Коши-Буняковского обращается в равенство тогда и только тогда, когда векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ коллинеарны.

Следует отметить, что евклидово пространство является примером математической структуры.

§ 11. Линейные операторы.

Линейные операторы. Собственные значения и собственные векторы линейных операторов и матриц

Понятие линейного оператора представляет собой частный, но важный вариант понятия отображения.

Определение 2.60. Пусть даны два линейных пространства L и $\tilde{L}$ над одним и тем же полем P чисел. Под линейным оператором A будем понимать отображение $A : L \to \tilde{L}$, которое обладает таким свойством линейности:

$$\begin{gathered} A\left(\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}\right) = \alpha A\left(\vec{x}\right) + \beta A\left(\vec{y}\right) \\ \forall \alpha, \beta \in P, \forall \vec{x}, \vec{y} \in L. \end{gathered} \tag{2.59}$$

При этом $A\left(\vec{x}\right) = A\vec{x} = \vec{z} \in \vec{L}$ для $\forall \vec{x} \in L$.

Определение 2.61. Если A - линейный оператор, отображающий линейное пространство L во множество вещественных чисел R, то данный линейный оператор называется <u>линейной формой</u>, которую будем записывать в виде $A(\vec{x}) = \alpha(\vec{x}) \in R$.

Пример 2.13. Оператор A, сопоставляющий любому $\vec{x} \in L$ нулевой вектор $\vec{0} \in \tilde{L}$ является линейным. Он называется нулевым оператором.

Пример 2.14. Оператор, сопоставляющий любому вектору $\vec{x} \in L$ сам же этот вектор, будет являться линейным оператором $A = E$, действующим из L в L по правилу $E\vec{x} = \vec{x}$.

Определение 2.62. Два оператора A и B, действующие из L в $\tilde{L}$, если $C\vec{x} + B\vec{x}$ для $\forall \vec{x} \in L$. При этом пишут $C = A + B$.

Замечание 2.26. Если A и B линейные операторы, то их сумма $C = A + B$ будет также линейным оператором. Операция сложения операторов ассоциативна и коммутативны.

Определение 2.63. Оператор C называется произведением оператора A, действующего из L в $\tilde{L}$, на число $\lambda \in P$, если выполняется равенство $C\vec{x} = \lambda\vec{x}$ для $\forall \vec{x} \in L$. При этом пишут $C = \lambda A$.

Замечание 2.27. Произведение числа на линейный оператор является линейным оператором.

Определение 2.64. Если $L = \tilde{L}$, то будем говорить, что линейные операторы действуют из L в L. Эти операторы будем называть линейными операторами в L.

Введем теперь такое важное понятие как матрица линейного оператора. Ограничимся рассмотрением частного случая, когда линейные операторы отображают векторы линейного пространства L в векторы этого же пространства. При этом ограничимся конечномерным случаем, т.е. будем считать, что $L = \tilde{L} = L_n$.

Пусть в L_n задан линейный оператор A и некоторый базис $\vec{l_1},...\vec{l_n}$. Т.к. $A\vec{l_j} \in L_n$ для $\forall j = \overline{1,n}$, то вектор $A\vec{l_j}$ может быть разложен по данному базису

$$A\vec{l_j} = \sum_{i=1}^{n} a_j^i \vec{l_i},\ j = \overline{1,n} \tag{2.60}$$

где a_j^i - некоторые известные числа из поля P. Пусть $\vec{y} = A\vec{x}$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in L_n$. Разложим теперь векторы $\vec{y}$ и $\vec{x}$ по указанному базису, т.е. Представим их в виде $\vec{y} = \sum_{i=1}^{n} y^i \vec{l_i}, \vec{x} = \sum_{j=1}^{n} x^j \vec{l_j}$. С учетом этих разложений и (8.4) получим цепочку равенств.

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^{n} y^i \vec{l_i} = A\left(\sum_{j=1}^{n} x^j \vec{l_j}\right) = \sum_{j=1}^{n} x^j A\vec{l_j} = \sum_{j=1}^{n} x^j \sum_{i=1}^{n} a_j^i \vec{l_i} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^i x^j\right)\vec{l_i} \tag{2.61}$$

С учетом теоремы о единственности совокупности компонент вектора в заданном базисе получим, что

$$y^i = \sum_{j=1}^{n} a_j^i x^j, i = \overline{1,n} \tag{2.62}$$

Выражения (2.62) можно записать в матричной форме

$$\vec{Y} = A\vec{X}, A = \left(a_j^i\right), \vec{Y} = \begin{pmatrix} y^1 \\ ... \\ ... \\ ... \\ y^n \end{pmatrix}, \vec{X} = \begin{pmatrix} x^1 \\ ... \\ ... \\ ... \\ x^n \end{pmatrix}, \tag{2.63}$$

где $A = \left(a_j^i\right)$ - <u>матрица линейного оператора</u>, причем верхний индекс i нумерует строки, а j - столбцы. Такая запись матрицы более удобна при изучении ее трансформационных свойств.

Из сказанного следует, что действие линейного оператора A в L_n можно описать, если известны матрица линейного оператора в каком-либо базисе.

Дадим теперь определения собственных значений и собственных векторов линейных операторов (и матриц).

Определение 2.65. Число λ называется собственным значением, а нулевой вектор $\vec{x}$ - собственным вектором линейного оператора A, если они связаны между собой соотношением $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$.

Пусть линейный оператор A действует в L_n и выбран базис $\vec{l}_1,...\vec{l}_n$ в L_n. Это позволяет разложить вектор $\vec{x}$ по векторам этого базиса и задать матрицу линейного оператора A сводится фактически к решению матричного уравнения

$$(A-\lambda E)\vec{X} = 0, \vec{X} = \begin{pmatrix} x^1 \\ ... \\ ... \\ ... \\ x^n \end{pmatrix}, \vec{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ ... \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.64}$$

где E - единичная матрица размерности $n \times n$. Соотношение (8.8) представляет собой такую систему линейных однородных уравнений относительно неизвестных $x^1,...,x^n$:

$$\begin{cases} \left(a_1^1 - \lambda\right)x^1 + a_2^1 x^2 + ... + a_n^1 x^n = 0 \\ a_1^2 x^1 + \left(a_2^2 - \lambda\right)x^2 + ... + a_n^2 x^n = 0 \\ ------------------ \\ a_1^n x^1 + a_2^n x^2 + ... + \left(a_n^n - \lambda\right)x^n = 0 \end{cases} \tag{2.65}$$

Но однородная система (8.9) может иметь нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю, т.е.

$$\det(A - \lambda E) = 0 \tag{2.66}$$

Определение 2.66. Уравнение (2.66) называется <u>характеристическим уравнением</u> линейного оператора.

Замечание 2.28. Характеристическое уравнение (2.66) для линейного оператора A, действующего из L_n в L_n является алгебраическим уравнением n -го порядка

$$\det(A - \lambda E) = \lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + ... + b_{n-1}\lambda + b_n = 0 \tag{2.67}$$

§ 12. Инварианты линейного оператора

Трансформационные свойства компонент векторов и матриц линейных операторов. Инварианты линейного оператора

Перейдем к рассмотрению законов преобразования компонент векторов и матриц линейного оператора при переходе к другому базису.

Пусть $\vec{l_1},...\vec{l_n}$ - старый (нештрихованный) базис пространства L_n, а $\vec{l_{1'}},...\vec{l_{n'}}$ - другой (новый, штрихованный) базис пространства L_n. В силу определения вектором старого базиса

$$\vec{l_{i'}} = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{i'}^{i} \vec{l_i} = \gamma_{i'}^{i} \vec{l_i} + ... + \gamma_{i'}^{n} \vec{l_n}, i = \overline{1,n} \tag{2.68}$$

Отметим, что матрица $\Gamma = \left(\gamma_{i'}^{i}\right)$, которая называется <u>матрицей перехода</u> невырожденной (штрихованный – номер столбца матрицы Γ). Разложим теперь контравариантный вектор $\vec{x} \in L_n$ по новому и старому базисам

$$\vec{x} = \sum_{i'=1}^{n} x^{i'} \vec{l_{i'}} = \sum_{i'=1}^{n} x^{i} \vec{l_i}. \tag{2.69}$$

Заменим $\vec{l_{i'}}$ в (2.69) на выражение (2.68). В итоге получим

$$\vec{x} = \sum_{i'}^{n} x^{i'} \sum_{i=1}^{n} \gamma_{i'}^{i} \vec{l_i} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{i'=1}^{n} \gamma_{i'}^{i} x^{i'} \right) \vec{l_i} = \sum_{i=1}^{n} x^{i} \vec{l_i}. \tag{2.70}$$

В силу единственности разложения вектора по заданному базису из (8.14) получим

$$x^{i} = \sum_{i'=1}^{n} \gamma_{i'}^{i} x^{i'}, i = \overline{1,n}. \tag{2.71}$$

Соотношения (2.71) можно записать в матричной форме

$$\vec{X} = \Gamma^{\mathrm{T}} \vec{X'}, \vec{X} = \begin{pmatrix} x^1 \\ ... \\ ... \\ ... \\ x^n \end{pmatrix}, \vec{X'} = \begin{pmatrix} x^{1'} \\ ... \\ ... \\ ... \\ x^{n'} \end{pmatrix}, \tag{2.72}$$

-где векторы-столбцы $\overrightarrow{X}$ и $\overrightarrow{X'}$ сопоставляются одному и тому же контравариантному вектору $\vec{x} \in L_n$.

Формула (2.72) определяет закон преобразования новых контравариантных компонент вектора $\vec{x}$ в старые контравариантные компоненты того же вектора. Так как $\det\Gamma \neq 0$ и $\det\Gamma = \det\Gamma^{\mathrm{T}}$, то существует обратная матрица для матрицы Γ^{T}. Обозначим ее через $B = \left(\Gamma^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \left(\beta_i^{i'}\right)$. Здесь опять штрихованный индекс обозначает номер строки, а нештрихованный – номер столбца:

$$B = \begin{pmatrix} \beta_1^{1'} & \beta_1^{1'} & \dots & \beta_n^{1'} \\ \beta_1^{2'} & \beta_2^{2'} & \dots & \beta_n^{2'} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_1^{n'} & \beta_2^{n'} & \dots & \beta_n^{n'} \end{pmatrix}. \tag{2.73}$$

С учетом сказанного из (8.16) получим такой закон преобразования контравариантных компонент вектора $\vec{x} \in L_n$ при переходе от старого базиса к новому:

$$\overrightarrow{X'} = B\overrightarrow{X}, x^{i'} = \sum_{i'=1}^{n} \beta_i^{i'} x^i, i' = \overline{1,n} \tag{2.74}$$

На основе полученных формул можно дать определение тензоров.

Определение 2.67. Пусть в n- ом линейном пространстве L_n каждому его базису $\vec{l}_1,\dots,\vec{l}_n$ сопоставлена совокупность чисел $\zeta^1,\dots,\zeta^n$. Если при этом совокупности $\zeta^1,\dots,\zeta^n$ и $\zeta^{n'},\dots,\zeta^{n'}$, соответствующие базисам $\vec{l}_1,\dots,\vec{l}_n$ и $\vec{l}_{1'},\dots,\vec{l}_{n'}$, связаны друг с другом посредством закона

$$\zeta^{i'} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^{i'} \zeta^i, i' = \overline{1,n}, \tag{2.75}$$

то будем говорить, что задан одновалентный контравариантный тензор. Сами числа $\zeta^1,\dots,\zeta^n$ - компоненты этого тензора.

Замечание 2.29. Компоненты контравариантного вектора $\vec{x} \in L_n$ образуют одновалентный контравариантный тензор.

Определение 2.68. Пусть в линейном пространстве L_n каждому базису $\vec{l}_1,...,\vec{l}_n$ сопоставлена совокупность чисел $\zeta_1,...,\zeta_n$. Если при переходе от старого к новому базису совокупности этих чисел преобразуются по закону

$$\zeta_{i'} = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{i'}^{i} \zeta_i \,, \tag{2.76}$$

то будем говорить, что задан одновалентный ковариантный тензор. Совокупность чисел $\zeta_1,...,\zeta_n$ называется компонентами этого тензора.

Пример 2.15. Примером одновалентного ковариантного тензора является совокупность чисел $a(\vec{l}_1),...,a(\vec{l}_n)$, где $a(\vec{x})$ - линейная форма ($a(\vec{x})$ - частный случай линейного оператора, который отображает L_n в R).

Перейдем к выяснению трансформационных свойств матрицы линейного оператора и поиску его инвариантов. Сразу отметим, что сам линейный оператор A не зависит от выбора базиса в L_n. От этого базиса зависит только матрицы этого оператора. Для выявления закона преобразования матрицы линейного оператора используем формулу (2.63) и соотношения (2.72), (2.74). Обозначим через $A' = \left(a_{j'}^{i'}\right)$ матрицу этого оператора в старом базисе $\vec{l}_1,...,\vec{l}_n$. С учетом указанных выше формул получим цепочку равенств

$$\begin{aligned} &\vec{Y} = A\vec{X}, \vec{Y}' = A'\overrightarrow{X'}, B\vec{Y} = A'B\vec{X}, \vec{Y} = B^{-1}A'B\vec{X}, \\ &A = B^{-1}A'B, A' = BAB^{-1}. \end{aligned} \tag{2.77}$$

Принимая во внимание равенство $B = \left(\Gamma^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$, из (2.77) получим

$$A' = \left(\Gamma^{\mathrm{T}}\right)^{-1} A\Gamma^{\mathrm{T}} = BA\Gamma^{\mathrm{T}}. \tag{2.78}$$

Соотношение (2.78) и определяет закон преобразования матрицы линейного оператора при переходе от исходного к новому базису. Данный закон можно переписать в координатной форме, если учесть правило перемножения матриц. Имеем из (2.78)

$$a_{j'}^{i'} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \beta_i^{i'} \gamma_{j'}^{j} a_j^i ; i', j' = \overline{1,n} \tag{2.79}$$

Замечание 2.30. Совокупности чисел, однозначно сопоставляемые базисам в

L_n и преобразующиеся по закону (2.79), называются двухвалентным смешанным тензором (один раз ковариантным и один раз ковариантным).

Формула (2.78) позволяет легко выявить инварианты линейного оператора, т.е. величины, которые не изменяются при переходе к любому другому базису. Для отыскания этих инвариантов рассмотрим характеристическое уравнение для линейного оператора в новом базисе $\det(A' - \lambda' E) = 0$. Из (2.78) получим

$$\det(A' - \lambda' E) = \det\left(\left(\Gamma^{\mathrm{T}}\right)^{-1} A \Gamma^{\mathrm{T}} - \lambda' \left(\Gamma^{\mathrm{T}}\right)^{-1} E \Gamma^{\mathrm{T}}\right) =$$
$$= \det\left(\left(\Gamma^{\mathrm{T}}\right)^{-1} (A - \lambda' E) \Gamma^{\mathrm{T}}\right) = \det\left(\left(\Gamma^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\right) \det(A - \lambda' E) \det \Gamma^{\mathrm{T}} =$$
$$= \det(A - \lambda' E) \det\left(\left(\Gamma^{\mathrm{T}}\right)^{-1} \Gamma^{\mathrm{T}}\right) = \det(A - \lambda' E) \det E = \det(A - \lambda' E).$$

Из этой цепочки равенств видно, что характеристические уравнения в новом и старом базисах совпадают (штрих над λ не играет никакой роли, а служит всего лишь меткой). Так как характеристическое уравнение представляет собой полином и два полинома равны тогда и только тогда, когда все их коэффициенты при одинаковых степенях совпадают, то можно сделать вывод о том, что $\lambda' = \lambda, b_1' = b_1, \ldots b_{n-1}' = b_{n-1}, b_n' = b_n$ (b_i' и b_i - коэффициенты характеристического уравнения в новом и старом базисах; см. формулу (2.67)). Итак, доказана.

Теорема 2.27. Все коэффициенты характеристического уравнения являются инвариантами по отношению к выбору базиса в $L_{n'}$.

РАЗДЕЛ 3. ВЕКТОРЫ. ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ

§ 1. Скалярные и векторные величины

Основные понятия

Величины, с которыми приходится встречаться в физике, механике и других прикладных науках, можно разделить на два вида. Одни из них вполне определяются числом и называются скалярными величинами или скалярами (от латинского слова **scala** – шкала). Примерами таких величин являются длина отрезка, площадь, объём, масса тела, плотность и т.д. Любое вещественное число называется скаляром.

Величины же другого типа, для определения которых, кроме числовых значений необходимо задать ещё и направление их в пространстве, называются векторными или векторами. Физические величины: сила, скорость, ускорение движения – примеры векторных величин.

Всякую векторную величину (вектор) геометрически можно изобразить с помощью отрезка прямой определённой длины и определённого направления в пространстве.

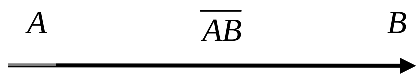


Рис. 3.1

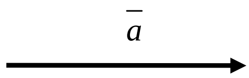
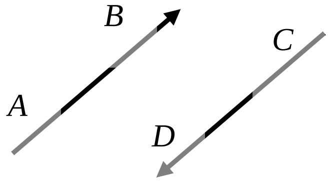


Рис. 3.2

На чертеже вектор изображается отрезком прямой, на котором стрелкой отмечено направление. Одна из двух конечных точек вектора называется началом вектора, другая – концом. Вектор, имеющий началом точку A, а концом – точку B, обозначается так: $\overrightarrow{AB}$ (рис. 3.1).

Длина направленного отрезка, обозначающего вектор, называется длиной вектора, его модулем. Он обозначается двумя вертикальными чертами слева и справа: $\left|\overrightarrow{AB}\right|$; $|\vec{a}|$.

Векторы, параллельные одной прямой, называются коллинеарными. Коллинеарные векторы или параллельны, напр. $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ (рис. 3.3)



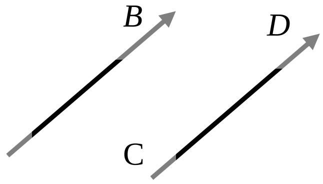


Рис. 3.3

или лежат на одной прямой, например $\overline{AB}$ и $\overline{EF}$ (рис. 3.4)

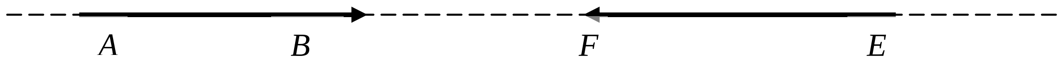


Рис. 3.4

Если векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ коллинеарны, то записывают $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

Два вектора $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются равными (рис. 3.5), если они:

1) имеют равные модули;
2) коллинеарны, т.е. расположены на одной прямой или на параллельных прямых;
3) направлены в одну сторону.

Если векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ равны, то записывают $\overline{|AB|} = \overline{|CD|}$

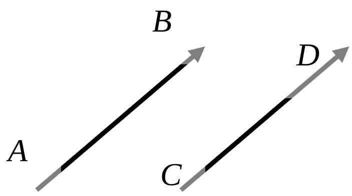


Рис. 3.5

Из определения равенства векторов следует, что при параллельном переносе вектора получается вектор, равный исходному. Поэтому начало вектора можно помещать в любую точку пространства.

В разделе теоретической механики (статике) и геометрии такие векторы, не связанные ни с какими материальными или геометрическими точками, начало которых при параллельном переносе можно помещать в любую точку пространства, называют свободными.

В статике абсолютно твёрдого тела часто встречаются ещё так называемые скользящие векторы. Это векторы, начало которых при параллельном переносе можно переносить лишь по направлению каждого данного вектора. Например, на твёрдое тело A действует сила $\overline{F}$, приложенная в точке B. Действие силы на тело не изменится, если точку приложения её перенести в другую точку тела, например в точку C, лежащую на линии действия данной силы (рис. 3.6).

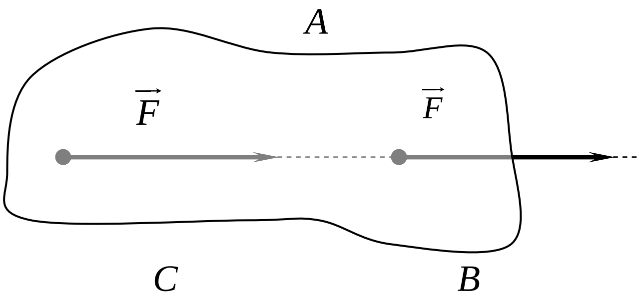


Рис. 3.6

Умножение вектора на скаляр

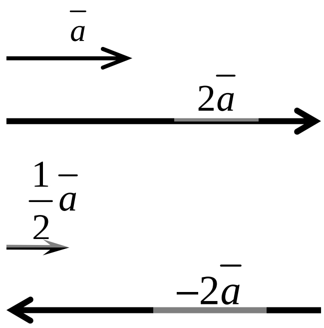


Рис. 3.7

Пусть вектор $\overline{a}$ (рис. 3.7) изображает перемещение точки, тогда под вектором $2\overline{a}$ естественно подразумевать вдвое большее перемещение точки в том же направлении, под вектором $\frac{1}{2}\overline{a}$ - вдвое меньшее перемещение в том же направлении, под вектором: $-2\overline{a}$ - вдвое большее перемещение, но в противоположном направлении и т.д. Такие соображения дают основание к следующему определению:

Определение 3.1. Произведением вектора $\overline{a}$ на скаляр (число) m называется такой вектор $\overline{b}$, который:

1) имеет модуль, равный модулю вектора $\bar{a}$, умноженному на абсолютное значение числа m;
2) коллинеарен с вектором $\bar{a}$;
3) направлен в одну сторону с вектором $\bar{a}$ при $m > 0$ и в противоположную сторону при $m < 0$.

Результат умножения вектора $\bar{a}$ на скаляр m записывается равенством $\bar{b} = m\bar{a}$.

Единичный вектор

Вектор, модуль которого равен единице, называется единичным вектором (или ортом). Всякий вектор $\bar{a}$ можно выразить через единичный вектор того же направления. В самом деле, разделив вектор $\bar{a}$ на его длину (т.е. умножив на $\frac{1}{a}$) получим единичный вектор того же направления, что и вектор $\bar{a}$, обозначаемый через $\bar{a}_0 = \frac{\bar{a}}{|a|}$.

§ 2. Сложение и вычитание векторов

Сложение

Пусть движущаяся точка (рис. 3.8) прошла сначала путь $\overline{OA} = \bar{a}$, затем $\overline{AB} = \bar{b}$, затем $\overline{BC} = \bar{c}$. В результате она переместилась из точки O в точку C. Вектор $OC = \bar{R}$ естественно назвать суммой всех данных перемещений.

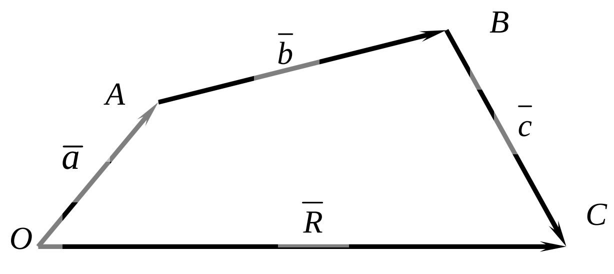


Рис. 3.8

Определение 3.2. Суммой векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{d}$, ..., $\overline{n}$ называется вектор $\overline{R}$, замыкающий ломанную линию, построенную из данных векторов так, что начало каждого из последующих векторов совмещается с концом предыдущего. Замыкающий вектор R направлен от начала первого вектора к концу последнего.

Для суммы векторов принята запись

$$\overline{R} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c} + \overline{d} + ... + \overline{n}.$$

На рис. 3.8 $\overline{OC} = \overline{R} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$. Из рисунка видно, что длина отрезка OC меньше длины ломанной $OABC$, поэтому $OC \le OA + AB + BC$ или

$$|\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}| \le |\overline{a}| + |\overline{b}| + |\overline{c}|,$$

т.е. модуль векторной суммы меньше суммы модулей слагаемых векторов или равен ей.

При сложении векторов может случиться, что конец последнего слагаемого вектора совпадает с началом первого вектора, тогда $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = \overline{O}$, где через $\overline{O}$ обозначим нуль – вектор – особый, не имеющий направления, вектор с модулем, равным O.

Из определения суммы векторов вытекает правило параллелограмма для сложения двух векторов и правило параллелепипеда для сложения трёх векторов.

1. Сумма двух векторов $\overline{OA} = \overline{a}$ и $\overline{OB} = \overline{b}$, приведённых к общему началу O (рис. 3.9), есть вектор – диагональ $\overline{OC}$ параллелограмма $OACB$, построенного на векторах.

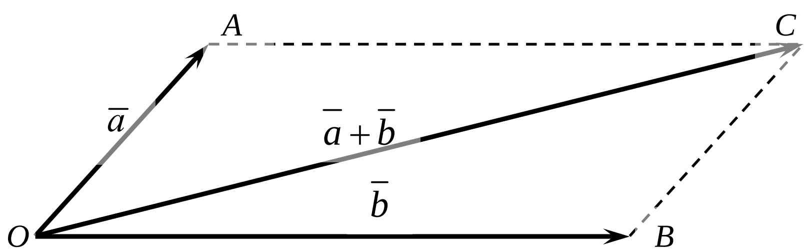


Рис. 3.9

Из рис. 3.9 видно, что по определению суммы векторов

$$\overline{OA}+\overline{AC}=\overline{OA}+\overline{OB}=\overline{a}+\overline{b}=\overline{OC}.$$

Но вектор $\overline{OC}$ является диагональю параллелограмма, построенного на данных векторах $\overline{OC}=\overline{a}$ и $\overline{OB}=\overline{b}$, исходящей из общего начала слагаемых векторов.

1. Сумма трех векторов $\overline{OA}=\overline{a}$, $\overline{OB}=\overline{b}$ и $\overline{OC}=\overline{c}$, приведенных к общему началу O (рис. 3.10) и не лежащих в одной плоскости, есть вектор-диагональ $\overline{OM}$ параллелепипеда, построенного на данных векторах, так как

$$\overline{OM}=\overline{OA}+\overline{AN}+\overline{NM}=\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$$

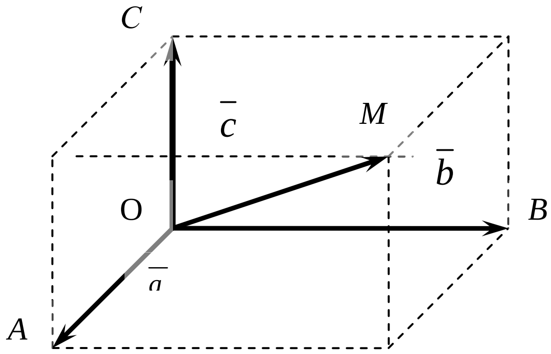


Рис. 3.10

Вычитание векторов

Разностью $\overline{a}-\overline{b}$ двух векторов называется такой вектор $\overline{c}$, который нужно сложить с вектором $\overline{b}$, чтобы получить вектор $\overline{a}$, т.е. $\overline{a}-\overline{b}=\overline{c}$, если $\overline{b}+\overline{c}=\overline{a}$.

Чтобы построить разность $\overline{a}-\overline{b}$, приведем векторы $\overline{OA}=\overline{a}$ и $\overline{OB}=\overline{b}$ к общему началу O (рис.3.11) и затем соединим их концы B и A. Вектор $\overline{BA}=\overline{a}-\overline{b}$, т.к. $\overline{b}+\overline{BA}=\overline{a}$

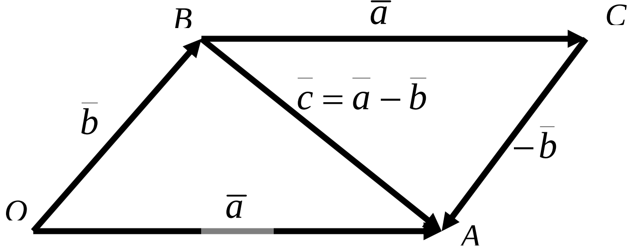


Рис. 3.11

Разность $\overline{a}-\overline{b}$ двух векторов можно определить и иначе. Чтобы вычесть вектор $\overline{b}$, достаточно прибавить противоположный вектор $-\overline{b}$ (см. рис. 3.11)

$$\overline{a}-\overline{b}=\overline{BA}=\overline{BC}+\overline{CA}=\overline{a}+\left(-\overline{b}\right).$$

Из последнего замечания следует, что всякое выражение, в котором векторы складываются и вычитаются можно рассматривать как векторную сумму, например

$$\overline{a}+\overline{b}-\overline{c}=\overline{a}+\overline{b}+\left(-\overline{c}\right).$$

Замечание 3.1. Определение. Сложения векторов установлено в соответствии с физическими законами сложения векторных величин (например, сил, приложенных к материальной точке).

Ось. Проекция точки на ось. Проекция вектора на ось

Определение 3.3. Осью называется всякая прямая, на которой указано направление.

Определение 3.4. Проекцией точки M на ось называется основание M_1 перпендикуляра, опущенного из точки M на данную ось.

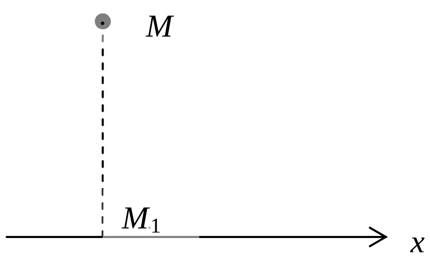


Рис. 3.12.

Пусть теперь даны вектор $\overline{AB}$ и ось Ox. Опустим из точек A и B перпендикуляры на ось Ox и обозначим их основания собственно через C и D.

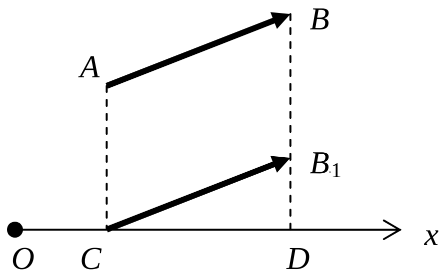


Рис. 3.13.

Определение 3.5. Проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось Ox называется длина отрезка CD этой оси, заключенного между проекциями его начальной и конечной точек, взятая со знаком “+”, если направление отрезка CD совпадает с направлением оси проекций, и со знаком “-”, если эти направления противоположны.

Записывают $\text{пр}_{OX}\overline{AB}$.

Определение 3.6. Углом вектора $\overline{AB}$ или равного ему вектора $\overline{CB_1}$ с осью Ox называется угол α (рис. 3.14), на который нужно повернуть кратчайшим образом полуось Cx до совмещения ее с вектором $\overline{CB_1}$

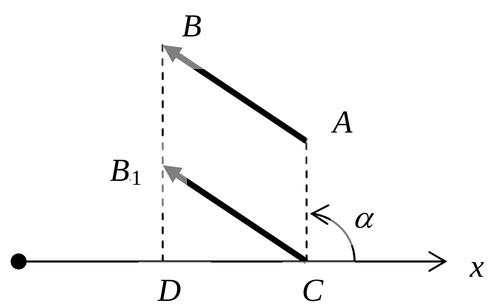


Рис. 3.14.

Область изменения угла $\alpha : 0^0 < \alpha \le 180^0$ или $0 < \alpha \le \pi$.

Теорема 3.1. Проекция вектора на ось равна длине вектора, умноженной на косинус угла между вектором и осью.

Теорема 3.2. При умножении вектора $\overline{AB}$ на число m его проекция на ось умножается на то же число.

Теорема 3.3. Проекция суммы векторов на ось равна сумме проекций составляющих векторов на ту же ось.

§ 3. Компланарные векторы

Условие компланарности трех векторов

Определение 3.7. Векторы, параллельные одной плоскости или лежащие в одной плоскости, называются компланарными.

Из этого определения компланарности векторов и понятия свободного вектора, очевидно, что если векторы после приведения их к общему началу лежат в одной плоскости, то они компланарны.

Приведением векторов к общему началу легко убедиться в том, что:

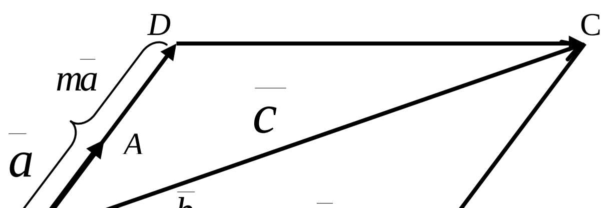
1) любые два вектора компланарны;
2) любое количество коллинеарных векторов компланарно;
3) любые три вектора, из которых два коллинеарны, компланарны.

Теорема 3.4. Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{c}$, из которых никакие два не коллинеарны, является выполнением равенства:

$$m\overline{a} + n\overline{b} + p\overline{c} = 0, \tag{3.1}$$

где m, n и p - числа, из которых по крайней мере одно отлично от нуля.

Доказательство: ***<u>Необходимость.</u>*** Пусть векторы $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{c}$ компланарны и из них никакие два не коллинеарны. Перенесем их в одну плоскость и приведем к общему началу O (рис. 3.15). Из конца вектора $\overline{OC} = \overline{C}$ проведем прямые $CE \parallel OA$ и $CD \parallel OB$ до пересечения их в точках E и D с продолжениями прямых OB и OA. Из параллелограмма $ODCE$ находим, что $\overline{OC} = \overline{OD} + \overline{OE}$, но $\overline{OD} = m\overline{a}$, $\overline{OE} = n\overline{b}$,



поэтому $$\bar{c} = m\bar{a} + n\bar{b} \qquad (3.2)$$

или $$m\bar{a} + n\bar{b} + (-1)\bar{c} = 0$$

А это и есть условие (3.1), где p = -1.

Если вектор $\bar{c}$ представлен в виде (3.2), где хотя бы одно из чисел m и n не равно нулю, то говорят, что вектор $\bar{c}$ разложен по векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$, причем из построения очевидно, что это разложение единственно.

Достаточность. Пусть имеет место равенство (3.1), т.е. $m\bar{a} + n\bar{b} + p\bar{c} = 0$ и пусть $p \neq 0$, тогда

$$\bar{c} = -\frac{m}{p}\bar{a} - \frac{n}{p}\bar{b} = l\bar{a} + g\bar{b},$$

где $l = -\frac{m}{p}$ и $g = -\frac{n}{p}$ - некоторые числа.

Так как любые два вектора, в нашем случае $\bar{a}$ и $\bar{b}$, приведенные к общему началу, лежат в одной плоскости, то вектор $\bar{c}$, как вектор-диагональ параллелограмма $ODCE$, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, лежит в той же плоскости, что и требовалось доказать.

Совершенно очевидно, что соотношение (3.1) будет иметь место и в случаях компланарности трех векторов.

Правая и левая тройка некомпланарных векторов

Тройка некомпланарных векторов $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ с общим началом O называется правой, если вращение вектора $\bar{a}$ к вектору $\bar{b}$ по кратчайшему пути наблюдается с конца вектора $\bar{c}$, совершающимся против часовой стрелки.

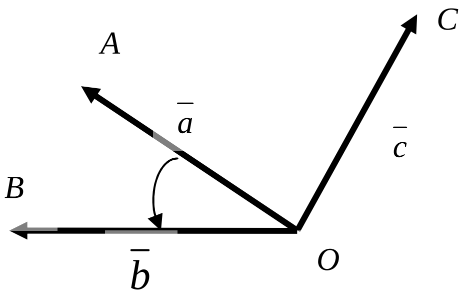


Рис. 3.16

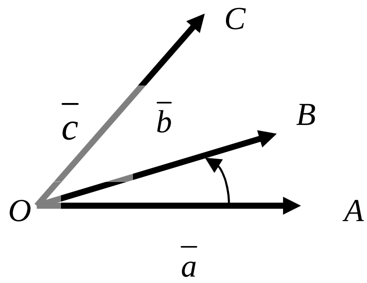


Рис. 3.17

Тройка векторов будет левой, если вращение вектора $\bar{a}$ к вектору $\bar{b}$ по кратчайшему пути наблюдается с конца вектора $\bar{c}$, совершающимся по часовой стрелке.

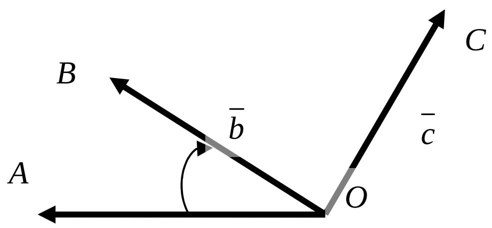


Рис. 3.18

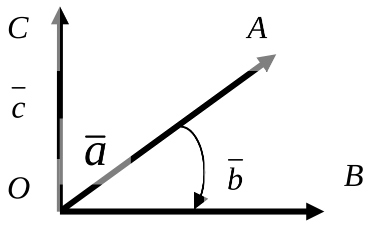


Рис. 3.19

Прямоугольная система координат в пространстве

Для определения положения точки в пространстве возьмём три взаимно перпендикулярные координатные оси *Ox*, *Oy* и *Oz* с общим началом *O*. Такую систему координат называют прямоугольной или декартовой системой координат в пространстве. Ось *Ox* называется осью абсцисс, ось *Oy* – осью ординат; ось *Oz* – осью аппликат.

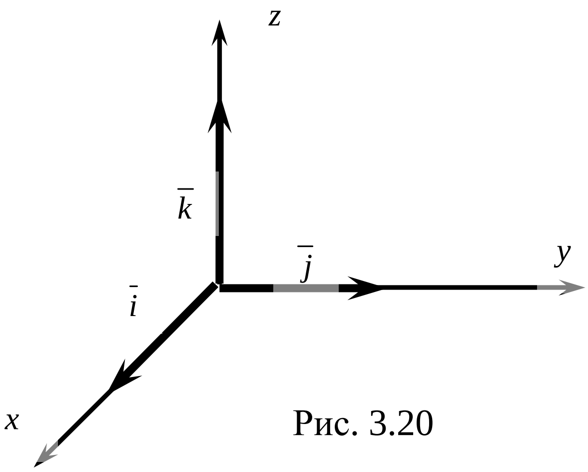


Рис. 3.20

Направление осей *Ox*, *Oy*, *Oz* можно задать единичными векторами $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ (ортами). Если орты $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ образуют правую тройку, то система координат называется правой.

§ 4. Скалярное произведение двух векторов

Определение 3.8. Углом между двумя векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется наименьший угол *AOB* (рис. 3.21) между этими векторами, приведёнными к общему началу *O*.

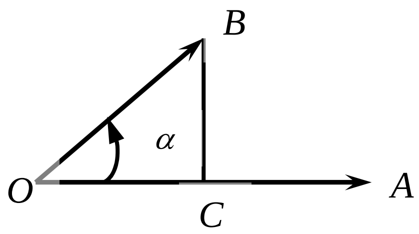


Рис. 3.21

Из определения следует, что угол α между векторами может изменяться в пределах $0 \le \alpha \le \pi$ или $0^0 \le \alpha \le 180^0$.

Определение 3.9. Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению модулей векторов - сомножителей на косинус угла между ними.

$$(\bar{a}, \bar{b}) = \bar{a}\bar{b}\cos\alpha \tag{3.3}$$

где α – угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Спроектировав вектор $\overline{OB} = \bar{b}$ на вектор $\overline{OA} = \bar{a}$ (рис. 3.21), получим

$$\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b} = OC = b\cos\alpha,$$

поэтому $$(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}|(b\cos\alpha) = a\,\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b}$$ или

$$(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{b}|\,\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a} \tag{3.4}$$

Следовательно, скалярное произведение двух векторов равно модулю одного из них, умноженному на проекцию второго вектора на первый

$$\text{пр}_{\overline{a}}\overline{b} = \frac{(\overline{a},\overline{b})}{|\overline{a}|} \qquad (3.5)$$

Из определения скалярного произведения двух векторов

$$\cos\alpha = \frac{(\overline{a},\overline{b})}{|\overline{a}||\overline{b}|} \quad \text{- в векторной форме} \qquad (3.6)$$

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \quad \text{- в координатной форме} \qquad (3.7)$$

Свойства скалярного произведения

1^0. Переместительное свойство

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}\,.$$

Справедливость этого равенства следует из определения скалярного произведения.

2^0. Распределительное свойство

$$\overline{a} \cdot (\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \overline{c}\,.$$

Доказательство. Так как до сих пор мы ещё не рассматривали умножение вектора на сумму векторов, а умножение скалярных величин производить умеем, то для доказательства второго свойства, воспользовавшись формулой (3.4) и теоремой о проекции суммы векторов на ось, запишем следующее

$$\overline{a}(\overline{b} + \overline{c}) = |\overline{a}|\, np_a(\overline{b} + \overline{c}) = |a|\,(np_a\overline{b} + np_a\overline{c}) = anp_{\overline{a}}\overline{b} + anp_{\overline{a}}\overline{c} =$$
$$= \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \overline{c}$$

3^0. Скалярное умножение обладает свойством сочетательности относительно скалярного множителя.

Это свойство выражается следующей формулой

$$\overline{a}(\lambda\overline{b}) = \lambda\overline{a}\overline{b} \qquad (3.8)$$

В силу формулы (3.4) и теоремы о проекции вектора, умноженного на число, будем иметь:

$$\overline{a}(\lambda\overline{b}) = |a|\, np_a(\lambda\overline{b}) = |\overline{a}|\,\lambda np_a\overline{b} = \lambda\,|\overline{a}|\, np_a\overline{b} = \lambda\overline{a}\overline{b}\,.$$

4^0. Если векторы коллинеарны, то $\alpha = 0^0$ или $\alpha = 180^0$, $\cos\alpha = \pm 1$, поэтому

$(\overline{a},\overline{b}) = \pm |ab|$, в частности $(\overline{a},\overline{a}) = |\overline{a}||\overline{a}|\cos 0^0 = a^2$.

Выражение $(\overline{a},\overline{a})$ называется скалярным квадратом вектора $\overline{a}$ и обозначается $\overline{a^2}$, т.е. скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля. Длина вектора вычисляется по формуле $|\overline{a}| = \sqrt{\overline{a^2}}$.

5^0. Если один из векторов скалярного произведения равен нулю, то скалярное произведение равно нулю.

6^0. Если отличные от нуля векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю.

Доказательство. Действительно, если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ перпендикулярны, то угол $\alpha = 90^0$, а $\cos 90^0 = 0 \Rightarrow$

$$(\overline{a},\overline{b}) = |\overline{a}||\overline{b}|\cos 90^0 = 0 \text{ - в векторной форме,}$$

$$(\overline{a},\overline{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0 \text{ - в координатной форме.}$$

7^0. Скалярное произведение ортов $\overline{i},\overline{j},\overline{k}$, т.к. $\overline{i},\overline{j},\overline{k}$ - единичные векторы, то согласно свойству 4^0:

$$\overline{i^2} = 1, \quad \overline{j^2} = 1, \quad \overline{k^2} = 1,$$

а так как они попарно перпендикулярны, то по свойству 6^0:

$$(\overline{i},\overline{j}) = 0, \quad (\overline{i},\overline{k}) = 0, \quad (\overline{j},\overline{k}) = 0.$$

Для скалярного произведения ортов можно составить таблицу:

	$\overline{i}$	$\overline{j}$	$\overline{k}$
$\overline{i}$	1	0	0
$\overline{j}$	0	1	0
$\overline{k}$	0	0	1

§ 5. Приложение скалярного произведения

В геометрии и механике

Проекция вектора на ось.

Из формулы (3.5) следует, что

$$\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b} = \frac{(\bar{a},\bar{b})}{|\,\bar{a}\,|} \tag{3.9}$$

Угол между векторами.

Из определения скалярного произведения $(a,b) = |a||b|\cos\alpha$ следует, что

$$\cos\alpha = \frac{(a,b)}{|\,a\,||\,b\,|}\ . \tag{3.10}$$

Если векторы заданы своими координатами $\bar{a}(x_1;y_1;z_1)$; $\bar{b}(x_2;y_2;z_2)$, то формула (3.10) перепишется в таком виде:

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \tag{3.11}$$

Формула (3.11) определяет угол между двумя векторами в координатной форме.

Направление вектора.

Положив в формулах (3.10), (3.11) $\bar{b} = \bar{i}$ и заметив, что в этом случае $|\,b\,| = 1$; $x_2 = 1$; $y_2 = 0$; $z_2 = 0$, находим

$$\cos\alpha = \frac{(\bar{a},\bar{i})}{|\,\bar{a}\,|} \tag{3.12}$$

или

$$\cos\alpha = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} \tag{3.13}$$

где α - угол вектора $\bar{a}$ с осью Ох.

Аналогично, взяв $\bar{b} = \bar{j}$, $\bar{b} = \bar{k}$, получим

$$\cos\beta = \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{z_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} \tag{3.14}$$

Формулы (3.13), (3.14) дают возможность определять направляющие косинусы вектора (направление вектора) по его координатам.

Условие перпендикулярности векторов $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$.

Из свойств 6^0, 7^0 скалярного произведения следует, что равенство $(\overline{a}, \overline{b}) = 0$ есть необходимое и достаточное условие перпендикулярности отличных от нуля векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

В координатной форме это условие запишется так :

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0 \qquad (3.15)$$

Работа силы.

Если вектор $\overline{S} = \overline{OD}$ изображает перемещение материальной точки M под действием постоянной силы $\overline{F}$ (рис. 3.22),

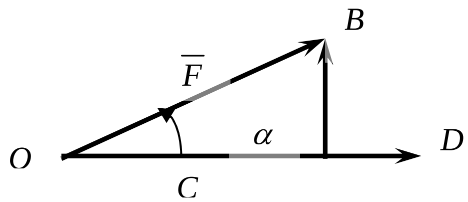


Рис. 3.22

то работа этой силы равна скалярному произведению вектора силы $\overline{F}$ на вектор перемещения S

$$A = |\overline{F}| \cdot |\overline{S}| \cos\alpha = (\overline{F}, \overline{S}) \qquad (3.16)$$

§ 6. Векторное произведение двух векторов

Определение 3.10. Векторным произведением вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ называется такой вектор $\overline{c}$, который

1) имеет модуль, равный $|\bar{c}| = |\bar{a}||\bar{b}|\sin\varphi$, где φ - угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$,

2) перпендикулярен к плоскости векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$,

3) направлен так, чтобы тройка векторов $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ была правой.

Обозначим символом $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{c}$ или $[\bar{a}, \bar{b}] = \bar{c}$.

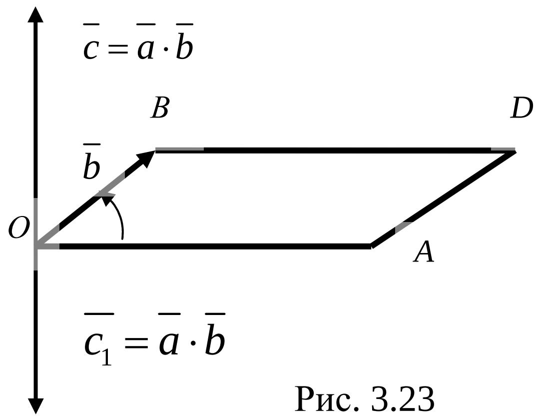


Рис. 3.23

Геометрический смысл векторного произведения: модуль векторного произведения численно равен площади параллелограмма *OADB*, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Свойства векторного произведения

1^0. От перестановки множителей векторное произведение меняет направление на противоположное, сохраняя модуль, т.е.

$$\bar{b} \cdot \bar{a} = -\bar{a} \cdot \bar{b}.$$

2^0. Если в векторном произведении изменить знак одного из сомножителей на противоположный, то произведение также изменит знак на противоположный, т.е.

$$\bar{a} \cdot (-\bar{b}) = -\bar{a} \cdot \bar{b}.$$

3^0. Векторное умножение обладает свойством сочетательности по отношению к скалярному множителю, т.е.

$$(\lambda \cdot \bar{a}) \cdot \bar{b} = \lambda \cdot (\bar{a} \cdot \bar{b}) \text{ и}$$

$$\bar{a}\cdot\left(\lambda\cdot\bar{b}\right)=\lambda\cdot\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right).$$

4^0. Векторное умножение подчиняется распределительному закону, т.е.

$$\left(\bar{a}+\bar{b}\right)\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot\bar{c}+\bar{b}\cdot\bar{c}.$$

5^0. Векторное произведение двух векторов равно нулю, если хотя бы один из сомножителей равен нулю.

6^0. Если отличные от нуля векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ параллельны, то их векторное произведение равно нулю.

Доказательство. Действительно, если $\bar{a}\neq 0$; $\bar{b}\neq 0$ и $\bar{a}\parallel\bar{b}$, то угол φ, между ними равен 0 или π. В силу определения векторного произведения

$\bar{a}\cdot\bar{b}=\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|\cdot\sin\varphi$, но $\sin 0=\sin\pi=0\Rightarrow\bar{a}\cdot\bar{b}=0$.

7^0. Если векторное произведение двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, отличных от нуля, равно нулю, то векторы параллельны.

Доказательство. Действительно, если $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$, а $\bar{a}\neq 0$; $\bar{b}\neq 0$, то $\bar{a}\cdot\bar{b}=\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|\cdot\sin\varphi=0$ при $\sin\varphi=0$, а это значит, что $\bar{a}\parallel\bar{b}$.

Вывод. Равенство нулю векторного произведения есть необходимое и достаточное условие коллинеарности не равных нулю векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

8^0. По свойству коллинеарности векторов $\bar{i}\cdot\bar{i}=0$; $\bar{j}\cdot\bar{j}=0$; $\bar{k}\cdot\bar{k}=0$.

Рассмотрим теперь произведение $\bar{i}\cdot\bar{j}$. Параллелограмм, построенный на ортах $\bar{i}$ и $\bar{j}$, есть квадрат *OADB*, площадь которого равна 1.

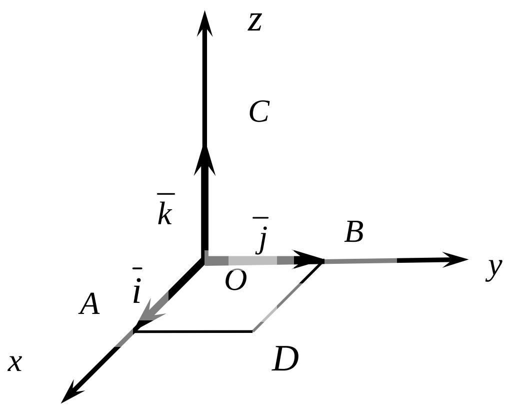


Рис. 3.24

Вектор $\overline{i} \cdot \overline{j}$ перпендикулярен векторам $\overline{i}$ и $\overline{j}$ и образует с ними правую тройку. Следовательно, произведение $\overline{i} \cdot \overline{j}$ есть единичный вектор, направленный по оси OZ, т.е.

$$\overline{i} \cdot \overline{j} = \overline{k}.$$

Аналогично находим, что $\overline{j} \cdot \overline{k} = \overline{i}$; $\overline{k} \cdot \overline{i} = \overline{j}$. Переставив множители в этих равенствах на основании переместительного свойства векторного произведения получим

$$\overline{j} \cdot \overline{i} = -\overline{k};\; \overline{k} \cdot \overline{j} = -\overline{i};\; \overline{i} \cdot \overline{k} = -\overline{j}.$$

Из этих формул следует, что векторное произведение двух любых смежных единичных векторов и последовательности $\overline{i},\ \overline{j},\ \overline{k},\ \overline{i},\ \overline{j}$ дает следующий вектором со знаком плюс, и обратной последовательности – со знаком минус. Это можно изобразить схемой

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \; + \\ i, j, k, i, j \\ - \; \longleftarrow \end{array}$$

Для векторного произведения ортов можно составить таблицу:

	$\overline{i}$	$\overline{j}$	$\overline{k}$
i	0	$\overline{k}$	$-\overline{j}$
j	$-\overline{k}$	0	$\overline{i}$
k	$\overline{j}$	$-i$	0

Векторное произведение векторов, заданных координатами

$$\overline{a}(x_1; y_1; z_1); \qquad \overline{b}(x_2; y_2; z_2)$$

тогда $$\overline{a} = x_1\overline{i} + y_1\overline{j} + z_1\overline{k}$$

$$\overline{b} = x_2\overline{i} + y_2\overline{j} + z_2\overline{k}.$$

Наличие распределительного и сочетательного законов для векторного умножения дает право произвести перемножение векторов

$$\left(x_1\bar{i}+y_1\bar{j}+z_1\bar{k}\right)\left(x_2\bar{i}+y_2\bar{j}+z_2\bar{k}\right)$$

по правилам умножения обычных многочленов с учетом свойств векторного умножения ортов.

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=\left(x_1\bar{i}+y_1\bar{j}+z_1\bar{k}\right)\left(x_2\bar{i}+y_2\bar{j}+z_2\bar{k}\right)=x_1x_2\left(\bar{i}\cdot\bar{i}\right)+y_1x_2\left(\bar{j}\cdot\bar{i}\right)+z_1x_2\left(\bar{k}\cdot\bar{i}\right)+$$
$$+x_1y_2\left(\bar{i}\cdot\bar{j}\right)+y_1y_2\left(\bar{j}\cdot\bar{j}\right)+z_1y_2\left(\bar{k}\cdot\bar{j}\right)+x_1z_2\left(\bar{i}\cdot\bar{k}\right)+y_1z_2\left(\bar{j}\cdot\bar{k}\right)+z_1z_2\left(\bar{k}\cdot\bar{k}\right)$$

Используя таблицу векторного произведения ортов, будем иметь

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=-y_1z_1\bar{k}+z_1x_2\bar{j}+x_1y_2\bar{k}-z_1y_2\bar{i}-x_1z_2\bar{j}+y_1z_2\bar{i}=\left(y_1z_2-z_1y_2\right)\bar{i}+\left(z_1x_2-x_1z_2\right)\bar{j}+\left(x_1y_2-y_1x_2\right)\bar{k}$$

Полученную формулу можно представить в виде символического определителя:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$$

Условие коллинеарности векторов в проекциях:

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}.$$

Приложение векторного произведения в геометрии и механике

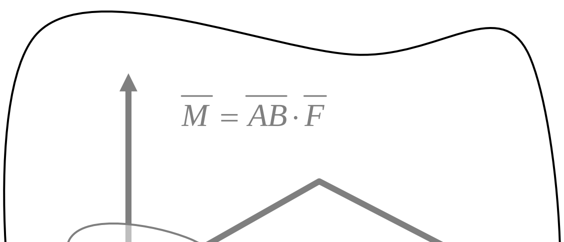
Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, равна модулю векторного произведения, т.е.

$$S_{\text{п}}=\bar{a}\cdot\bar{b}.$$

Площадь треугольника, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, равна

$$S_{\text{тр.}}=\frac{1}{2}\left|\bar{a}\cdot\bar{b}\right|.$$

Момент силы. Пусть точка A твердого тела неподвижно закреплена, а в точке B приложена сила $\bar{F}$.



При этом возникает вращающий момент, численно равный $\left|\overline{AB}\right|\left|\overline{F}\right|\sin\varphi$ - площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{F}$. В механике принято его называть моментом силы и обозначить вектором $\overline{M} = \overline{AB} \cdot \overline{F}$.

§7. Смешанное произведение трех векторов и выражение его через координаты сомножителей

Пусть даны векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$. Составим векторное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ и полученный вектор $\left[\overline{a} \cdot \overline{b}\right]$ умножим скалярно вектор $\overline{c}$. Произведение

$$\left(\overline{a} \cdot \overline{b}\right) \cdot \overline{c}$$

называется смешанным или векторно-скалярным произведением трех векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$.

Пусть векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ заданы своими координатами

$$\overline{a}\left(x_1; y_1; z_1\right); \quad \overline{b}\left(x_2; y_2; z_2\right); \quad \overline{c}\left(x_3; y_3; z_3\right).$$

Выразим смешанное произведение в координатах. Пусть $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{u}\left(x, y, z\right)$, тогда по формуле скалярного произведения двух векторов, заданных своими координатами, будем иметь

$$\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} = \overline{u} \cdot \overline{c} = xx_3 + yy_3 + zz_3 \tag{3.17}$$

Координаты векторного произведения $\overline{u} = \overline{a} \cdot \overline{b}$ равны

$$X = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \qquad Y = -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}; \qquad Z = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}. \tag{3.18}$$

Подставляя значения X, Y, Z из (3.18) в (3.17), получаем

$$\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\bar{c}=x_3\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}-y_3\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}+z_3\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}$$

или

$$\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & y_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}. \qquad (3.19)$$

Геометрический смысл смешанного произведения

Пусть векторы $\overline{OA}=\bar{a}$; $\overline{OB}=\bar{b}$ и $\overline{OC}=\bar{c}$ не компланарны и составляют правую тройку. Тогда вектор $\bar{u}=\bar{a}\cdot\bar{b}$ будет нормален в ту же сторону от плоскости *OADB*, что и вектор $\bar{c}$.

Определим объем *V* параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$.

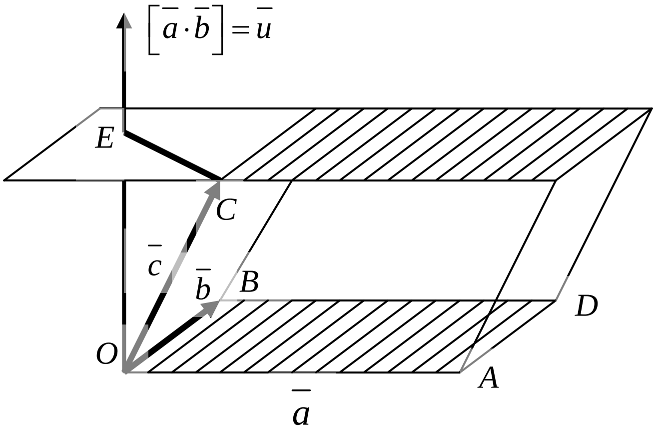


Рис. 3.26

$$V=S_{OADB}H \qquad (3.20)$$

$$S_{OADB}=\left|\bar{a}\cdot\bar{b}\right|=\left|\bar{u}\right|=u \qquad (3.21)$$

$$H=OE=\text{пр}_{\bar{u}}\bar{c} \qquad (3.22)$$

Подставляя (3.21) и (3.22) в (3.20), получаем

$V=u\,\text{пр}_{\bar{u}}\bar{c}=\bar{u}\cdot\bar{c}=\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\cdot\bar{c}$

Если векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ образуют левую тройку (например, если на рис. 3.26 вектор $\bar{c}$ будет направлен в противоположную сторону), то все рассуждения останутся теми же, но $\text{пр}_{\bar{u}}\bar{c}$ будет отрицательной, т.е.

$\text{H}=-\text{пр}_{\bar{u}}\bar{c}$,

поэтому

$$V=\pm\,\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c} \qquad (3.23)$$

(”+”, если тройка векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ - правая; “-“ - если левая).

Геометрический смысл: объем параллелепипеда построенного на трех некомпланарных векторах, равен абсолютной величине их смешанного произведения.

Свойства смешанного произведения

1^0. От перестановки двух сомножителей смешанное произведение меняет знак, сохраняя абсолютную величину.

Это свойство очевидно из представления смешанного произведения определителем в виде (3.19) и свойства определителей менять знак при перестановке двух строк или столбцов.

2^0. Операции скалярного и векторного умножения в смешанном произведении можно менять местами, т.е.

$$\left(\overline{a}\cdot\overline{b}\right)\cdot\overline{c}=\overline{a}\cdot\left(\overline{b}\cdot\overline{c}\right)$$

Доказательство. Действительно, по предыдущему

$$\left(\overline{a}\cdot\overline{b}\right)\cdot\overline{c}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}x_2 & y_2 & z_2\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\\ x_1 & y_1 & z_1\end{vmatrix}=\left(\overline{b}\cdot\overline{c}\right)\cdot\overline{a}=\overline{a}\cdot\left(\overline{b}\cdot\overline{c}\right)$$

В силу этого свойства смешанное произведение принято коротко записывать в виде $\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)$, или $\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}$, где опущены знаки действий и скобки, поскольку безразлично, какие два из рядом стоящих векторов перемножаются векторно.

3^0. Круговая перестановка трех множителей смешанного произведения не меняет его величину. Перестановка же двух соседних сомножителей меняет знак произведения на противоположный, т.е.

$$\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)=\left(\overline{b},\overline{c},\overline{a}\right)=\left(\overline{c},\overline{a},\overline{b}\right)=-\left(\overline{a},\overline{c},\overline{b}\right)=-\left(\overline{c},\overline{b},\overline{a}\right)=-\left(\overline{b},\overline{a},\overline{c}\right)\qquad(3.24)$$

Условие компланарности трех векторов

Очевидно, что смешанное произведение трех векторов может отобразиться в нуль в следующих случаях:

1) если среди множителей есть хоть один нуль-вектор;

2) если по крайней мере два из перемножаемых векторов коллинеарны (и значит их векторное произведение $\overline{a}\cdot\overline{b}=0$)

в частности $\quad (\overline{a},\overline{a},\overline{b})=(\overline{a},\overline{b},\overline{a})=(\overline{b},\overline{a},\overline{a},)=0$.

3) если три вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ компланарны (параллельны одной и той же плоскости), т.к. в этом случае вектор $(\overline{a}\cdot\overline{b})\perp\overline{c}$, и $\Rightarrow (\overline{a}\cdot\overline{b})\cdot\overline{c}=0$.

Объединяя все три случая, можно сказать, что $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})=0$, если векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ компланарны.

Теорема 3.5. Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ является равенство нулю их смешанного произведения.

$$(\overline{a},\overline{b},\overline{c})=0$$

или

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0 \qquad (3.25)$$

Последний результат непосредственно вытекает из геометрического смысла смешанного произведения, как объема параллелепипеда, построенного на ребрах $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$.

Двойное векторное произведение

Определение 3.11. Двойным векторным произведением называют выражение вида $\overline{a}\cdot(\overline{b}\cdot\overline{c})$ или $(\overline{a}\cdot\overline{b})\cdot\overline{c}$.

Запишем формулу, облегчающую вычисление такого произведения

$$\overline{a}\cdot(\overline{b}\cdot\overline{c})=\overline{b}\cdot(\overline{a},\overline{c})-\overline{c}\cdot(\overline{a},\overline{b}) \qquad (3.26)$$

$$(\overline{a}\cdot\overline{b})\cdot\overline{c}=\overline{b}\cdot(\overline{a},\overline{c})-\overline{a}\cdot(\overline{b},\overline{c}) \qquad (3.27)$$

Из формул (3.26) и (3.27) видно, что в двойном векторном произведении очень важно различать порядок перемножения. Так, в первом случае двойное векторное произведение дает вектор, компланарный с векторами $\bar{b}$ и $\bar{c}$, во втором - вектор, компланарный с векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

§8. *N – мерное векторное пространство*

Для построения общей теории систем линейных уравнений, для решения систем линейных дифференциальных уравнений, для решения задач линейного программирования необходимо ввести понятие многомерного векторного пространства.

Векторное пространства. Пусть дана совокупность R векторов $\bar{u}_1;\bar{u}_2;...;\bar{u}_k;...$.

Определение 3.12. Совокупность R векторов $\bar{u}_1;\bar{u}_2;...;\bar{u}_k;...$ называется векторным пространством (линейным), если выполняются следующие условия:

1) сумма двух векторов этой совокупности есть вектор той же совокупности, т.е., если $\bar{u}_i \in R$ и $\bar{u}_k \in R$, то $\bar{u}_1 + \bar{u}_k \in R$;
2) произведение любого вектора совокупности R на любое действительное число λ есть вектор той же совокупности, т.е., если $\bar{u}_k \in R$, то $\lambda \bar{u}_k \in R$;

При этом операции сложения и умножения на число обладают следующими свойствами:

1) сложение коммутативно, т.е.
$$\bar{u}_i + \bar{u}_k = \bar{u}_k + \bar{u}_i;$$
2) сложение ассоциативно, т.е.
$$\left(\bar{u}_i + \bar{u}_k\right) + \bar{u}_j = \bar{u}_i + \left(\bar{u}_k + \bar{u}_j\right)$$
3) $\exists$ единственный нулевой вектор $\bar{0}$ такой, что $\bar{u}_i + 0 = \bar{u}_i$ для всех векторов из R
4) для всякого $\bar{u}_i$ из R $\exists$ единственный противоположный вектор - $\bar{u}_i$ такой, что

$$\overline{u}_i + \left(-\overline{u}_i\right) = \overline{0}$$

Для любых векторов $\overline{u}_i$, $\overline{u}_k$ из R и любых действительных чисел α и β имеют место равенства:

5) $\alpha\left(\overline{u}_i + \overline{u}_k\right) = \alpha\overline{u}_i + \alpha\overline{u}_k$

6) $(\alpha + \beta)\overline{u}_i = \alpha\overline{u}_i + \beta\overline{u}_i$

7) $(\alpha\beta)\overline{u}_i = \alpha\left(\beta\overline{u}_i\right)$

8) $1 \cdot \overline{u}_i = \overline{u}_i$

Определение 3.13. Система векторов называется линейно-зависимой

$$\overline{u}_1,\ \overline{u}_2,\ \ldots,\ \overline{u}_n, \tag{3.28}$$

если можно найти постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_n$ одновременно не равные нулю, чтобы выполнялось тождественное равенство

$$C_1\overline{u}_1 + C_2\overline{u}_2 + \ldots + C_n\overline{u}_n = 0 \tag{3.29}$$

в противном случае система (3.28) будет линейно независимой. В случае линейной зависимости хотя бы один из векторов системы (3.28) является линейной комбинацией остальных векторов этой системы, т.е. хотя бы один из векторов системы (3.28) может быть разложен по направлениям других (не обязательно всех) векторов этой системы. Пусть, например, в выражении (3.29) $C_1 \neq 0$, тогда

$$\overline{u}_1 = -\frac{C_2}{C_1} \cdot \overline{u}_2 - \frac{C_3}{C_1} \cdot \overline{u}_3 - \ldots - \frac{C_n}{C_1} \cdot \overline{u}_n$$

Базис и координаты и n–мерном пространстве

Определение 3.14. Базисом в n–мерном пространстве R называют любую совокупность n линейно независимых векторов.

Например, в трехмерном пространстве за базис можно принять любые три вектора, не лежащие в одной плоскости.

Если в n–мерном пространстве R совокупность векторов $\bar{l}_1, \bar{l}_2, ..., \bar{l}_n$ выбрана за базис, то не трудно доказать, что всякий вектор $\bar{u}_i$ этого пространства R можно представить и притом единственным образом как линейную комбинацию векторов базиса.

Действительно, рассмотрим совокупность $n+1$ векторов $\bar{l}_1, \bar{l}_2, ..., \bar{l}_n, \bar{u}_i$. Так как пространство R n–мерное, то любые $n+1$ векторов, а значит и векторы рассматриваемой совокупности, в нем линейно зависимы, а поэтому справедливо тождество:

$$C_1\bar{l}_1 + C_2\bar{l}_2 + ...C_n\bar{l}_n + C_{n+1}\bar{u}_i = 0, \qquad (3.30)$$

где не все постоянные $C_1, C_2, ..., C_n, C_{n+1}$ равны нулю одновременно. Число C_{n+1} заведомо не равно нулю, так как если бы $C_{n+1} = 0$, то из тождества (3.30) следовало бы, что

$$C_1\bar{l}_1 + C_2\bar{l}_2 + ...C_n\bar{l}_n = 0, \qquad (3.31)$$

где не все $C_i \left(i = \overline{1,n}\right)$ равны нулю, а это невозможно, так как по условию векторы $\bar{l}_1, \bar{l}_2, ..., \bar{l}_n$ линейно независимы (в силу определения базиса). Деля тождество (3.30) на $C_{n+1} \neq 0$ и разрешая относительно, $\bar{u}_i$ получим

$$\bar{u}_i = a_{i1}\bar{l}_1 + a_{i2}\bar{l}_2 + ...a_{in}\bar{l}_n, \qquad (3.32)$$

где $a_{i1} = -\dfrac{c_1}{c_{n+1}}; \ a_{i2} = -\dfrac{c_2}{c_{n+1}}; \ ...; \ a_{in} = -\dfrac{c_n}{c_{n+1}}$.

Таким образом, мы доказали, что выбор $\bar{u}_i$ представим линейной комбинацией векторов базиса.

Теперь докажем, что такое разложение (3.32) единственно. Предположим, что наряду с разложением (3.32) имеется другое разложение для вектора $\bar{u}_i$:

$$\bar{u}_i = a'_{i1}\bar{l}_1 + a'_{i2}\bar{l}_2 + ... + a'_{in}\bar{l}_n \qquad (3.33)$$

Вычитая почленно (3.33) из (3.32), получим

$$0 = \left(a_{i1} - a'_{i1}\right)\bar{l}_1 + \left(a_{i2} - a'_{i2}\right)\bar{l}_2 + ...\left(a_{in} - a'_{in}\right)\bar{l}_n,$$

откуда в силу линейной независимости векторов базиса следует, что

$$a_{i1}-a'_{i1}=0;\;\; a_{i2}-a'_{i2}=0;\; ...;\; a_{in}-a'_{in}=0 \tag{3.34}$$

или $$a_{i1}=a'_{i1};\;\; a_{i2}=a'_{i2};\; ...;\; a_{in}=a'_{in},$$

а это и означает, что разложение произвольного вектора $\bar{u}_i$ по базису $\bar{l}_1,\ \bar{l}_2,\ ...,\ \bar{l}_n$ в виде (3.32) единственно.

Числа $a_{i1};\, a_{i2};\, ...;\, a_{in}$ называются координатами вектора $\bar{u}_i$ в базисе $\bar{l}_1,\ \bar{l}_2,\ ...,\ \bar{l}_n$.

Если $$\bar{u}_i=a_{i1}\bar{l}_1+a_{i2}\bar{l}_2+...+a_{in}\bar{l}_n=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\bar{l}_j$$ и

$$\bar{u}_k=a_{k1}\bar{l}_1+a_{k2}\bar{l}_2+...+a_{kn}\bar{l}_n=\sum_{j=1}^{n}a_{kj}\bar{l}_j,$$

то $$\bar{u}_i+\bar{u}_k=\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}+a_{kj}\right)\bar{l}_j;\qquad \lambda\bar{u}_i=\sum_{j=1}^{n}\lambda a_{ij}\bar{l}_j,$$ т.е.

1) координаты системы векторов равны суммам соответствующих координат слагаемых векторов;
2) при умножении вектора на число λ все координаты данного вектора умножаются на это число.

Линейная независимость векторов в координатах

Пусть задана система *n* векторов *n*–мерного пространства в базисе $\bar{l}_1,\ \bar{l}_2,\ ...,\ \bar{l}_n$

$$\begin{cases}\bar{u}_1=a_{11}\bar{l}_1+a_{12}\bar{l}_2+...+a_{1n}\bar{l}_n\\ \bar{u}_2=a_{21}\bar{l}_1+a_{22}\bar{l}_2+...+a_{2n}\bar{l}_n\\ \vdots\\ \bar{u}_n=a_{n1}\bar{l}_1+a_{n2}\bar{l}_2+...+a_{nn}\bar{l}_n\end{cases} \tag{3.35}$$

Составим матрицу из координат векторов системы (3.35)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (3.36)$$

Если ранг матрицы (3.36) равен *n*, то векторы системы (3.35) будут линейно независимыми.

Если же ранг матрицы (3.36) меньше *n*, то векторы системы (3.35) будут линейно зависимыми и для них будет иметь место равенство

$$C_1\overline{u}_1 + C_2\overline{u}_2 + \ldots + C_n\overline{u}_n = 0$$

где хотя один из коэффициентов $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n$ отличен от нуля.

§9. Характеристические числа и собственные векторы матрицы

Для отыскания преобразований подобия линейного преобразования $\overline{Y} = A\overline{X}$, нужно:

1) для матрицы преобразования

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

составить характеристическую матрицу

$$M = A - \lambda E = \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

где λ - скалярный параметр; а E – единичная матрица порядка *n*;

2) решая характеристическое уравнение

$$D(M)=\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}=0 \qquad (3.37)$$

относительно λ, найти все собственные значения $(\lambda=\lambda_i)$ матрицы A,

3) подставляя каждое из найденных значений $\lambda=\lambda_i$ в однородную систему

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda_i)x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda_i)x_2+...+a_{2n}x_n=0 \\ ---------------------- \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+...+(a_{nn}-\lambda_i)x_n=0 \end{cases} \qquad (3.38)$$

найти соответствующие значения $x_1^i,\ x_2^i,\ ...,\ x_n^i$ для X из матричного уравнения $AX=\lambda_i X$.

Теперь предположим, что переменные $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$, входящие в уравнения системы (3.38) являются координатами некоторого вектора $\overline{X}$ в n–мерном пространстве с произвольным базисом $\bar{l}_1,\ \bar{l}_2,\ ...,\ \bar{l}_n$.

Определение 3.15. Собственным вектором матрицы A (или данного линейного преобразования $\overline{Y}=A\overline{X}$), соответствующим собственному значению λ_i, называется ненулевой вектор с координатами $x_1^i,\ x_2^i,\ ...,\ x_n^i$ определяемыми из системы (3.38) при $\lambda=\lambda_i$.

Таким образом, если задано линейное преобразование $\overline{Y}=A\overline{X}$ ($\overline{Y}\{y_1;y_2;...;y_n\}$ и $\overline{\text{x}}\{x_1;x_2;...;x_n\}$) в базисе $\bar{l}_1,\ \bar{l}_2,\ ...,\ \bar{l}_n$), то вектор $\bar{x}$ называется собственным вектором этого преобразования, если для него $A\overline{X}=\lambda\overline{X}$.

Чтобы найти все собственные векторы данного линейного преобразования $\overline{Y}=A\overline{X}$, нужно прежде всего найти все действительные корни $(\lambda=\lambda_i)$ характеристического уравнения (3.37) матрицы A, затем из системы (3.38) при каждом $\lambda=\lambda_i$ найти соответствующие им собственные векторы рассматриваемого преобразования.

Без доказательства отметим два важных положения:

1. Собственные векторы, соответствующие попарно различным характеристическим числом матрицы A, всегда линейно независимыми.
2. Характеристический многочлен матрицы линейного преобразования не зависит от выбора базиса.

§10. Прямая линия на плоскости. Нормальное уравнение прямой

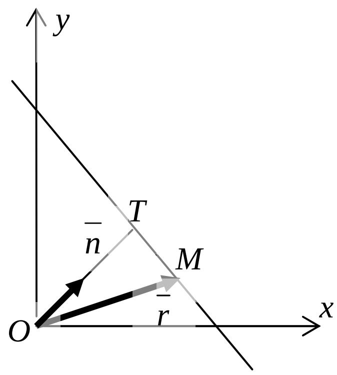


Рис. 3.27

Положение прямой на плоскости будет определено, если задать ее расстояние p от начала координат, т.е. длину перпендикуляра OT, опущенного из точки O на прямую, ее единичный вектор $\bar{n}$ перпендикулярный к прямой и выходящий из начала координат. Возьмем на прямой произвольную точку $M(x, y)$. Когда точка M движется по прямой, то ее радиус-вектор $\bar{r}$ меняется так, что все время связан некоторым условием. Очевидно, что для $\forall$ точки M, лежащей на прямой

$$\text{пр}_{\overline{\text{n}^0}}\overline{OM} = OT = p \qquad (3.39)$$

Это условие имеет место для всех точек прямой и нарушается, если точка M лежит вне прямой. Таким образом, равенство (3.39) выражает свойство, общее всем точкам прямой и только им. Согласно определению скалярного произведения векторов

$$\text{пр}_{\overline{\text{n}^0}}\overline{OM} = \overline{OM} \cdot \overline{n^0} = \bar{r} \cdot \overline{n^0}$$

и следовательно (3.39) может быть переписано

$$\bar{r} \cdot \overline{n^0} - p = 0 \qquad (3.40)$$

Уравнение (3.40) выражает условие, при котором точка М с радиус-вектором $\bar{r}$ лежит на данной прямой, и называется **нормальным** уравнением этой прямой.

Радиус-вектор $\bar{r}$ произвольной точки М прямой называется текущим радиус-вектором.

Уравнение (3.40) прямой записано в векторной форме. Переходя к координатам, заметим, что проекциями единичного вектора $\overline{n^0}$ на оси *Ox*, *Oy* являются $-\cos\alpha$ и $\sin\alpha$, где α - угол, составленный этим вектором с осью *Ox*, а проекциями $\bar{z}(x, y)$

$$\bar{n}(\cos\alpha, \sin\alpha).$$

Так как скалярное произведение векторов равно сумме произведений одноименных проекций, то уравнению (3.40) соответствует

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \qquad (3.41)$$

Уравнение (3.41) – уравнение прямой в координатной форме.

Всякая прямая может быть представлена уравнением первой степени относительно текущих координат.

§11. Общее уравнение прямой

В предыдущем параграфе было доказано, что всякая прямая может быть представлена уравнением 1-ой степени. Но справедливо обратное: всякое уравнение первой степени между двумя переменными определяет на плоскости прямую.

$$Ax + By + C = 0 \qquad (3.42)$$

общее уравнение прямой.

Определение 3.16. Всякий вектор, отличный от нулевого, перпендикулярный к прямой, называется **нормальным вектором прямой**. Тогда вектор $\bar{n}(A, B)$ - один из нормальных векторов. Таким образом, **коэффициенты *A*, *B* имеют следующий геометрический смысл:** они являются проекциями нормального вектора на координатные оси. Свободный член *C* геометрического смысла не имеет, но если его разделить на длину вектора $\overline{n}$ и взять этот результат по абсолютной величине, то получим расстояние прямой от начала координат.

Чтобы привести общее уравнение прямой к нормальному виду, надо его разделить на длину вектора $\overline{n}(A,B)$, взятую со знаком “+”, если свободный член C отрицательный, и со знаком “-”, если $C>0$. Другими словами, для приведения общего уравнения (3.42) к виду (3.41) нужно умножить его на множитель

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}, \qquad (3.43)$$

причем знак множителя следует взять противоположным знаку свободного члена C в уравнении (3.42) (*при C = 0 знак множителя выбирается произвольно*). Множитель μ носит название нормирующего множителя. После умножения на μ уравнение (3.42) примет вид

$$\mu Ax + \mu By + \mu C = 0$$

и совпадает с нормальным уравнением (3.41). Следовательно

$$\mu A = \cos\alpha; \quad \mu\beta = \sin\alpha; \quad \mu C = -p.$$

Подставив найденное по формуле (3.43) значение μ в последние равенства, получим

$$\cos\alpha = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}; \quad \sin\alpha = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}; \quad p = \mp\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

В этих формулах надо брать верхние знаки, если $C<0$ и нижние – в противном случае.

Уравнение прямой, проходящей через некоторую точку

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.$$

Пример 3.1. Уравнение прямой $3x+4y-10=0$ привести к нормальному виду

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 2 = 0$$

$$\cos\alpha = \frac{3}{5}; \quad \sin\alpha = \frac{4}{5}; \quad p = \frac{10}{5} = 2.$$

Уравнение (3.42) называется <u>полным</u>, если *A*, *B* и *C* отличны от нуля . Если же хотя бы один из них равен 0, то уравнение называется неполным. Рассмотрим возможные случаи неполных уравнений:

1) $C = 0$ $Ax + By = 0$ определяет прямую, проходящую через начало координат.

2) $A = 0$; $B \neq 0$; $C \neq 0$ уравнение $By + C = 0 \Leftrightarrow y = -\dfrac{C}{B}$ определяет прямую, перпендикулярную к вектору $\overline{n} = (O, B)$, параллельному оси *Y*. Если $C = 0$, то это ось *OX*.

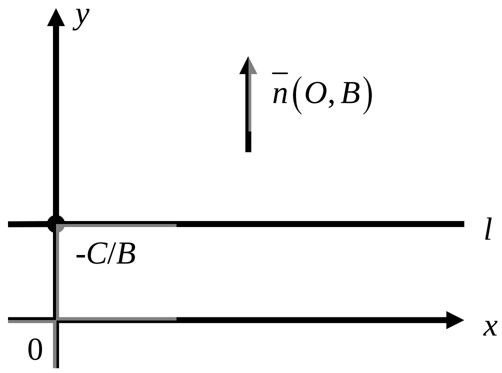


Рис. 3.28

3) при $B = 0$; $A \neq 0$; $C \neq 0$ уравнение $Ax + C = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{C}{A}$ задает прямую, перпендикулярную к вектору $\overline{n} = (A, O)$, параллельному оси *X*. Если $C = 0$, то $x = 0$ определяет ось *Y*.

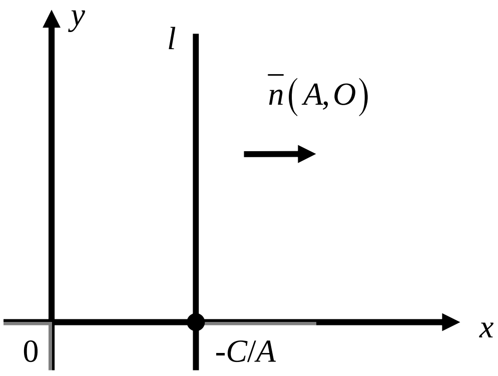


Рис. 3.29

§12. Уравнение прямой с угловыми коэффициентами

Уравнение

$$y = kx + b \tag{3.44}$$

называется уравнением прямой с угловым коэффициентом k.

При $x = 0$ из уравнения (3.44) получаем $y = b$, т.е. b - направленный отрезок, отсекаемый прямой на оси *Y*. Уравнение (3.44) можно получить из общего уравнения (3.42) при $B \neq 0$. Действительно, из (3.42) имеем

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Обозначив $-\frac{A}{B} = k$; $\quad -\frac{C}{B} = b$, придем к уравнению (3.44).

Угловой коэффициент k прямой $y = kx + b$ численно равен тангенсу угла наклона этой прямой к оси *X*, т.е.

$$k = tg\alpha,$$

где α - угол между прямой l и положительной полуосью *X*. Он называется углом наклона прямой *l* к оси *X*.

Пусть прямая (3.44) проходит через точку $M_0 = (x_0, y_0)$, т.е.

$$y_0 = kx_0 + b.$$

Вычтя это равенство из (3.44), получим

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{3.45}$$

Уравнение (3.45) называется уравнением прямой с угловым коэффициентом, проходящим через заданную точку $M_0 = (x_0, y_0)$.

§13. Каноническое уравнение прямой

Положение прямой l на плоскости XY также однозначно определено, если известны точка $M_0 = (x_0, y_0) \in l$ и вектор $\overline{a} = (m, n) \parallel l$. Вектор $\overline{a}$ - называется направляющим вектором прямой. По этим данным составим уравнение прямой l. Пусть $M = (x, y)$ - произвольная точка прямой l. Тогда вектор $M_0M = (x - x_0, y - y_0)$, лежащий на этой прямой, коллинеарен вектору $\overline{a}$. Теперь, используя условие коллинеарности векторов, получаем соотношение

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}. \tag{3.46}$$

Уравнение (3.46) называется каноническим уравнением прямой на плоскости.

§14. Параметрические уравнения прямой

В силу коллинеарности векторов $\overline{M_0M}$ и $\overline{a}$ $\exists$ $t \in R$ такое, что $\overline{M_0M} = t\overline{a}$ или $(x - x_0, y - y_0) = t(m, n)$, следовательно $x - x_0 = tm$; $y - y_0 = tn$.

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt \end{cases} \qquad t \in R \tag{3.47}$$

Уравнение (3.47) – параметрическое уравнение прямой на плоскости, проходящей через точку $M_0 = (x_0, y_0)$ с направляющим вектором $\overline{a} = (m, n)$.

§15. Уравнение прямой, проходящей через две точки

Составим уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

$M_0=(x_0,y_0)$ и $M_1=(x_1,y_1)$. В этом случае направляющий вектор прямой - вектор $\bar{a}=\left(\overline{M_0M_1}\right)=(x_1-x_0,y_1-y_0)$. Используя уравнение (3.45), получаем

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}, \tag{3.48}$$

Уравнение (3.48) называется уравнением прямой, проходящей через две данные точки $M_0=(x_0,y_0)$ и $M_1=(x_1,y_1)$.

§16. *Уравнение прямой в отрезках*

Составим уравнение прямой, проходящей через точки $M_0=(a,0)$ и $M_1=(0,b)$, где $a\neq 0,\ \ b\neq 0$.

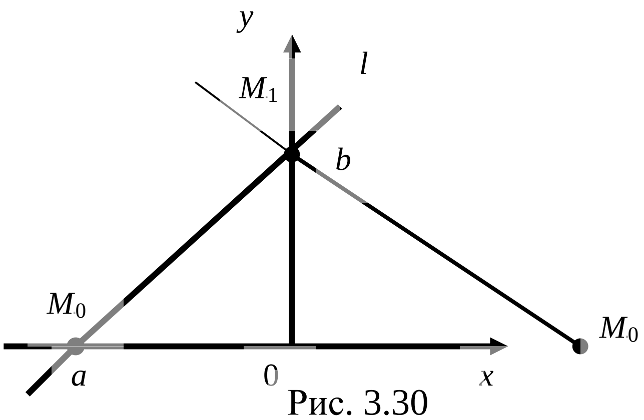


Рис. 3.30

Согласно уравнению (3.48), получим

$$\frac{x-a}{-a}=\frac{y}{a} \quad\Rightarrow\quad xb+ya=ab.$$

Разделив это равенство на $ab\neq 0$, будем иметь

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \tag{3.49}$$

где a и b - величины направленных отрезков, которые прямая отсекает на осях координат. Уравнение (3.49) называется уравнением прямой в отрезках на осях.

Пример 3.2. Какие отрезки отсекает на осях координат прямая $3x-2y-12=0$.

Приведем наше уравнение к виду (3.49)

$$3x-2y=12$$

$$\frac{3x}{12}-\frac{2y}{12}=1$$

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{-6}=1$$

$$a = 4; \quad b = -6$$

§17. Условие параллельности и перпендикулярности прямых

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \qquad A_2x + B_2y + C_2 = 0 \tag{3.50}$$

в векторной форме $\overline{n_1} = \lambda \overline{n_2}$

$$\overline{n}_1 = (A_1, B_1); \quad \overline{n}_2 = (A_2, B_2)$$

- нормальные векторы прямых (3.50).

$$A_1 = \lambda A_2; \quad B_1 = \lambda B_2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \tag{3.51}$$

- условие параллельности двух прямых.

Определение 3.17. Углом между двумя прямыми будем называть $\forall$ из двух смежных углов, образованных этими прямыми, угол φ определяется согласно формуле угла между двумя векторами

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \tag{3.52}$$

В случае перпендикулярности прямых (3.50) угол между ними равен 90^0, т.е. $\cos\varphi = 0 \Rightarrow$ (3.52) $\Rightarrow$ условие перпендикулярности двух прямых

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0. \tag{3.53}$$

§18. Расстояние от точки до прямой

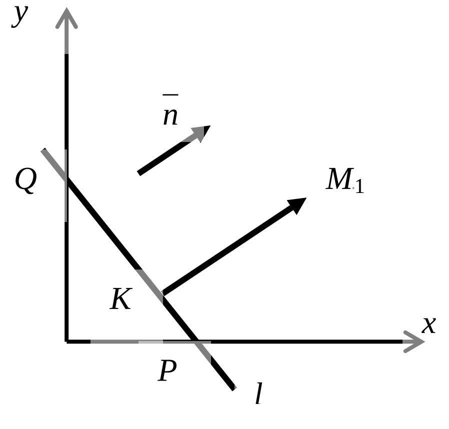


Рис. 3.31

Пусть требуется найти расстояние от точки $M_1(x_1, x_2)$ до прямой $Ax + By + C = 0$.

Опустим из точки M_1 перпендикуляр M_1K на данную прямую l, тогда расстояние d от точки

M_1 до прямой l будет равно модулю $\overline{KM_1}$. Так как $\overline{KM_1}$ и нормальный вектор $\overline{n}(A,B)$ перпендикулярны между собой, то их скалярное произведение $\overline{n}\cdot\overline{KM_1}=\pm|n|d$.

Обозначая через $K(x_0,y_0)$ и выражая скалярное произведение через проекции векторов, получим

$$A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)=\pm|n|d.$$

В левой части равенства раскроем скобки, прибавим и вычтем C.

$$Ax_1+By_1+C-(Ax_0+By_0+C)=\pm|n|d. \qquad (3.54)$$

Так как $K(x_0,y_0)\in l$, то

$$Ax_0+By_0+C=0,$$

следовательно (3.54) примет вид

$$Ax_1+By_1+C=\pm|n|d \quad \Rightarrow$$

$$d=\pm\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (3.55)$$

Таким образом, чтобы найти расстояние от точки до прямой, нужно в левой части общего уравнения прямой подставить вместо текущих координат координаты данной точки, взять это по абсолютной величине и разделить на длину нормального вектора прямой.

Пример 3.3. Найти расстояние точки $M_1(1,7)$ от прямой $3x-4y+5=0$.

$$d=\frac{|3\cdot1-4\cdot7+5|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|-20|}{5}=4.$$

§19. Плоскость. Общее уравнение плоскости

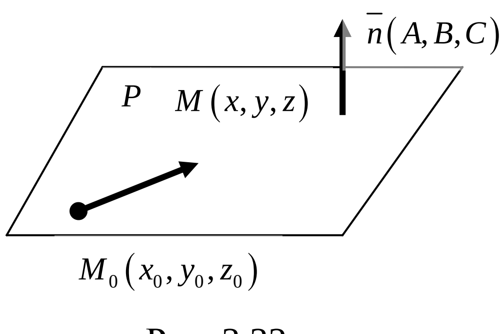


Рис. 3.32

Положение плоскости P в пространстве определено, если известно точка $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in P$ и ненулевой вектор $\overline{n} = (A, B, C) \perp P$. Вектор $\overline{n}$ называется нормальным вектором плоскости. По этим данным составим уравнение плоскости *P*.

Пусть $M = (x, y, z)$ произвольная точка плоскости. Тогда

$$\overline{M_0 M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \perp \overline{n}(A, B, C),$$

т.е.
$$\left(\overline{n}, \overline{M_0 M}\right) = 0 \tag{3.56}$$

или в координатной форме

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{3.57}$$

Соотношению (3.57) удовлетворяют координаты тех и только тех точек пространства, которые принадлежат плоскости *P*. Оно $\Rightarrow$ и является искомым уравнением этой плоскости и **называется уравнением плоскости с нормальным вектором** $\overline{n} = (A, B, C)$ и проходит через $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Уравнение (3.56) называется уравнением плоскости в векторной форме. Раскрыв скобки в (3.57), получим

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{3.58}$$

где свободный член $D = -Ax_0 - By_0 + Cz_0$.

Уравнение (3.58) называется общим уравнением плоскости с нормальным вектором $\overline{n} = (A, B, C)$.

§20. Уравнение плоскости, параллельной двум данным векторам

Положение плоскости в пространстве также определено единственным образом, если известны два неколлинеарных вектора $\overline{a_1} = (m_1, n_1, p_1)$, $\overline{a_2} = (m_2, n_2, p_2)$, параллельных плоскости, и точка, через которую эта плоскость проходит. По этим данным составим уравнение

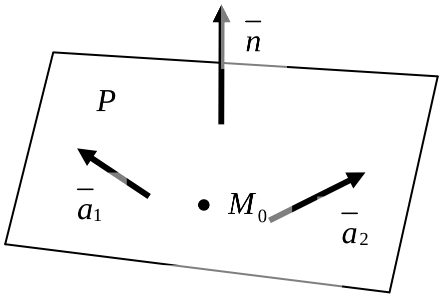


Рис. 3.33

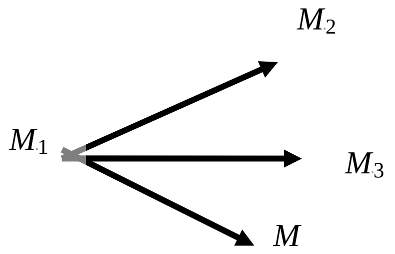


Рис. 3.34

плоскости P. В качестве нормального вектора возьмем $\overline{n}(a_1, a_2)$ перпендикулярный к $\overline{a}_1$ и $\overline{a}_2$, а значит и к плоскости P.

Выберем произвольную точку $M = (x, y, z)$ плоскости P, тогда $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, $\overline{a}_1$ и $\overline{a}_2$ компланарны, следовательно

$$\left(\overline{M_0M}, \overline{a}_1, \overline{a}_2\right) = 0 \tag{3.59}$$

- смешанное произведение.

Равенству (3.59) удовлетворяют координаты только тех точек пространства, которые принадлежат P. Следовательно уравнение (3.59) является уравнением искомой плоскости.

Воспользовавшись формулой смешанного произведения в координатной форме, из уравнения (3.59) получим

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0, \tag{3.60}$$

которое является уравнением плоскости, параллельной векторам $\overline{a_1} = (m_1, n_1, p_1)$ и $\overline{a_2} = (m_2, n_2, p_2)$ и проходящей через $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

§21. Уравнение плоскости, проходящей через три точки

Известно, что точки $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $M_3 = (x_3, y_3, z_3)$ однозначно определяют положение плоскости P в пространстве. Составим ее уравнение.

Пусть $M = (x, y, z)$ - произвольная точка плоскости P, тогда

$$\overline{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$$

$$\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$

$$\overline{M_1M_3} = \left(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\right)$$

компланарны и значит $\left(\overline{M_1M}, \overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}\right) = 0$ или

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3.61)$$

Равенство (3.61) – уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1,\ M_2,\ M_3$.

§22. *Уравнение плоскости в отрезках*

Составим уравнение плоскости *P*, проходящей через точки $A\left(a,0,0\right)$, $B = \left(0,b,0\right)$ и $C\left(0,0,c\right)$, где $a \neq 0,\ \ b \neq 0,\ \ c \neq 0$.

Согласно (3.61), уравнение этой плоскости имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad bc\left(x - a\right) + acy + abz.$$

Разделив полученное равенство на $abc \neq 0$, получим

$$\frac{x - a}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$$

или

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \qquad (3.62)$$

Уравнение (3.62) называется уравнением плоскости в отрезках.

Здесь числа $a,\ b,\ c$ не что иное, как величины направленных отрезков, которые плоскость *P* отсекает на осях координат *X*, *Y*, *Z*.

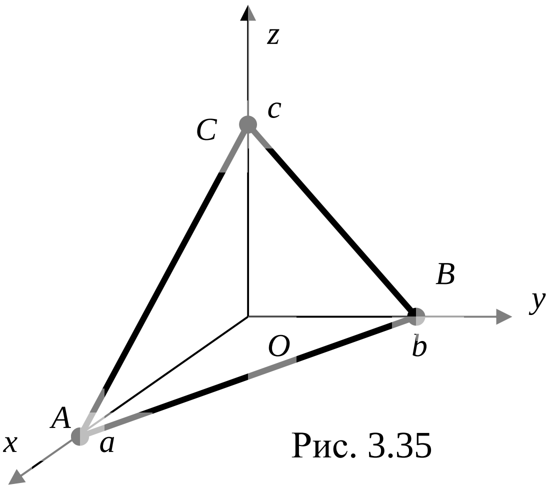


Рис. 3.35

§23. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей

Пусть две плоскости P_1 и P_2 заданы своими общими уравнениями

$$P_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$P_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \qquad (3.63)$$

Если плоскости (3.63) параллельны, то параллельны и их нормальные векторы $\overline{n_1} = (A_1, B_1, C_1)$ и $\overline{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$. Отсюда, учитывая условие параллельности векторов, получим условие параллельности двух плоскостей

$$P_1 \parallel P_2 \Leftrightarrow \overline{n_1} \parallel \overline{n_2} \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \qquad (3.64)$$

Если $P_1 \perp P_2$, то $\overline{n_1} \perp \overline{n_2}$. Следовательно

$$(\overline{n_1}, \overline{n_1}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \qquad (3.65)$$

§24. Угол между двумя векторами

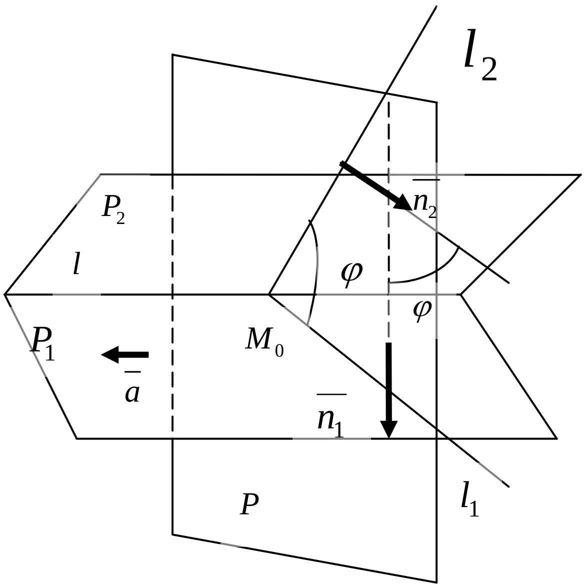


Рис. 3.36

Если коэффициенты A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2 плоскостей P_1 и P_2 не пропорциональны, то P_1 и P_2 пересекается по некоторой прямой *l*. Проведем плоскость $P \perp l$. Эта плоскость пересекается с P_1 и P_2 по прямым l_1 и l_2. Угол φ между l_1 и l_2 называется углом между плоскостями P_1 и P_2. Поскольку $\overline{n_1} \perp P_1$ и $\overline{n_2} \perp P_2$, то угол между векторами равен углу между плоскостями.

$$\cos\varphi = \cos\left(\overline{n_1} \hat{,} \overline{n_2}\right) = \frac{\left(\overline{n_1}, \overline{n_2}\right)}{\left|\overline{n_1}\right| \cdot \left|\overline{n_2}\right|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{3.66}$$

§25. Нормальное уравнение плоскости. Расстояние от точки до плоскости

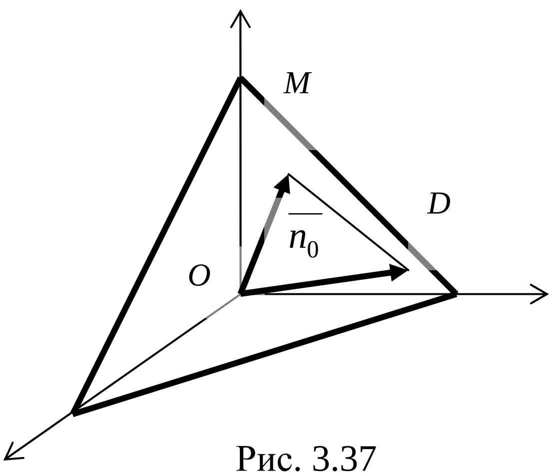


Рис. 3.37

Пусть $\overline{n_0}$ - единичный вектор нормали к плоскости *P*, проведенный к ней из начала координат. Тогда его координатами будут

$$\overline{n_0} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

Если $M(x, y, z)$ - произвольная точка плоскости *P* с *r* – вектором $\overline{r} = (x, y, z)$, то $\text{пр}_{\overline{n_0}} r = p$, где *p* – длина перпендикуляра *OD*. Но так как вектор $\overline{n_0}$ - единичный, то $\text{пр}_{\overline{n_0}} r = \left(r, \overline{n_0}\right)$. Следовательно

$$\left(r, \overline{n_0}\right) - p = 0, \quad p \geq 0. \qquad (3.67)$$

Уравнение (3.67) называется нормальным уравнением плоскости в векторной форме.

Очевидно, что при $p = 0$ плоскость проходит через начало координат. В координатной форме уравнение (3.67) запишется в виде

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \qquad (3.68)$$

Пусть плоскость *P* задана общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$ с нормальным вектором $\overline{n} = (A, B, C)$.

Направляющие косинусы

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \quad \cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \quad \cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Так как $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Тогда, умножив обе части общего уравнения плоскости на $\dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, получим

(обозначим $n = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$)

$$\frac{A}{|n|}x + \frac{B}{|n|}y + \frac{C}{|n|}z + \frac{D}{|n|} = 0.$$

Таким образом, чтобы привести общее уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$ к нормальному виду (3.68), следует это уравнение умножить на нормирующий множитель $\mu = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, где знак выбирается противоположным знаку свободного члена *D*.

В результате общее уравнение примет нормальный вид $\dfrac{Ax + By + Cz + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$.

Напомним, что расстояние ρ от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $p: Ax + By + Cz + D = 0$ называется длина перпендикуляра, проведенного из этой точки на плоскость *P*.

Повторив дословно рассуждения, проведем при выводе формулы расстояния от точки до прямой на плоскости, получим

$$\rho = \left| x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p \right| = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (3.69)$$

Итак, расстояние от точки до плоскости равно абсолютной величине результата подстановки координат точки в левую часть нормального уравнения плоскости.

§26. Прямая в пространстве. Канонические и параметрические уравнения прямой

Прямая *l* в пространстве определяется однозначно, если:

1) известна точка, через которую она проходит и ненулевой вектор, параллельный прямой, называемый направляющим вектором этой прямой;
2) или известны две точки этой прямой.

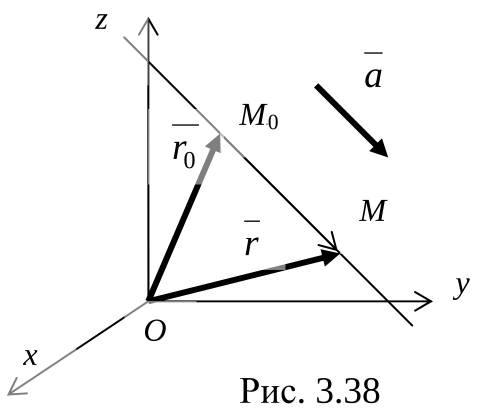


Рис. 3.38

Пусть заданы точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и ненулевой вектор $\bar{a}(m, n, p)$. Составим уравнение прямой *l*, проходящей через точку M_0 с направляющим вектором $\bar{a}$. Если $M(x, y, z)$ - произвольная точка прямой *l*, то вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ коллинеарен вектору $\bar{a}$. Из условия коллинеарности векторов, получаем

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}, \qquad (3.70)$$

которым удовлетворяют координаты любой точки *l*.

Уравнение (3.70) называется каноническими уравнениями прямой в пространстве.

Из рисунка следует

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \overline{M_0M} \qquad (3.71)$$

В силу коллинеарности векторов $\bar{a}$ и $\overline{M_0M}$ $\exists\ t \in R$ такое, что $\overline{M_0M} = t\bar{a}$, тогда из уравнения (3.71) имеем

$$\bar{r} \div \overline{r^0} + t\bar{a}. \tag{3.72}$$

Уравнение (3.72) называется векторным параметрическим уравнением прямой в пространстве. В координатной форме уравнение (3.72) равносильно

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt, \qquad t \in R \\ z = z_0 + pt \end{cases} \tag{3.73}$$

Уравнения (3.73) – параметрические уравнения прямой в пространстве.

Исключая параметр t из уравнений (3.73), легко перейти к каноническим уравнениям (3.70).

§27. Уравнение прямой, проходящей через две точки

$$M_0 = (x_0, y_0, z_0),\ \ M_1 = (x_1, y_1, z_1)$$

Направляющий вектор прямой $\overline{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$.

Тогда используя (3.70), получаем

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}. \tag{3.74}$$

§28. Общие уравнения прямой в пространстве

Прямую в пространстве можно однозначно определить пересечением двух плоскостей

$$\left.\begin{matrix} P_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ P_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{matrix}\right\} \tag{3.75}$$

нормальные векторы $\bar{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\bar{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ которых непараллельны. Уравнения (3.75) называются общими уравнениями прямой в пространстве.

Возникает вопрос: как от общих уравнений (3.75) прямой перейти к ее каноническим уравнениям вида (3.70) или к параметрическим уравнениям прямой (3.73)?

Пусть l - прямая, определяемая уравнениями (3.75). Тогда вектор, ортогональный к векторам $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$, коллинеарен прямой l. Следовательно, в качестве направляющего вектора прямой l можно взять вектор

$$\bar{a} = \left[\bar{n}_1, \bar{n}_2\right] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right). \tag{3.76}$$

Координаты некоторой точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ прямой можно найти, решив систему уравнений (3.75) с тремя неизвестными. Так как P_1 и P_2 непараллельны по условию, то один из определителей второго порядка в (3.76) обязательно отличен от 0. Пусть, к примеру $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$, тогда, перенеся в уравнениях (3.75) слагаемые с неизвестной переменной z и свободные члены в правую часть, найдем x и y, например, по формулам Крамера. При этом x и y выразятся через z. Придав теперь z конкретное числовое значение, получим соответствующие значения x и y, т.е. тем самым определим точку $(x_0, y_0, z_0) \in l$.

Пример 3.4. Пусть прямая задана уравнениями

$$\begin{cases} x + 3y + 2z - 5 = 0 \\ 5x + y + 2z + 3 = 0 \end{cases}.$$

Найти ее канонические и параметрические уравнения.

Решение. Направляющий вектор данной прямой согласно (3.76)

$$\bar{a}\left(\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \right) = (4;8;-14)$$

Так как $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, то для нахождения $M_0(x_0, y_0, z_0)$ прямой уравнения приведем к виду

$$\begin{cases} x + 3y = 5 - 2z \\ 5x + y = -3 - 2z \end{cases},$$

$$\left.\begin{array}{l} x+3y=5-2z \\ -14y=-28+8z \end{array}\right\}.$$

Полагая, например, $z=0$ из данной системы найдем $y_0=2; \quad x_0=-1$.

По формулам (3.70) записываем искомые канонические уравнения

$$\frac{x+1}{4}=\frac{y-2}{8}=-\frac{z}{14},$$

следовательно $$\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{4}=-\frac{z}{7}.$$

Параметрические уравнения $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=2+4t \\ z=-7t \end{cases}.$

§29. Условие параллельности двух прямых

Дано:

$$l_1: \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$$

$$l_2: \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

с направляющими векторами $\overline{a}_1=(m_1,n_1,p_1)$; $\overline{a}_2=(m_2,n_2,p_2)$ соответственно. Параллельность этих двух прямых означает коллинеарность их направляющих векторов. Поэтому

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \overline{a}_1 \parallel \overline{a}_2 \;\Leftrightarrow\; \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}. \tag{3.77}$$

§30. Условие параллельности (перпендикулярности) прямой и плоскости

Если прямая $l: \dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p}$ с направляющим вектором $\overline{a} = (m, n, p)$ параллельна (перпендикулярна) плоскости P: $Ax + By + Cz + D = 0$ с нормальным вектором $\overline{n} = (A, B, C)$, то как следует из рис. 3.39

$$l \parallel P \iff \overline{a} \perp \overline{n} \iff mA + An + pC = 0, \tag{3.78}$$

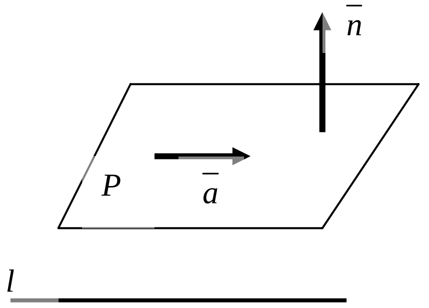


Рис. 3.39

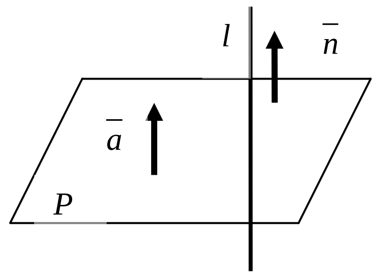


Рис. 3.40

а согласно рис. 3.40

$$l \parallel P \iff \overline{a} \,||\, \overline{n} \iff \frac{m}{A} = \frac{n}{B} = \frac{p}{C}. \tag{3.79}$$

§31. Угол между прямой и плоскостью

Определение 3.18. Углом между прямой l и плоскостью P называется угол ψ, образованный прямой l и ее проекцией l_1 на плоскость P.

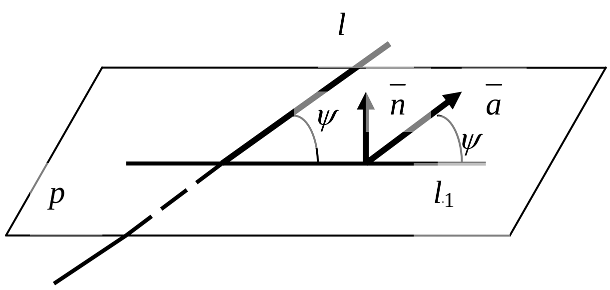


Рис. 3.41

Очевидно, что этот угол не может превышать $\dfrac{\pi}{2}$. Если прямая l задана каноническими уравнениями (3.70), а P общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, то

$$\cos\left(\overline{n},\overline{a}\right)=\frac{\left|\left(\overline{n},\overline{a}\right)\right|}{\left|\overline{n}\right|\left|\overline{a}\right|}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right)=\sin\psi\ . \qquad (3.80)$$

Здесь выражение для $\sin\psi$ взято по модулю, т.к. $\sin\psi\geq 0$ для $0\leq\psi\leq\frac{\pi}{2}$.

§32. Расстояние от точки до прямой в пространстве

Пусть требуется найти расстояние $\rho\left(M,l\right)$ от данной точки $M=\left(x,y,z\right)$ до данной прямой $l:\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$, проходящей через точку $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$, с направляющим вектором $\overline{a}=\left(m,n,p\right)$. Из рисунка следует, что искомое расстояние

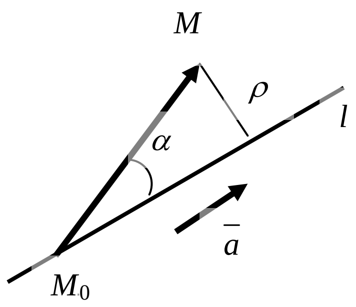


Рис. 3.42

$$\rho=\rho\left(M,l\right)=\left|M_0M\right|\sin\alpha=\left|M_0M\right|\sin\left(M_0\hat{M},a\right) \qquad (3.81)$$

Согласно определению векторного произведения

$$\sin\left(M_0\hat{M},a\right)=\frac{\left|\left[M_0M,a\right]\right|}{\left|M_0M\right|\cdot\left|a\right|}.$$

Подставив это выражение в (3.81), получим

$$\rho\left(M,l\right)=\frac{\left|\left[\overline{M_0M},\overline{a}\right]\right|}{\left|\overline{a}\right|}. \qquad (3.82)$$

§33. Расстояние между скрещивающимися прямыми

Определение 3.19. Две прямые

$$l_1 : \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$$

$$l_2 : \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$$

называются **скрещивающимися**, если они непараллельны и не пересекаются, т.е. они не лежат в одной плоскости.

Определение 3.20. Расстоянием $\rho(l_1;l_2)$ между скрещивающимися прямыми l_1 и l_2 называется длина перпендикуляра d, проведенного из одной прямой на другую. Заметим, что этот перпендикуляр параллелен вектору $[a_1,a_2]$, где $\bar{a}_1 = (m_1, n_1, p_1)$; $\bar{a}_2 = (m_2, n_2, p_2)$ - направляющие векторы прямых l_1 и l_2 соответственно. Для отыскания искомого расстояния $d = \rho(l_1, l_2)$ проведем плоскость P_2 через прямую l_2, параллельную направляющим векторам $\overline{a_1}$ и $\overline{a_2}$ прямых l_1 и l_2. Уравнение этой плоскости в силу равенства (3.60) имеет вид

$$\begin{vmatrix} x_0-x_2 & y_0-y_2 & z_0-z_2 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.83)$$

где $M_2 = (x_2, y_2, z_2) \in l_2$.

Разложим определитель по первой строке

$$\begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}(x-x_2) - \begin{vmatrix} m_1 & p_1 \\ m_2 & p_2 \end{vmatrix}(y-y_2) + \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}(z-z_2) = 0. \qquad (3.84)$$

Определим теперь расстояние от точки $M_1 = (x_1, y_1, z_1) \in l_1$ до плоскости (3.84), равное $\rho(l_1;l_2)$. Согласно формуле (3.69)

$$\rho(l_1,l_2) = \frac{\left| \begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}(x-x_2) - \begin{vmatrix} m_1 & p_1 \\ m_2 & p_2 \end{vmatrix}(y-y_2) + \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}(z-z_2) \right|}{\sqrt{\begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_1 & p_1 \\ m_2 & p_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2}}$$

$$d = \left|\text{пр}_{\bar{n}} \overline{M_1 M_2}\right| = \frac{\left|\overline{M_1 M_2} \cdot \bar{n}\right|}{\left|\bar{n}\right|},$$

$$\bar{n} = \bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2 = \begin{vmatrix} \bar{c} & \bar{j} & \bar{k} \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}. \qquad (3.85)$$

РАЗДЕЛ 4. КРИВЫЕ И ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§1. Полярные координаты на плоскости и их связь с декартовыми

В полярной системе координат некоторую точку плоскости принимают за полюс *O*. Из полюса проводится луч *Ox*, который называется полярной осью. Выбирается единица масштаба (рис. 4.1).

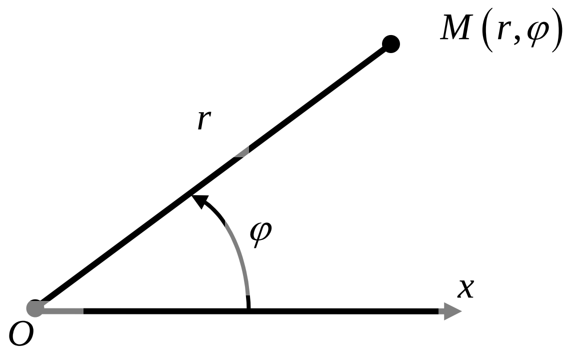


Рис. 4.1

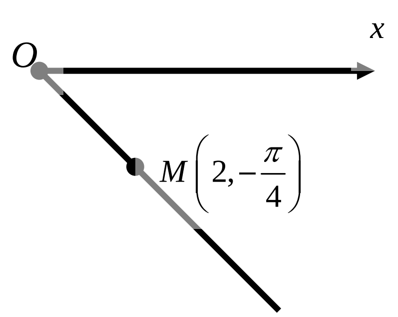
Пусть *M* какая-либо точка плоскости. Расстояние $OM = r$ точки *M* от полюса *O* ($r \geq 0$) называется полярным радиусом точки *M*, а угол φ между осью *Ox* и вектором $\overrightarrow{OM}$ называется полярным углом.

Угол φ принято брать либо в пределах $0 \leq \varphi < 2\pi$, либо $-\pi < \varphi \leq \pi$.

Числа r и φ определяют положение единственной точки *M* на плоскости: φ указывает направление луча *OM* точки *M*, а величина r - положение точки *M* на этом луче. Верно и обратное: каждой точке плоскости соответствует единственная пара чисел r и φ, которые и называют полярными координатами точки *M* и записывают $M(r, \varphi)$.

Для полюса $r = 0$, а угол φ не определен.

Пример 4.1. Построить точку $M(2,-\pi/4)$.



Строим луч под углом $\varphi = -\pi/4$ к оси *Ox*, на нем откладываем от полюса отрезок $OM = r = 2$. Построенная точка *M* и есть искомая (рис. 4.2).

Связь между полярными координатами (r, φ) точки M и её декартовыми координатами (x,y) устанавливается, если за начало координат прямоугольной системы взять полюс O, а за ось абсцисс - полярную ось (рис. 4.3).

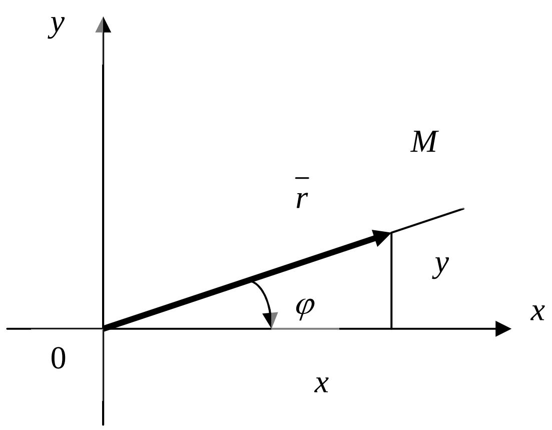


Рис. 4.3

Известно, что

$$x = np_{ox}\overline{OM} = \left|\overline{OM}\right|\cos\varphi = r\cos\varphi\,,$$

$$y = \text{пр}_{oy}\overline{OM} = \left|\overline{OM}\right|\sin\varphi = r\sin\varphi\,,$$

т.е $$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (4.1)$$

Чтобы найти выражение полярных координат через декартовы, возведём каждое равенство (4.1) в квадрат и сложим их почленно.

Получим $x^2 + y^2 = r^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)$, т.е. $x^2 + y^2 = r^2$, откуда $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Разделив почленно второе равенство системы (4.1) на первое, получим $tg\varphi = \dfrac{y}{x}$, т.е. имеем

$$\left.\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg\varphi &= \frac{y}{x} \end{aligned}\right\} \qquad (4.2)$$

Для выбора угла φ, определяемого формулой $tg\varphi = \dfrac{y}{x}$, нужно учитывать, в какой четверти находится заданная точка.

Замечание 4.1. Иногда удобно рассматривать полярные координаты r и φ, которые изменяются в пределах $-\infty < r < \infty$, $-\infty < \varphi < \infty$. При этом нарушается взаимно однозначное соответствие между точками плоскости и парами чисел (r,φ), т.к. луч OM составляет с осью Ox не только угол φ, но и угол $\varphi + 2\pi k$, $k \in Z$. Построение точки M в этом случае производится следующим образом. Проводится из полюса ось под углом φ к полярной оси и откладывается от полюса отрезок длины $|r|$ в положительном направлении построенной оси, если $r > 0$, и в направлении, противоположном положительному, если $r < 0$.

§2. Уравнения линии на плоскости

Пусть дана линия на плоскости и задана некоторая декартова или полярная система координат.

Уравнением данной линии называется такое уравнение между переменными x и y или r и φ, которому удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на этой линии, и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не лежащей на ней.

В общем виде эти уравнения записывают $F(x,y)=0$ или $\Phi(r,\varphi)=0$, где x и y, r и φ – текущие координаты точки линии.

Для составления уравнения линии нужно взять на ней произвольную точку и, исходя из свойств линии, установить зависимость между координатами этой точки .

Возможны случаи, когда уравнение не определяет никакую линию, определяет несколько линий ,точку или совокупность точек.

Например, уравнению $x^2 + y^2 + 5 = 0$ соответствует пустое множество. Уравнению $x^2 + y^2 = 0$ удовлетворяет единственная точка $x = 0$, $y = 0$.

Векторно-параметрическое и параметрические уравнения линии.

Пусть в R_3 дана некоторая линия L и задана декартова система координат $Oxyz$.

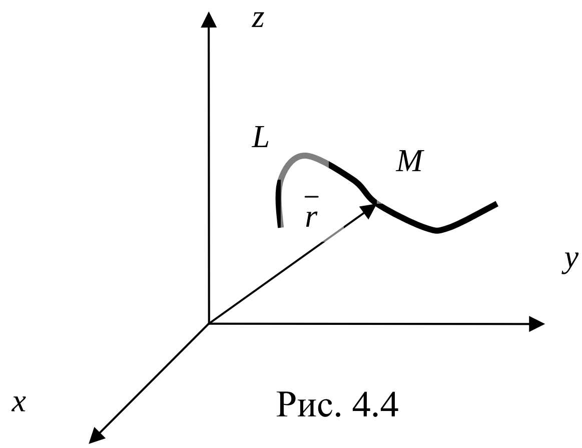


Рис. 4.4

Положение произвольной точки M данной линии определяется ее радиус- вектором $\bar{r} = \overline{OM}$. При движении точки по линии радиус – вектор $\bar{r}$ меняется . Выразив $\bar{r}$ через некоторый скалярный параметр t, получим

$$\bar{r} = \bar{r}(t) \tag{4.3}$$

Уравнение (4.3) назовем векторно-параметрическим уравнением линии L в пространстве в системе координат $Oxyz$.

Аналогично определяется векторно-параметрическое уравнение линии на плоскости в системе координат Oxy.

Если x, y, z - координаты вектора $\bar{r}$ в рассматриваемой системе координат ,то уравнение (4.3) равносильно следующим уравнениям :

$$\left.\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{array}\right\}, \tag{4.4}$$

которые называются параметрическими уравнениями линии в пространстве.

Если линия расположена на плоскости, то ее праметрические уравнения имеют вид :

$$\left.\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}\right\}. \tag{4.5}$$

Исключив из уравнений (4.4), (4.5) параметр t (если это возможно), получим уравнения , связывающие x и y, в виде $F(x, y) = 0$.

Замечание 4.2. Одна и та же линия может быть задана различными параметрическими уравнениями . Например, две пары уравнений определяют одну и ту же линию

$$\left.\begin{matrix} x = t + 1 \\ y = 2t - 1 \end{matrix}\right\} \quad \text{и} \quad \left.\begin{matrix} x = t - 3 \\ y = 2t - 9 \end{matrix}\right\}.$$

Исключив параметр *t*, получим одно и то же уравнение $y - 2x + 3 = 0$.

Примеры построения кривых по их уравнениям.

1. Построить кривую, заданную в полярной системе координат уравнением $r = a(1 + \cos\varphi)$, где $a > 0$ (кардиода).

Функция $r = a(1 + \cos\varphi)$ является периодической с периодом 2π. Поэтому достаточно давать φ значения на интервале $[-\pi, \pi]$. Значения φ и r приведены в таблице 1.

Таблица 1.

φ	0	$\pm\frac{\pi}{6}$	$\pm\frac{\pi}{4}$	$\pm\frac{\pi}{3}$	$\pm\frac{\pi}{2}$	$\pm\frac{2\pi}{3}$	$\pm\frac{3\pi}{4}$	$\pm\frac{5\pi}{6}$	$\pm\pi$
r	$2a$	$\approx 1{,}9a$	$\approx 1{,}7a$	$1{,}5a$	a	$0{,}5a$	$\approx 0{,}3a$	$\approx 0{,}1a$	0

Построив в полярной системе координат точки с соответствующими координатами и соединив их плавной линией получим линию, график которой называется кардиоидой.

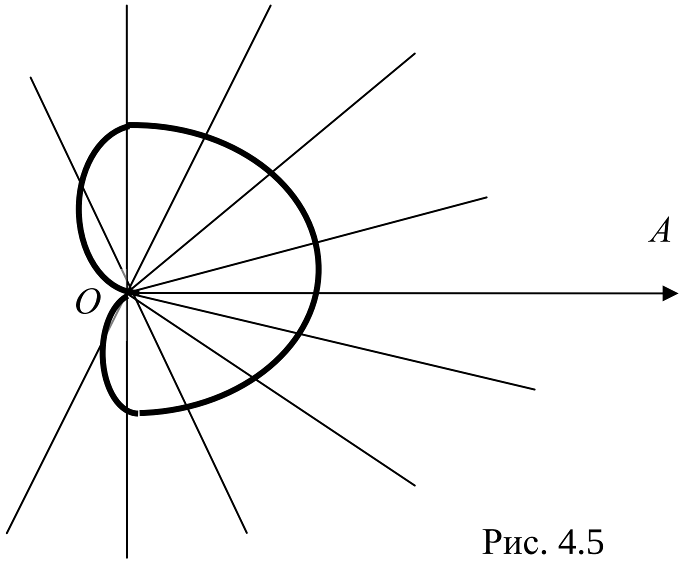


Рис. 4.5

2. Построить кривую, заданную параметрическими уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x &= a(t-\sin t) \\ y &= a(1-\cos t) \end{aligned}\right\}, \qquad \text{где } a > 0.$$

Для построения кривой дадим параметру t некоторые значения в интервале $[0, 2\pi]$ и найдем соответствующие значения x и y (таблица 2). График этой кривой называется циклоидой.

Таблица. 2

t	x	y
0	0	0
$\pi/4$	$a\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\approx 0{,}1a$	$a\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\approx 0{,}3a$
$\pi/2$	$a\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\approx 0{,}6a$	a
$3\pi/4$	$a\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\approx 1{,}6a$	$a\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\approx 1{,}7a$
π	$\pi a \approx 3{,}1a$	$2a$

$5\pi/4$	$a\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\approx 4,6a$	$a\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\approx 1,7a$
$3\pi/2$	$a\left(\frac{3\pi}{2}+1\right)\approx 5,7a$	a
$7\pi/4$	$a\left(\frac{7\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\approx 6,2a$	a
2π	$2\pi a\approx 6,3a$	0

В декартовой прямоугольной системе координат построим точки с найденными координатами, а затем соединим их плавной линией. Получим кривую в интервале от 0 до $2\pi a$. Если давать параметру t значения, разность которых 2π, то y будет получать одинаковые значения, а значения x будут отличаться на $2\pi a$. Следовательно, кривая имеет период $2\pi a$. (рис. 4.6)

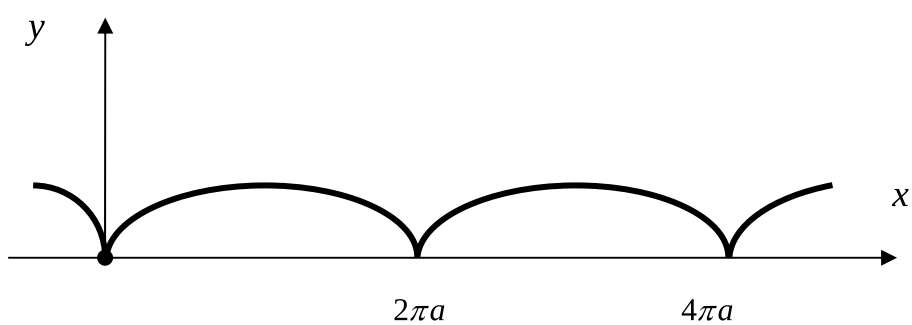


Рис. 4.6

§ 3. Кривые второго порядка

Линией второго порядка или кривой второго порядка называется линия, определяемая в декартовой системе координат уравнением второй степени, т.е. уравнением

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0,$$

где хотя бы один из коэффициентов A, B, С отличен от нуля, т.е. $A^2+B^2+C^2\neq 0$.

В этой главе рассмотрим следующие линии второго порядка: эллипсы, гиперболы, параболы .

Эллипс

Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух данных точек F_1 и F_2, называемых фокусами эллипса, есть величина постоянная, большая расстояния между фокусами.

Выберем декартову прямоугольную систему координат следующим образом: ось абсцисс проведем через фокусы в направлении от F_2 к F_1, а начало в середине отрезка F_2F_1. Расстояние между фокусами обозначим через $2c$, тогда фокусы имеют координаты $F_2(-c;0)$, $F_1(c;0)$. Сумму расстояний от любой точки эллипса до его фокусов обозначим через $2a$. Тогда из определения эллипса следует $a > c$.

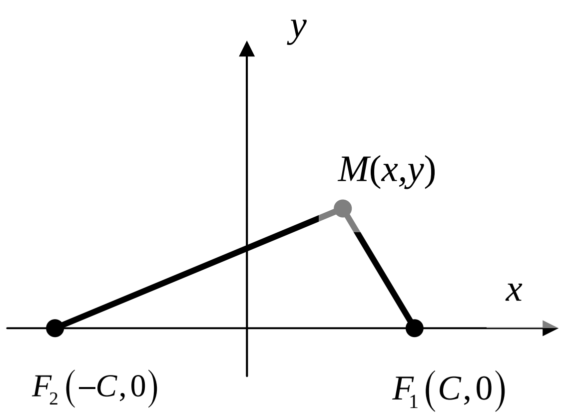


Рис. 4.7

Пусть $M(x,y)$ – произвольная точка эллипса. По определению эллипса, для любой точки эллипса и только для точек эллипса выполняется равенство:

$$|MF_1| + |MF_2| = 2a \qquad (4.6)$$

Так как $|MF_1| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$; $|MF_2| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$; то подставив их значения в равенство (4.6), получим

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \qquad (4.7)$$

Это уравнение является уравнением эллипса.

Для упрощения уравнения (4.7) запишем его в виде

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} .$$

Возведя обе части уравнения в квадрат, получим

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$$

или

$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx \tag{4.7'}$$

После повторного возведения в квадрат, уравнение примет вид

$$a^2\left(x^2+2cx+c^2+y^2\right)=a^4+2a^2cx+c^2x^2$$

или

$$\left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2=a^2\left(a^2-c^2\right).$$

Так как $a>c,$ то $a^2-c^2>0$. Обозначим $b=\sqrt{a^2+c^2}$. Число b действительное и $0<b\le a$.

Имеет место соотношение $c^2=a^2-b^2$.

Тогда можно записать $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$. Разделив обе части этого уравнения на a^2b^2 $\left(a\ne 0,\quad b\ne 0\right)$, получим

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{4.8}$$

Докажем, что уравнение (4.8) является уравнением эллипса, т.е. эквивалентно уравнению (4.7). Это не очевидно, так как уравнение (4.8) получено двукратным возведением в квадрат уравнения (4.7).

Возьмем точку $M\left(x,y\right),$ координаты которой удовлетворяют уравнению (4.8), и покажем, что для нее выполняется условие

$$\left|MF_1\right|+\left|MF_2\right|=2a.$$

Для этой точки имеем $y=\pm\frac{b}{a}\cdot\sqrt{a^2-x^2}$

$$\left|MF_1\right|=\sqrt{\left(x-c\right)^2+y^2}=\sqrt{\left(x-c\right)^2+\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)}.$$

Учитывая соотношение $b^2 = a^2 - c^2$, получаем $\left|MF_1\right| = \frac{\left|a^2 - cx\right|}{a}$. Выражение $a^2 - cx > 0$, так как $c < a$ и $|x| \le a$. Тогда $\left|a^2 - cx\right| = a^2 - cx$ и $\left|MF_1\right| = \frac{a^2 - cx}{a}$.

Аналогично, $\left|MF_2\right| = \frac{a^2 + cx}{a}$, тогда $\left|MF_1\right| + \left|MF_2\right| = \frac{a^2 - cx}{a} + \frac{a^2 + cx}{a} = 2a$. Итак, точка $M\left(x, y\right)$ принадлежит эллипсу.

Уравнение (4.8) называется каноническим уравнением эллипса, а числа a и b – полуосями эллипса:

a - большой полуосью, b – малой, r_1 и r_2 - расстояния от точки эллипса $M\left(x, y\right)$ до фокусов $F_1(c;0)$ и $F_2(-c;0)$. В равенстве (4.7') $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a + \frac{c}{a}x$. Но $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = r_2$, следовательно $r_2 = a + \frac{c}{a}x$.

Так как $r_1 + r_2 = 2a$, то $r_1 = 2a - r_2 = a - \frac{c}{a}x$.

r_1 и r_2 называют фокальными радиусами. Если положить

$$\frac{c}{a} = \varepsilon, \tag{4.9}$$

то формулы для фокальных радиусов имеют вид

$$r_1 = a - \varepsilon x \tag{4.10}$$

$$r_2 = a + \varepsilon x. \tag{4.11}$$

Построение эллипса по его уравнению

Рассмотрим каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (0 < b \le a)$$

и построим кривую, соответствующую этому уравнению.

В уравнение эллипса координаты x и y входят в четных степенях, следовательно, эллипс симметричен относительно осей координат и начала координат.

Построим часть эллипса, расположенную в первой координатной четверти. Для этой четверти $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. Из этого равенства видно, что $0 \le x \le a$. Точек эллипса, у которых $x > a$ не существует . С возрастанием x от нуля до a значения y убывает от b до нуля. На рис.4.8 изображена кривая, которая является частью эллипса, расположенного в первой четверти. Методами дифференциального исчисления можно доказать, что кривая обращена выпуклостью вверх. Учитывая симметрию кривой, построим весь эллипс (рис.4.9)

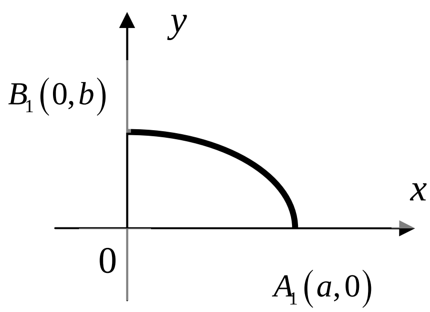


Рис. 4.8

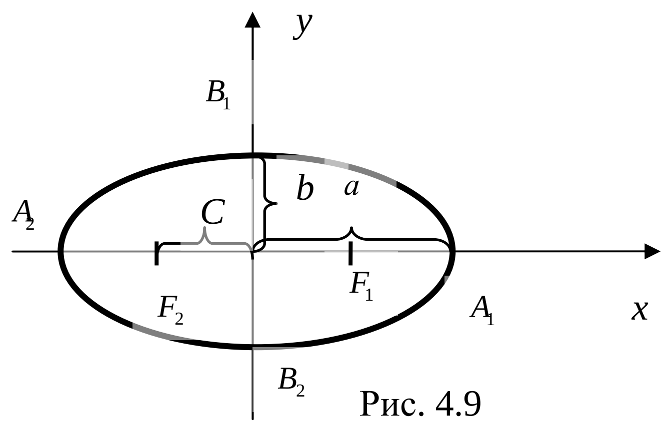


Рис. 4.9

Точка пересечения осей симметрии эллипса (центр симметрии) называется центром эллипса. Центр эллипса, задаваемого каноническим уравнением, находится в начале координат. Точки $A_1(a,0)$, $A_2(-a,0)$, $B_1(0,b)$, $B_2(0,-b)$, т.е. точки пересечения эллипса с осями симметрии, называются вершинами эллипса.

Отрезок A_1A_2, а также его длина $2a$ называются большой осью эллипса, отрезок B_1B_2, а также его длина $2b$ - малой осью.

Фокусы F_1 и F_2 находятся на оси Ox между вершинами A_1 и A_2 эллипса , т. к. $c < a$.

Легко убедиться, что уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ \text{где}\ a<b,$$

также является уравнением эллипса. Фокусы такого эллипса находятся на оси Oy.

Если $a = b$, то каноническое уравнение примет вид

$$x^2+y^2=a^2.$$

Этому уравнению соответствует окружность радиуса a с центром в начале координат.

Эксцентриситет.

Отношение полуфокусного расстояния c к большой полуоси a называется эксцентриситетом эллипса и обозначается

$$\varepsilon=\frac{c}{a} \tag{4.12}$$

Т.к. $c < a$, то эксцентриситет эллипса меньше 1. Для окружности $c=\sqrt{a^2-b^2}=0$, следовательно, $\varepsilon=0$. Значит для эллипса $0 < \varepsilon < 1$.

Формулу для ε можно представить в виде

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

Отсюда видно , что чем отношение $\dfrac{b}{a}$ ближе к 1, тем ближе эксцентриситет эллипса к нулю и тем ближе форма эллипса к окружности. Если эксцентриситет возрастает, то эллипс делается все более вытянутым.

§4. Гипербола

Гиперболой называется множество точек плоскости, обладающих следующим свойством: модуль разности расстояний от любой точки этого множества до двух данных точек плоскости есть величина постоянная, меньшая расстояние между данными точками и отличная от нуля.

Данные точки F_1 и F_2 называются фокусами. Расстояние между ними обозначим через $2c$, а модуль разности расстояний от любой точки гиперболы до фокусов – через $2a$. Согласно определению гиперболы, $0 < a < c$.

Выберем систему координат таким же образом, как и при выводе уравнения эллипса (рис. 4.10)

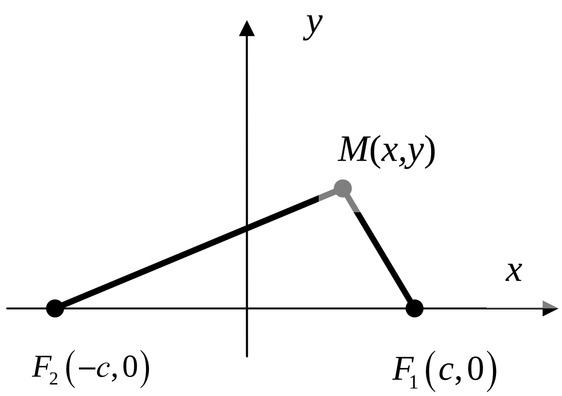


Рис. 4.10

Для любой точки $M(x,y)$ гиперболы (и только для точек гиперболы) будет справедливо равенство

$$\left|\,|MF_2| - |MF_1|\,\right| = 2a \qquad (4.13)$$

или $\quad |MF_2| - |MF_1| = \pm 2a$

т.к. $\quad |MF_2| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$; $|MF_1| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, то для точек гиперболы имеем

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a\,.$$

Освободившись от иррациональности так, как это мы делаем для эллипса, получим

$$\left(a^2 - c^2\right)x^2 + a^2 y^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right).$$

Так как $a < c$, то $c^2 - a^2 > 0$. Введем обозначение $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, b будет действительным числом, отличным от нуля. Имеет место соотношение $c^2 = a^2 + b^2$. Используя введенное обозначение, запишем уравнение гиперболы в виде

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2$$

или

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{4.14}$$

Так же, как и для эллипса, можно доказать, что для любой точки $M(x,y)$, координаты которой удовлетворяют уравнению (4.14), выполняется условие (4.13). Следовательно, это уравнение является уравнением гиперболы. Уравнение (4.14) называют каноническим уравнением гиперболы.

Построение гиперболы по ее уравнению

Рассмотрим каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Гипербола симметрична относительно осей координат, а также относительно точки $O(0;0)$, так x и y входят в уравнение в четных степенях.

Построим часть гиперболы, которая расположена в первой координатной плоскости, для точек из этой четверти

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Отсюда видно, что для точек этой части гиперболы $x \geq a$. При $x = a$ ордината $y = 0$, поэтому точка $A(a;0)$ принадлежит гиперболе. С возрастанием x значения y также возрастают, и точка $M(x;y)$ кривой при этом неограниченно удаляется как от оси Ox, так и от оси Oy. Кривая обращена вверх выпуклостью (это можно доказать методами дифференциального исчисления) (рис. 4.11).

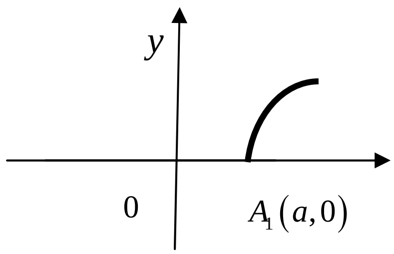


Рис. 4.11

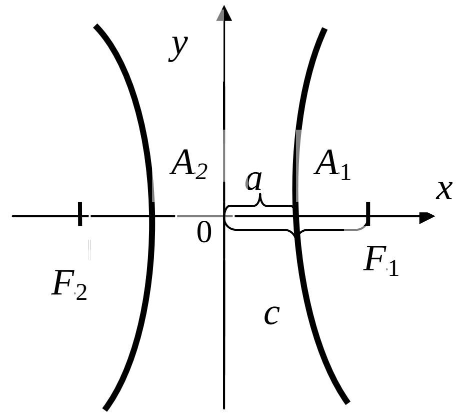


Рис. 4.12

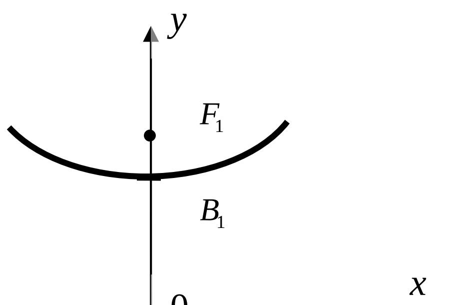
Используя симметрию гиперболы, строим гиперболу в остальных частях (рис. 4.12). Гипербола состоит из двух частей, называемых ветвями.

Точка пересечения осей симметрии гиперболы (центр симметрии) называется её центром.

Точки $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$, которые являются точками пересечения гиперболы с её осью симметрии Ox, называются вершинами гиперболы. Со второй осью симметрии Oy гипербола не пересекается.

Отрезок A_1A_2, а также его длина $2a$ называются действительной осью гиперболы. Действительная полуось a - это расстояние от центра гиперболы до одной из её вершин. Число $2b$ называют мнимой осью гиперболы, b - мнимой полуосью.

Фокусы F_1 и F_2 расположены на оси Ox.



Рассуждая аналогично, приходим к выводу, что уравнению

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$

соответствует гипербола, изображенная на рис. 4.13. В этом случае вершины гиперболы $B_1(0;b)$ и $B_2(0;-b)$, а также фокусы $F_1(0,c)$ и $F_2(0,-c)$ расположены на оси Oy. Для этой гиперболы b - действительная полуось, a - мнимая полуось. Если $a=b$, то гипербола называется равносторонней.

Асимптоты гиперболы

Асимптотой кривой называется прямая, обладающая следующим свойством: расстояние от точки кривой до этой прямой стремится к нулю, когда точка движется по кривой так, что расстояние от нее до начала координат стремится к бесконечности. Из этого определения следует, что асимптоты могут быть только у кривых, имеющих бесконечные ветви.

Рассмотрим гиперболу, заданную уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Покажем, что прямые

$$y=\pm\frac{b}{a}x \tag{4.15}$$

являются её асимптотами.

Вследствие симметрии гиперболы относительно осей координат достаточно показать, что прямая $y=\frac{b}{a}x$ является асимптотой части кривой, расположенной в первой координатной четверти. Уравнение этой части гиперболы имеет вид

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

Возьмем на ней произвольную точку $M(x_0, y_0)$ и найдем расстояние d от этой точки до прямой $y = \frac{b}{a}x$ (рис. 4.14):

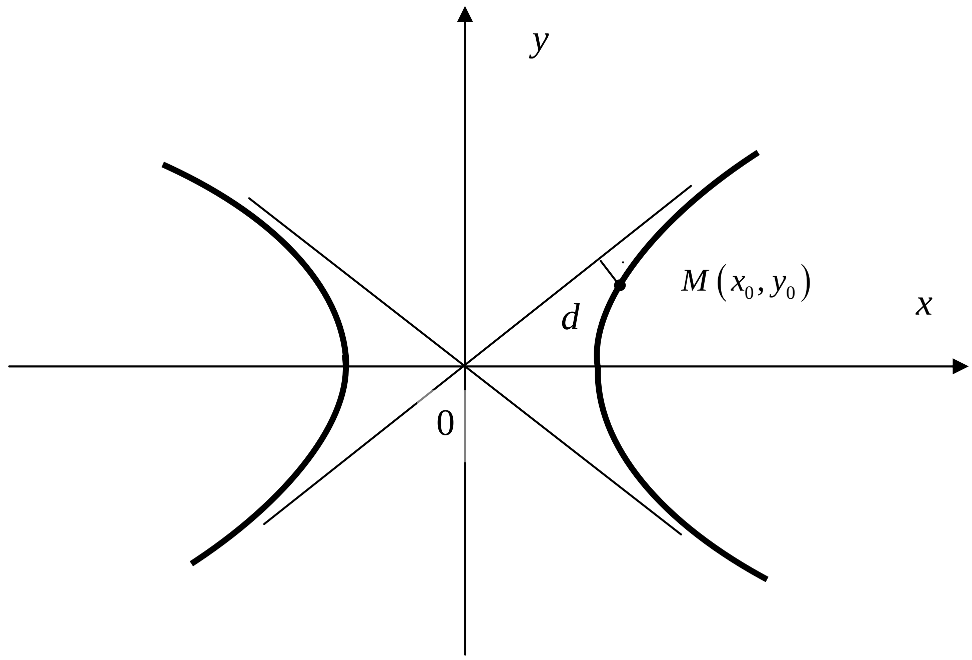


Рис. 4.14

Уравнение этой прямой в общем виде $bx - ay = 0$, тогда

$$d = \frac{|bx_0 - ay_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{4.16}$$

Так как точка $M(x_0, y_0)$ лежит на гиперболе, то из уравнения гиперболы $y_0 = \frac{b}{a}\sqrt{x_0^2 - a^2}$, подставив в формулу (4.16) значение y_0, получим

$$d = \frac{\left|bx_0 - b\sqrt{x_0^2 - a^2}\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

или

$$d=\frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}}\left|x_0-\sqrt{x_0^2-a^2}\right|.$$

Умножим и разделим правую часть этого равенства на $x_0+\sqrt{x_0^2-a^2}$, тогда

$$d=\frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{a^2}{x_0+\sqrt{x_0^2-a^2}}.$$

Пусть точка $M\left(x_0,y_0\right)$, перемещаясь по гиперболе, неограниченно удаляется от начала координат. При этом абсцисса x_0 точки M стремится к $+\infty$, а d - к нулю.

Итак, доказано, что прямые $y=\pm\frac{b}{a}x$ являются асимптотами гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Можно показать, что уравнения асимптот гиперболы $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ тоже имеют вид $y=\pm\frac{b}{a}x$.

Для построения асимптот гиперболы строим прямоугольник со сторонами $x=\pm a,\quad y=\pm b$. Асимптоты будут диагоналями этого прямоугольника с угловыми коэффициентами $k_1=tg\alpha_1=\frac{b}{a}$ и $k_2=tg\alpha_2=-\frac{b}{a}$. Для построения гиперболы лучше сначала построить её асимптоты, а затем уже саму кривую.

Отношение полуфокусного расстояния c к действительной полуоси a называется эксцентриситетом гиперболы $\frac{c}{a}=\varepsilon$. Так как $c>a$, то $\varepsilon>1$.

§5. Парабола

Параболой называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки F, называемой фокусом параболы, и данной прямой, называемой её директрисой.

Обозначим расстояние от фокуса до директрисы DD_1 через p ($p > 0$).

Чтобы составить уравнение параболы, выберем систему координат так, как показано на рис. 4.15, т.е. ось x проведём через фокус F перпендикулярно к директрисе DD_1 в направлении от директрисы к фокусу. За начало координат возьмём середину между фокусом и директрисой. Тогда уравнение директрисы будет иметь вид

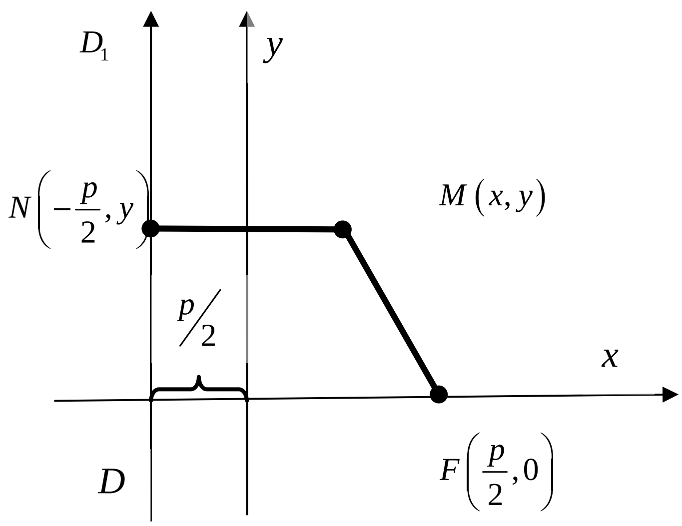


Рис. 4.15

$$x + \frac{p}{2} = 0,$$

а координаты фокуса $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$.

Возьмем на параболе произвольную точку $M(x;y)$, тогда

$$|MF| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}, \quad |MN| = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}.$$

Для любой точки параболы (и только для точек параболы) $|MF| = |MN|$, следовательно

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}. \qquad (4.17)$$

Это и есть уравнение параболы. Возведя его обе части в квадрат и приведя подобные члены, получим:

$$y^2 = 2px. \qquad (4.18)$$

Можно доказать, что это уравнение эквивалентно уравнению (4.17), а значит является уравнением параболы. Уравнение (4.18) называется каноническим уравнением параболы, а число p - параметром параболы.

Построение параболы по ее уравнению

Рассмотрим параболу, заданную уравнением $y^2 = 2px$.

Так как в уравнение y входит в четной степени, то кривая симметрична относительно оси Ox. Построим часть кривой, расположенную в первой координатной четверти. Эта часть кривой имеет уравнение $y = \sqrt{2px}$. При $x = 0$ ордината $y = 0$. С возрастанием x значения y возрастают. Часть этой кривой имеет вид, изображенный на рис. 4.16.

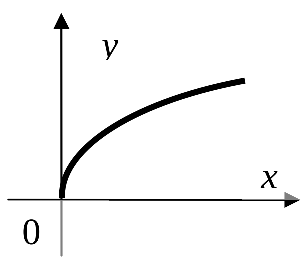


Рис. 4.16

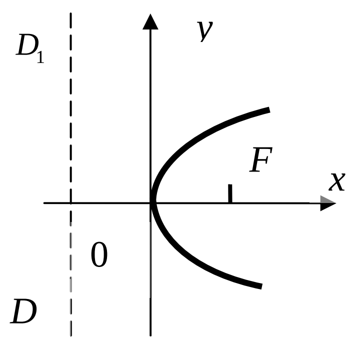


Рис. 4.17

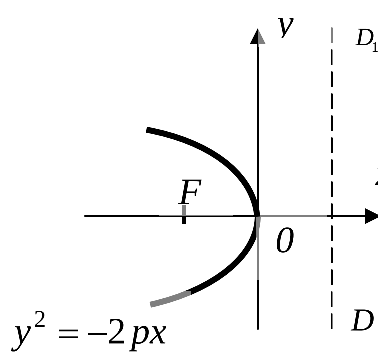


Рис. 4.18

То, что кривая обращена выпуклостью вверх, можно доказать средствами дифференциального исчисления.

Пользуясь симметрией параболы относительно оси Ox, строим всю кривую.

Парабола, заданная уравнением $y^2 = 2px$ ($p > 0$), имеет вид, изображенный на рис. 4.17.

Парабола имеет только одну ось симметрии и, следовательно, не имеет центра симметрии. Точка пересечения параболы с её осью симметрии называется вершиной параболы.

Для рассматриваемой параболы осью симметрии является ось Ox, а вершиной - начало координат.

Легко показать, что уравнению $y^2 = -2px$ (p > 0) соответствует парабола, изображенная на рис.4.18. Уравнения $x^2 = \pm 2py$ (p > 0) определяют параболы, изображенные на рис. 4.19 и 4.20.

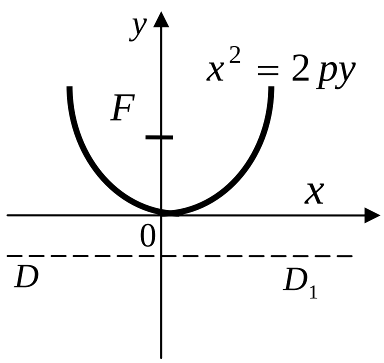


Рис. 4.19

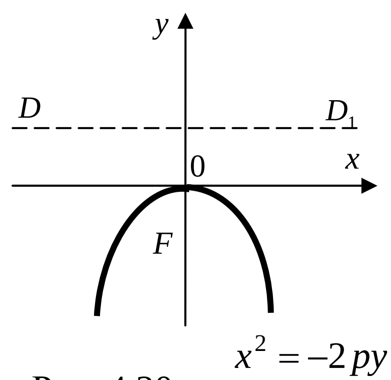


Рис. 4.20

Заметим, что хотя парабола имеет бесконечные ветви, можно доказать, что асимптот у нее нет. Эксцентриситет параболы принято считать равным 1.

§6. Преобразование координат на плоскости и упрощение общего уравнения кривой второго порядка

Преобразованием системы координат называется переход от одной системы координат к другой. Задача преобразования координат состоит в получении формул, устанавливающих зависимость между координатами одной и той же точки относительно двух различных координатных систем.

Ранее уже был рассмотрен один из случаев преобразования координат, а именно переход от декартовой прямоугольной системы к полярной. В этой главе рассмотрим переход от одной прямоугольной системы координат к другой, тоже прямоугольной. При этом предполагается, что обе системы правые и имеют общую масштабную единицу.

Параллельный перенос осей координат

Пусть дана прямоугольная система координат на плоскости и в ней точка $M(x;y)$. Перенесем начало координат из точки O в точку $O'(a,b)$, не меняя направления осей. Получим новую систему координат с осями $O'x'$ и $O'y'$. Координаты точки M в новой системе координат обозначим x' и y'. В системе xOy $\bar{r}=\overline{OM}(x,y)$; $\overline{r_0}=\overline{OO'}(a,b)$, тогда из рис. 4.21 очевидно, что

$$\overline{O'M}=\bar{r}-\overline{r_0} \qquad (4.19)$$

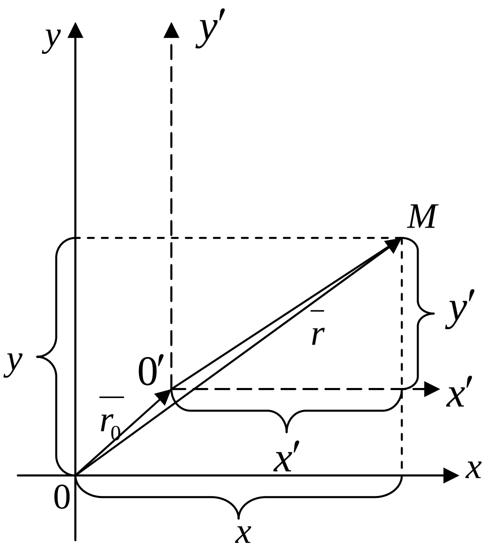


Рис. 4.21

Так как система $x'O'y'$ получена из системы xOy переносом начала координат без изменения направления осей координат, то проекции вектора $\overline{O'M}$ на оси Ox и Oy равны соответствующим проекциям его на оси $O'x'$ и $O'y'$, т. е.

$$\left.\begin{aligned}\text{пр}_{Ox}\overline{O'M}=\text{пр}_{O'x'}\overline{O'M}=x'\\ \text{пр}_{Oy}\overline{O'M}=\text{пр}_{O'y'}\overline{O'M}=y'\end{aligned}\right\} \qquad (4.20)$$

Поэтому, переходя от векторного равенства (4.19) к координатам, имеем

$$\left.\begin{aligned}\text{пр}_{Ox'}\overline{O'M}=x'=x-a\\ \text{пр}_{Oy'}\overline{O'M}=y'=y-b\end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned}x'=x-a\\ y'=y-b\end{aligned}\right\} \qquad (4.21)$$

откуда $$\left.\begin{aligned} x &= x' + a \\ y &= y' + b \end{aligned}\right\} \qquad (4.22)$$

Итак, старые координаты точки выражаются через новые при параллельном переносе осей координат формулами (4.22), а новые через старые – формулами (4.21). Эти формулы называются формулами параллельного переноса осей координат.

Пример 4.2. В заданной системе координат точка имеет координаты (1,4). Найти её координаты в новой системе, если начало новой системы находится в точке $O'(-3,5)$.

$$\begin{aligned} x' &= x - a = 1 + 3 = 4 \\ y' &= y - b = 4 - 5 = -1 \end{aligned},$$

т.е. точка $M(4;-1)$.

Поворот осей координат

Пусть даны две прямоугольные системы координат xOy и $x'O'y'$, которые имеют общее начало (рис. 4.22).

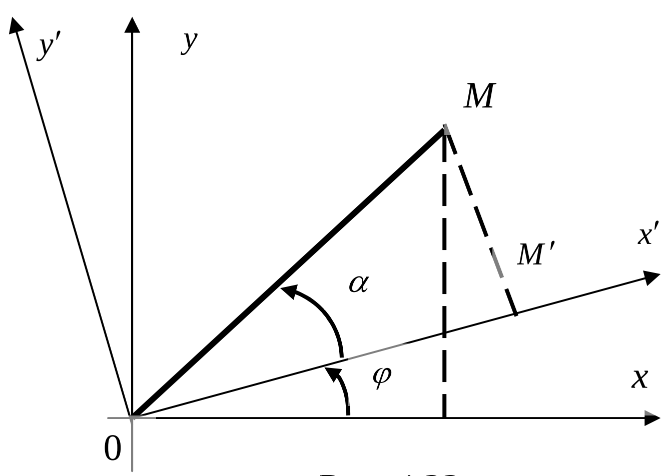


Рис. 4.22

Взаимное расположение таких систем можно задать углом φ между осями Ox и Ox', т. е. углом, на который повернуты новые координатные оси относительно старых.

Пусть M - некоторая точка на плоскости. Её координаты в старой системе x и y, в новой - x' и y'. Найдём зависимость между ними. Так как $x = \text{пр}_{Ox}\overline{OM}$, то $x = OM\cos(\varphi + \alpha) = OM\cos\alpha\cos\varphi - OM\sin\alpha\sin\varphi$. Но $OM\cos\alpha = x'$, $OM\sin\alpha = y'$, следовательно $x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi.$ Аналогично $y = OM\sin(\varphi+\alpha) = OM\sin\varphi\cos\alpha + OM\sin\alpha\cos\varphi = y'\cos\varphi + x'\sin\varphi$.

Таким образом получены формулы:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \\ y &= x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \end{aligned} \qquad (4.23)$$

выражающие старые координаты через новые.

Разрешив равенство (4.23) относительно x' и y', получим формулы:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ y' &= -x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{aligned} \qquad (4.24)$$

которые выражают новые координаты через старые. Формулы (4.23) и (4.24) будем называть формулами поворота осей.

Эллипс, гипербола и парабола с осями, параллельными осям координат

Рассмотрим эллипс с центром в точке $O'(a;b)$, оси которого параллельны осям координат (рис. 4.23).

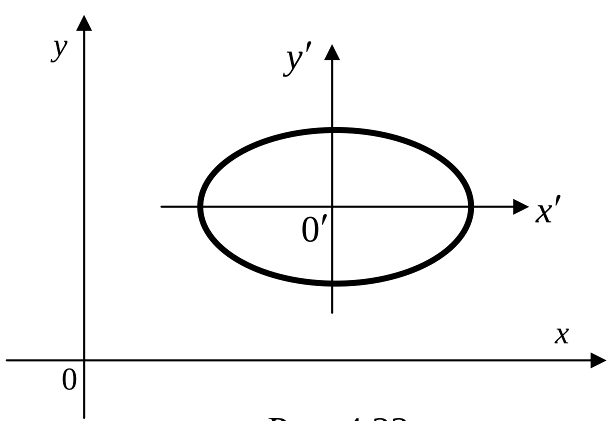


Рис. 4.23

Возьмём новую систему координат, начало которой находится в точке O'(α, β), а оси $O'x'$ и $O'y'$ параллельны соответственно осям Ox и Oy и одинаково с ними направлены.

Так как новые оси координат совпадают с осями эллипса, а его центр находится в новом начале, то относительно новой системы координат уравнение эллипса будет каноническим:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

Чтобы получить уравнение эллипса в старой системе координат, надо воспользоваться формулами параллельного переноса осей:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - \alpha \\ y' &= y - \beta \end{aligned}\right\}.$$

Подставляя в уравнение эллипса вместо x' и y' их выражения через x и y, получим

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1 \qquad (4.25)$$

Аналогично можно показать, что уравнение гиперболы с центром в точке $O'(\alpha;\beta)$ и с осями симметрии, параллельными осям координат, имеет вид:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1, \qquad (4.26)$$

если действительная ось параллельна оси Ox, и

$$\frac{(y-\beta)^2}{b^2} - \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} = 1, \qquad (4.27)$$

если действительная ось параллельна оси Oy.

Парабола с вершиной в точке $O'(\alpha;\beta)$ имеет уравнение:

$$y - \beta = a(x-\alpha)^2, \qquad (4.28)$$

если ось симметрии параллельна оси Oy, и

$$x - \alpha = a(y-\beta)^2, \qquad (4.29)$$

если ось симметрии параллельна оси Ox, где $a = \pm\dfrac{1}{2p}$.

Если в любом из уравнений (4.25) – (4.29) раскрыть скобки и привести подобные члены, то получится уравнение вида:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

которое является частным случаем общего уравнения:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

которое называется общим уравнением кривой второго порядка на плоскости.

Упрощение общего уравнения кривой второго порядка в случае отсутствия члена с произведением $(X \cdot Y)$

Рассмотрим уравнение

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \tag{4.30}$$

Выясним, какие кривые соответствуют этому уравнению.

Возможны следующие случаи:

1. $AC > 0$ (эллиптический случай).

Без ограничения общности можно считать, что $A > 0$ и $C > 0$.

В уравнении (4.30) дополняем до полного квадрата члены, содержащие x^2 и x, а также y^2 и y, получим

$$A(x - x_0)^2 + C(y - y_0)^2 = F_1 \tag{4.31}$$

Если $F_1 > 0$, то уравнение приводится к виду $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$, где $a^2 = F_1/A$; $b^2 = F_1/C$. Это уравнение определяет эллипс.

Если $F_1 < 0$, то уравнению (4.31) никакие действительные значения x и y не удовлетворяют, следовательно, этому уравнению соответствует пустое множество.

Если $F_1 = 0$, то уравнение (4.31) принимает вид $A(x - x_0)^2 + C(y - y_0)^2 = 0$ и определяет точку $M(x_0, y_0)$.

2. $AC < 0$ (гиперболический тип).

Не нарушая общности, можно считать $A > 0$, $C < 0$. Как и в первом случае, уравнение (4.30) можно привести к виду (4.31).

Если $F_1 > 0$,то уравнение (4.31) можно записать $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$. Оно определяет гиперболу, действительная ось которой параллельна оси Ox.

Если $F_1 < 0$, то получим гиперболу $\frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(x-x_0)^2}{a^2} = 1$, действительная ось которой параллельна оси Oy.

Если $F_1 = 0$, то уравнение (4.31) принимает вид

$$A(x-x_0)^2 + C(y-y_0)^2 = 0.$$

Докажем, что ему соответствует пара пересекающихся прямых.

Обозначим $A = m^2$, $C = -n^2$ и запишем уравнение в виде:

$$m^2(x-x_0)^2 - n^2(y-y_0)^2 = 0,$$

или

$$(m(x-x_0) - n(y-y_0))(m(x-x_0) + n(y-y_0)) = 0.$$

Это уравнение равносильно следующим двум:

$$m(x-x_0) - n(y-y_0) = 0$$

$$m(x-x_0) + n(y-y_0) = 0,$$

каждое из которых определяет прямую, проходящую через точку $M(x_0, y_0)$.

3. $AC = 0$ (параболический тип).

Предположим, что $A \neq 0$, $C = 0$, тогда уравнение (4.30) имеет вид

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Можно считать, не нарушая общности, что $A > 0$. Дополнив члены, содержащие x^2 и x до полного квадрата, получим

$$A(x-x_0)^2 + Ey = F_1.$$

Если $E \neq 0$, то уравнение можно записать в виде $y - y_0 = a(x-x_0)^2$, которому соответствует парабола с осью симметрии, параллельной оси Oy.

Если $E = 0$, $F_1 > 0$, то уравнение $A(x - x_0)^2 = F_1$ равносильно уравнениям $\sqrt{A}(x - x_0) + \sqrt{F_1} = 0$ и $\sqrt{A}(x - x_0) - \sqrt{F_1} = 0$, которые определяют пару параллельных прямых.

Если $E = 0$ и $F_1 < 0$, то уравнение $A(x - x_0)^2 = F_1$ определяет пустое множество.

Если $E = 0$ и $F_1 = 0$, то уравнение $A(x - x_0)^2 = 0$ определяет пару совпадающих прямых $x - x_0 = 0$.

Если предположить, что $A = 0$, $C \neq 0$, то повторив аналогично исследования, получим те же результаты.

Итак, уравнению (4.30) могут соответствовать следующие фигуры: эллипс, гипербола, парабола, пара прямых, точка или пустое множество.

Пример 4.3. Рассмотрим уравнение

$$9x^2 + 4y^2 - 18x + 24y + 9 = 0.$$

Т.к. $AC = 36 > 0$, то уравнение определяет фигуру эллиптического типа. Дополнив члены, содержащие x^2 и x, а также y^2 и y до полных квадратов, получим:

$$9(x-1)^2 + 4(y+3)^2 = 36, \text{ или}$$

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1.$$

Этому уравнению в декартовой системе координат соответствует эллипс, центр которого находится в точке $O'(1;-3)$, а полуоси равны соотаетственно 2 и 3.

§7. Поверхности второго порядка

Алгебраической поверхностью второго порядка называется поверхность, уравнение которой в декартовой прямоугольной системе координат имеет вид:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Mx + 2Ny + 2Pz + L = 0 \qquad (4.32)$$

В этом уравнении не все коэффициенты при членах второго порядка равны нулю.

В общем случае может оказаться, что уравнение (4.32) определяет вырожденную поверхность (пустое множество, точку, плоскость, пару плоскостей, прямую). Если же поверхность (4.32) невырождена, то с помощью преобразования координат (параллельного переноса и поворота осей координат в пространстве) и теории квадратичных форм её уравнение может быть приведено к ниже рассматриваемым поверхностям.

Эллипсоид

Поверхность, уравнение которой в некоторой декартовой прямоугольной системе координат имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{4.33}$$

называется эллипсоидом.

Для исследования формы эллипсоида применим метод сечений. Пересечем эллипсоид плоскостями $z=h$. Линия, полученная в сечении, определяется системой уравнений:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ z=h\end{array}\right\}$$

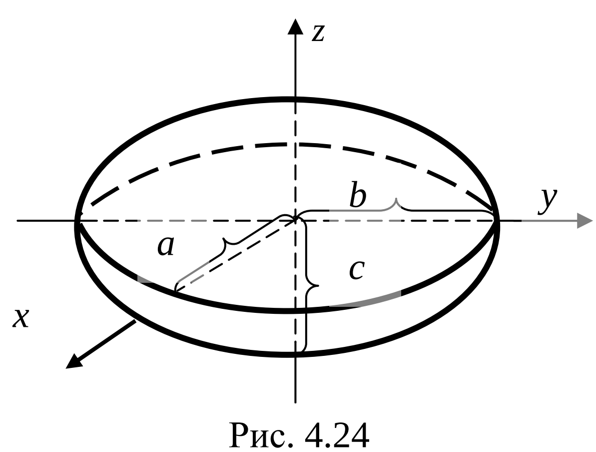


Рис. 4.24

В плоскости $z=h$ возьмем декартову прямоугольную систему координат $O'x'y'$, начало которой находится в точке $O'(0;0;h)$, а оси Ox' и Oy' имеют соответственно направления осей Ox и Oy. В этой системе координат линия, полученная в сечении, имеет уравнение

$$\frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}. \tag{4.34}$$

Если $|h|<c \quad (c>0)$, то уравнение (4.34) определяет эллипс. При $h=0$ полуоси эллипса соответственно равны a и b. С возрастанием $|h|$ от нуля до c полуоси эллипса уменьшаются. Если $|h|=c$, то уравнение (4.34) определяет точку. При $|h|>c$ уравнение определяет пустое множество, т.е. плоскость не пересекается с эллипсоидом. Аналогичная картина имеет место при пересечении эллипсоида плоскостями $y=m, \quad x=n$.

Таким образом, эллипсоид, заданный уравнением (4.33), имеет вид, изображенный на рис. 4.24.

Положительные числа a, b, c называются полуосями эллипсоида. В частном случае, если две полуоси равны, эллипсоид называется эллипсоидом вращения, так как он может быть получен вращением эллипса вокруг одной из осей.

Если $a=b=c$, то уравнение (4.33) определяет сферу $x^2+y^2+z^2=a^2$.

Гиперболоиды

Поверхность, уравнение которой в некоторой декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$ имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{4.35}$$

называется однополостным гиперболоидом.

Пересечем гиперболоид плоскостью $z=h$. Выберем в плоскости $z=h$ систему координат $O'x'y'$, как это было сделано выше. В этой системе линия пересечения имеет вид

$$\frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2}.$$

Это уравнение эллипса при любом h. При $h=0$ эллипс имеет полуоси a и b. С возрастанием $|h|$ полуоси эллипса увеличиваются. Пересечем однополостный гиперболоид плоскостью $y=m$. Выберем в этой плоскости декартову систему координат $O''x''z''$, у которой начало координат находится в точке $O''(0;m;0)$, а оси $O''x''$ и оси $O''z''$ имеют направления осей соответственно Ox и Oz. В этой системе координат линия, полученная в сечении, имеет вид

$$\frac{x''^2}{a^2}-\frac{z''^2}{c^2}=1-\frac{m^2}{b^2} \tag{4.36}$$

При $|m|<b$ $(b>0)$ уравнение (4.36) определяет гиперболу, при $|m|=b$ – пару пересекающихся прямых, а при $|m|>b$ – гиперболу, вершины которой находятся на оси $O''z''$.

Аналогичная картина имеет место при пересечении однополостного гиперболоида плоскостями $x=h$.

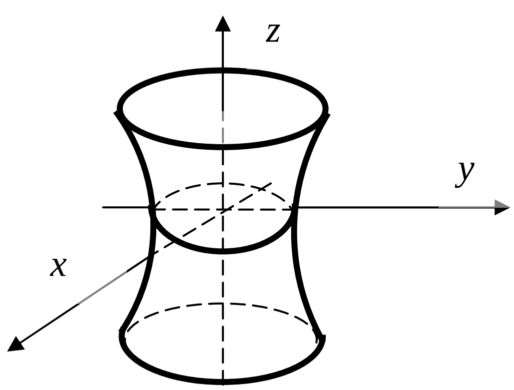


Рис. 4.25

Однополостный гиперболоид имеет вид, изображенный на рис. 4.25.

В частном случае, когда $a=b$, гиперболоид называется однополостным гиперболоидом вращения, так как может быть получен вращением гиперболы вокруг её мнимой оси.

Поверхности, которые в некоторой декартовой системе координат $Oxyz$ задаются уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{и} \quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

также являются однополостными гиперболоидами.

Поверхность, уравнение которой в некоторой декартовой системе координат имеет вид

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{4.37}$$

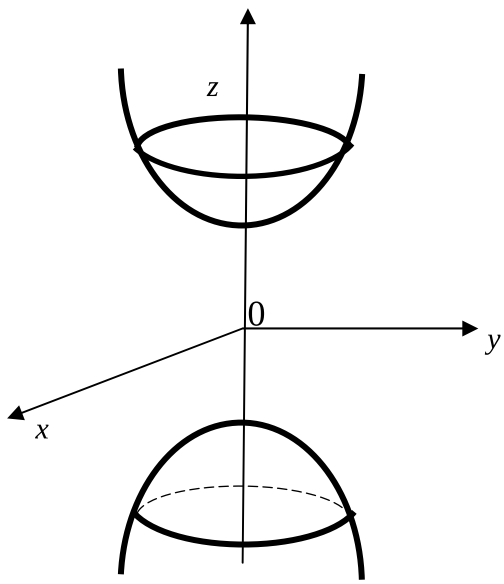


Рис. 4.26

называется двуполостным гиперболоидом.

Применив метод сечений, можно убедиться, что поверхность имеет вид, изображённый на рис. 4.26.

Если $a=b$, двуполостный гиперболоид называется двуполостным гиперболоидом вращения, и может быть получен вращением гиперболы вокруг её действительной оси.

Поверхности, задаваемые уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{и} \quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

также являются двуполостными гиперболоидами.

Параболоиды

Поверхность, уравнение которой в некоторой декартовой прямоугольной системе координат имеет вид

$$z=\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}, \tag{4.38}$$

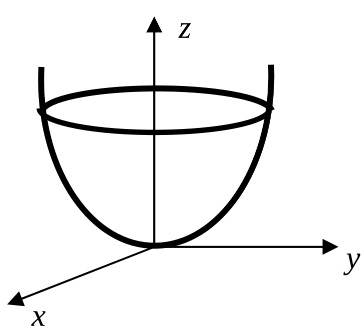


Рис. 4.27

где $pq>0$, называется эллиптическим параболоидом.

Применив метод сечений, легко убедиться, что поверхность имеет вид, изображённый на рис. 4.27.

Если $p = q$, то такой параболоид называется параболоидом вращения и может быть получен вращением параболы вокруг её оси симметрии. Поверхности, которые в некоторой прямоугольной системе координат задаются уравнениями:

$$y = \frac{x^2}{p} + \frac{z^2}{q} \quad \text{и} \quad x = \frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q}, \quad (pq > 0),$$

также являются эллиптическими параболоидами.

Поверхность, уравнение которой в некоторой декартовой прямоугольной системе координат имеет вид

$$z = -\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}, \qquad (pq > 0), \tag{4.39}$$

называется гиперболическим параболоидом.

Пусть $p > 0, \quad q > 0$. Пересекая гиперболический параболоид плоскостью $x = h$ легко убедиться, что в сечении получим параболу при любом h. Пересекая параболоид плоскостью $y = m$, в сечении получим параболу, ветви которой направлены вниз при любом m.

Рассуждая аналогично, легко убедиться в том, что при пересечении гиперболического параболоида плоскостью $z = h \quad (h \neq 0)$ получим гиперболы, а при $z = 0$ – пару пересекающихся прямых.

Гиперболический параболоид, заданный уравнением (4.39), имеет вид, изображённый на рис. 4.28.

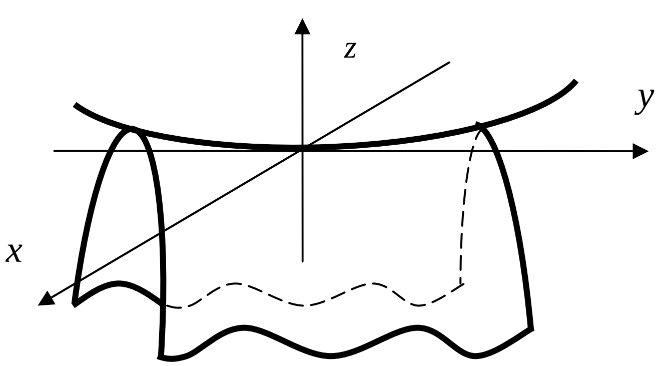


Рис. 4.28

Поверхности, которые в некоторой прямоугольной системе координат задаются уравнениями

$$x = -\frac{z^2}{p} + \frac{y^2}{q} \qquad (pq > 0)$$

$$y = -\frac{z^2}{p} + \frac{x^2}{q} \qquad (pq > 0)$$

также являются гиперболическими параболоидами.

Цилиндрические поверхности

Цилиндрической поверхностью называется поверхность, образованная прямой, перемещающейся параллельно себе вдоль некоторой кривой. При этом перемещающаяся прямая называется образующей, а кривая – направляющей.

Чтобы задать цилиндрическую поверхность, достаточно задать образующую и направляющую этой поверхности.

Пусть в прямоугольной системе координат образующая задана уравнениями

$$\frac{X-x}{m} = \frac{Y-y}{n} = \frac{Z-z}{p} \tag{4.40}$$

где X, Y, Z – текущие координаты, а направляющая – уравнениями

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{array}\right\} \tag{4.41}$$

т. е. как линия пересечения двух поверхностей.

В качестве точки $M(x;y;z)$, через которую проходит образующая, возьмём точку, лежащую на направляющей. Исключив из уравнений (4.40) и (4.41) x, y, z получим уравнение $\Phi(X,Y,Z)=0$, которому удовлетворяют координаты любой точки цилиндрической поверхности. Это и есть уравнение заданной цилиндрической поверхности.

Пусть в декартовой прямоугольной системе координат образующая цилиндрической поверхности задана уравнением

$$\frac{X-x}{0} = \frac{Y-y}{0} = \frac{Z-z}{1},$$

т. е. параллельна оси *Oz*, а направляющая – уравнениями

$$\left.\begin{array}{l} F(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\},$$

т. е. лежит в плоскости *xOy*. Исключив из данных уравнений *x*, *y*, *z*, получим уравнение цилиндрической поверхности в виде $F(X, Y) = 0$. Легко убедиться, что если на плоскости *Oxy* уравнению $F(x, y) = 0$ соответствует некоторая линия *L*, то это уравнение в пространстве определяет цилиндрическую поверхность с направляющей *L* и образующей, параллельной оси *Oz*.

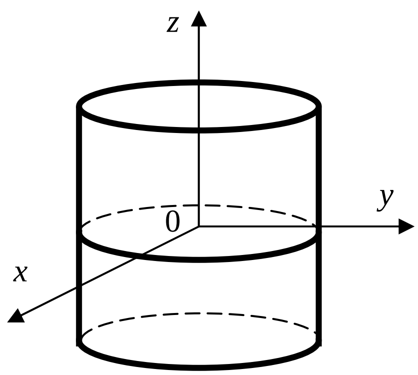


Рис. 4.29

Аналогично, если линия *L* на плоскости *Oyz* (*Oxz*) задана уравнением $F(y, z) = 0$ $\left(F(x, y) = 0\right)$, то это уравнение в пространстве является уравнением цилиндрической поверхности с образующей, параллельной оси *Ox* (*Oy*) и направляющей *L*.

Так уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (4.42)$$

определяет в пространстве эллиптический цилиндр, изображённый на рис. 4.29.

Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (4.43)$$

определяет в пространстве гиперболический цилиндр рис. 4.30).

Уравнение

$$y^2 = 2px \quad (p > 0) \qquad (4.44)$$

является уравнением параболического цилиндра (рис. 4.31)

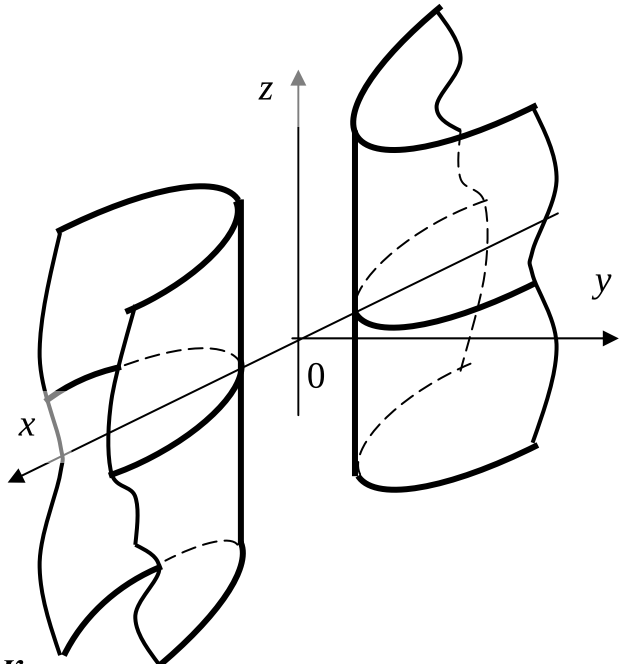


Рис. 4.30

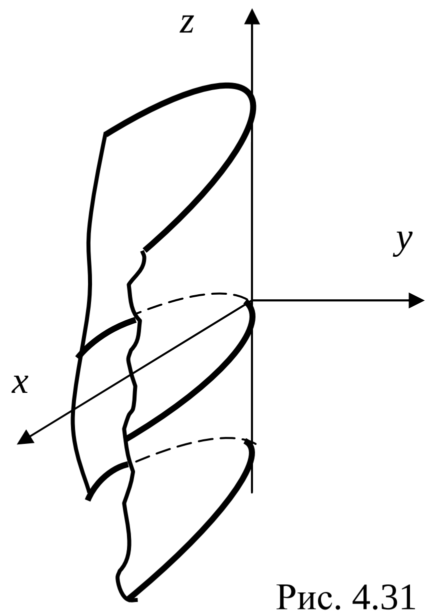


Рис. 4.31

Конические поверхности

Конической поверхностью или конусом называется поверхность, образованная прямой линией, имеющей одну неподвижную точку и перемещающуюся вдоль некоторой кривой. Перемещающаяся прямая называется образующей, кривая – направляющей, неподвижная точка – вершиной.

Для того, чтобы задать коническую поверхность, достаточно задать направляющую и вершину.

Пусть в некоторой прямоугольной системе координат направляющая конуса задана уравнениями

$$\left.\begin{aligned} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{aligned}\right\}, \tag{4.45}$$

т.е. задана как линия пересечения двух поверхностей, а вершина находится в точке (x_0, y_0, z_0).

Уравнения образующей запишем в виде

$$\frac{X-x_0}{x-x_0}=\frac{Y-y_0}{y-y_0}=\frac{Z-z_0}{z-z_0} \tag{4.46}$$

где (x,y,z) – координаты некоторой точки, лежащей на направляющей. Исключив из уравнений (4.45) и (4.46) x, y, z, получим уравнение $\Phi(X,Y,Z)=0$, которое и является уравнением заданной конической поверхности.

Пусть направляющая конической поверхности задана уравнением

$$\left.\begin{aligned}&\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\&z=C\end{aligned}\right\} \qquad (4.47)$$

где $C\neq 0$, а вершина конуса в точке $O(0,0,0)$. Уравнения образующей запишем в виде

$$\frac{X}{x}=\frac{Y}{y}=\frac{Z}{z} \qquad (4.48)$$

Исключив из уравнений (4.47), (4.48) x, y, z, получим уравнение

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=0 \qquad (4.49)$$

конуса, изображенного на рис. 4.32.

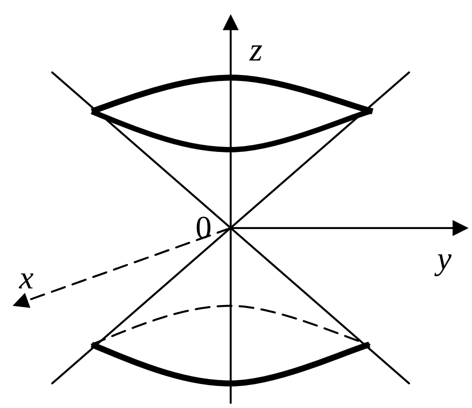


Рис. 4.32

Поверхности вращения

Поверхность, образованная вращением плоской линии вокруг прямой, расположенной в одной плоскости с этой линией, называется поверхностью вращения.

Пусть задана прямоугольная система координат $Oxyz$ и в плоскости Oyz линия L определена уравнением

$$F(y,z)=0 \tag{4.50}$$

Составим уравнение поверхности, полученной вращением этой линии вокруг оси Oz. Возьмем на линии L точку $M(y,z)$. При вращении плоскости Oyz вокруг оси Oz точка M опишет окружность. Пусть (X,Y,Z) – произвольная точка этой окружности. Очевидно, что $z=Z$, $|y|=\sqrt{x^2+y^2}$, или $y=\pm\sqrt{x^2+y^2}$; $z=Z$, подставив найденные значения y и z в уравнение (4.50), получим

$$F\left(\pm\sqrt{X^2+Y^2},Z\right)=0,$$

которое и является уравнением поверхности вращения.

РАЗДЕЛ 5. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

§1. Числовые последовательности и функции

При изучении явлений природы и в своей жизненной практике люди встречаются с множеством различных величин: время, длина, вес, сила, скорость и т. п. Эти величины могут принимать разные значения либо только одно фиксированное значение. В первом случае имеем дело с переменной величиной, а во втором- с постоянной.

В математике отвлекаются от физического смысла величины, интересуясь лишь числом, которым она выражается, физический смысл величины снова приобретает важность, лишь когда занимаются приложениями математики. Таким образом, будем говорить о числовой переменной. Её обозначают каким-либо символом (например, буквой x), которому приписываются числовые значения.

Переменная считается заданной, если указано множество $X = \{x\}$ значений, которые она может принимать. Постоянную величину, сохраняющую одно и то же значение, удобно рассматривать как частный случай переменной, он отвечает предположению, что множество X состоит из одного элемента.

Рассмотрим частный тип переменной величины - варианту.

Определение 5.1. Если каждому натуральному числу $n \in N$ в порядке возрастания, так что большее число следует за меньшим, по какому-нибудь закону поставлено в соответствие некоторое вполне определённое число $x_n \in R$, то говорят, что на множестве N задана числовая последовательность, и обозначают

$$(x_n) = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots) \qquad \text{или} \qquad x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots . \tag{5.1}$$

Числа x_n, $n \in N$ называются элементами или значениями последовательности, выражение x_n называют общим членом последовательности. Таким образом, элементы последовательности все занумерованы и расположены в порядке возрастания номеров, при $n_2 > n_1$ элемент x_{n_2} следует за x_{n_1} независимо от того, будет ли само число x_{n_2} больше, меньше или равно x_{n_1}.

Замечание 5.1. Аналогично определяется понятие последовательности точек на прямой или объектов какой-либо другой природы.

Переменную x, принимающую некоторую последовательность (5.1) значений, называют вариантой.

Последовательность (5.1), а с нею и отвечающая ей варианта, считается заданной, если указано правило, по которому может быть вычислено любое значение варианты, лишь только известен его номер. При этом определяются всё множество принимаемых вариантой значений в целом и порядок, в котором эти значения принимаются; каждому номеру отвечает своё значение варианты, и из двух значений следующим считается то, номер которого больше.

Последовательность может быть задана, если указан общий член последовательности, например, арифметическая прогрессия $x_n = a + (n-1)d$, геометрическая прогрессия $x_n = aq^{n-1}$, где числа a, d, q заданы, $x_n = 1$, $x_n = (-1)^{n+1}$, $x_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n}$, $x_n = n^2$ и т. д.; реккурентной формулой $x_{n+1} = f(x_n)$, $x_1 = a$, где f определяет правило нахождения x_{n+1} через известные x_1, x_n, например, арифметическая прогрессия $x_{n+1} = x_n + d$, $x_1 = a$, либо каким-нибудь другим правилом, например, правилом приближенного вычисления корней можно считать заданной всю последовательность десятичных приближений к $\sqrt{2}$: $x_1 = 1{,}4$, $x_2 = 1{,}41$, $x_3 = 1{,}414$, $x_4 = 1{,}4142$, ..., хотя выражение x_n для общего члена этой последовательности мы не знаем.

Вообще, в математическом анализе предметом исследования является не изменение одной величины, а взаимосвязь двух или нескольких переменных, другими словами, законы, которые выражают одни переменные через другие. При этом наряду с последовательностями изучаются переменные, изменяющиеся непрерывным или сплошным образом: время, путь, проходимый движущейся материальной точкой, и т. п. Переменные задаются множествами тех значений, которые они способны принимать. Такое множество, в котором каждое значение переменной встречается по разу, называется областью изменения переменной. Это может быть любое числовое множество, например, для непрерывной переменной числовой промежуток (конечный или бесконечный).

Пусть *X*, *Y* произвольные подмножества множества действительных чисел, $X \subseteq R$, $Y \subseteq R$, переменные x и y - элементы этих множеств, $x \in X$, $y \in Y$.

Определение 5.2. Переменная $y \in Y$ называется функцией переменной *x* в области её изменения *X*, если по некоторому правилу или закону каждому значению $x \in X$ ставится в соответствие одно определённое значение $y \in Y$.

Для записи функции (функциональной зависимости) используют обозначения: $y = f(x)$, $y = y(x)$, $f : X \to Y$ и т.п., где f - символическое обозначение закона соответствия *y* переменной *x*. Переменную *x* называют независимой переменной или аргументом, *y* - зависимой переменной или значением функции.

Множество X называют областью определения функции $y = f(x)$ и обозначают $D(f)$, множество значений *y*, $y = f(x)$, $x \in X$ - множеством значений функции, обозначают $E(f)$, $f(X)$. Из определения следует, что $f(X) \subseteq Y$.

Если говорить о функции как отображении $f : X \to Y$, то y или $f(x)$ называют образом элемента *x*, а *x* - прообразом элемента *y*, соответственно *Y* образ множества *X*, *X* - прообраз множества *Y*. Другими словами, с помощью функции *f* множество значений независимой переменной *x* преобразуется или отображается в множество *Y*.

Определение функции дано для однозначной функции. Если же каждому $x \in X$ отвечает не одно, а несколько значений *y*, то функцию называют многозначной.

В определении функции существенны два момента: указание области X изменения x и установление правила или закона соответствия между значениями x и y. Область изменения функции обычно не указывается, она определяется соответствующим законом соответствия между x и y.

Закон соответствия между значениями переменных, определяющий сущность функциональной зависимости, может быть разнообразной природы, поскольку он ничем не ограничен. Наиболее распространёнными способами задания функции являются аналитический, табличный, графический.

Аналитический способ состоит в том, что с помощью одной или нескольких формул указывается на те операции или действия над постоянными числами и над значением x, которые надо произвести, чтобы получить соответствующее значение y. При этом область определения функции либо указывается, либо понимается как множество значений аргумента x, при которых формула имеет смысл. В последнем случае говорят о естественной области определения функции.

Примеры 5.1 аналитического задания функций:

$$y = x, \quad y = x^2 + 2x + 3, \quad y = f\left(x\right) = \begin{cases} x+1, & \forall x \in (-\infty;-1) \\ 2, & \forall x \in \left[-1;1\right] \\ x^3, & \forall x \in \left(1;\infty\right) \end{cases},$$

$$y = \eta(x) = \begin{cases} 0, & \forall x < 0 \\ 1, & \forall x \ge 0 \end{cases} \quad \text{(единичная функция Хевисайда)},$$

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & \forall x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & \forall x > 0 \end{cases} \quad \text{(функция знака)},$$

$$y = f\left(x\right) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x - \text{рациональное число} \\ 0, & \text{если} \quad x - \text{иррациональное число} \end{cases} \quad \left(\text{функция Дирихле}\right).$$

Задание функции в виде $y = f\left(x\right)$ называется явным заданием. Функция $y = f\left(x\right)$ может быть задана неявно уравнением $F\left(x,y\right) = 0$,если $\forall x \in X$ $F\left(x, f\left(x\right)\right) = 0$, например, $x^2 + y^2 - 1 = 0$, а также параметрически

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in T,$$

где обе переменные выступают как функции некоторого параметра *t*, например, времени, или в зависимости от выбранной системы координат (например, в полярных координатах $r = r(\varphi)$, r - полярный радиус точки, φ - полярный угол точки).

По результатам эксперимента, наблюдений функция может быть задана в виде таблицы, где перечисляются n значений аргумента $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ и соответствующих значений функции.

Графический способ задания функции состоит в представлении функции $y = f(x)$, $r = r(\varphi)$, ... в некоторой системе координат, в изображении с помощью приборов, компьютера. Графиком *L* функции $y = f(x)$ называют множество точек $M(x, y)$ плоскости R^2, координаты которых связаны данной функциональной зависимостью, т.е. $L = \{M(x, y) \in R^2 | y = f(x)\}$. Графиком функции может быть линия, множество изолированных точек и т.п. Не всякая линия является графиком однозначной функции. Для этого требуется, чтобы прямая, параллельная оси *OY* пересекала график функции не более, чем в одной точке (одному значению переменной *x* соответствует одно значение *y*).

§ 2. Основные характеристики поведения функций

Основные характеристики поведения функций и последовательностей. Сложная функция. Обратная функция.

Анализ функций и последовательностей является одной из основных задач математического анализа. Последовательность можно рассматривать как функцию, определённую на множестве натуральных чисел, т.е.

$$x_n = f(n), \quad n \in N;$$

поэтому к последовательностям применимы многие понятия, характеризующие поведение функций. Определение тех или иных свойств функций или последовательностей позволяет проводить как можно более полное их исследование, построить графики функций. Рассмотрим вначале некоторые характеристики функций. Пусть $D(f)$ — область определения функции $y = f(x)$.

Определение 5.3. Функция $y = f(x)$ называется чётной (нечётной), если выполняются следующие условия:

1. Область её определения симметрична относительно точки $x = 0$, т.е. для любой точки $x \in D(f)$ существует точка $(-x) \in D(f)$;
2. Для любого $x \in D(f)$; выполняется равенство $f(-x) = f(x)$ $(f(-x) = -f(x))$.

Используя символы математической логики, свойство чётности или нечетности функции можно записать так:

$f(x)$ - чётная функция $\Leftrightarrow \forall x \in D(f): \left(-x \in D(f) \cap f(-x) = f(x)\right)$;

$f(x)$ - нечётная функция $\Leftrightarrow \forall x \in D(f): \left(-x \in D(f) \cap f(-x) = -f(x)\right)$;

Если хотя бы одно из условий определения не выполняется, то функция не является ни чётной ни нечётной.

Примеры 5.2. Функции $f(x) = x^2$, $f(x) = |x|$, $f(x) = \cos x$ - чётные; функции $f(x) = x$, $f(x) = \sin x$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ - нечётные; функции $f(x) = x^2 + x + 1$, $f(x) = \ln x$, $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x + 1}\sin x$ не являются ни чётными, ни нечётными.

По определению ось OY является осью симметрии графика чётной функции, а начало координат - центром симметрии графика нечётной функции. При исследовании чётной (нечётной) функции достаточно изучить её при любых $x > 0$ из области её определения и продолжить это изучение по симметрии на $x < 0$ из области определения.

Определение 5.4. Функция $y = f(x)$ называется периодической, если для неё существует такое число $T \neq 0$, что выполняются условия:

1. При любом x из области определения функции числа $x - T$ и $x + T$ также принадлежат области определения;
2. $f(x) = f(x - T) = f(x + T)$.

Или:

$f(x)$ - периодическая функция

$\Leftrightarrow \exists T \neq 0 : \forall x \in D(f) : (x \pm T) \in D(f) \cap f(x \pm T) = f(x)$.

Число $T \neq 0$, прибавление которого к аргументу или вычитание из него не меняет значение функции $f(x)$, называется периодом функции, при этом число nT, $n \in N$ также является периодом этой функции. Если существует наименьший положительный период функции, то его называют основным периодом. Для периодической функции достаточно провести её исследование и построить график на одном из интервалов длиной *T*, а затем произвести параллельный перенос его вдоль оси OX на $\pm nT$, $n \in N$.

Примеры 5.3. Функции $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = tgx$ периодические на своих естественных областях определения соответственно с периодами $2\pi, 2\pi, \pi$.

Следует заметить, что если $f(x)$ периодическая с периодом *T*, то функция $f(\omega x)$ также периодическая и её период равен $\dfrac{T}{\omega}$. Функцию $f(x) = c$ (c=const), $D(f) = R$ можно также отнести к периодическим, где любое число T является периодом, но основного периода функция не имеет.

Определение 5.5. Функция $y = f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на множестве *X*, если большему значению аргумента x из этого множества соответствует большее (меньшее) значение функции *y*.

Определение 5.6. Функция $y = f(x)$ называется неубывающей (невозрастающей) на множестве *X*, если большему значению аргумента *x* из этого множества соответствует не меньшее (не большее) значение функции *y*.

Таким образом,

$f(x)$ возрастает на $X \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X : x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$;

$f(x)$ убывает на $X \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X : x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$;

$f(x)$ не убывает на $X \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X : x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$;

$f(x)$ не возрастает на $X \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X : x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$.

Определение 5.7. Возрастающие и убывающие на множестве X функции называется монотонным на этом множестве.

Иногда возрастающие, убывающие функции называют строго монотонными, а неубывающие, невозрастающие — монотонными в широком смысле.

Примеры 5.4. Функции $f(x) = x$, $f(x) = 2^x$, $f(x) = \ln x$ возрастают на их области определения, функции $y = -x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ убывают на их области определения, функция $f(x) = x^2$ убывает при изменении x от $-\infty$ до 0 и возрастает, когда x возрастает от 0 до ∞.

Определение 5.8. Функция $y = f(x)$ называется ограниченной сверху (снизу) на множестве $X \subseteq D(f)$, если существует такое число M (число m), что для любых $x \in X$ выполняется условие $f(x) \leq M$ ($f(x) \geq m$). Функция $y = f(x)$ называется ограниченной, если она ограничена и сверху и снизу.

Таким образом, $f(x)$ ограничена сверху на $X \Leftrightarrow \exists M \in R : \forall x \in X \Rightarrow f(x) \leq M$;

$f(x)$ ограничена снизу на $X \Leftrightarrow \exists m \in R : \forall x \in X \Rightarrow f(x) \geq m$;

$f(x)$ ограничена на $X \Leftrightarrow \exists m, M \in R : \forall x \in X \Rightarrow m \leq f(x) \leq M$ или $|f(x)| \leq M^*$, где $M^* = \max(|m|, |M|)$.

Определение 5.9. Функция $y = f(x)$ называется неограниченной сверху (снизу) на множестве $X \subseteq D(f)$, если для любого числа $M \in R$ найдётся $x \in X$ такое, что $f(x) \geq M$ ($f(x) \leq M$).

Примеры 5.5. Функция $y = x^2$ ограничена снизу на её области определения, функция $y = \dfrac{1}{x}$ ограничена сверху на промежутке ($-\infty$,0), функция $y = \sin x$ ограничена при всех *x*, функция $y = \dfrac{1}{x}$ не ограничена на её области определения.

При исследовании функции и построении графика также полезно определять нули, промежутки знакопостоянства функции, множество значений, которые может принимать функция.

Определение 5.10. Нулем функции $y = f(x)$ называют значение $x \in D(f)$, при котором функция обращается в нуль.

Таким образом, нули функции есть корни уравнения $f(x) = 0$. В нуле график функции имеет общую точку с осью *OX*. Промежутки, где функция $f(x)$ положительна (отрицательна), находят, решая неравенство $f(x) > 0$ $\left(f(x) < 0\right)$, при этом график функции располагается соответственно выше (ниже) оси *OX*.

Введем теперь понятия сложной функции (суперпозиции функций) и обратной функции.

Суперпозиция (наложение) функций состоит в том, что вместо аргумента данной функции подставляется некоторая функция от другого аргумента, причем таких вложений может быть и больше двух. Например, суперпозиция функций $z = \sin x$, $y = \ln z$ дает функцию $y = \ln(\sin x)$, аналогично, суперпозиция функций $z = x^2$, $u = \dfrac{1}{z}$, $y = arctgu$ есть функция $y = arctg\dfrac{1}{x^2}$.

Рассмотрим простейший случай суперпозиции двух функций в общем виде. Пусть функция $y = f(z)$ определена на некотором множестве *Z*, а функция $z = \varphi(x)$ определена на множестве *X*, причем значения ее содержатся в множестве *Z*. Тогда переменная *y* через посредство *z* и сама является функцией от *x*: $y = f(\varphi(x))$, функция $\varphi(x)$ называется промежуточной функцией. Здесь по заданному $x \in X$ сначала находят соответствующее ему (по закону φ) значение $z \in Z$, а затем устанавливают соответствующее этому значению z (по закону f) значение y и считают его соответствующим выбранному x. Полученная функция от функции или сложная функция и есть результат суперпозиции функций $\varphi(x)$ и $f(z)$.

Предположение, что значения функции $\varphi(x)$ не выходят за пределы того множества Z, на котором определена функция $f(z)$, весьма существенно, например, если $y = \ln z$, $z = \sin x$, то для функции $y = \ln(\sin x)$ следует рассматривать лишь такие значения x, для которых $\sin x > 0$, иначе выражение $\ln(\sin x)$ не имеет смысла, а для функции $y = \sin(\ln x)$ должно быть $x > 0$.

Пусть функция $y = f(x)$ задана на некотором множестве X, а Y множество ее значений. Выберем $y = y_0 \in Y$, тогда в X необходимо найдется такое значение $x = x_0$, при котором $f(x_0) = y_0$, причем подобных значений может оказаться и несколько. Таким образом, каждому значению y из Y ставится в соответствие одно или несколько значений x, этим определяется на множестве Y соответственно однозначная или многозначная функция $x = \varphi(y)$, которая и называется обратной для функции $y = f(x)$.

Приведем **примеры 5.6.** Пусть $y = a^x$, $a > 1$, $D(y) = X = (-\infty;\infty)$.Значения y заполняют промежуток $Y = (0;\infty)$, причем каждому y из этого промежутка отвечает в X одно определенное $x = \log_a y$. Полученная обратная функция однозначная. Для функции $y = x^2$, определенной при всех x, обратная функция будет двузначной: каждому значению $y \in Y = (0;\infty)$ отвечает два значении $x = \pm\sqrt{y}$ из X. Вместо этой двузначной функции обычно рассматривают раздельно две однозначные функции $x = +\sqrt{y}$ и $x = -\sqrt{y}$ (“ветви” двузначной функции). Для функции $y = \sin x$ в силу ее периодичности обратная функция является многозначной.

Если функция $y = f(x)$ является взаимооднозначным (биективным) отображением X на Y, при котором каждому элементу $y \in Y$ ставится в соответствие единственный элемент $x \in X$ и наоборот, то на множестве Y определена однозначная функция $x = \varphi(y)$ или $x = f^{-1}(y)$, обратная к $f(x)$.

Очевидно, что в этом случае функции f и f^{-1} являются взаимно обратными одна по отношению к другой. Функцию, имеющую обратную называют обратимой. Достаточным условием обратимости функции является ее монотонность.

Теорема 5.1. Если функция $y = f(x)$ монотонна, то существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$. При этом если *f* – возрастающая функция, то и f^{-1} возрастающая, а если f убывающая, то и f^{-1} убывающая функция.

Данное утверждение не является необходимым для существования обратной функции – существуют немонотонные обратимые функции.

По графику функции $y = f(x)$ легко видеть, будет ли обратная для нее функция $x = \varphi(y)$ однозначной или нет. Если любая прямая, параллельная оси *OX*, пересекает график $y = f(x)$ разве лишь в одной точке, то обратная функция однозначная. Если некоторые из таких прямых пересекают график в нескольких точках, то обратная функция многозначная.

Пусть $y = f(x)$ монотонна на *X*, т.е. для нее существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$. По существу эти две функции выражают одну и ту же зависимость между переменными *x* и *y*. Только при функциональной зависимости $y = f(x)$ x является аргументом, а y функцией; при функциональной зависимости $x = f^{-1}(y)$ аргументом служит *y*, а функцией *x*. В таком случае графики обратной и прямой функций совпадают. Следуя общему подходу выбора для всех функций переменной *x* в качестве аргумента, а переменной *y* функцией этого аргумента, независимую переменную обратной функции также обозначают *x*, а зависимую *y*, и рассматривают обратную функцию в виде $y=\varphi(x)$ $(y=f^{-1}(x))$. Такая перестановка переменных в прямоугольной декартовой системе координат *OXY* соответствует перестановке осей координат, другими словами повороту плоскости графика на 180° вокруг биссектрисы первого координатного угла. Таким образом, график обратной функции $y=f^{-1}(x)$ получается как зеркальное отражение графика $y=f(x)$ относительно этой биссектрисы, т.е. графики прямой и обратной функций $y=f(x)$ и $y=f^{-1}(x)$ симметричны относительно биссектрисы первого координатного угла прямой $y=x$.

Общее правило нахождения обратной функции для взаимно однозначной функции $y=f(x)$ можно сформулировать так: решить уравнение $y=f(x)$ относительно x, найти $x=f^{-1}(y)$, поменять обозначения переменных x на y, y на x и получить функцию $y=f^{-1}(x)$, обратную к данной.

Подобно функциям определим монотонные и ограниченные последовательности.

Определение 5.11. Последовательность (x_n) называется возрастающей (убывающей), если

$$x_1<x_2<\ldots<x_n<x_{n+1}<\ldots$$

$$(x_1>x_2>\ldots>x_n>x_{n+1}>\ldots),$$

т.е. если для любых натуральных n_1, n_2 большему номеру $n_2>n_1$ соответствует большее (меньшее) значение элемента последовательности $x_{n_2}>x_{n_1}\left(x_{n_2}<x_{n_1}\right)$.

Определение 5.12. Последовательность (x_n) называется неубывающей (невозрастающей), если

$$x_1\le x_2\le\ldots\le x_n\le x_{n+1}\le\ldots$$

$$(x_1\ge x_2\ge\ldots\ge x_n\ge x_{n+1}\ge\ldots),$$

т.е. если для любых натуральных n_1, n_2 большему номеру $n_2 > n_1$ соответствует не меньшее (не большее) значение элемента последовательности $x_{n_2} \geq x_{n_1} \left(x_{n_2} \leq x_{n_1} \right)$.

Определение 5.13. Последовательность $\left(x_n \right)$ называется ограниченной сверху (снизу), если существует такое число M (число m), что для любых элементов x_n последовательности выполняется неравенство $x_n \leq M \left(x_n \geq m \right)$.

Число M (число m) называют верхней гранью (нижней гранью) последовательности $\left(x_n \right)$.

Определение 5.14. Последовательность $\left(x_n \right)$ называется ограниченной, если она ограничена и сверху и снизу, т.е. если существуют числа m и M такие, что любой элемент x_n этой последовательности удовлетворяет неравенствам $m \leq x_n \leq M$ или $\left| x_n \right| \leq M^*$, где $M^* = \max\left(|m|, |M| \right)$.

Определение 5.15. Последовательность $\left(x_n \right)$ называется неограниченной, если для любого положительного числа M, найдется элемент x_n этой последовательности, удовлетворяющий неравенству $\left| x_n \right| > M$.

Примеры 5.7. Последовательность $\left(x_n \right) = \left(n^2 \right)$ монотонно возрастающая, ограниченная снизу, неограниченная сверху, $\left(x_n \right) = \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)$ монотонно возрастающая и ограниченная $\left(2 \leq x_n < 3, n = 1, 2, \ldots \right)$, $\left(x_n \right) = \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ - монотонно убывающая и ограниченная $\left(1 < x_n \leq 2 \right)$, последовательность $\left(x_n \right) = \left(\sin n \right)$ немонотонная, ограниченная $\left(\left| \sin n \right| < 1 \right)$, последовательность $x_n = \left((-1)^n n^2 \right)$ немонотонная и неограниченная.

Особый интерес представляют бесконечно малые (БМП) и бесконечно большие (ББП) последовательности.

Определение 5.16. Последовательность (x_n) называется бесконечно малой, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε можно указать номер $n_0(\varepsilon)$, зависящий от ε, такой, что при $n \geq n_0$ все элементы x_n этой последовательности удовлетворяют неравенству $|x_n| < \varepsilon$.

Обычно БМП обозначают $(\alpha_n),(\beta_n),(\gamma_n)$....

Определение 5.17. Последовательность (x_n) называется бесконечно большой, если для любого положительного числа M можно указать номер $n_0(M)$, зависящий от M, такой, что при $n \geq n_0$ все элементы x_n этой последовательности удовлетворяют неравенству $|x_n| > M$.

Всякая ББП является неограниченной, что следует из определений. Но не всякая неограниченная последовательность является ББП, например, неограниченная последовательность 1, 2, 1, 3, …, 1, n, … не является ББП, поскольку при $M > 1$ неравенство $|x_n| > M$ не выполняется для всех x_n с нечетными номерами.

Примеры 5.8. Последовательности $(\alpha_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$, $(\alpha_n) = \left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ являются БМП, $(x_n) = (n^2)$, $(x_n) = \left((-1)^n n\right)$ – ББП.

§ 3. Предел числовой последовательности

Одной из основных операций математического анализа является операция предельного перехода. Эта операция встречается в анализе в различных формах. Простейшая форма основана на понятии предела числовой последовательности.

Определение 5.18. Число a называется пределом числовой последовательности (x_n), если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдется такое натуральное число $n_0(\varepsilon)$, зависящее от ε, что для всех $n > n_0$ члены x_n этой последовательности удовлетворяет неравенству:

$$|x_n - a| < \varepsilon \tag{5.2}$$

В этом случае говорят, что последовательность имеет предел и обозначают:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{или} \quad x_n \underset{n\to\infty}{\to} a, \quad a \in R.$$

Итак,

$$\lim_{n\to\infty} x_n \overset{\text{det}}{=} a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\ n_0(\varepsilon) \in N : \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Последовательности, имеющие конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \ a \in R$ называют сходящимися (к числу a), а последовательности, не имеющие конечного предела, - расходящимися.

Номер n_0 последовательности, начиная с которого для членов последовательности выполняется неравенство (5.2), вообще говоря, не может быть указан раз и навсегда, он зависит от выбора ε, как отмечено в определении. Чем большей близости значений x_n к a требуется, тем более далекие по номеру значения x_n приходится рассматривать.

Неравенство (5.2) равносильно неравенствам

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

Числа x_n, $(n = 1,2,...)$, a, $a \pm \varepsilon$ можно изобразить на числовой оси

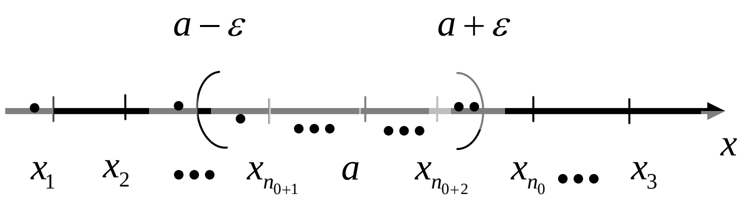


Рис. 5.1

Множество точек числовой прямой, удовлетворяющее неравенству (5.2) называют ε – окрестностью точки a и обозначают $O_\varepsilon(a)$ или $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Из определения следует, что какой бы малый промежуток длины 2ε с центром в точке a (какую бы сколь угодно малую произвольную ε – окрестность точки a) ни взять, все точки x_n, начиная с некоторого x_{n_0}, должны попасть внутрь этого промежутка, так что вне его может остаться разве лишь конечное число этих точек. Сама точка, изображающая предел a, является как бы средоточием сгустка точек, изображающих значения варианты. По определению несущественно, лежат ли значения варианты по одну сторону или по разные стороны от точки a, приближаются ли они с каждым большим номером к своему пределу или нет, достигают ли своего предела. Существенно лишь то, что члены последовательности должны отличаться от предела сколь угодно мало для достаточно больших номеров n.

Пример 5.9. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1.$$

По определению

$$|x_n - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{-1}{n+1}\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \varepsilon \Rightarrow n > \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] - 1,$$

где $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ - целая часть числа $\frac{1}{\varepsilon}$. Следовательно, если взять $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] - 1$, то, начиная с этого номера, для всех $n > n_0$ будет выполняться неравенство $|x_n - 1| < \varepsilon$, и , согласно определению:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1.$$

Очевидно, что номер n_0 зависит от выбора ε, чем меньшее ε задаем, тем больший номер потребуется, чтобы выполнялось неравенство определения. Например:

$\varepsilon = 0{,}01$, тогда $n_0 = \left[\frac{1}{0.01}\right] - 1 = 99,$

$\varepsilon = 0{,}01$, тогда $n_0 = \left[\frac{1}{0.01}\right] - 1 = 999,$ и т.д.

Замечание 5.2. Находить пределы по определению сложно, неудобно, для этого применяют различные приемы, основанные на свойствах пределов.

Согласно определениям (5.15)-(5.17) БМП имеет пределом число 0, а ББП имеет бесконечный предел ($+\infty$, $-\infty$ или ∞).

Используя понятие БМП, можно сформулировать следующее утверждение: чтобы последовательность (x_n) имела своим пределом число a, необходимо и достаточно, чтобы разность $\alpha_n = x_n - a$ между членами последовательности x_n и числом a была бесконечно малой.

Таким образом, если варианта x_n имеет пределом число a, то она может быть представлена в виде $x_n = a + \alpha_n$, где α_n есть бесконечно малая, и обратно, если x_n допускает такое представление, то $x_n \to a$. Это свойство часто используют на практике для установления предела переменной.

Укажем некоторые свойства сходящихся последовательностей.

Теорема 5.2. Сходящаяся последовательность имеет только один предел.

Доказательство. Предположим, что последовательность (x_n) сходится и имеет два различных предела a и b. Тогда элементы последовательности можно представить $x_n = a + \alpha_n$ и $x_n = b + \beta_n$, где α_n, β_n – элементы бесконечно малых последовательностей (α_n) и (β_n). Вычитая представления x_n, получим $x_n - x_n = (a + \alpha_n) - (b + \beta_n) = 0 \Rightarrow \alpha_n - \beta_n = b - a$, т.е. все элементы бесконечно малой последовательности $\alpha_n - \beta_n$ имеют одно и то же постоянное значение $b - a$, следовательно $b - a = 0$, $b = a$.

Теорема 5.3. Сходящаяся последовательность ограничена.

Доказательство. Пусть (x_n) - сходящаяся последовательность и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует номер n_0 последовательности такой, что для любого $n > n_0$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Отсюда $|x_n| = |x_n - a + a| \le |x_n - a| + |a| < |a| + \varepsilon$, т.е. $|x_n| < |a| + \varepsilon$ при $n > n_0$.

Выберем $M = \max(|a| + \varepsilon, x_1, x_2, \ldots x_{n0})$, тогда $|x_n| < M$ при всех $n \in N$, т.е. последовательность (x_n) ограничена.

Ограниченность последовательности является необходимым, но не достаточным признаком её сходимости. Например, последовательность $\left((-1)^n\right)=(-1,1,-1,1,...)$ ограничена, но не имеет предела. Достаточным признаком сходимости последовательности является следующее утверждение:

Теорема 5.4. Всякая ограниченная монотонная последовательность сходится.

Монотонность ограниченной последовательности является только достаточным, но не необходимым условием её сходимости, существуют ограниченные немонотонные сходящиеся последовательности. Например, последовательность $\left(\frac{(-1)^n}{n+1}\right)=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},...\right)$ сходится к нулю, хотя и не монотонна.

Неограниченная возрастающая последовательность стремится к + ∞, а убывающая стремится к - ∞.

Укажем теперь общий признак существования конечного предела последовательности (x_n). Само определение предела для этой цели служить не может, так как в нём фигурирует уже тот предел, о существовании которого идёт речь. Этот признак сформулирован в следующей теореме, которую называют критерием или принципом сходимости числовой последовательности.

Теорема 5.5. Для того, чтобы последовательность (x_n) вообще имела конечный предел необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ существовал такой номер $n_0(\varepsilon)$, чтобы неравенство $\left|x_{n_2}-x_{n_1}\right|<\varepsilon$ выполнялось, лишь только $n_2>n_0$, $n_1>n_0$.

Суть дела в этом утверждении в том, что для сходимости последовательности необходимо и достаточно, чтобы элементы последовательности безгранично сближались между собой по мере возрастания их номеров.

Последовательность, удовлетворяющая условиям критерия сходимости, называется фундаментальной по Коши.

Введём ещё понятие подпоследовательности числовой последовательности. Пусть (x_n) некоторая последовательность, рассмотрим произвольную возрастающую последовательность натуральных чисел $n_1, n_2 ... n_k, ...$, и запишем соответствующие элементы из последовательности (x_n) : $(x_{n_k}) = x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_k}, ...$ Полученную последовательность называют частичной последовательностью или подпоследовательностью последовательности (x_n). Здесь номером, принимающем последовательно все натуральные значения, является число k, а n_k представляет собой варианту, принимающую натуральные значения и стремящуюся к $+\infty$ при возрастании k.

Из всякой последовательности можно извлечь монотонную подпоследовательность, а из всякой ограниченной последовательности можно извлечь сходящуюся подпоследовательность.

§ 4. Предел функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором множестве X и точка x_0 принадлежит или не принадлежит этому множеству, но в любой окрестности этой точки содержатся точки множества X, отличные от x_0. Выражение “функция f определена на множестве X” не означает, что указанное множество является областью определения функции, а лишь, что это множество принадлежит области определения ($X \subseteq D(f)$) и что в данном случае функция f рассматривается только на указанном множестве X, т.е. по существу рассматривается лишь сужение функции f на множестве X. Естественно, что для числовой функции одной действительной переменной множество X есть некоторый промежуток на числовой прямой.

Для определения предела функции наряду с понятием окрестности (δ - окрестности) точки x_0 $O_\delta(x_0)=\{x|\ |x-x_0|<\delta\}$ определим проколотую окрестность точки x_0.

Определение 5.19. Проколотой окрестностью (δ-окрестностью) $\dot{O}_\delta(x_0)$ точки x_0 называется окрестность $O_\delta(x_0)$, из которой удалена точка x_0 т.е. $\dot{O}_\delta(x_0)=\{x\ |\ 0<|x-x_0|<\delta\}$.

В точке x_0 значение функции $y=f(x)$ может быть не определено. Точка x_0, обладающая указанным выше свойством, называется точкой сгущения или точкой прикосновения множества X.

Определение 5.20. Точка $x_0\in R$ называется точкой сгущения (прикосновения) множества X, если в каждой ее окрестности содержатся отличные от x_0 значения $x\in X$.

Точка сгущения x_0, вообще говоря, может и не принадлежать множеству X. Например, на интервале (a, b) любая внутренняя точка является точкой сгущения, в то же время точки a и b, не принадлежащие (a, b), также являются точками сгущения данного промежутка.

Приведем теперь определения конечного предела функции $y=f(x)$ при $x\to x_0$. Первое определение, называемое “на языке последовательностей” или “по Гейне”, основано на уже установленном понятии предела последовательности.

Определение 5.21. Число y_0 называется пределом функции $y=f(x)$ в точке x_0 (при $x\to x_0$), если для любой последовательности точек $x_n\in\dot{O}_\delta(x_0)$, $n=1,2,...$, сходящейся к x_0, последовательность соответствующих значений функции $f(x_n)$ сходится к y_0 ($f(x)\to y_0$ при $x\to x_0$):

$$y_0=\lim_{x\to x_0}f(x)\Leftrightarrow \forall x_n\in\dot{O}_\delta(x_0),\ \ n=1,2,....:\lim_{n\to\infty}x_n=x_0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}f(x_n)=y_0.$$

Так как последовательность $(f(x_n))$ может иметь только один предел, то и функция $y=f(x)$ может иметь в точке x_0 только одно предельное значение.

Другое определение (по Коши) называется “на языке $\varepsilon - \delta$ “.

Определение 5.22. Число y_0 называется пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0 (или при $x \to x_0$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta(\varepsilon)$ (зависящее от ε), что при всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - y_0| < \varepsilon$, т.е.

$$y_0 = \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0:\ \forall x \mid 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - y_0| < \varepsilon$$

или

$$y_0 = \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0: \forall x \in \dot{O}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in O_\varepsilon(y_0).$$

Согласно определению, любому x из проколотой δ - окрестности точки x_0 соответствует значение $f(x)$, попадающее в ε -окрестность точки y_0.

Определения предела функции в точке x_0 по Гейне и по Коши эквивалентны. В определениях предела предполагается, что точка x, приближаясь к x_0, может оставаться как слева, так и справа от x_0.

Если приходится рассматривать предел функции $y = f(x)$ при условии, что точка x, приближаясь к точке x_0, остается либо только левее, либо только правее ее, то говорят об односторонних пределах функции в точке x_0 (соответственно, предел слева, предел справа).

Определение 5.23. Левой (правой) δ-окрестностью точки x_0 $O_\delta(x_0 - 0)$ $(O_\delta(x_0 + 0))$ называется множество всех x, удовлетворяющих неравенству:

$0 \le x_0 - x < \delta$, $\quad (0 \le x - x_0 < \delta)$.

Проколотые левая и правая δ-окрестности точки x_0 получаются “выкалыванием” из соответствующих δ - окрестностей точки x_0, т.е.

$$\dot{O}_\delta(x_0 - 0) = \{x \mid 0 < x_0 - x < \delta\},$$

$$\dot{O}_\delta(x_0 + 0) = \{x \mid 0 < x - x_0 < \delta\}.$$

Определение 5.24. Число y_0 называется левосторонним (правосторонним) пределом или пределом слева (справа) функции $y = f(x)$ в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$, такое, что при всех x, принадлежащих проколотой левой (правой) δ - окрестности точки x_0, соответствующие значения функции попадают в ε - окрестность точки y_0.

Пределы слева и справа соответственно обозначаются

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = y_0, \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = y_0 \text{ или } f(x_0 - 0), f(x_0 + 0).$$

Если в точке x_0 существуют конечные левосторонний и правосторонний пределы функции $y = f(x)$, равные одному и тому же числу, то это число является пределом функции $y = f(x)$.

В точке x_0 функция $y = f(x)$ может иметь и бесконечный предел.

Определение 5.25. **(**на языке ε - δ**).** Предел функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$ называется бесконечным, если для любого положительного числа M существует число $\delta > 0$, такое, что для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > M$. Функцию $f(x)$ называют бесконечно большой: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Если $f(x)$ стремится к бесконечности при $x \to x_0$ и при этом принимает только положительные или только отрицательные значения , то это обозначают так : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Определение 5.26. (на языке последовательностей). Функция $y = f(x)$ имеет бесконечный предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, если для любой сходящейся к x_0 последовательности (x_n) значений аргумента x соответствующая последовательность $(f(x_n))$ значений функции является бесконечно большой.

Аналогично определяются односторонние бесконечные пределы.

При исследовании функции также рассматривают ее поведение при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$, где функция может иметь как конечный, так и бесконечный предел.

Определение 5.27. (на языке последовательностей). Число y_0 называется пределом функции $y=f(x)$ при $x\to\infty$, если для любой бесконечно большой последовательности (x_n) значений аргумента, соответствующая последовательность $(f(x_n))$ значений функции сходится к y_0, обозначается

$$y_0=\lim_{x\to\infty} f(x).$$

Определение 5.28. (на языке последовательностей). Число y_0 называется пределом функции $y=f(x)$ при $x\to+\infty$ ($x\to-\infty$), если для любой бесконечно большой последовательности (x_n) значений аргумента, элементы которой положительны (отрицательны), соответствующая последовательность $(f(x_n))$ значений функции сходится к y_0, обозначается

$$y_0=\lim_{x\to+\infty} f(x) \text{ и } y_0=\lim_{x\to-\infty} f(x).$$

Определение 5.29. (на языке ε–δ). Число y_0 называется пределом функции $y=f(x)$, при $x\to+\infty$ ($x\to-\infty$), если для любого $\varepsilon>0$ существует положительное число $M\in R$, такое, что для всех $x>M$ $(x<-M)$ выполняется неравенство : $|f(x)-y_0|<\varepsilon$.

Множество $O_\delta(x)=\{x\,|\,x>M\}$ называют δ - окрестностью бесконечно удаленной точки.

Определение 5.30. Предел функции $y=f(x)$ при $x\to+\infty$ ($x\to-\infty$), называется бесконечным, если для любого сколь угодно большого числа $M\in R$ найдется число $K>0$ такое, что для любого $|x|>K$ выполняется неравенство: $|f(x)|>M$.

§ 5. Вычисление пределов

Вычисление пределов последовательностей и функций. Неопределенности, приемы раскрытия неопределённостей

Вычисление пределов числовых последовательностей и функций основано на их свойствах, а так же правилах предельного перехода при выполнении операций над ними в равенствах и неравенствах, их связывающих.
Принимая во внимание, что действия над двумя переменными легко распространить на любое конечное число переменных, ограничимся случаем двух последовательностей или двух функций.
Рассмотрим вначале последовательности. Заметим сразу, что из определения предела последовательности следует, что конечное число элементов последовательности не влияет на её сходимость и на величину её предела.
Равенства, неравенства, которым удовлетворяют элементы сходящихся последовательностей, в пределе переходят в соответствующие равенства и неравенства для пределов этих последовательностей, действия над сходящимися последовательностями приводят к таким же действиям над их пределами.
Сформулируем эти свойства сходящихся последовательностей в виде теорем.

Теорема 5.6. *Если элементы* x_n *и* y_n *сходящихся последовательностей* (x_n) *и* (y_n)*, начиная с некоторого номера, равны:* $x_n = y_n$*, причем каждая из них имеет конечный предел* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$*, то равны и эти пределы:* $a = b$.

Теорема 5.7. *Если элементы сходящейся последовательности* (x_n)*, начиная с некоторого номера, удовлетворяют неравенству* $x_n \ge b$ $(x_n \le b)$*, а* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$*, то и предел этой последовательности удовлетворяет неравенству* $a \ge b$ $(a \le b)$.

Теорема 5.8. *Если элементы* x_n *и* y_n*, сходящихся последовательностей* (x_n) *и* (y_n)*, начиная с некоторого номера, удовлетворяют неравенству* $x_n \le y_n$*, и* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$*, то их пределы удовлетворяют такому же неравенству* $a \le b$.
Следует заметить, что из строгого неравенства $x_n < y_n$*, вообще говоря, не вытекает строгое же неравенство* $a < b$*, а по-прежнему* $a \le b$*, например,* $\frac{1}{n} > -\frac{1}{n}$ *при всех* n *и тем не менее* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) = 0$.

Теорема 5.9. *Пусть* (x_n) *и* (z_n) *- сходящиеся последовательности, имеющие общий предел а:* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$*. Пусть, кроме того, начиная с некоторого номера, элементы последовательность* (y_n) *удовлетворяют неравенствам* $x_n \le y_n \le z_n$*. Тогда последовательность* (y_n) *сходится и* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Теорема 5.10. *Если последовательности* (x_n) *и* (y_n) *сходятся и* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$*,то*

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \pm b$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(cx_n) = c\lim\limits_{n\to\infty} x_n = ca$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \lim\limits_{n\to\infty} y_n = ab$;

4) *если* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \dfrac{a}{b}$.

Сформулируем теперь утверждения о пределах функций.

Теорема 5.11. *Если в* $\dot{O}_\delta(x_0)$ *точки* x_0 *для функций* $\varphi(x)$, $f(x)$, $g(x)$ *выполняются неравенства* $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$ *и существуют конечные пределы* $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a$, *то существует* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$.

Теорема 5.12. *Если в* $\dot{O}_\delta(x_0)$ *точки* x_0 *задана сложная функция* $y = f(z(x))$ *и существуют конечные пределы* $\lim\limits_{x\to x_0} z(x) = a$, $\left(z(x) \neq 0,\ x \in \dot{O}_\delta(x_0)\right)$, $\lim\limits_{z\to a} f(z) = b$, *то существует предел сложной функции* $y = f(z(x))$ *в точке* x_0 *и* $\lim\limits_{x\to x_0} f(z(x)) = \lim\limits_{z\to a} f(z) = b$.

Теорема 5.13. *Если функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *в точке* x_0 *имеют конечные пределы* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$, *то*

1) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a \pm b$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0} cf(x) = c\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = ca$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = ab$;

4) *если* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$, *то* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \dfrac{a}{b}$.

Приведенные свойства пределов используют при вычислении пределов последовательностей и функций. В результате выполнения необходимых действий по вычислению предела общего члена последовательности или предела функции находим конечный или бесконечный предел или устанавливаем, что предел не существует. При этом во многих случаях приходится сталкиваться с выражениями, которые называют неопределенностями. К неопределенностям относят выражения вида $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, 0^∞, ∞^0, 1^∞. *Они возникают при выполнении, например, действий вычитания, умножения, деления, возведения* *в степень бесконечно больших или бесконечно малых переменных величин. В таких случаях уже недостаточно знать лишь пределы последовательностей (x_n) и (y_n) или функций $f(x)$ и $g(x)$, но необходимо учитывать и самый закон их изменения, характер поведения в окрестности предельной точки. Для вычисления таких пределов приведенные теоремы неприменимы, проводится исследование выражений, которое называют раскрытием неопределенности, и только после этого можно применять указанные выше правила операций предельного перехода.*

Рассмотрим подробнее пример одной неопределенности $\frac{0}{0}$, возникающей при вычислении предела $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$ частного последовательностей (x_n) и (y_n), когда обе переменные (x_n) и (y_n) одновременно стремятся к нулю при $n\to\infty$. В этом случае, хотя нам известны пределы (x_n) и (y_n), но о пределе их отношения, не зная самих этих вариант, никакого общего утверждения сделать нельзя. Этот предел, в зависимости от частного закона изменения каждой из переменных, может иметь различные значения или даже вовсе не существовать. В самом деле, пусть $x_n=\frac{1}{n^2}$, $y_n=\frac{1}{n}$; обе варианты стремятся к нулю и их отношение $\frac{x_n}{y_n}=\frac{1}{n}$ также стремится к нулю при $n\to\infty$. Если же, наоборот, положить $x_n=\frac{1}{n}$, $y_n=\frac{1}{n^2}$, то, хотя они по-прежнему стремятся к нулю, но их отношение $\frac{x_n}{y_n}=n$ стремится к ∞. Если $x_n=\frac{a}{n}$, $a=const$, $a\neq 0$, $y_n=\frac{1}{n}$, то при $n\to\infty$ $\frac{x_n}{y_n}=a$, а если $x_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$, $y=\frac{1}{n}$, то их отношение $\frac{x_n}{y_n}=(-1)^{n+1}$ вообще не имеет предела.

Подобные обстоятельства возникают и в случае других неопределенностей, будь то последовательности или функции.

Приведем некоторые рекомендации по раскрытию неопределенностей.

Основная трудность раскрытия неопределенности $\frac{0}{0}$ состоит в выделении множителя $(x-x_0)^{\alpha}$ в числителе и знаменателе дроби, если $x\to x_0$. Если дробь рациональная, то числитель и знаменатель раскладывают на множители. Если дробь содержит иррациональные выражения, то выделение подобных множителей достигается переводом иррациональностей в числитель или знаменатель. Если дробь содержит тригонометрические функции, то используют первый замечательный предел или эквивалентные бесконечно малые *функции, о которых говорится ниже. Кроме того, полезными оказываются пределы*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\mu-1}{x}=\mu.$$

При раскрытии неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$ *в числителе и знаменателе выделяют множители* x^α и x^β *и делят на старшую степень* x.

Неопределенные выражения $0\cdot\infty$ и $\infty-\infty$ *сводятся к неопределенности вида* $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

Неопределенность вида 1^∞ *раскрывается с помощью второго замечательного предела, который приводится ниже.*

Для раскрытия неопределенностей 0^0, ∞^0 *применяют логарифмирование выражений или правило Лопиталя, которое будет рассмотрено ниже в разделе “Дифференциальное исчисление функции одной переменной”.*

§ 6. Первый и второй замечательный пределы

Установим два важных предела, которые используются при вычислении пределов для раскрытия неопределенностей.

Теорема 5.14. Справедливо равенство

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad (5.3)$$

Доказательство. Так как $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ является четной функцией, рассмотрим ее только на промежутке $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

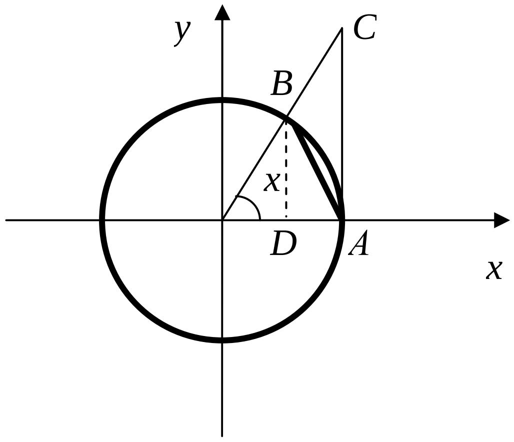


Рис. 5.2

Предварительно докажем неравенства $\sin x < x < tgx,$ $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$. С этой целью в круге единичного радиуса рассмотрим острый угол $\angle AOB,$ хорду AB и касательную AC к окружности в точке A (рис. 5.2).

Сравним площади $S_{\Delta AOB} < S_{сектораAOB} < S_{\Delta AOC}$.

Обозначим через x радианную меру $\angle AOB$, тогда

$$|OA| = 1, |AC| = tgx,$$

$$\frac{1}{2}|OA|^2 \sin x < \frac{1}{2}|OA|^2 x < \frac{1}{2}|OA||AC| \Leftrightarrow \sin x < x < tgx;$$

далее, так как принято $0 < x < \frac{\pi}{2}$, разделим неравенства на $\sin x$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Leftrightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

В силу четности функций $\cos x$ и $\frac{\sin x}{x}$ последнее двойное неравенство справедливо и для интервала $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$. Отсюда, неравенства $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ выполняются для всех $x \in \left(-\frac{\pi}{2};0\right) \cup \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Перейдем в неравенствах к пределам при $x \to 0$ $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$ и, согласно свойству пределов, предел отношения $\frac{\sin x}{x}$ заключенный между $\lim_{x\to 0}\cos x$ и 1 равен 1, т.е.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Предел (5.3) называют первым замечательным пределом. Он используется для раскрытия некоторых неопределенностей вида $\frac{0}{0}$.

Замечание 5.3. Из равенства (5.3) можно легко получить

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1;\ \lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1;\ \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1 \text{ и т.п.}$$

Рассмотрим последовательность $(x_n)=\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$. Применяя формулу бинома Ньютона к x_n, получим

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n!}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \quad (5.4)$$

В этой записи для общего элемента последовательности все слагаемые, кроме первых двух, возрастают и для x_{n+1} добавляется еще одно слагаемое. Следовательно, при всех $n\in N$ выполняется $x_n<x_{n+1}$ и последовательность (x_n) возрастающая. Кроме того, заменяя в формуле (5.4) все множители в скобках единицами, найдем с учетом формулы суммы геометрической прогрессии

$$x_n<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}<2+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=2+2\left(\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)<3$$

Последовательность (x_n) возрастает и ограничена, следовательно, она сходится и

$$2<\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3.$$

Предел этой последовательности называют числом е. Число е является иррациональным

$$e=2{,}718281828\ldots$$

и известно как основание натуральных логарифмов.

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e \qquad (5.5)$$

В общем случае это число можно определить как

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \qquad (5.6)$$

Если в равенстве (5.6) положить $\frac{1}{x}=t$, то при $x\to\infty$ $t\to 0$ получим еще одну форму записи предела

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e \qquad (5.7)$$

Предел (5.5) - (5.7) называют вторым замечательным пределом, его применяют, например, для раскрытия неопределенностей вида 1^∞.

Примеры 5.10.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 9x}{\sin 3x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 9x}{9x}\cdot 9x}{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{9x}{3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 9x}{9x}}{\frac{\sin 3x}{3x}}=\frac{9}{3}\cdot\frac{1}{1}=3.$$

При вычислении предела дважды применен первый замечательный предел и условие, что при $x\to 0$ переменная x не принимает значение $x=0$, а только сколь угодно близко приближается к нулю.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x+2}\right)^{\frac{x^2}{x+2}}=\left[1^\infty\right]=\lim_{x\to\infty}\left(1+\left(\frac{3x+4}{3x+2}-1\right)\right)^{\frac{x^2}{x+2}}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{3x+2}\right)^{\frac{3x+2}{2}}\right)^{\frac{2}{3x+2}\cdot\frac{x^2}{x+2}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2}{3x^2+8x+4}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=e^{\frac{2}{3}}.$$

При вычислении этого предела прежде всего убеждаемся, что имеем неопределенность 1^∞, а затем преобразуем выражение с целью применить второй замечательный предел.

§ 7. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Рассмотрим подробнее определенные выше бесконечно малые и бесконечно большие величины для случая функций.

Определение 5.31. Функция $y = f(x)$ называется бесконечно малой функцией (БМФ) при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Определение 5.32. Функция $y = f(x)$ называется бесконечно большой функцией (ББФ) при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Аналогично определяется БМФ и ББФ при $x \to \infty$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, $x \to x_0 - 0$, $x \to x_0 + 0$.

Приведём равносильные определения БМФ по Коши (на языке “ε-δ”) и по Гейне (“на языке последовательностей”).

Определение 5.33. Функция $y = f(x)$ называется бесконечно малой при $x \to x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого $x \in \dot{O}_\delta(x_0)$ $|f(x)| < \varepsilon$.

Определение 5.34. Функция $y = f(x)$ называется бесконечно малой при $x \to x_0$, если для любой сходящейся к x_0 последовательности (x_n) значений аргумента x, отличных от x_0, соответствующая последовательности $(f(x_n))$ значений функции стремится к нулю.

БМФ принято обозначать $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$….

Если функция $f(x)$ при $x \to x_0$ БМФ, то функция $\dfrac{1}{f(x)}$ при $x \to x_0$ - ББФ. Если $f(x)$ при $x \to x_0$ является ББФ, то функция $\dfrac{1}{f(x)}$ при $x \to x_0$ - БМФ.

Примеры 5.11. Функции $f(x)=\sin x$ при $x\to 0$, $f(x)=\cos x$ при $x\to\frac{\pi}{2}$, $f(x)=\frac{1}{x}$ при $x\to\infty$ является БМФ, функции $f(x)=\frac{1}{x}$ при $x\to 0$, $f(x)=tgx$ при $x\to\frac{\pi}{2}$, $f(x)=x^2$ при $x\to\infty$ являются ББФ.

БМФ и ББФ обладают такими же свойствами, что и бесконечно малые и бесконечно большие последовательности соответственно. Укажем некоторые основные свойства БМФ и проведём их сравнение.

Теорема 5.15. Конечная сумма БМФ в $\dot{O}_\delta(x_0)$ есть БМФ в $\dot{O}_\delta(x_0)$.

Доказательство. Пусть $\alpha_i(x)$, $i=\overline{1,n}$ - все БМФ в $\dot{O}_\delta(x_0)$, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha_i(x)=0$, $i=\overline{1,n}$, тогда $\lim\limits_{x\to x_0}\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\lim\limits_{x\to x_0}\alpha_i(x)=0$, ч.т.д.

Теорема 5.16. Произведение БМФ и функции, ограниченной в $\dot{O}_\delta(x_0)$ есть БМФ.

Доказательство. Пусть $\alpha(x)$ - БМФ, $f(x)$ ограничена в $\dot{O}_\delta(x_0)$, т.е. $\forall\frac{\varepsilon}{M}>0$ $\exists\delta_1>0:\forall x\in\dot{O}_{\delta_1}(x_0)\Rightarrow|\alpha(x)|<\frac{\varepsilon}{M}$ и $\exists M>0:\forall x\in\dot{O}_{\delta_2}(x_0)\Rightarrow|f(x)|\le M$.

Для $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$ $|\alpha(x)|<\frac{\varepsilon}{M}$, $|f(x)|\le M$ в $\dot{O}_\delta(x_0)$. Тогда в $\dot{O}_\delta(x_0)$ $|\alpha(x)f(x)|=|\alpha(x)||f(x)|<\frac{\varepsilon}{M}M=\varepsilon$, т.е. $\alpha(x)f(x)$ при условиях теоремы есть БМФ.

Пример 5.12. Функция $y=\frac{1}{x}\cdot\sin x$ при $x\to\infty$ является БМФ. Действительно, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$, $|\sin x|\le 1$.

Из теорем следует, что произведение числа и БМФ или двух БМФ в $\dot{O}_\delta(x_0)$ есть БМФ, частное от деления БМФ в $\dot{O}_\delta(x_0)$ на функцию, имеющую конечный предел при $x\to x_0$, неравный нулю, также есть БМФ.

Поведение функции вблизи точки x_0, в которой функция, как правило, не определена, называют асимптотическим поведением функции в окрестности этой точки. Асимптотику обычно характеризуют с помощью другой, более простой или более изученной функции, которая в окрестности исследуемой точки с малой относительной погрешностью воспроизводит значение изучаемой функции.

Определение 5.35. Если $\alpha(x),\beta(x)$ - БМФ и $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c$, $c\neq 0$, $c\neq\infty$, то их называют БМФ одного порядка малости при $x\to x_0$.

Определение 5.36. Если $\alpha(x),\beta(x)$ - БМФ и $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то их называют эквивалентными при $x\to x_0$ (или асимптотически равными при $x\to x_0$).

Эквивалентность обозначают символом $\approx$, т.е. $\alpha(x)\approx\beta(x)$ при $x\to x_0$.

Если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, то при $x\to x_0$ справедливы асимптотические равенства:

$\sin\alpha(x)\approx\alpha(x)$, $tg\alpha(x)\approx\alpha(x)$, $\arcsin\alpha(x)\approx\alpha(x)$, $\mathrm{arc}tg\alpha(x)\approx\alpha(x)$,

$\sqrt{1+\alpha(x)}-1\approx\dfrac{1}{2}\alpha(x)$, $\sqrt[n]{1+\alpha(x)}-1\approx\dfrac{1}{n}\alpha(x)$, $e^{\alpha(x)}-1\approx\alpha(x)$, $\ln(1+\alpha(x))\approx\alpha(x)$.

Теорема 5.17. Предел отношения двух БМФ равен пределу отношения эквивалентных им функций, т.е., если при $x\to x_0$ $\alpha_1(x)\approx\alpha_2(x)$, $\beta_1(x)\approx\beta_2(x)$, то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}.$$

Доказательство. Представим

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}\cdot\frac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}\cdot\frac{\beta_2(x)}{\beta_1(x)}\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\beta_2(x)}{\beta_1(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)},$$

так как в силу эквивалентности $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$, $\beta_1(x)$ и $\beta_2(x)$ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}=1$, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta_2(x)}{\beta_1(x)}=1$.

Теорема используется при вычислении пределов, где бесконечно малые величины заменяют более простыми, эквивалентными им.

Пример 5.13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1-7x^2}{\arcsin 3x+arctgx^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-7x^2}{3x+x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-7x}{3+x}=\dfrac{2}{3}$, так как БМФ $e^{2x}-1\approx 2x$, $\arcsin 3x\approx 3x$, $arctgx^2\approx x^2$ при $x\to 0$, $x\neq 0$.

Определение 5.37. Если функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ БМФ и $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то $\alpha(x)$ называют БМФ более высокого порядка малости по сравнению с функцией $\beta(x)$; одновременно $\beta(x)$ - БМФ низшего порядка малости, чем $\alpha(x)$. Символически это записывается так: $\alpha(x)=o(\beta(x))$ при $x\to x_0$, читается: $\alpha(x)$ есть о малое от $\beta(x)$ при $x\to x_0$. Запись $\alpha(x)\in o(1)$ при $x\to x_0$, означает, что $\alpha(x)$ есть БМФ при $x\to x_0$, $o(1)$ означает множество БМФ при $x\to x_0$.

Пример 5.14. Функция $\alpha(x)=x^3$ при $x\to 0$ является БМФ более высокого порядка малости, чем $\beta(x)=x$, т.е. $x^3=o(x)$, так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$.

Замечание 5.4. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\infty$, то $\alpha(x)=o(\beta(x))$.

Если в окрестности точки x_0 выполняется неравенство $|\alpha(x)|\le M\beta(x)$, где M=const, то используют запись $\alpha(x)=O(\beta(x))$, $x\to x_0$. (читается так: $\alpha(x)$ есть O большое от $\beta(x)$ при $x\to x_0$).

Определение 5.38. Если $\alpha(x)$, $\beta(x)$ БМФ и $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k}=c$, $c\neq 0$, $c\neq\infty$, $k>0$, то $\alpha(x)$ называется функцией k-го порядка малости по сравнению с $\beta(x)$.

В частности, если $\alpha(x)$ и $(\beta(x))^k$ эквивалентные БМФ при $x\to x_0$, то $\alpha(x)$ - функция k-го порядка малости по сравнению с $\beta(x)$.

Аналогичным образом сравниваются и ББФ при $x\to x_0$. В частности, $\alpha(x)$ - ББФ более высокого порядка при $x\to x_0$ в сравнении с ББФ $\beta(x)$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$. В этом случае можно записать $\beta(x)=o(\alpha(x))$, $x\to x_0$.

Если $\alpha(x)$, $\beta(x)$ - ББФ при $x\to x_0$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k}=c$, $c\neq 0$, $c\neq\infty$, $k>0$, то $\alpha(x)$ - функция k-го порядка роста по сравнению с $\beta(x)$, и т.д.

Замечание 5.5. Все правила сравнений функций остаются справедливыми и для больших значений аргумента, т.е. при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$.

Если выбрана основная БМФ $\alpha(x)$, то простейшими БМФ считают величины вида $c(\alpha(x))^k$, где $c = const$, $k > 0$. Пусть БМФ $\beta(x)$ есть k –ого порядка малости относительно $\alpha(x)$, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\beta(x)}{(\alpha(x))^k} = c$, $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\beta(x)}{c(\alpha(x))^k} = 1$.

Тогда БМФ $\beta(x)$ и $c(\alpha(x))^k$ оказываются эквивалентными $\beta(x) \approx c(\alpha(x))^k$.

Определение 5.39. Простейшая БМФ $c(\alpha(x))^k$, эквивалентная данной БМФ $\beta(x)$, называется ее главной частью.

Пример 5.15. $1 - \cos x \approx \dfrac{1}{2}x^2$, если $x \to 0$. Здесь $\alpha(x) = x$ является основной БМФ, а БМФ $\dfrac{1}{2}x^2$, при $x \to 0$ есть главная часть БМФ $1 - \cos x$.

Приведенные свойства БМФ и ББФ используются при раскрытии неопределенностей.

§ 8. Непрерывность функции

С понятием предела функции тесно связано другое важное понятие математического анализа – понятие непрерывности функции.

Интуитивное представление о непрерывной функции обычно связано с такой функцией, график которой – непрерывная линия.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную в некоторой окрестности $O(x_0)$ точки x_0, для которой x_0 является точкой сгущения, при этом сама точка x_0 принадлежит области определения функции. При определении предела функции при $x \to x_0$ подчеркивалось, что значения x_0 переменная x не принимает, это значение могло не принадлежать области определения функции, а если и принадлежало, то значение $f(x_0)$ при образовании предела не учитывалось.

Но особую важность имеет именно случай, когда

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{5.8}$$

Определение 5.40. Функция $y = f(x)$, определенная в некоторой окрестности $O(x_0)$ точки x_0, называется непрерывной в этой точке, если предельное значение функции в x_0 существует и равно значению $f(x_0)$.

Таким образом, условие непрерывности функции в точке x_0 можно выразить формулой (5.8).

Так как $x_0 = \lim\limits_{x\to x_0} x$, то равенству (5.8) можно придать следующую форму

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right),$$

т.е. для непрерывной функции символы “lim” предельного перехода и “ f ” характеристики функции можно менять местами.

Определение непрерывности функции в точке x_0 можно сформулировать в других терминах.

Определение 5.41. (на языке “$\varepsilon-\delta$”). Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если для любого заданного числа $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta(\varepsilon, x_0) > 0$ (зависящее от ε и x_0), что для всех x, для которых $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Таким образом, $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon, x_0) > 0:$ $\forall x\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Пусть $x - x_0 = \Delta x$ – приращение аргумента, а $f(x) - f(x_0) = \Delta y$ – соответствующее приращение функции в точке x_0.

Определение 5.42. Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции Δy, т.е. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$.

"На языке последовательностей" непрерывность определяется так:

Определение 5.43. Функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0, если какую бы последовательность значений x из $O(x_0): x_1, x_2, \ldots x_n \ldots$, сходящуюся к x_0 ни взять, соответствующая последовательность значений функции $f(x_1), f(x_2), \ldots f(x_n), \ldots$ сходится к $f(x_0)$.

В некоторых случаях приходится пользоваться понятием односторонней непрерывности.

Определение 5.44. Функция $y=f(x)$, определенная в некоторой левой (правой) окрестности точки x_0, называется непрерывной слева (справа) в точке x_0, если существует предел слева (справа) функции и он равен $f(x_0)$, т.е., если

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)$$
$$f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0).$$

Из определения односторонней непрерывности в точке x_0 следует, что функция, определенная в некоторой δ- окрестности точки x_0, непрерывна в этой точке тогда и только тогда, когда она непрерывна в x_0 слева и справа.

Обычно рассматривают функции, определенные в промежутке X, все точки которого являются его точками сгущения, так что по отношению к любой из них можно ставить вопрос о непрерывности.

Определение 5.45. Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в промежутке X, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка. Функция $y=f(x)$ называется непрерывной на отрезке $[a,b]$, если она непрерывна во всех внутренних точках отрезка, а также непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b.

§ 9. Действия над непрерывными функциями. Непрерывность основных элементарных функций

Сформулируем теоремы о непрерывности функций, полученных в результате арифметических действий над непрерывными функциями, а также их композиции. Доказательства этих теорем однотипны и основываются на свойствах пределов функции в точке и определении непрерывности функции в точке.

Теорема 5.18. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то и функции $f(x)\pm g(x)$, $f(x)g(x)$ непрерывны в точке x_0. Если, кроме того, $g(x_0)\neq 0$, то функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ также непрерывна в точке x_0.

Доказательство. Так как непрерывные в точке x_0 функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют в этой точке пределы

$$\lim_{x\to x_o} f(x)=f(x_0),\quad \lim_{x\to x_o} g(x)=g(x_0),$$

то по свойствам пределов существуют

$$\lim_{x\to x_o}\big(f(x)\pm g(x)\big)=\lim_{x\to x_o} f(x)\pm\lim_{x\to x_o} g(x)=f(x_0)\pm g(x_0);$$

$$\lim_{x\to x_o} f(x)g(x)=\lim_{x\to x_o} f(x)\lim_{x\to x_o} g(x)=f(x_0)g(x_0);$$

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_o} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_o} g(x)}=\frac{f(x_0)}{g(x_0)},$$ если $g(x_0)\neq 0$; т.е. функции $f(x)\pm g(x)$, $f(x)g(x)$, а также $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, если $g(x_0)\neq 0$, непрерывны в точке x_0.

Теорему можно обобщить на случай алгебраической суммы и произведения конечного числа функций, непрерывных в точке x_0, в том числе на обоснование непрерывности многочлена и рациональной функции.

Теорема 5.19. Сложная функция, являющаяся композицией конечного числа непрерывных в точке x_0 функций, непрерывна в точке x_0.

Доказательство. Рассмотрим случай композиции двух непрерывных в точке x_0 функций f и φ. Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, т.е. $y = f(\varphi(x)) = F(x)$. Теорема утверждает, что если функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $f(u)$ непрерывна в точке u_0, то сложная функция $F(x)$ непрерывна в точке x_0.

Пусть $x \to x_0$. Тогда согласно непрерывности $\varphi(x)$ следует, что $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = \varphi(x_0) = u_0$, т.е. $u \to u_0$. Так как $f(u)$ непрерывна в точке u_0, то $\lim\limits_{u\to u_0} f(u) = f(u_0)$; но $u = \varphi(x)$, тогда $\lim\limits_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = f(\varphi(x_0))$ или $\lim\limits_{x\to x_0} F(x) = F(x_0)$.

Теорема 5.20. Пусть функция $y = f(x)$ определена, непрерывна и монотонна на некотором множестве X и пусть Y - множество ее значений. Тогда на множестве Y обратная функция $x = f^{-1}(y)$ монотонна и непрерывна.

Теорема 5.21. Основные элементарные функции непрерывны во всех точках, принадлежащих их области определения.

Доказательство. Приведем доказательство для показательной функции $y = a^x,\ \ a > 0,\ \ a \neq 1$. Рассмотрим

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}(a^{x_0+\Delta x} - a^{x_0}) = a^{x_0}\lim_{\Delta x\to 0}(a^{\Delta x} - 1) = a^{x_0}\cdot 0 = 0.$$

Согласно определению непрерывности функция $y = a^x$ непрерывна в любой точке x_0, принадлежащей ее области определения.

Обобщая формулировки приведенных теорем, можно утверждать, что всякая элементарная функция непрерывна во всех точках, принадлежащих ее области определения.

§10. Точки разрыва функции и их классификация

Если хотя бы одно из условий определения (5.40) непрерывности функции не выполнено (функция не определена в точке x_0, предел функции в точке x_0 не существует или предел существует, но не равен $f(x_0)$), то точка x_0 является точкой разрыва, а функция называется разрывной в точке x_0. Различают следующие точки разрывов.

Если существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ (т.е. существуют односторонние пределы, равные между собой), но функция не определена в точке x_0 или $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, то точка x_0 называется точкой устранимого разрыва. Такой разрыв можно устранить, доопределив функцию $y = f(x)$ в точке x_0 значением $f(x_0)$, равным односторонним пределам функции в этой точке, так, чтобы полученная функция была непрерывна в точке x_0.

Пример 5.16. Функция $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ определена всюду, кроме точки $x_0 = 0$, которая является точкой разрыва. Так как $\lim\limits_{x \to -0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to +0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, то x_0 является точкой устранимого разрыва. График функции имеет вид

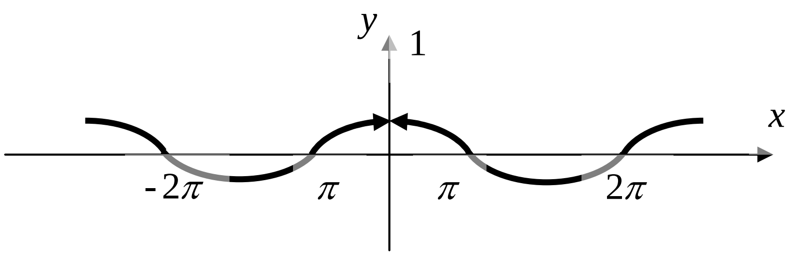


Рис. 5.3

Функцию можно доопределить в точке $x_0 = 0$ таким образом, чтобы она была непрерывной на *R*, представив в виде $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \forall x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$.

Если не существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, но при этом существуют оба конечные односторонние пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0 - 0)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0 + 0)$, не равные между собой, то точка x_0 называется точкой разрыва первого рода, разность $f(x_0+0) - f(x_0-0)$ - скачком функции $f(x)$ в точке x_0.

Пример 5.17. Функция $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ в точке $x_0 = 0$ имеет разрыв первого рода. Действительно $\lim\limits_{x\to -0} \operatorname{sgn} x = -1$, $\lim\limits_{x\to +0} \operatorname{sgn} x = 1$, т.е. существуют конечные неравные односторонние пределы. Скачок функции в точке
$x_0 = 0$ $f(+0) - f(-0) = 1 - (-1) = 2$.

График функции изображен на рисунке 5.4

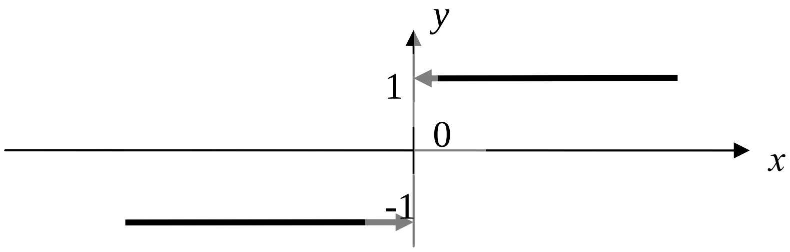


Рис. 5.4

Если хотя бы один из односторонних пределов функции в точке x_0 равен $+\infty$ или $-\infty$, или вообще не существует, то точка x_0 называется точкой разрыва второго рода.

Пример 5.18. Для функции $f(x) = \dfrac{1}{x}$ точка x_0 является точкой разрыва второго рода, так $\lim\limits_{x\to -0} \dfrac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to +0} \dfrac{1}{x} = +\infty$

График функции

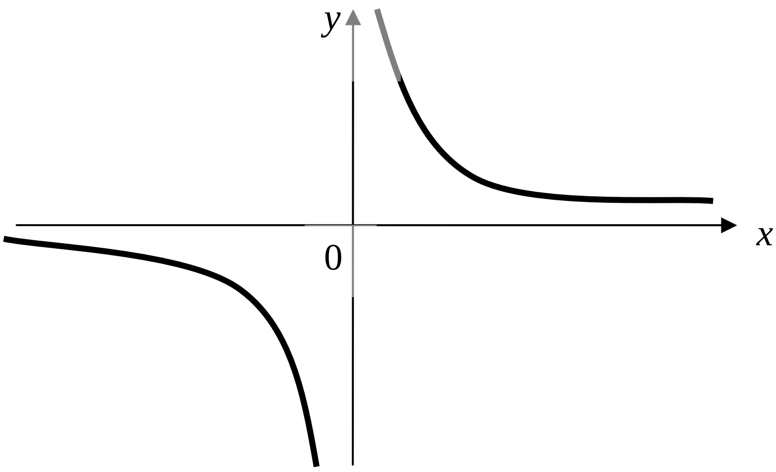


Рис. 5.5

При исследовании функции на непрерывность в точке x_0 необходимо проверить выполнение условий определения **5.40.** Если x_0 окажется точкой разрыва, то для установления характера разрыва необходимо вычислить односторонние пределы.

Определение 5.46. Функцию $y = f(x)$, заданную на отрезке $[a,b]$, называют кусочно-непрерывной, если она непрерывна во всех внутренних точках $[a,b]$, за исключением, быть может, конечного числа точек, в которых имеет устранимый разрыв или разрыв первого рода и имеет односторонние пределы в точках a и b. Функция $y = f(x)$ кусочно-непрерывна на числовой прямой, если она кусочно-непрерывна на любом отрезке этой прямой.

§11. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Свойства функций, непрерывных на отрезке. Равномерная непрерывность функции.

Теорема 5.22. (первая теорема Больцано-Коши). Если функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$ и на его концах принимает значения разных знаков, то внутри отрезка найдется по крайней мере одна точка c, в которой функция обращается в нуль:

$$f(x):\ f(a)f(b)<0 \Rightarrow \exists c \in (a,b):\ f(c)=0.$$

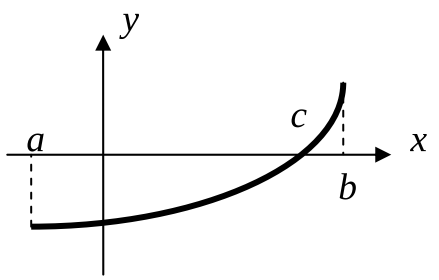
Доказательство. Проведем его по методу Больцано последовательным делением отрезка. Для определенности положим $f(a)<0,\ f(b)>0$. Разделим $[a,b]$ пополам точкой $\frac{a+b}{2}$. Может случиться, что $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$, тогда теорема доказана. Если $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\neq 0$, то на концах одного из отрезков $\left[a,\frac{a+b}{2}\right],\ \left[\frac{a+b}{2},b\right]$ функция будет принимать значения разных знаков (и притом отрицательное значение на левом конце, положительное - на правом). Обозначив этот промежуток $[a_1,b_1]$ будем иметь $f(a_1)<0,\ f(b_1)>0$. Разделим $[a_1,b_1]$ пополам: если $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)=0$, то теорема доказана, если нет, то обозначим $[a_2,b_2]$ ту половину отрезка, для которой $f(a_2)<0,\ f(b_2)>0$. Продолжим этот процесс построения отрезков. При этом либо после конечного числа шагов наткнемся в качестве точки деления на точку, где функция обращается в нуль (и теорема будет доказана), либо получим бесконечную последовательность вложенных один в другой отрезков. В последнем случае для n - ого отрезка $[a_n,b_n],\ n=1,2,...$ будем иметь $f(a_n)<0,\ f(b_n)>0$, причем длина его равна $b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}$. Построенная последовательность отрезков удовлетворяет условиям утверждения о вложенных отрезках, согласно которому, если $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$, то концы a_n и b_n отрезков с разных сторон стремятся к общему пределу $c=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$. Эта точка c удовлетворяет требованиям теоремы. Действительно, переходя к пределу в неравенствах $f(a_n)<0,\ f(b_n)>0$ и используя непрерывность функции (в частности, в точке $x=c$), получим, что одновременно

$$f(c)=\lim_{n\to\infty}f(a_n)\le 0,\quad f(c)=\lim_{n\to\infty}f(b_n)\ge 0,$$

отсюда $f(c)=0$.

Геометрический смысл теоремы заключается в том, что если точки $(a,f(a))$ и $(b,f(b))$ графика функции $f(x)$, соответствующие концам отрезка

$[a,b]$, лежат по разные стороны оси OX , то график непрерывной функции хотя бы в одной внутренней точке отрезка пересекает ось OX.



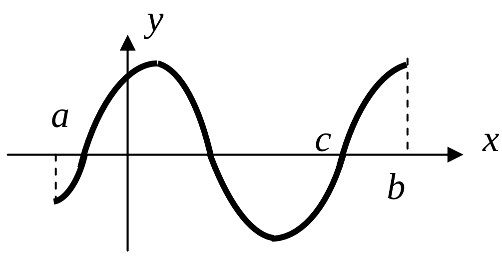


Рис. 5.6.

Если $f(x)$ непрерывна и монотонна на $[a,b]$, то существует единственная точка c, такая, что $f(c)=0$.

Доказанная теорема имеет применение при решении уравнений: помогает установить существование корней и методом половинного деления отрезка приближенно вычислить их.

Теорема 5.23. (о промежуточном значении или вторая теорема Больцано-Коши). Пусть функция $y=f(x)$ определена и непрерывна на некотором промежутке X (замкнутом или нет, конечном или бесконечном). Если в двух точках $x=a$ и $x=b$ $(a<b)$ этого промежутка функция принимает неравные значения $f(a)=A$, $f(b)=B$, то для любого числа C, заключенного между A и B, найдется такая точка c между a и b, что $f(c)=C$.

Доказательство. Будем считать $A<B$, так что $A<C<B$. Введем на $[a,b]$ вспомогательную функцию $\varphi(x)=f(x)-C$, которая непрерывна на $[a,b]$ и на концах его имеет разные знаки:

$$\varphi(a)=f(a)-C=A-C<0,\quad \varphi(b)=f(b)-C=B-C>0.$$

По первой теореме Больцано-Коши между a и b найдется точка c, для которой $\varphi(c)=0,\ \Rightarrow f(c)=C$.

Теорему можно переформулировать так: непрерывная функция, переходя от одного значения к другому, обязательно принимает промежуточные значения. Можно заметить, что первая теорема Больцано-Коши есть частный случай второй.

Теорема 5.24. (Вейерштрасса). Если функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$, то на этом отрезке она ограничена и достигает своих нижней и верхней граней, т.е. на $[a,b]$ существуют по крайней мере две точки c_1 и c_2, такие что $f(c_1) = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$, $f(c_2) = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$.

Другими словами, если функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$, то на этом отрезке она ограничена и найдутся такие точки c_1 и c_2, что значения $f(c_1)$ и $f(c_2)$ будут соответственно наименьшим и наибольшим из всех значений функции.

Заметим, что непрерывная функция на открытом промежутке (a,b) может быть неограниченной и, следовательно, не иметь нижней и верхней граней, например, функция $y = tgx$ - на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Если функция $f(x)$ непрерывна во всем промежутке X, т.е. непрерывна в каждой точке x_0 этого промежутка, то для каждой такой точки x_0 из X в отдельности по заданному ε найдётся δ, соответствующее ему, как указано в определении 5.41 непрерывной функции. При изменении x_0 на X даже при неизменном ε число δ вообще говоря будет меняться, т.е. δ зависит не только от ε, но и от x. Так как значений x_0, содержащихся в X, бесконечное множество и при постоянном ε им соответствует бесконечное множество чисел δ, среди которых могут найтись сколь угодно малые, то не всегда из всех δ можно выбрать наименьшее, которое годилось бы для всех рассматриваемых точек x_0 одновременно. Если же такое δ можно указать, то функцию называют равномерно непрерывной.

Определение 5.47. Функция $y = f(x)$ называется равномерно непрерывной в промежутке $X \subset R$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $x,\ x_0 \in X$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

В этом случае δ зависит только от ε и может быть указано до выбора точки x_0: δ годится для всех x_0 одновременно.

Равномерная непрерывность означает, что во всех частях промежутка достаточна одна и та же степень близости двух значений аргумента, чтобы добиться заданной степени близости соответствующих значений функции.

Если $f(x)$ равномерно непрерывна на *X*, то она непрерывна на этом промежутке. Обратное утверждение не всегда справедливо. Условие, при котором непрерывная функция является и равномерно непрерывной определяется следующей теоремой о равномерной непрерывности.

Теорема 5.25. (Кантора). Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она и равномерно непрерывна на этом отрезке.

Замечание 5.5. Рассмотренная в разделе теория пределов и непрерывности функций является основой для построения дифференциального и интегрального исчисления функций.

РАЗДЕЛ 6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. Определение производной

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности фиксированной точки x_0, и пусть x – произвольная точка этой окрестности. Тогда $x - x_0 = \Delta x$ - приращение аргумента (положительное или отрицательное) такое, что $x_0 + \Delta x \in 0_\delta(x_0)$, и приращение функции в точке x_0 выразится формулой

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0). \tag{6.1}$$

Определение 6.1. Производной функции $y = f(x)$ в фиксированной точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что последнее стремится к нулю. Производную функции $y = f(x)$ в точке x_0 обозначают символами: $y'(x_0)$, $f'(x_0)$, $\frac{df(x_0)}{dx}$, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$. Следовательно, по определению

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \tag{6.2}$$

Таким образом, производная при данном значении $x = x_0$, если существует - есть определенное число; если же производная существует в произвольной точке x, то она является функцией от x и обозначается y', $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$.

Операция нахождения производной от функции $f(x)$ называется дифференцированием этой функции.

Если для некоторого значения x выполняется одно из условий

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty,$$

то говорят, что в точке x существует бесконечная производная, равная соответственно $+\infty$, $-\infty$, ∞.

Определение 6.2. Если функция $f(x)$ определена в некоторой правосторонней (левосторонней) окрестности точки x_0 и существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{\Delta x \to x+0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \left(\lim\limits_{\Delta x \to x-0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \right)$, то он называется соответственно, конечной или бесконечной правой (левой) производной функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается $f'(x_0+0)\left(f'(x_0-0)\right)$.

Правая и левая производные называются односторонними производными.

Очевидно, функция $f(x)$, определенная $\forall x \in O_\delta(x_0)$ имеет производную $f'(x_0)$ тогда и только тогда, когда односторонние производные $f'(x_0+0)$ и $f'(x_0-0)$ существуют и равны между собой, причем

$$f'(x_0) = f'(x_0+0) = f'(x_0-0).$$

Из определения производной следует схема ее нахождения:

1. фиксируется значение x аргумента функции;
2. фиксированному аргументу $x \in D(f)$ придается приращение Δx;
3. вычисляется приращение функции, соответствующее приращению аргумента, по формуле $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$;
4. составляется отношение приращения функции к приращению аргумента
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x};$$
5. находится предел указанного отношения при $\Delta x \to 0$
$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Рассмотрим некоторые примеры нахождения производных.

Пример 6.1. Найти производную функции $y = c$, где c - const.

Данная функция является постоянной, поэтому $y + \Delta y = c$, $\Delta y = 0$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$, $c' = 0$, т.е. производная постоянной равна нулю.

Пример 6.2. Найти производную функции $y = \sin x$.

Придадим фиксированному значению аргумента x приращение Δx, тогда $y+\Delta y=\sin(x+\Delta x)$. Выражение для соответствующего приращения функции

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Составим отношение приращения функции к приращению аргумента

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

Переходим к пределу при $\Delta x\to 0$, принимая во внимание, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=1$, получим

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=1\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=1\cdot\cos x=\cos x$, т.е. $(\sin x)'=\cos x$.

§ 2. Механический смысл производной

Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Воспользуемся обозначениями, приведенными выше: $\Delta x=x-x_0$, $\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. Отношение $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$, равное изменению переменной y на отрезке $[x_0,x_0+\Delta x]$, выражает среднюю скорость изменения функции $\vartheta=\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$.

Мгновенная скорость изменения функции

$$\vartheta=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0),$$

т.е. производная функции в точке равна мгновенной скорости изменения процесса, описываемого этой функцией. В этом состоит механический смысл производной.

На интерпретации производной как величины скорости изменения одной величины относительно другой основано применение производной к изучению физических явлений. Рассмотрим некоторые из них.

1. Пусть некоторая материальная точка движется неравномерно и задан закон ее движения $s = s(t)$, т.е. задана функция, устанавливающая зависимость пути *s* от времени *t*. Тогда скорость движения точки в данный момент времени *t*

$$\vartheta(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

2. Пусть $g = g(t)$ – количество электричества, протекающее через поперечное сечение проводника; *t* – время. Тогда сила тока в данный момент *t*

$$I = \frac{dq}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{q(t + \Delta t) - q(t)}{\Delta t}.$$

3. Пусть дан неоднородный стержень длины l и пусть $m = m(x)$ – масса части стержня длины x, $0 \le x \le l$. Тогда линейная плотность стержня в данной точке x

$$\rho(x) = \frac{dm}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{m(x + \Delta x) - m(x)}{\Delta x}.$$

§ 3. Геометрический смысл производной

Пусть на плоской кривой L задана точка M_0. Рассмотрим другую точку M этой кривой и проведем секущую M_0M (рис 6.1). Когда точка M движется по кривой к точке M_0, то секущая будет поворачиваться вокруг точки M_0.

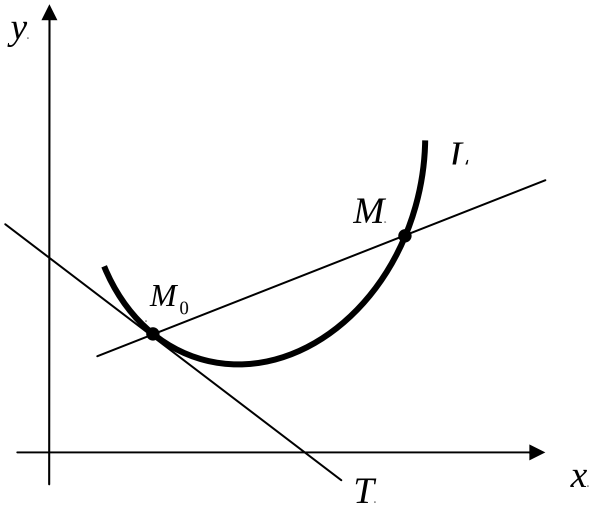


Рис. 6.1

Определение 6.3. Касательной к кривой L в точке M_0 называется предельное положение M_0T секущей M_0M, когда точка M стремится по кривой к точке M_0 (рис. 6.1.)

Пусть кривая L является графиком функции $y = f(x)$, точка $M_0(x_0, f(x_0)) \in L$ (рис. 6.2). Угловой коэффициент секущей M_0M $k_{сек} = tg\varphi = \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$.

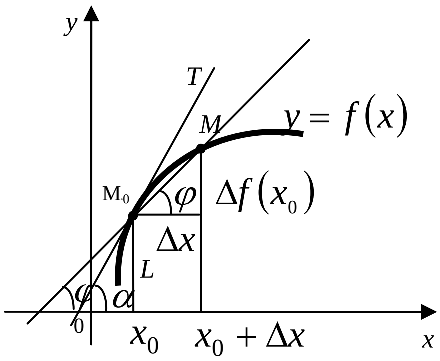


Рис. 6.2

Если $\Delta x \to 0$, то точка M будет перемещаться вдоль кривой к точке M_0. Секущая M_0M будет стремиться занять свое предельное положение M_0T. Угол φ при $\Delta x \to 0$ стремится к углу α. Таким образом,

$$tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} tg\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Следовательно,

$$f'(x_0) = tg\alpha = k \tag{6.3}$$

т.е. значение производной функции $f(x)$ при $x = x_0$ равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0. В этом состоит геометрический смысл производной.

§ 4. Уравнения касательной и нормами. Угол между кривыми

Пусть кривая задана уравнением $y = f(x)$. Угловой коэффициент касательной к этой кривой в точке $M(x_0, y_0)$, равен $k = f'(x_0)$. Как известно из аналитической геометрии, уравнение прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении, имеет вид

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Но касательная – это прямая, у которой $k = f'(x_0)$. Следовательно,

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

(6.4)

является уравнением искомой касательной.

Нормалью к кривой в точке M_0 называется прямая, проходящая через точку M_0 перпендикулярно к касательной к кривой в этой точке.

В силу перпендикулярности касательной и нормали $K_{норм} = -\dfrac{1}{K_{кас}}$ и уравнение нормали в точке $M_0(x_0, y_0)$ будет иметь вид

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \tag{6.5}$$

Отдельно рассмотрим случай, когда $f'(x_0) = tg\alpha = \pm\infty$.

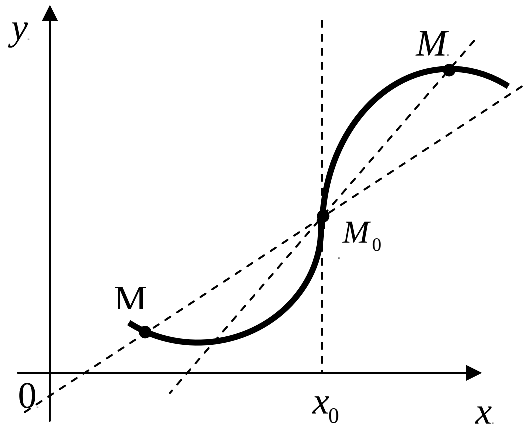


Рис. 6.3

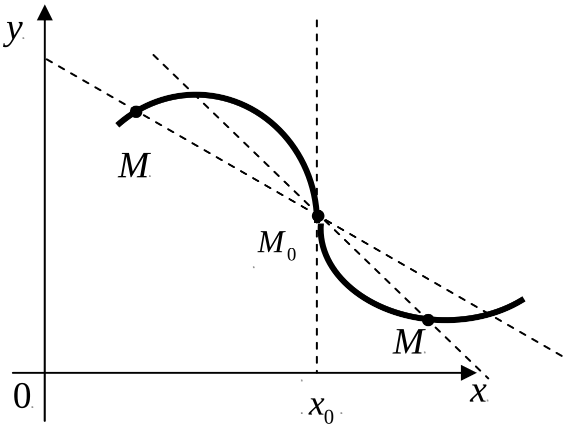


Рис. 6.4

Предположим, что

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\varphi \to \frac{\pi}{2}} tg\varphi = +\infty;$$

знак + указывает, что секущая M_0M образует с осью OX острый угол, независимо от того, слева или справа от точки M_0 расположена точка M (рис 6.3) и при приближении точки M к точке M_0 угол φ стремится к углу $\alpha = \frac{\pi}{2}$, оставаясь острым. Таким образом, предельным положением секущей будет касательная в точке M_0, перпендикулярная оси OX, т.е. уравнение касательной $x = x_0$.

Предположим, что

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\varphi \to \frac{\pi}{2}} tg\varphi = -\infty;$$

тогда секущая M_0M стремится к своему предельному положению – касательной в точке M_0, образуя с осью OX тупой угол φ (рис 6.4). И в этом случае касательная будет перпендикулярна оси OX и ее уравнение $x = x_0$.

Если $f'(x_0)$ не существует, то в большинстве случаев касательной в точке M_0 не существует. Например, функция $y = |x|$, график которой изображен на рис 6.5 не имеет производной в точке $x = 0$, т.к. $f'(0+0) = tg\frac{\pi}{4} = 1, f'(0-0) = tg\frac{3}{4}\pi = -1.$ В точке $x = 0$ не существует касательной к графику функции.

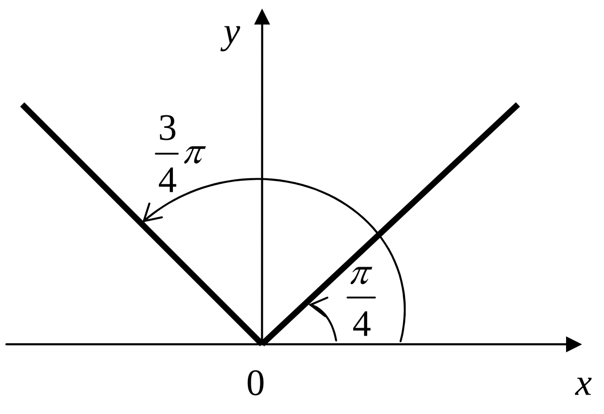


Рис. 6.5

Однако может быть указан случай, когда $f'(x_0)$ не существует, т.е. предельного значения секущей нет, а касательная тем не менее существует.

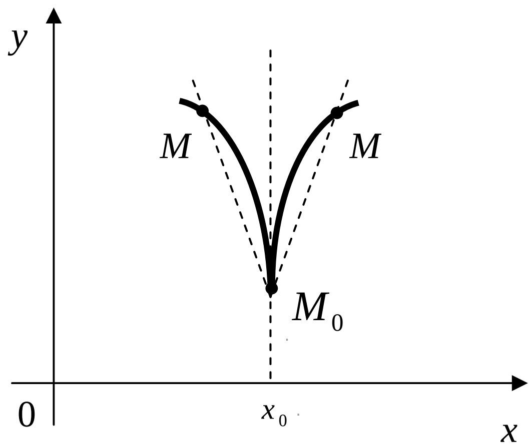


Рис. 6.6

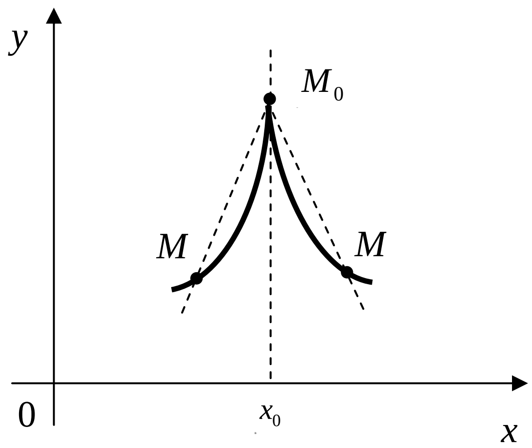


Рис. 6.7

Действительно, пусть существует предел слева равный -∞, и предел справа, равный +∞ (рис. 6.6), или же существует предел слева, равный +∞ и предел справа, равный -∞ (рис.6.7). Тогда при приближении точки M только слева к неподвижной точке M_0 секущая имеет предельной положение – вертикальную прямую, и при приближении точки M только справа, независимо от того будет ли предельное значение $tg\varphi$ равно +∞ или -∞, секущая снова имеет предельным положением вертикальную прямую. Так как через точку $M_0\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ проходит лишь одна вертикальная прямая, то оба предельных положения совпадают и, следовательно, кривая имеет в этой точке вертикальную касательную, уравнение которой $x = x_0$. Особенностью графика этого случая является наличие острия, направленного вверх или вниз.

За угол между двумя кривыми принимают угол между касательными к этим кривым в точке их пересечения.

Кривые, пересекающиеся под прямым углом, называются ортогональными.

§ 5. Дифференцируемость функции

Функция $y = f(x)$, имеющая производную в точке x_0, называется дифференцируемой в этой точке. Функция $y = f(x)$, дифференцируемая в каждой точке интервала (*а*, *в*), называется дифференцируемой на этом интервале.

Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции в данной точке устанавливает

Теорема 6.1. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она в этой точке непрерывна.

Доказательство. Пусть аргумент x получает в точке x_0 приращение Δx, не равное нулю. Ему соответствует некоторое приращение функции Δy. Рассмотрим

очевидное тождество $\Delta y = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x$.

Переходя к пределу, получим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = f'(x_0) \cdot 0 = 0,$$

откуда и следует непрерывность функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Таким образом, непрерывность функции в точке является необходимым условием существования производной функции в этой точке.

Утверждение, обратное теореме, не верно, т.е. из непрерывности функции $y = f(x)$ в точке x_0 еще не следует ее дифференцируемость в этой точке. Например, рассмотренная ранее функция $y=|x|$, непрерывна в точке $x=0$, но не является дифференцируемой в этой точке, т.к. $f'(0-0)\neq f'(0+0)$.

Рассмотрим функцию $y=\sqrt[3]{x}$; она определена и непрерывна $\forall x\in R$. Найдем производную этой функции

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+\Delta x}-\sqrt[3]{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x\left(\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{x(x+\Delta x)}+\sqrt[3]{x^2}\right)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{x(x+\Delta x)}+\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

В точке $x=0$ $f'(0)=\infty$, т.е. не существует конечной производной в точке $x = 0$.

§ 6. *Основные правила дифференцирования*

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы $\forall\ x\in(a,b)$.

1. ***Производная алгебраической суммы***

Производная алгебраической суммы конечного числа дифференцируемых функций равна алгебраической сумме производных этих функций.

Доказательство. Рассмотрим функцию $y=u(x)+v(x)$. Дадим фиксированному значению x приращение Δx, тогда функции $u(x)$ и $v(x)$ получают приращения, соответственно равные Δu и Δv, и функция y получает приращение $\Delta y=\Delta u+\Delta v$.

По определению

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u+\Delta v}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Т.к. функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемые, то

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u',\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=v'.$$

Окончательно получим

$$y' = (u+v)' = u' + v' \qquad (6.6)$$

2. Производная произведения двух дифференцируемых функций

Производная произведения двух дифференцируемых функций равна сумме произведений производной первого сомножителя на второй и производной второго сомножителя на первый, т.е. если $y = uv$, то $y' = u'v + v'u$.

Доказательство. Пусть $y = u(x)v(x)$. Если *x* получает приращение Δx, то функции $y,\ u,\ v$ получают приращения соответственно $\Delta y,\ \Delta u,\ \Delta v$. При этом $\Delta y = (u+\Delta u)(v+\Delta v) - uv = v\Delta u + u\Delta v + \Delta u\Delta v$.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = v\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta v}\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v.$$

Учитывая, что

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = y',\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = u',\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = v',\quad \lim_{\Delta x\to 0}\Delta v = 0$$

(так как функция $v = v(x)$ непрерывна), окончательно получим:

$$y' = (uv)' = u'v + v'u. \qquad (6.7)$$

Правило дифференцирования произведения двух функций распространяется на произведение любого конечного числа функций. Так, например,

$$y' = (uvw)' = u'vw + uv'w + uvw',$$

т.е. производная произведения нескольких дифференцируемых функций равна сумме произведений производной каждой из них на все остальные.

В частности, если $v = c \quad (c - const)$, то

$$(cu)' = c'u + cu' = cu', \qquad (6.8)$$

так как $c' = 0$. Отсюда следует, что постоянный множитель можно выносить за знак производной.

3. Производная частного функций

Производная дроби (частного двух дифференцируемых функций) равна дроби, у которой знаменатель равен квадрату знаменателя данной дроби, а числитель равен разности между произведением производной числителя на знаменатель и произведением числителя на производную знаменателя, т.е., если $y=\frac{u}{v}$, где $v\neq 0$, то

$$y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

Доказательство. Пусть $u=u(x)$ и $v=v(x)$ – дифференцируемые функции, $v(x)\neq 0$. Дадим фиксированному значению аргумента *x* приращение Δx, и найдем приращение функции *y*:

$$\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{v\Delta u-u\Delta v}{v(v+\Delta v)}.$$

Тогда

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}=\frac{v\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v\lim\limits_{\Delta x\to 0}(v+\Delta v)}.$$

Следовательно,

$$y'=\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2} \tag{6.9}$$

4. Производная сложной функции

Пусть $y=f(u)$, $u=u(x)$, тогда y является сложной функцией независимой переменной x, u – промежуточная функция. При этом известна производная функции $u(x)$ в точке x и производная функции $f(u)$ в точке u, соответствующей точке x.

Тогда $y'=f_u'(u)u'(x)$.

Доказательство. Дадим фиксированному значению аргумента *x* приращение Δx. Этому приращению соответствует приращение Δu функции $u(x)$ и приращение Δy функции $y=f(u)$. Составим отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta f}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

При $\Delta x\to 0$ приращения Δu, Δf стремятся к нулю. Так как $u(x)$, $f(u)$ дифференцируемые функции, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'(x), \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta u} = f'_u(u).$$

Следовательно, если $y = f(u(x))$, то

$$y' = f'_u(u)u'(x) \tag{6.10}$$

Итак, производная сложной функции равна произведению производной этой функции по промежуточному аргументу и производной промежуточного аргумента по *x*.

5. Производная обратной функции

Пусть функция $y = f\left(x\right)$ монотонна на отрезке $\left[a,b\right]$. Функции $y = f\left(x\right)$ и $x = \varphi(y)$ - взаимно обратные дифференцируемые функции и $y'_x \neq 0$. Тогда

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

Доказательство. Так как $\dfrac{\Delta x}{\Delta y} = \dfrac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$, то $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta y} = \dfrac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$. Откуда следует

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}, \tag{6.11}$$

т.е. производная обратной функции равна обратной величине производной данной функции.

§ 7 Производные основных элементарных функций

1. Производная логарифмической функции

Пусть $y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$. Дадим фиксированному значению $x \in D(y)$ приращение Δx, тогда

$$\Delta y = \log_a\left(x + \Delta x\right) - \log_a x = \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

По определению

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\frac{1}{x}\log_a\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a}.$$

Итак,

$$y=\log_a x \quad\Rightarrow\quad y'=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a}.$$

Для сложной функции $y=\log_a u(x)$

$$y'=\frac{1}{u(x)}\log_a e\cdot u'(x)=\frac{1}{u(x)\ln a}\cdot u'(x).$$

В частном случае при $a=e$

$$y=\ln u(x) \quad\Rightarrow\quad y'=\frac{1}{u(x)}u'(x).$$

2. Производная степенной функции

Пусть $y=(u(x))^n$, $n\in R$. Рассмотрим случай, когда $u(x)>0$. Тогда $\ln y=n\ln u(x)$. Дифференцируем обе части полученного равенства по правилу дифференцирования сложной функции, считая y функцией от x:

$$(\ln y)'=n(\ln u(x))' \quad\Rightarrow\quad \frac{y'}{y}=\frac{nu'(x)}{u(x)} \quad\Rightarrow\quad y'=y\frac{nu'(x)}{u(x)}=n(u(x))^{n-1}u'(x).$$

Пусть $u(x)<0$, тогда функцию $y=(u(x))^n$ представим в виде $y=(-1)^n(v(x))^n$, где $v(x)>0;\quad y'=(-1)^n n(v(x))^{n-1}v'(x)=n(u(x))^{n-1}u'(x)$.

Итак,

$$y=(u(x))^n \quad\Rightarrow\quad y'=n(u(x))^{n-1}u'(x).$$

3. Производная показательной функции

Пусть $y=a^{u(x)}$, где $a>0$, $a\neq 1$, $u(x)$ - непрерывная функция. Тогда $\ln y=u(x)\ln a$. Дифференцируем обе части полученного равенства:

$$\frac{y'}{y}=u'(x)\ln a \quad\Rightarrow\quad y'=a^{u(x)}\ln a.$$

Итак,

$$y=a^{u(x)} \quad\Rightarrow\quad y'=a^{u(x)}\ln a u'(x).$$

4. Производные тригонометрических функций

В примере 6.2 было получено $y = \sin x \quad \Rightarrow \quad y' = \cos x$.

Для сложной функции

$$y = \sin u(x) \quad \Rightarrow \quad y' = \cos u(x) u'(x).$$

Пусть $y = \cos x$. Дадим фиксированному значению x приращение Δx, тогда

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

По определению

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = -\sin x.$$

Итак,

$$y = \cos x \quad \Rightarrow \quad y' = -\sin x.$$

Для сложной функции

$$y = \cos u(x) \quad \Rightarrow \quad y' = -\sin u(x) u'(x).$$

Пусть $y = tgx$; так как $tgx = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, то по правилу дифференцирования частного, получим

$$y' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Итак,

$$y = tgx \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Для сложной функции

$$y = tgu(x) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{u'(x)}{\cos^2 u(x)}.$$

Аналогично для $y = ctgx$

$$y' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Итак,

$$y = ctgx \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Для сложной функции

$$y = ctgu(x) \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{u'(x)}{\sin^2 u(x)}.$$

5. Производные обратных тригонометрических функций

Пусть $y = \arcsin x$ имеет обратную функцию $x = \sin y$, $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$, $-1 \le x \le 1$, $x'_y = \cos y$ не обращается в нуль $\forall y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. По правилу дифференцирования обратной функции имеем

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

В интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $\cos y > 0$, поэтому перед квадратным корнем выбран знак “+”.

Итак,

$$y = \arcsin x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Для сложной функции

$$y = \arcsin u(x) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}.$$

Аналогично доказывается

$$y = \arccos u(x) \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}.$$

Пусть $y = arctgx,\quad x = tgy$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, $-\infty < x < +\infty$. Имеем

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(tgy)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Итак,

$$y = arctgx \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Для сложной функции

$$y = arctgu(x) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}.$$

Аналогично доказывается

$$y = arcctgu(x) \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}.$$

6. Производные гиперболических функций

Пусть $y = shx$, тогда

$$(shx)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = chx.$$

Итак,

$$y = shx \quad \Rightarrow \quad y' = chx.$$

Для сложной функции

$$y = shu(x) \quad \Rightarrow \quad y' = chu(x)u'(x).$$

Поступая аналогично, найдём производные остальных гиперболических функций.

$$y = chx \quad \Rightarrow \quad y' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = shx,$$

$$y = thx \quad \Rightarrow \quad y' = \left(\frac{shx}{chx}\right)' = \frac{chxchx - shxshx}{ch^2x} = \frac{1}{ch^2x},$$

$$y = cthx \quad \Rightarrow \quad y' = \left(\frac{chx}{shx}\right)' = \frac{shxshx - chxchx}{sh^2x} = -\frac{1}{sh^2x}.$$

Полученные ранее правила дифференцирования и формулы объединим в таблицы.

Таблица основных правил дифференцирования функций

1. $y = c \quad \Rightarrow \quad y' = 0.$

2. $y = cu \quad \Rightarrow \quad y' = cu'.$

3. $y = u + v \quad \Rightarrow \quad y' = u' + v'$.

4. $y = uv \quad \Rightarrow \quad y' = u'v + uv'$.

5. $y = \dfrac{u}{v} \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

6. $y = f(u), \quad u = u(x) \quad \Rightarrow \quad y' = f'_u(u)u'(x)$.

7. $y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = \varphi(y) \quad \Rightarrow \quad y'_x = \dfrac{1}{x'_y}$.

Таблица производных основных элементарных функций

1. $(u^n)' = nu^{n-1}u', \quad n \in R$.

2. $(a^u)' = a^u \ln a u', \quad a > 0, \quad a \neq 1$.

3. $\left(e^u\right)' = e^u u'$.

4. $\left(\log_a u\right)' = \dfrac{u'}{u \ln a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1$.

5. $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

6. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$.

7. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$.

8. $(tgu)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$.

9. $(ctgu)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$.

10. $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

11. $(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

12. $(arctgu)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$.

13. $(arcctgu)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$.

14. $(shu)' = chu \cdot u'$.

15. $(chu)' = shu \cdot u'$.

16. $(thu)' = \dfrac{u'}{ch^2 u}$.

17. $(cthu)' = -\dfrac{u'}{sh^2 u}$.

§ 8. Дифференцирование неявных функций

Пусть функция $y = f(x)$ задана уравнением $F(x, y) = 0$ т.е. уравнением, связывающим независимую переменную x с функцией y, не разрешенным относительно y. В этом случае говорят, что функция $y = f(x)$ задана неявно.

Производную от функции $F(x, y) = 0$ можно найти дифференцированием по x обеих частей этого уравнения с учётом того, что y есть функция от x. Полученное после дифференцирования уравнение будет содержать x, y, y'. Разрешая его относительно y', найдём производную y' функции $y = f(x)$.

Пример 6.3. Найти производную функции $x + \sqrt{xy} + y = a$, заданной неявно.

Решение. Дифференцируя по x данную неявную функцию, получим: $1 + \dfrac{y + xy'}{2\sqrt{xy}} + y' = 0$. Отсюда $2\sqrt{xy} + y + y'\left(x + 2\sqrt{xy}\right) = 0$, $y' = -\dfrac{y + 2\sqrt{xy}}{x + 2\sqrt{xy}}$.

Выражая $\sqrt{xy}$ из уравнения через x и y

$$\sqrt{xy} = a - x - y,$$

получим:

$$y' = -\frac{2a - 2x - y}{2a - 2y - x}.$$

Отметим, что $y' = \varphi(x, y)$.

§ 9. Логарифмическое дифференцирование

Логарифмическое дифференцирование. Производная степенно-показательной функции

Дифференцирование многих функций значительно упрощается, если их предварительно прологарифмировать.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a,b]$ и $f(x) > 0$ $\forall x \in [a,b]$. Найдём функцию $\ln y = \ln f(x)$. Вычислим производную этой функции, применяя правило дифференцирования сложной функции:

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = (\ln f(x))',$$

$$y' = y(\ln f(x))' = f(x)(\ln f(x))'.$$

Производная от логарифма функции называется логарифмической производной.

Логарифмическое дифференцирование полезно применять, когда заданная функция содержит операции умножения, деления, возведения в степень, извлечения корня, позволяющие её логарифмировать.

Рассмотрим этот метод на примере дифференцирования степенно-показательной функции $y = u(x)^{v(x)}$, где $u(x) > 0$; основание степени $u(x)$ и показатель $v(x)$ являются функциями аргумента x.

Логарифмируя эту функцию по основанию e, получим

$$\ln y = v(x)\ln u(x).$$

Отсюда, дифференцируя, находим

$$\frac{y'}{y} = v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}, \text{ т. е.}$$

$$y' = u(x)^{v(x)}\left(v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right) = u(x)^{v(x)}\ln u(x)v'(x) + v(x)u(x)^{v(x)-1}u'(x) \quad (6.12)$$

Следовательно, производная степенно-показательной функции равна сумме производных этой функции, если её рассматривать сначала как показательную, а затем как степенную.

Пример 6.4. Найти y', если

а) $y = \dfrac{\sqrt[7]{x \cdot \sqrt{x}} \cdot \sqrt{(1+x)(2-x)}}{\sqrt[5]{x^4+1}}$;

б) $y = (\cos x)^{\sin 2x}$.

Решение. Применяя логарифмическое дифференцирование, находим:

a) $$\ln y = \frac{1}{7}\left(\ln x + \frac{1}{2}\ln x\right) + \frac{1}{2}\ln(1+x) + \frac{1}{2}\ln(2-x) - \frac{1}{5}\ln(x^4+1) = \frac{3}{14}\ln x +$$

$$+\frac{1}{2}\ln(1+x) + \frac{1}{2}\ln(2-x) - \frac{1}{5}\ln(x^4+1);$$

$$\frac{1}{y}y' = \frac{3}{14x} + \frac{1}{2(1+x)} - \frac{1}{2(2-x)} - \frac{4x^3}{5(x^4+1)};$$

$$y' = \frac{\sqrt[7]{x\sqrt{x}}\sqrt{(1+x)(2-x)}}{\sqrt[5]{x^4+1}}\left(\frac{3}{14x} + \frac{1}{2(1+x)} - \frac{1}{2(2-x)} - \frac{4x^3}{5(x^4+1)}\right).$$

$б$) $$\ln y = \sin 2x \ln\cos x;$$

$$\frac{y'}{y} = 2\cos 2x \ln\cos x - \sin 2x\frac{\sin x}{\cos x};$$

$$y' = 2(\cos x)^{\sin x}(\cos 2x \ln\cos x - \sin^2 x).$$

§ 10. Дифференцирование параметрически заданных функций

Пусть функция $y = f(x)$ задана параметрически:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \quad t \in T, \end{cases} \tag{6.13}$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ дифференцируемы $\forall t \in T$, причём $\varphi'(t) \neq 0$. Будем считать, что функция $x = \varphi(t)$ имеет обратную функцию $t = t(x)$, которая также дифференцируема. Тогда функцию $y = f(x)$, заданную уравнениями (6.13), можно рассматривать как сложную функцию $y = \psi(t)$, $t = t(x)$ где t – промежуточный аргумент. По правилу дифференцирования сложной функции получим $y'_x = y'_t t'_x$. Производная $t'_x = \dfrac{1}{x'_t} = \dfrac{1}{\varphi'(t)}$, согласно правилу дифференцирования обратной функции.

Отсюда окончательно получим:

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}, \\ x=\varphi(t). \end{cases} \qquad (6.14)$$

Пример 6.5. Найти производную функции

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t), \qquad a\neq 0, \quad t\in(-\infty,+\infty). \end{cases}$$

Решение. Используя формулу (6.14), находим

$$y'_x=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{\sin t}{2\sin^2\frac{t}{2}}=ctg\frac{t}{2}.$$

Окончательно получим:

$$\begin{cases} y'_x=ctg\dfrac{t}{2} \\ x=a(t-\sin t). \end{cases}$$

§ 11. Производные высших порядков

1. Определение производных высших порядков

Производная $y'=f'(x)$ функции $y=f(x)$ является функцией от x и называется первой производной (или производной первого порядка) этой функции.

Второй производной (или производной второго порядка) функции $y=f(x)$ называется производная от её первой производной и обозначается y'', $f''(x)$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$. Таким образом, $y''=(y')'$.

Производная от производной второго порядка, если она существует, называется производной третьего порядка и обозначается y''', $f'''(x)$, $\dfrac{d^3y}{dx^3}$. Итак, $y'''=(y'')'$.

Аналогично определяются производные более высоких порядков.

Производной $n-$го порядка (или $n-$ой производной) функции $y=f(x)$ называется производная от производной $(n-1)-$го порядка:

$$y^{(n)}=(y^{(n-1)})'.$$

Первые три производные обозначаются штрихами, последующие - римскими цифрами или числами в скобках (y^{IV} или $y^{(4)}-$производная четвёртого порядка).

Пример 6.6. Найти производную четвёртого порядка функции $y=\ln x$.

Решение.

$$y'=(\ln x)'=\frac{1}{x};\quad y''=\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2};\quad y'''=\left(-\frac{1}{x^2}\right)'=\frac{2}{x^3};\quad y^{IV}=\left(\frac{2}{x^3}\right)'=-\frac{6}{x^4}.$$

Пример 6.7. Найти производную $n-$го порядка функции $y=e^{kx}$.

Решение.

$$y'=(e^{kx})'=ke^{kx};\quad y''=(ke^{kx})'=k^2e^{kx};\quad y'''=(k^2e^{kx})'=k^3e^{kx};\ldots;\ y^{(n)}=k^ne^{kx}.$$

2. Механический смысл производной второго порядка

Пусть $s=s(t)$ - закон движения материальной точки. Как уже известно, первая производная определяет скорость этого движения $\vartheta=s'(t)$ в момент времени t. Рассмотрим другой момент времени $t+\Delta t$. Ему соответствует значение скорости $\vartheta(t+\Delta t)=\vartheta(t)+\Delta v$, т. е. за промежуток времени Δt скорость изменилась на $\Delta\vartheta$. Отношение $\dfrac{\Delta\vartheta}{\Delta t}=a_{cp}$ называется средним ускорением за время Δt. Предел этого отношения при $\Delta t\to 0$ называется ускорением точки в момент времени t и обозначается буквой a:

$$a=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vartheta}{\Delta t}=\frac{dv}{dt}.$$

Но скорость есть производная пути s по времени t: $\vartheta=s'(t)$. Учитывая это, имеем

$$a=\vartheta'(t)=(s'(t))'=s''(t).$$

Итак, вторая производная пути по времени равна ускорению движения.

3. Производные высших порядков неявно заданной функции

Пусть функция $y = f(x)$ задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$. В §6.8 было дано правило нахождения первой производной от неявно заданной функции и на примере показано, что y'_x в общем случае содержит аргумент x и функцию y. Продифференцировав по x первую производную, рассматривая y как функцию от x, получим вторую производную от неявной функции, в которую войдут $x,\ y,\ y'$. Подставляя уже найденное значение y' в выражение второй производной, выразим y'' через x и y.

Аналогично поступаем для нахождения $y''',\ \ y^{IV}$ и более высоких порядков.

Пример 6.7. Найти производную второго порядка неявной функции $x + y = e^{x-y}$.

Решение. Найдем первую производную $1 + y' = e^{x-y}(1 - y'),$ откуда $y' = \dfrac{e^{x-y} - 1}{e^{x-y} + 1} = \dfrac{x + y - 1}{x + y + 1}.$ Дифференцируем последнее равенство по x и определяем y'':

$$y'' = \frac{(1 + y')(x + y + 1) - (1 + y')(x + y - 1)}{(x + y + 1)^2} = \frac{2(1 + y')}{(x + y + 1)^2}.$$

Подставим в выражение для y'' значение y', получим:

$$y'' = \frac{2\left(1 + \dfrac{x + y - 1}{x + y + 1}\right)}{(x + y + 1)^2} = \frac{4(x + y)}{(x + y + 1)^3}.$$

4. Производные высших порядков от функций, заданных параметрически

Пусть функция $y = f(x)$ задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \qquad t \in T. \end{cases}$$

Задача нахождения второй производно сводится к отысканию первой производной от функции заданной параметрически

$$\begin{cases} y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}, \\ x = \varphi(t). \end{cases}$$

По правилу определения первой производной, получим:

$$\begin{cases} y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} \\ x = \varphi(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y''_x = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}. \\ x = \varphi(t) \end{cases}$$

Аналогично, получаем:

$$\begin{cases} y'''_x = \dfrac{(y''_x)'_t}{x'_t}; \\ x = \varphi(t) \end{cases} \quad \begin{cases} y^{IV}_x = \dfrac{(y'''_x)'_t}{x'_t} \\ x = \varphi(t) \end{cases} \quad \text{и т.д.}$$

Пример 6.8. Найти y''_x, если

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$$

Решение. Выполняя последовательное дифференцирование, получим:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t} = -tgt, \quad \begin{cases} y'_x = -tgt, \\ x = a\cos^3 t; \end{cases}$$

$$y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{1}{\cos^2 t\cdot 3a\cos^2 t\sin t} = \frac{1}{3a\sin t\cos^4 t},$$

$$\begin{cases} y''_x = \dfrac{1}{3a\sin t\cos^4 t}, \\ x = a\cos^3 t. \end{cases}$$

§ 12. Дифференциал функции

1. Дифференциал и его геометрический смысл

С понятием производной теснейшим образом связано фундаментальное понятие математического анализа - дифференциал функции.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема $\forall x \in O_\delta(x_0)$. Производная этой функции в точке x_0 определяется равенством

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Тогда по теореме о связи функции, её предела и бесконечно малой функции имеем $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(x)$, где $\alpha(x)\to 0$ при $\Delta x\to 0$, или $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(x)\Delta x$.

Приращение функции записано в виде суммы двух слагаемых. Первое слагаемое $f'(x_0)\Delta x$ является при $\Delta x \to 0$ бесконечно малой одного порядка с Δx (при $f'(x) \neq 0$). Это слагаемое линейно относительно Δx. Второе слагаемое $\alpha(x)\Delta x$ при $\Delta x \to 0$ - бесконечно малая более высокого порядка, чем Δx: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\alpha(x)\Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(x) = 0.$

Первое слагаемое $f'(x_0)\Delta x$ называют главной частью приращения функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется главная часть её приращения, линейная относительно Δx и обозначается dy (или $df(x_0)$):

$$dy = f'(x_0)\Delta x. \tag{6.15}$$

Найдём дифференциал независимой переменной x, т. е. дифференциал функции $y = f(x)$: $dy = dx = 1 \cdot \Delta x$, т. е. дифференциал и приращение независимой переменной равны между собой. Поэтому формулу (6.15) можно записать в виде

$$dy = f'(x_0)dx. \tag{6.16}$$

Следовательно, дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x_0 равен произведению производной функции в этой точке на дифференциал независимой переменной. Из формулы (6.16) следует равенство $\dfrac{dy}{dx} = f'(x_0)$, т. е. производную $f'(x_0)$ можно рассматривать как отношение дифференциала функции к дифференциалу независимой переменной.

Обратимся к геометрической иллюстрации дифференциала (рис. 6.8).

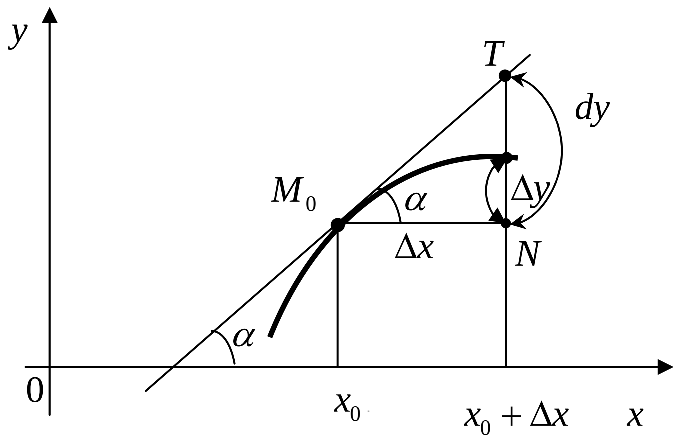


Рис. 6.8

Так как $f'(x_0) = tg\alpha$, то из ΔM_0TN имеем $NT = dy = tg\alpha \cdot \Delta x$ или $dy = f'(x_0)\Delta x$.

Таким образом, дифференциал dy функции $y = f(x)$ в точке x_0, равен приращению NT ординаты касательной к графику функции в этой точке, когда x_0 получит приращение Δx.

В этом заключается геометрический смысл дифференциала.

Пример 6.10. Найти дифференциал функции $y = \cos^4 5x$ в точке x.

Решение. $dy = f'(x)dx = -4\cos^3 5x \sin 5x \cdot 5dx = -20\cos^3 5x \sin 5x dx.$

2. Свойства дифференциала

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - функции, дифференцируемые в точке x. Из определения дифференциала и свойств производных вытекают следующие свойства дифференциала:

1. $d(cu) = cdu,$
2. $d(u \pm v) = du \pm dv,$
3. $d(uv) = vdu + udv,$
4. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}.$

Докажем, например, два последних свойства:

$$d(uv) = (uv)'dx = (u'v + uv')dx = v(u'dx) + u(v'dx) = vdu + udv;$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \left(\frac{u}{v}\right)' dx = \frac{u'v - uv'}{v^2}dx = \frac{v(u'dx) - u(v'dx)}{v^2} = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

3. Дифференциал сложной функции. Инвариантность формы дифференциала

Пусть дана сложная функция $y = f(u),\ u = u(x)$. Если существуют производные f_u' и u_x', то по правилу дифференцирования сложной функции

$$y_x' = f_u' \cdot u_x'.$$

Умножим обе части этого равенства на dx, получим

$$y_x' dx = f_u' u_x' dx.$$

Но $y_x' dx = dy$ и $u_x' dx = du$, тогда в случае сложной функции имеем

$$dy = f'(u)du \tag{6.17}$$

Сравнивая формулы (6.16) и (6.17), видим, что они совпадают по форме записи. Однако эти формулы имеют различный смысл: в первой из них $dx = \Delta x$, а во второй $du = u'(x)dx$.

Таким образом, дифференциал функции всегда равен произведению производной на дифференциал аргумента и не зависит от того, является ли переменная, по которой взята производная в свою очередь функцией или независимой переменной. В этом заключается свойство инвариантности (неизменности) формы дифференциала.

4. Применение дифференциала в приближенных вычислениях

Приращение Δy функции $y = f(x)$ в точке x_0, как известно, можно задать формулой $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(x)\Delta x$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to 0$, или $\Delta y = dy + \alpha(x)\Delta x$.

Если отбросить бесконечно малую $\alpha(x)\Delta x$ более высокого порядка, чем Δx, то получим приближенное равенство

$$\Delta y \approx dy. \tag{6.18}$$

Так как дифференциал функции находится обычно проще, чем приращение функции, то во многих задачах эта формула позволяет с большой точностью вычислить приращение любой дифференцируемой функции. При этом абсолютная погрешность dy равна $|\Delta y - dy|$. Она является бесконечно малой более высокого порядка, чем Δx.

Относительной погрешностью dy называется $\left|\dfrac{\Delta y - dy}{dy}\right|$. Покажем, что относительная погрешность, при $f'(x_0) \neq 0$, также бесконечно малая при $\Delta x \to 0$.

В самом деле $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left|\dfrac{\Delta y - dy}{dy}\right| = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left|\dfrac{\alpha(x)\Delta x}{f'(x_0)\Delta x}\right| = 0$.

Таким образом, если заменить Δy величиной dy, то не только абсолютная погрешность стремится к нулю при $\Delta x \to 0$, но также и относительная погрешность стремится к нулю при $\Delta x \to 0$.

Если в приближенное равенство (6.18) подставить значения Δy и dy, то

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)dx,$$

или $$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)dx \qquad (6.19)$$

Полученная формула применяется для вычисления приближенных значений функций.

С помощью дифференциала вычисляют абсолютную погрешность функции ε_y по известной погрешности аргумента ε_x. При решении практических задач значение аргумента находится измерением, и его абсолютная погрешность считается известной.

Пусть требуется вычислить значение функции $y = f(x)$ при некотором значении аргумента x, истинное значение которого неизвестно, но дано его приближенное значение x_0 с абсолютной погрешностью ε_x: $x = x_0 + \Delta x$, $|\Delta x| < \varepsilon_x$.

Тогда $|f(x) - f(x_0)| \approx |f'(x_0)||\Delta x| < |f'(x_0)|\varepsilon_x$.

Отсюда получаем, что абсолютная погрешность функции

$$\varepsilon_y < |f'(x_0)|\varepsilon_x. \qquad (6.20)$$

Относительная погрешность функции δ_y выражается формулой

$$\delta_y = \frac{\varepsilon_y}{|f(x_0)|} < \left|\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}\right|\varepsilon_x = \left|(\ln f(x_0))'\right|\varepsilon_x. \qquad (6.21)$$

Пример 6.10. Найти приближенное значение приращения функции $y = x^3 - 4x^2 + 4x + 3$ при $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}03$.

Решение. По формуле (6.18) $\Delta y \approx dy = (x^3 - 4x^2 + 4x + 3)'\Delta x = (3x^2 - 8x + 4)\Delta x$.

$$dy\Big|_{\substack{x_0=1\\ \Delta x=0,03}} = (3\cdot 1 - 8\cdot 1 + 4)\cdot 0{,}03 = -0{,}03.$$

Следовательно, приращение функции $\Delta y \approx -0{,}03$.

Найдем погрешность, которую допустили, заменив приращение функции в точке ее дифференциалом.

$$\Delta y = (x+\Delta x)^3 - 4(x+\Delta x)^2 + 4(x+\Delta x) + 3 - (x^3 - 4x^2 + 4x + 3) = x^3 + 3x^2\Delta x +$$
$$+ 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 4x^2 - 8x\Delta x - 4(\Delta x)^2 + 4x + 4\Delta x + 3 - x^3 + 4x^2 - 4x - 3 =$$
$$= \Delta x(3x^2 + 3x\Delta x - 4\Delta x + (\Delta x)^2 - 8x + 4).$$

$$\Delta y\Big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0,03}} = 0{,}03\cdot(3\cdot 1 + 3\cdot 1\cdot 0{,}03 - 4\cdot 0{,}03 + 0{,}03^2 - 8\cdot 1 + 4) = -0{,}030873.$$

Абсолютная погрешность приближения

$$|\Delta y - dy| = |-0{,}030873 - (-0{,}03)| = 0{,}000873.$$

Относительная погрешность приближения

$$\left|\frac{\Delta y - dy}{dy}\right| = \frac{0{,}000873}{0{,}03} = 0{,}0291$$

Пример 6.11. Найти приближенное значение $\sqrt[5]{31}$.

Решение. Будем рассматривать $\sqrt[5]{31}$ как частное значение функции $y = \sqrt[5]{x}$ при $x = 31$. Положим $x_0 = 32$, тогда $\Delta x = -1$, $f(x_0) = \sqrt[5]{32} = 2$, $f'(x_0) = \frac{1}{5}\cdot x^{-\frac{4}{5}}\Big|_{x=32} = \frac{1}{5\sqrt[5]{32^4}} = \frac{1}{80}$. Тогда по формуле (6.19), получим:

$$\sqrt[5]{31} \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = 2 + \frac{1}{80}\cdot(-1) = \frac{159}{80} = 1{,}9875.$$

Если принять $\varepsilon_x = 1$, то абсолютная погрешность вычисления значения функции

$$\varepsilon_y < |f'(x_0)|\varepsilon_x = \frac{1}{80} = 0{,}0125.$$

Относительная погрешность вычисления

$$\delta_y = \frac{\varepsilon_y}{|f(x_0)|} < \frac{0{,}0125}{2} = 0{,}00625.$$

§ 13. Дифференциалы высших порядков

Дифференциал dy функции $y = f(x)$ есть функция двух переменных: независимой переменной x и ее дифференциала dx, причем dx не зависит от x, т.к. при данном значении x значения dx могут выбираться произвольно. Считая dx постоянным, $dy = f'(x)dx$ можно рассматривать как функцию переменной x.

Дифференциалом второго порядка (или вторым дифференциалом) функции $y = f(x)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка этой функции и обозначается $d^2 y$ или $d^2 f(x)$. Таким образом

$$d^2 y = d(dy) = d(df(x)).$$

Так как

$$d\big(df(x)\big) = d\big(f'(x)dx\big) = \big(f'(x)dx\big)' dx = f''(x)(dx)^2 = f''(x)dx^2, \text{ то}$$

$$d^2 y = f''(x)dx^2. \tag{6.22}$$

Аналогично, дифференциал третьего порядка функции $y = f(x)$

$$d^3 y = d(d^2 y) = \left(f''(x)dx^2\right)' dx = f'''(x)dx^3.$$

Дифференциалом n - го порядка (или n - м дифференциалом) функции $y = f(x)$ называется дифференциал от дифференциала (n - 1) - го порядка:

$$d^{(n)} y = d\left(d^{(n-1)} y\right) = d\left(d^{(n-1)} f(x)\right).$$

Можно установить для дифференциала n - го порядка справедливость формулы

$$d^{(n)} y = f^{(n)}(x)dx^n.$$

Отсюда следует, что

$$f^{(n)}(x)=\frac{d^{(n)}y}{dx^n},$$

т.е. производная n - го порядка равна отношению дифференциала n - го порядка к n -ой степени дифференциала независимой переменной. В частности, при n = 1,2,3, получим:

$$f'(x)=\frac{dy}{dx},\quad f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2},\quad f'''(x)=\frac{d^3y}{dx^3}.$$

Отметим, что все приведенные выше формулы верны только для случая, когда x является независимой переменной.

В самом деле, предположим, что x есть некоторая функция параметра t, т.е., $x=x(t)$, $t\in T$. Тогда f является сложной функцией $f(x(t))$ и ее первый дифференциал, как известно, обладает инвариантностью формы и имеет вид

$$dy=df(x(t))=f'_x dx$$

Найдем второй дифференциал

$$d^2y=d(f'_x dx)=d(f_x')dx+f'_x d(dx)=f''_x dx^2+f'_x d^2x, \text{ т.е.}$$

$$d^2y=f''_x(x)dx^2+f'_x(x)d^2x. \tag{6.23}$$

Сравнивая формулы (6.22) и (6.23) убеждаемся, что в случае сложной функции в формуле дифференциала 2-го порядка появляется второе слагаемое $f'_x(x)d^2x$.

Покажем, что формула (6.22) является частным случаем формулы (6.23), когда x - независимая переменная. Ясно, что если x - независимая переменная, то

$$d^2x=x''dx^2=0\cdot dx^2=0$$

и формула (6.23) переходит в (6.22).

Итак, если x перестает быть независимой переменной, то дифференциалы второго и выше порядков не обладают свойством инвариантности формы и вычисляются по другим формулам.

Пример 6.12. Найти дифференциал 2-го порядка функции

$$y=a\sin(bx+c),$$

где x - независимая переменная.

Решение. $dy=f'(x)dx=ab\cos(bx+c)dx$.

$$d^2y = f''(x)dx^2 = -ab^2\sin(bx+c)dx^2 = -b^2ydx^2.$$

Пример 6.13. Найти d^2y, если $y = x^3$ и $x = t^4 + 1$.

Решение. Так как $y' = 3x^2$, $y'' = 6x$, $dx = 4t^3dt$, $d^2x = 12t^2dt^2$, то по формуле (6.23) получаем

$$d^2y = 6xdx^2 + 3x^2 \cdot 12t^2dt^2 = 6(t^4+1)(4t^3dt)^2 + 36t^2(t^4+1)^2dt^2 =$$
$$= 12t^2(t^4+1)(8t^4+3t^4+3)dt^2 = 12t^2(t^4+1)(11t^4+3)dt^2.$$

Эту задачу можно решить другим способом: $y = x^3$ и $x = t^4 + 1$ $\Rightarrow$ то $y = (t^4+1)^2$. Тогда по формуле (6.22) $d^2y = y''dt^2$,

$$y' = 3(t^4+1)^2 4t^3 = 12t^3(t^4+1)^2$$

$$y'' = 36t^2\left(t^4+1\right)^2 + 24t^3\left(t^4+1\right)\cdot 4t^3 = 12t^2\left(t^4+1\right)\left(3t^4+3+8t^4\right) =$$
$$= 12t^2\left(t^4+1\right)\left(11t^4+3\right);$$

$$d^2y = 12t^2\left(t^4+1\right)\left(11t^4+3\right)dt^2.$$

§ 14. Теоремы о среднем значении

Под таким общим названием собраны несколько теорем о дифференцируемых функциях, которые применяют для оценки значений функций, производных и пределов.

Теорема 6.2. **Теорема Ферма.** Пусть функция $y = f(x)$ определена при $x \in (a,b)$ и в некоторой внутренней точке этого интервала $x = c \in (a,b)$ достигает своего наибольшего (наименьшего) значения, т.е. $f(c) > f(x)$ или $f(c) < f(x)$.

Доказательство. Для определённости допустим, что $f(c) = M \geq f(x) \forall x \in (a,b) \Rightarrow \Delta y \leq 0$

$$\left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{x=c} = \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0, \quad \text{при } \Delta x < 0, \quad \text{при } \Delta x > 0, \quad \left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{x=c} \leq 0.$$

По условию $\exists \lim\limits_{\Delta x \to \pm 0} \left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{x=c} = f'(c) \Rightarrow f'(c) = 0$.

Геометрический смысл теоремы Ферма иллюстрирует график

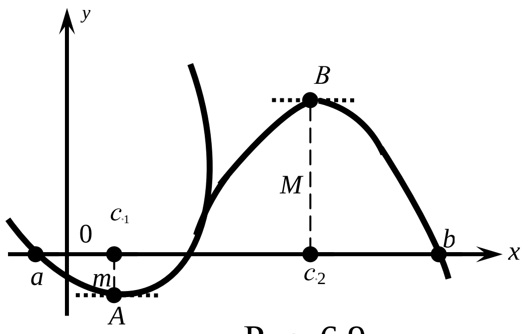


Рис. 6.9

В точках A и B, с абсциссами c_1 и c_2 соответственно, выполнены условия теоремы: $f(c_1)=m$, $f(c_2)=M$ и в них невертикальные касательные, следовательно, в этих точках, учитывая геометрический смысл производной, касательные горизонтальны.

Замечание 6.1. Теорема Ферма даёт только необходимое условие существования наибольшего и наименьшего значений, но не достаточное: например, на графике очевидно, хотя в точке A $f'(c)=0$ /горизонтальная касательная, в ней нет ни M, ни m.

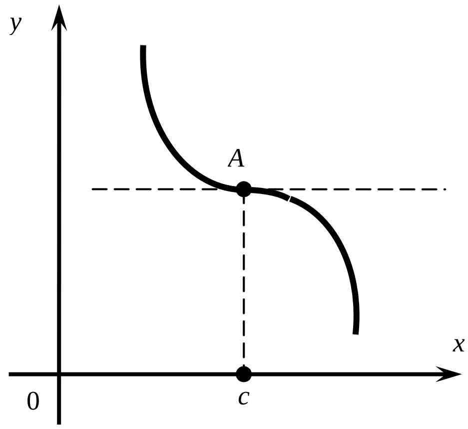


Рис. 6.10

Замечание 6.2. Требование конечности $f'(c)$ существенно: на данном графике $f(c)=M$, но $f'(c)\neq 0$, она бесконечна.

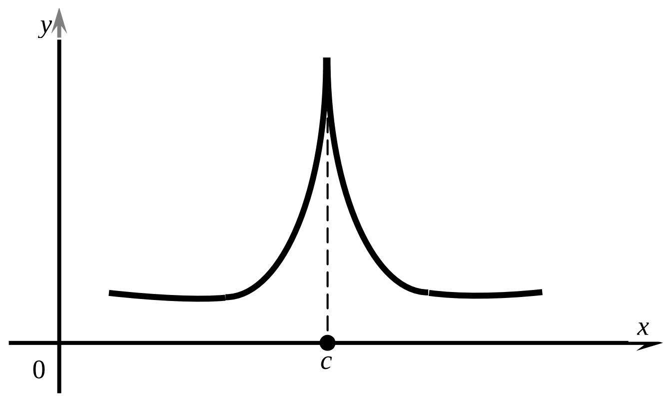


Рис. 6.11

Теорема 6.3. Теорема Ролля. (О корнях производной). Если функция $y=f(x)$ определена и непрерывна на отрезке и дифференцируема при

$x \in (a,b)$, а на концах отрезка принимает равные значения $f(a) = f(b)$, то внутри отрезка существует хотя бы одна точка $x = \xi$, такая, что $f'(\xi) = 0$.

Доказательство теоремы Ролля аналогично доказательству теоремы Ферма, т.к. функция, непрерывная на отрезке, имеет на этом отрезке своё наименьшее и своё наибольшее значения.

Геометрический смысл теоремы Ролля иллюстрирует график

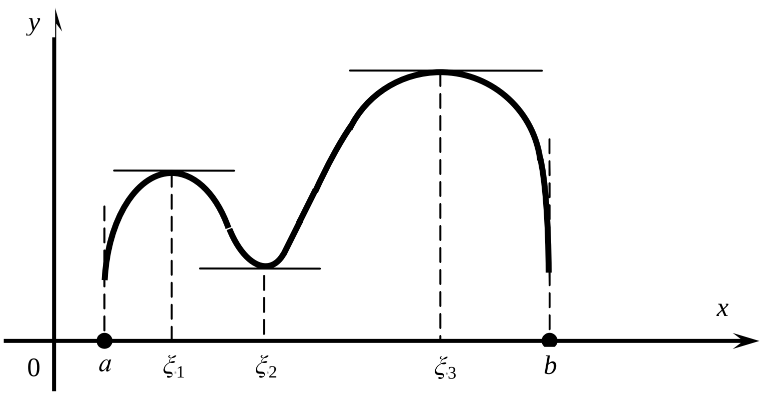
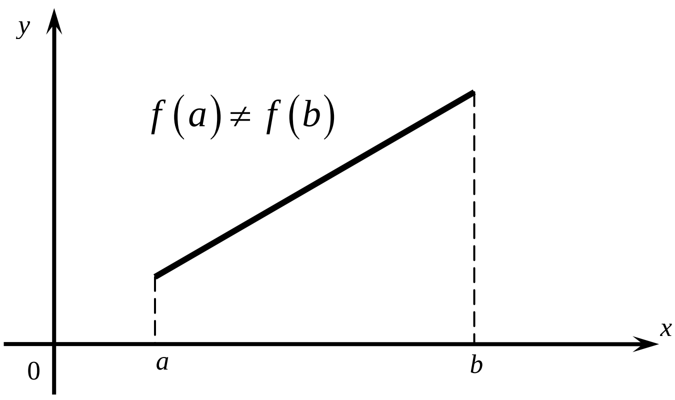
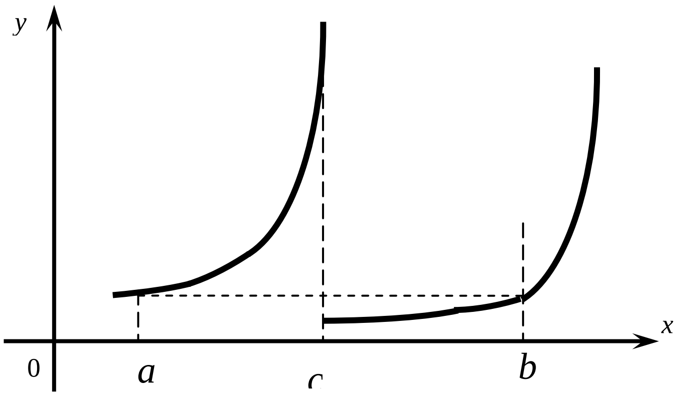


Рис. 6. 12

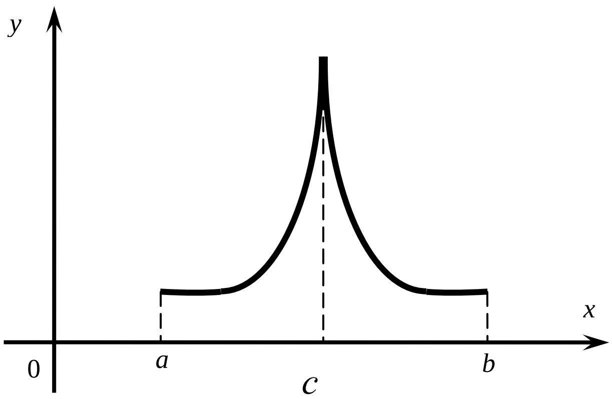
очевидно, функция удовлетворяет всем условиям теоремы поэтому между точками $x = a$ и $x = b$ существует даже несколько точек с горизонтальными касательными к кривой $y = f(x)$.

Замечание 6.3. Все условия теоремы Роля существенны, что легко обнаружить на графиках:





в точке $x = c$ разрыв $f(x)$



$f'(c) = \infty$

Рис. 6.13

- при нарушении одного из условий теоремы Роля ни в одной внутренней точке отрезка нет горизонтальной касательной.

Теорема 6.4. **Т. Лагранжа (о конечных приращениях).** Если функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема при $x \in (a,b)$, то существует хотя бы одна внутренняя точка ξ отрезка, такая, что $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$, где $\xi = a + \theta(b-a)$, $0 < \theta < 1$.

Доказательство теоремы Лагранжа основано на рассмотрении вспомогательной функции, удовлетворяющей условиям теоремы Роля – его не будем приводить, т.к. используем аналогичное доказательство теоремы Коши, представляющей собой обобщение теоремы Лагранжа.

Геометрический смысл теоремы Лагранжа очевиден, если формулу Лагранжа переписать в форме $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$ и учесть условия теоремы и геометрический смысл производной: непрерывная кривая, имеющая непрерывно вращающуюся касательную на отрезке $[a,b]$, имеет хотя бы одну точку внутри отрезка, в которой касательная параллельна хорде, например:

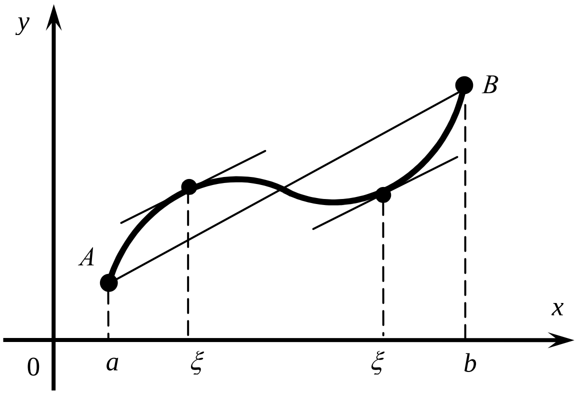


Рис. 6.14

Замечание 6.4. Обозначим $a=x$, $b=x+\Delta x$, тогда $\xi=x+\theta\Delta x$, и формула Лагранжа примет вид: $\Delta y=f'(\xi)\Delta x$ - отсюда ясно другое название теоремы: теорема о конечных приращениях, т.к. Δx и Δy конечны. Эта формула точная, в отличие от приближённой: $\Delta y\approx f'(x)\Delta x$, где Δx и Δy бесконечно малы.

Теорема 6.5. Теорема Коши (обобщение теоремы Лагранжа). Если функция $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны на отрезке, дифференцируемы при $x\in(a,b)$, причём $g'(x)\neq 0$, то внутри отрезка существует хотя бы одна точка $x=\xi$, такая, что $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию и её производную:

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a));$$

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x).$$

Функция $F(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Роля: как линейная комбинация функций $f(x)$ и $g(x)$, она определена, непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема на (a,b), а на концах отрезка принимает равные значения:

$F(a)=F(b)=0$ - следовательно, существует точка $x=\xi\in(a,b)$, в которой $F'(\xi)=0$, что даёт формулу Коши.

Замечание 6.5. При $g(x)=x$, $g'(x)=1$, $g(b)-g(a)=b-a$, и из формулы Коши следует формула Лагранжа: $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

Пример 6.14. Для функций $f(x)=2x^3+5x+1$, $g(x)=x^2+4$ проверить выполнение условий теоремы Коши на отрезке $[0,2]$, найти значение ξ. Функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и дифференцируемы при $x\in R'$: $f'(x)=6x^2+5$, $g'(x)=2x$ и $g'(x)\neq 0$ при $x\in(0,2)$.

$$\frac{f(2)-f(0)}{g(2)-g(0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \Rightarrow \frac{27-1}{8-4}=\frac{6\xi^2+5}{2\xi} \Leftrightarrow 6\xi^2-13\xi+5=0;$$

$$\xi_{1,2}=\frac{13\pm\sqrt{169-120}}{12}=\frac{13\pm 7}{2}, \quad \xi_1=\frac{1}{2}, \quad \xi_2=\frac{5}{3}\in(0,2).$$

Правило Лопиталя для раскрытия "неопределённостей" (следствие т. Коши)

Под "неопределённостями" понимают пределы вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty\cdot\infty$, $0\cdot\infty$, ∞^0, 1^∞.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены, непрерывны и дифференцируемы в некоторой окрестности точки $x=a$. При этом $g'(x)\neq 0$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$.

Тогда, если существует $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, то $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Доказательство. Доопределим функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке $x=a$: положим $f(a)=g(a)=0$.

Очевидно, функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям т. Коши на $[a,x]$: они определены и непрерывны на $[a,x]$, дифференцируемы на (a,x), где x – из окрестности точки $x=a$, следовательно, по теореме Коши:

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Переходим к пределу при $x\to a$ /очевидно, при этом $\xi\to a$/:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}, \text{ если существует } \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Замечание 6.6. Возможно, предел отношения производных не существует, а предел отношения функций существует.

Пример 6.15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}\left(\dfrac{0}{0}\right)$;

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)'}{(\sin x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin\frac{1}{x}+x^2\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(-\cos\dfrac{1}{x}\right)$ - предел не существует: $\cos\dfrac{1}{x}$ может принимать любые значения от – 1 до + 1. Значит правило Лопиталя неприменимо. Раскроем неопределённость без него:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$, т.к. при $x\to 0$ бесконечно малые $\sin x$ и x эквивалентны, x - бесконечно малая, а $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\le 1$, т. е. $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|$ - ограниченная.

Замечание 6.7. Правило Лопиталя можно применять несколько раз.

Замечание 6.8. Правило Лопиталя применимо и при $x\to\infty$. Аналогично раскрывают “неопределённости” вида $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Пример 6.16. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^2 x}{x^3}\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Решение. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^2 x}{x^3}\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln x\frac{1}{x}}{3x^2}=\dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^3}\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{3x^2}=0$.

Раскрытие “неопределённостей” вида $0\cdot\infty$

Для использования правила Лопиталя предварительно преобразуют произведение в частное.

Пример 6.17. $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)ctg\pi(x-1)(0\cdot\infty)$.

Решение.

$$\lim_{x\to 1}(x-1)ctg\pi(x-1)(0\cdot\infty)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{tg\pi(x-1)}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\left[\dfrac{1}{\cos^2\pi(x-1)}\right]\pi}=\frac{1}{\pi}.$$

Неопределённости вида $\infty-\infty$

Аналогично поступают с неопределённостями вида $\infty-\infty$.

Пример 6.18. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{ctgx}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)(\infty-\infty)$.

Решение.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x}{ctgx}-\frac{\pi}{2\cos x}\right)(\infty-\infty)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x-\frac{\pi}{2}}{\cos x}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+x\cos x}{-\sin x}=-1.$$

Неопределённости вида 0^0, ∞^0, 1^∞

раскрывают с помощью предварительного логарифмирования.

Пример 6.19. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}(1^\infty)$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}(1^\infty)=\lim\limits_{x\to 0}y$,

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}3\cdot\frac{\ln\cos 2x}{x^2}\left(\frac{0}{0}\right)=3\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 2x}{\cos 2x\cdot 2x}=-6\quad\Rightarrow\quad\lim_{x\to 0}y=e^{-6}.$$

Пример 6.20. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^x(1^\infty)$.

Решение. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^x(1^\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}y$,

$$\lim_{x\to+\infty}\ln y=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2+1}\left(-\frac{2}{x^3}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^2+1}=0,$$

Следовательно $\lim\limits_{x\to+\infty}y=e^0=1$.

Теорема 6.6. Формула Тейлора (самая общая теорема о среднем).

Рассмотрим многочлен:

$$P(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+...+a_n(x-x_0)^n \qquad (6.24)$$

$$P'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+3a_3(x-x_0)^2+...+na_n(x-x_0)^{n-1}$$

$$P''(x)=1\cdot 2a_2+2\cdot 3a_3(x-x_0)+...+(n-1)na_n(x-x_0)^{n-2}$$

....

$$P^{(n)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 ... n a_n = n! a_n$$

при $x = x_0$

$$a_0 = P(x_0),$$

$$a_1 = P'(x_0),$$

$$a_2 = \frac{P''(x_0)}{2!}, \ . \ . \ . \ , \ a_n = \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}$$

следовательно,

$$P(x) = P(x_0) + \frac{P'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{P''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \qquad (6.25)$$

в частности, при $x_0 = 0$

$$P(x) = P(0) + \frac{P'(0)}{1!}x + \frac{P''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}x^n \qquad (6.26)$$

Формулы (6.25) и (6.26) называются формулами Тейлора и Маклорена для многочлена, они имеют важные применения в высшей алгебре.

Теперь рассмотрим произвольную функцию $f(x)$, удовлетворяющую условиям:

1) Определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, содержащем точку x_0;
2) Имеет непрерывные производные до n-го порядка включительно на $[a, b]$ и хотя бы на (a, b) конечную $f^{(n+1)}(x)$.

По образцу формулы Тейлора для многочлена составим многочлен для $f(x)$:

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \qquad (6.27)$$

где $x \in [a, b]$, $x_0 \in (a, b)$

Очевидно, при $x = x_0$, $P_n(x_0) = f(x_0)$, но при $x \neq x_0$, $P_n(x) \neq f(x)$ если $f(x)$ - не многочлен, т.е. $f(x) - P_n(x) = R_n(x)$.

Следовательно, если $R_n(x)$ малая величина, $f(x) \approx P_n(x)$, т.е. многочлен $P_n(x)$ может служить приближением для функции $f(x)$, а точная формула

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x) \qquad (6.28)$$

называется формулой Тейлора для функции $f(x)$, $R_n(x)$ называется остаточным членом формулы Тейлора.

В частом случае, при $x_0 = 0$ формула Тейлора даёт формулу Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

$R_n(x)$ представляет собой погрешность, которая допускается при замене функции $f(x)$ на её многочлен Тейлора /Маклорена/ - $P_n(x)$.

Существует несколько различных форм представления $R_n(x)$. Мы получим остаточный член в форме Лагранжа.

$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$, $\qquad R_n'(x) = f'(x) - P_n'(x) \qquad \cdots$

$R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - P_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$, т.к. $P_n(x)$ многочлен $n-$ой степени.

Кроме того, $R_n(x_0) = R_n'(x_0) = \ldots = R_n^{(n)}(x_0) = 0$.

Теперь для функций $R_n(x)$ и $g(x) = (x - x_0)^{n+1}$ несколько раз применим формулу Коши, учитывая, что $g(x_0) = g'(x_0) = \ldots = g^{(n)}(x_0) = 0$.

$$\frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R_n(x) - R_n(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{R_n'(\xi_1)}{g'(\xi_1)} =, \quad (x \in [x_0, x],\ \xi_1 \in (x_0, x)) = \frac{R_n'(\xi_1) - R_n(x_0)}{g'(\xi_1) - g'(x_0)} =$$

$$= \frac{R_n''(\xi_2)}{g''(\xi_2)} = \ldots = \frac{R_n^{n+1}(\xi_{n+1})}{g^{(n+1)}(\xi_{n+1})}, \quad \xi_2 \in (x_0, \xi_1) \in (x_0, x) \ldots \xi_{n+1} \in (x_0, \xi_n) \in (x_0, x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{g^{(n+1)}(\xi)}, \quad \xi \in (x_0, x)$$

$$g(x) = (x - x_0)^{n+1} \Rightarrow g^{(n+1)}(x) = (n+1)!, \quad R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$$

$$\Rightarrow R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \ \xi = x_0 + \theta(x - x_0), \ 0 < \theta < 1.$$

Таким образом, формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа имеет вид:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad \xi = x_0 + \theta(x-x_0)$$

Частный случай формулы Тейлора – формула Маклорена, при $x_0 = 0$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Замечание 6.9. При $n = 0$ из формулы Тейлора следует формула Лагранжа:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(\xi)}{1!}(x - x_0).$$

Замечание 6.10. Формула Тейлора дает возможность функции сложной природы, имеющие непрерывные производные всех порядков, заменять с большой степенью точности многочленом, что дает простой способ приближенного вычисления значений функции с оценкой погрешности с помощью $|R_n|$.

Замечание 6.11. При использовании дифференциала в приближенных вычислениях:

$$\Delta f \approx df = f'\Delta x$$

с помощью формулы Тейлора можно оценить погрешность от замены Δf на df.

При $n = 1$ $\quad f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + R_1(x) \quad \Leftrightarrow \quad \Delta f = f'(x)\Delta x + R_1(x)$

$$\text{ошибка} = R_1 = \frac{f''(\xi)}{2!}\Delta x^2$$

Пример 6.21. Представить формулой Маклорена функцию $y = e^x$ и вычислить $\sqrt{e}$ с точностью 0,001

$$y^{(k)}(x) = e^x, \quad y(0) = y'(0) = \ldots = y^{(k)}(0) = 1$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \quad \sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^n + R_n\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$R_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{\frac{1}{2}\theta}}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0.001$$

$$R_2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{e^{\frac{\theta}{2}}}{3!}\cdot\frac{1}{8}<\frac{3}{3!}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{16}>0.001$$

$$R_3\left(\frac{1}{2}\right)<\frac{3}{4!}\cdot\frac{1}{16}=\frac{1}{128}>0.001$$

$$R_4\left(\frac{1}{2}\right)<\frac{3}{5!}\cdot\frac{1}{32}=\frac{1}{1280}<0.001$$

$$\Rightarrow\ \sqrt{e}\approx 1+\frac{1}{1!2}+\frac{1}{2!2^2}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2^3}=1+0.5+\frac{1}{8}+\frac{1}{42}=1.646$$

$$\Delta=R_4\left(\frac{1}{2}\right)<0.001$$

Пример 6.22. Составить формулы Маклорена для $\sin x$ и $\cos x$.

$f(x)=\sin x,\quad f^{(n)}(0):$ 0,1,0,-1,0,1,0-1…

$$\Rightarrow \sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5}-...+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+R_{2n}(x)$$

$$\left|R_{2n}(x)\right|=\left|\frac{\sin\left(\theta\, x+(2n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right|\le\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$f(x)=\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{(2n)!}+R_{2n+1}(x)$$

$$\left|R_{2n+1}(x)\right|=\left|\frac{\cos\left(\theta x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2n+2)!}x^{2n+2}\right|\le\frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

§ 15. Исследование функций и построение графиков

1. Возрастание (убывание) функции

Теорема 6.7. Если $y=f(x)$ определена и непрерывна на (a,b) и $\forall x\in(a,b)$ имеет конечную производную, то для монотонного возрастания функции необходимо и достаточно: $f'(x)\ge 0,\ x\in(a,b)$

Доказательство необходимости. Пусть $f(x)$ монотонно возрастает на (a,b), т.е. при $x_1 < x_2$ $f(x_2) \geq f(x_1)$

$$\Rightarrow \quad f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) \geq 0, \quad \text{при } \Delta x > 0,$$

$$f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) \leq 0 \quad \text{при } \Delta x < 0 \Rightarrow \frac{\Delta f}{\Delta x} \geq 0, \ f'(x) \geq 0$$

Доказательство достаточности. Пусть $f'(x) \geq 0$ на (a,b) и $x_1 < x_2 \in (a,b)$. По теореме Лагранжа

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1), \quad c \in (x_1, x_2)$$

$f'(c) \geq 0,\ (x_2 - x_1) > 0 \Rightarrow$ для $x_1 < x_2$, $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$ т.е. $f(x_2) \geq f(x_1)$.

Замечания 6.12.

Аналогичная теорема для убывающей функции: $f'(x) \leq 0$.

Пример 6.23 . $y = x - \sin x$

$$y' = 1 - \cos x \geq 0, \ x \in R$$
$$y'(2\pi n) = 0.$$

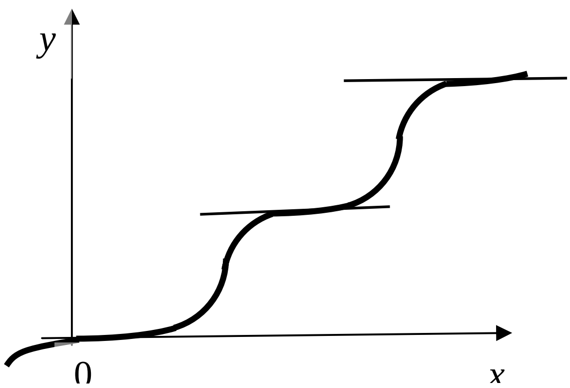


Рис. 6.15

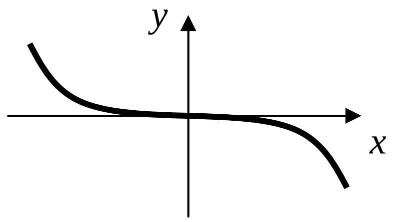
2. Локальный экстремум функции

Определение 6.4. Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 максимум, если существует окрестность точки $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, в которой $f(x_0) > f(x)$, $\forall x \in (x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$, при этом $f(x_0)$ называется $f_{\max}$. Аналогично определение минимума. Функция может иметь несколько экстремумов, это понятие локальное.

Необходимое условие экстремума. Если $y = f(x)$ достигает экстремума в точке x_0 и существует конечная производная $f(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$. Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы Ферма.

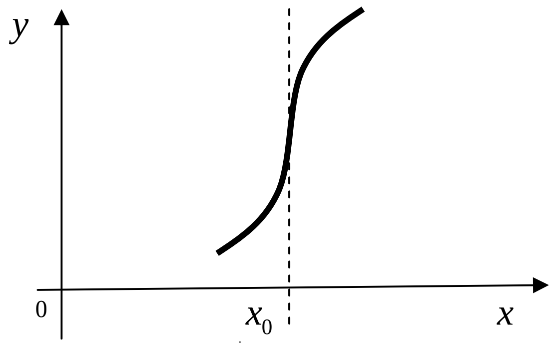
Следствие. Точки, в которых функция имеет экстремум, следует искать среди точек, в которых $f'(x) = 0$, либо ∞, либо не существует. Такие точки называются критическими.

Замечание 6.13. Необходимое условие экстремума не является достаточным для его существования



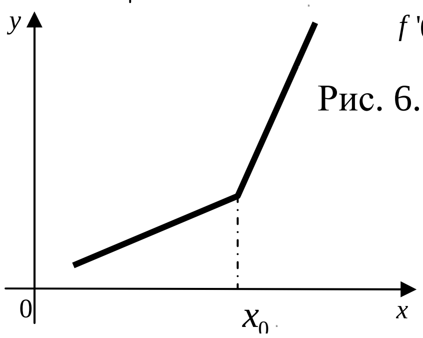
$f'(0) = 0$

Рис. 6.16



$f'(x_0) = \infty$

Рис. 6.17



$f'(x_0) \nexists$

Рис. 6.18

$f'(0) = 0$

Достаточные условия существования экстремума

1-ое правило (по 1-ой производной): если при переходе через критическую точку x_0, $f'(x)$ меняет знак, то в точке x_0 функция достигает экстремума; если смены знака нет – нет экстремума.

Доказательство. Пусть $f'(x_0 - \delta) > 0$ - это достаточное условие возрастания функции, $f'(x_0 + \delta) < 0$ - условие убывания $\Rightarrow f(x_0) = f_{\max}$. Аналогично для минимума.

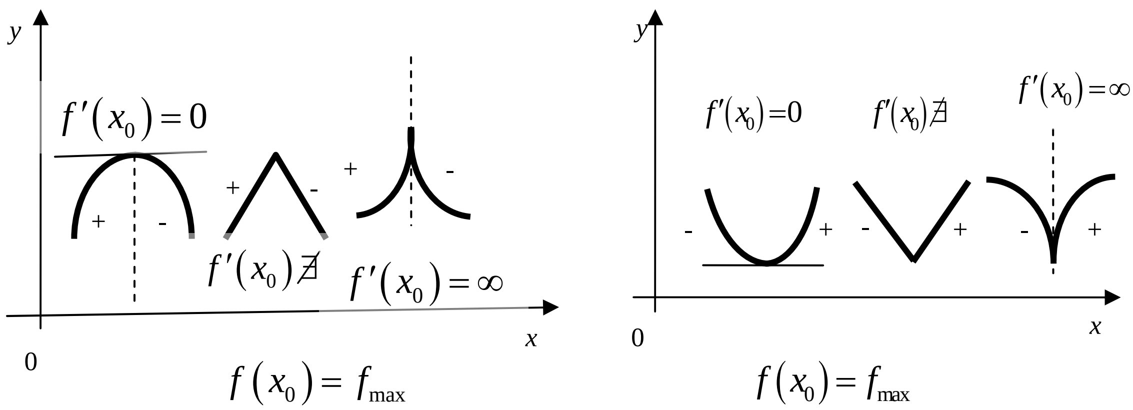


Рис. 6.19

2-ое правило (по 2-ой производной): если в критической точке x_0 $f'' < 0$, то $f\left(x_0\right) = f_{\max}$. Если $f''\left(x_0\right) > 0$, то $f\left(x_0\right) = f_{\min}$. Это правило имеет более узкий круг применения: только для критических точек, в которых первая производная равна нулю, а вторая имеет определенный знак.

Доказательство. Пусть $f'\left(x_0\right) = 0$ и существует непрерывная $f''\left(x\right)$ в окрестности точки x_0, при этом $f''\left(x\right) > 0$ в точке x_0 и ее окрестности. Следовательно $f'\left(x\right)$ является возрастающей функцией в окрестности x_0

$$f'\left(x_0 - \delta\right) < f'\left(x_0\right) = 0, \quad f'\left(x_0 + \delta\right) > f'\left(x_0\right) = 0$$

т.е. $f'\left(x\right)$ меняет знак с минуса на плюс и по 1-му правилу в точке x_0 $f\left(x\right)$ достигает минимума. Аналогично доказывается случай максимума.

3-е правило (примем без доказательства):

если $f'\left(x_0\right) = f''\left(x_0\right) = ... = f^{(n-1)}\left(x_0\right) = 0, \quad f^{(n)}\left(x_0\right) \neq 0$, то при $n = 2k+1$ в критической точке x_0 нет экстремума, при $n = 2k$ и $f^{(2k)}\left(x_0\right) < 0$ в точке x_0 функция достигает максимума, а при $f^{(2k)}\left(x_0\right) > 0$ - минимума.

Пример 6.24.

$f\left(x\right) = e^x + e^{-x} - x^2, \; f'\left(x\right) = e^x - e^{-x} - 2x$

$f'\left(0\right) = 0 \Rightarrow x_0 = 0$

$$f''(x)=e^x+e^{-x}-2,\ \ f''(0)=0,$$
$$f'''(x)=e^x-e^{-x},\ \ f'''(0)=0,$$
$$f^{IV}(x)=e^x+e^{-x},\ \ f^{IV}(0)=2>0\Rightarrow f(0)=2=f_{\min}$$

Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

(глобальный экстремум, или оптимум)

Пусть $y=f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$, тогда по 2-ой теореме Вейерштрасса (см. свойства функций, непрерывных на отрезке) она достигает своего наименьшего и наибольшего значений.

Замечание 6.14. Если x_0 единственная внутренняя критическая точка отрезка и в ней максимум или минимум, то $f(x_0)=M\,(\text{или } m)$. Если внутри отрезка $[a,b]$ несколько критических точек, то M - наибольшее из значений функции в этих критических точках и на концах отрезка, а m - наименьшее из этих значений.

Пример 6.25. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=(1-x^2)(1+2x^2),\quad x\in[-1,1]$.

Решение. Из необходимого условия для экстремума находим критические точки – корни производной: $f'(x)=2x(1-4x^2),\ x_1=0,\ x_2=0{,}5,\ x_3=-0{,}5$ - все они внутри отрезка. Находим значения функции в этих точках и на границах отрезка: $f(0)=1,\ f(-0{,}5)=f(0{,}5)=1{,}125,\ f(-1)=f(1)=0\Rightarrow M=1{,}125, m=0$.

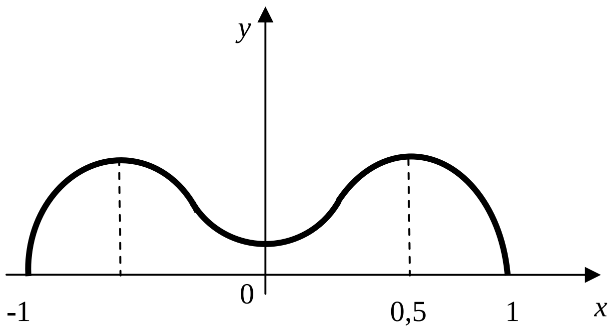


Рис. 6.20

Характер выпуклости кривой. Точки перегиба

Пусть кривая $y = f(x)$в точке x_0 имеет невертикальную касательную, т.е. $f'(x_0)$ - конечна.

Определение 6.5. Если существует окрестность точки x_0, в которой кривая расположена над касательной, то в этой окрестности кривая называется выпуклой вниз или вогнутой вверх (или просто - вогнутой). Если в окрестности точки кривая расположена под касательной, кривая называется выпуклой вверх (или просто выпуклой). Если при переходе через точку x_0 кривая пересекает касательную, то x_0 называется точкой перегиба. Наиболее распространенный случай точки перегиба: с одной стороны от x_0 кривая лежит над касательной, с другой – под касательной, или наоборот.

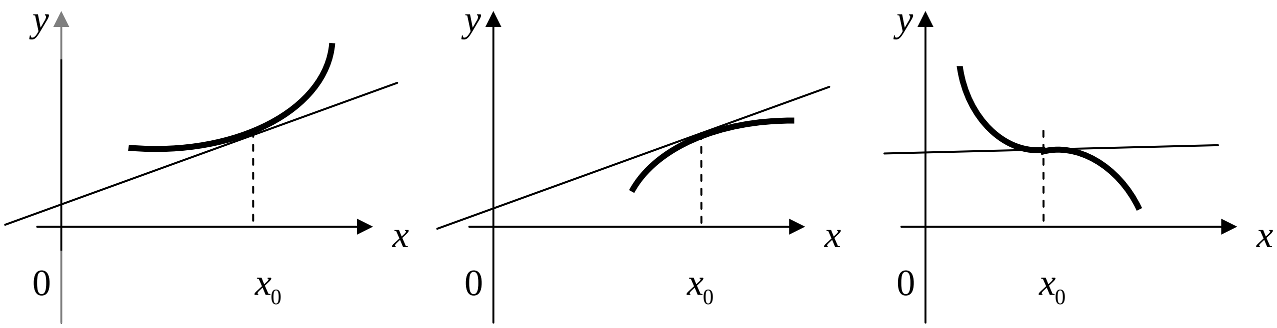


Рис. 6.21

Теорема 6.8. (Достаточные условия выпуклости (вогнутости) графика функции).

Если в точке x_0 и ее окрестности $f''(x) > 0$, то в точке x_0 кривая выпукла вниз (вогнута), если $f''(x) < 0$ - выпукла вверх (выпукла).

Доказательство. Пусть $f''(x) > 0$ в точке x_0 и ее окрестности – надо доказать, что при этом кривая $y = f(x)$ лежит над касательной к кривой в точке x_0. Используем возможный при этом график

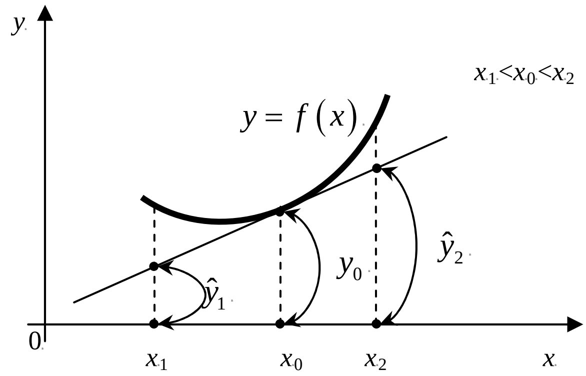


Рис. 6.22

Уравнение касательной в точке x_0: $\hat{y} - y_0 = y_0'(x - x_0)$, где $\hat{y}$ - ордината касательной.

В точке с абсциссой $x = x_1$

$$\hat{y}_1 - y_0 = y_0'(x_1 - x_0) \tag{6.29}$$

По теореме Лагранжа на отрезке $[x, x_0]$

$f(x_1) - f(x_0) = f'(c_1)(x_1 - x_0), \quad x_1 < c_1 < x_0$ или

$$y_1 - y_0 = f'(c_1)(x_1 - x_0) \tag{6.30}$$

Из (6.29) вычтем (6.30):

$$\hat{y}_1 - y_1 = (f'(x_0) - f'(c_1))(x_1 - x_0) \tag{6.31}$$

Т. к. по условию теоремы $f''(x) > 0$, то $f'(x)$ - возрастающая функция:

$c_1 < x_0 \Rightarrow$ 1-ая скобка в (6.31) положительна,

$x_1 < x_0 \Rightarrow$ 2-я скобка отрицательна, следовательно, $\hat{y}_1 - y_1 < 0$, т.е. ордината касательной меньше ординаты точки кривой с той же абсциссой, т.е. слева от точки (x_0, y_0) кривая – над касательной. Совершенно аналогично – справа от точки (x_0, y_0):

$$\hat{y}_2 - y_0 = y_0'(x_2 - x_0) \tag{6.29'}$$

$$y_2 - y_0 = f'(c_2)(x_2 - x_0), \qquad x_0 < c_2 < x_2 \tag{6.30'}$$

(а') - (в'): $\hat{y}_2 - y_2 = \underbrace{(f'(x_0) - f'(c_2))}_{<0}\underbrace{(x_2 - x_0)}_{>0} \quad \Rightarrow \hat{y}_2 - y_2 < 0, \quad \hat{y}_2 < y_2$

- и справа кривая над касательной, таким образом, в окрестности точки x_0 кривая вогнута.

Вторая часть теоремы: $f''(x) < 0 \Rightarrow$ выпуклость графика вверх - доказывается абсолютно аналогично.

Следствие (необходимые условия перегиба): точки перегиба следует искать среди точек, в которых $f''(x)=0$, либо ∞, либо не существует. Такие точки называются критическими точками 2-го рода.

Замечание 6.15. Необходимые условия не являются достаточными для точки перегиба: впереди был рассмотрен пример:

$y=e^{x}+e^{-x}-x^{2}$ в точке $x_0=0,\ y'(0)=y''(0)=0$, но там минимум, а не перегиб.

Теорема 6.9. (Достаточные условия существования точки перегиба.) Если при переходе через критическую точку 2-го рода вторая производная меняет знак, то в этой точке кривая имеет перегиб, если смены знака нет, нет и перегиба.

Пример 6.26. $y=\sqrt[3]{x+2}$.

Решение. $y'=\frac{1}{3}(x+2)^{-\frac{2}{3}},\quad y''=-\frac{2}{9\sqrt[3]{(x+2)^{5}}},\quad y''\neq 0,\ x\in R,\ y''(-2)=\infty$.

Следовательно $x_0=-2$ критическая точка 2-го рода.

$y''(x<-2)>0$ - слева кривая вогнута,

$y''(x>-2)<0$ - справа выпукла $\Rightarrow(-2,0)$ - точка перегиба.

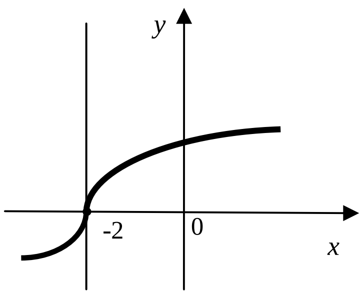


Рис. 6.23

4. Асимптоты графика функции

Определение 6.6. Если расстояние δ от точки кривой до некоторой прямой по мере удаления точки в бесконечность стремится к нулю, то такая прямая называется асимптотой данной кривой.

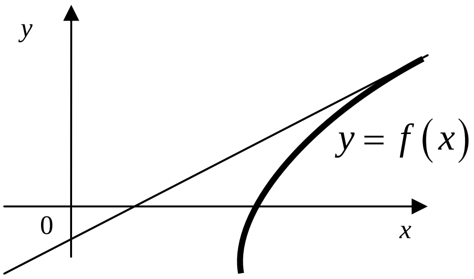


Рис. 6.24

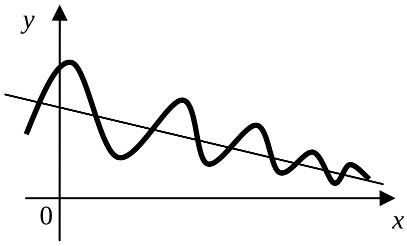


Рис. 6.25

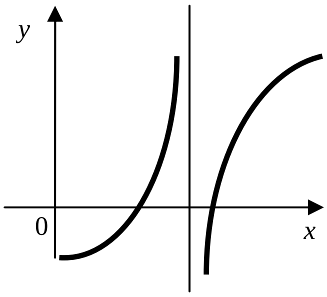


Рис. 6.26

а) Нахождение невертикальных асимптот $y = kx + b$

Рассмотрим случай наличия у кривой правой асимптоты:

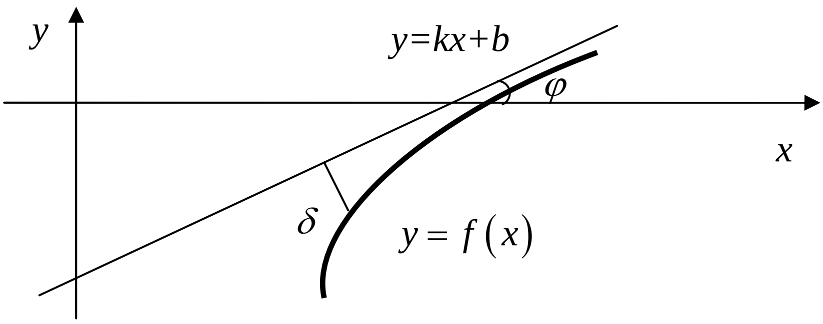


Рис. 6.27

$$\lim_{x\to+\infty}\delta = 0, \qquad \varphi = const \neq \frac{\pi}{2} \qquad |y - y_{ac}| = \frac{\delta}{\cos\varphi} \; .$$

При $\delta \to 0$

$$\lim_{x\to+\infty}(y - y_{ac}) = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - kx - b\right) = 0 \tag{6.32}$$

Если разделить на x: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right) = 0$.

Следовательно

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k \tag{6.33}$$

Из (6.32):

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)=b \tag{6.34}$$

Замечание 6.16. Если у кривой $y=f(x)$ существует левая асимптота, то формулы для нахождения коэффициентов:

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} \tag{6.33'}$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-kx\right) \tag{6.34'}$$

Замечание 6.17. **Горизонтальная асимптота** – частный случай наклонной: $k=0,\ \ y=b,\ \ b=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} f(x)$

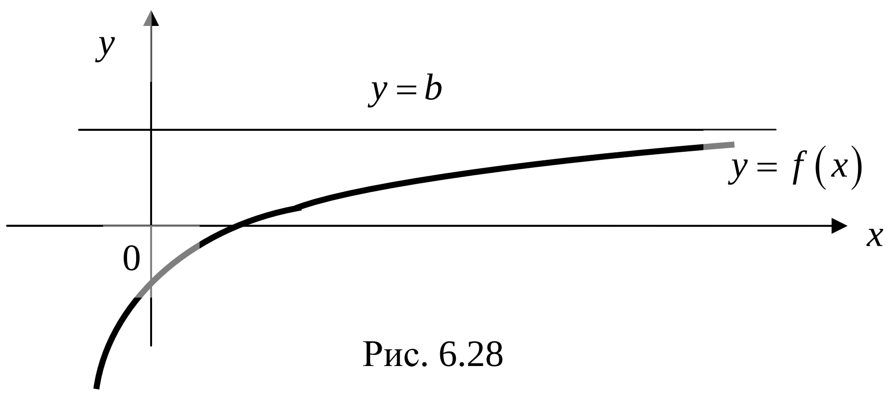


Рис. 6.28

б) Нахождение вертикальных асимптот $x = x_0$

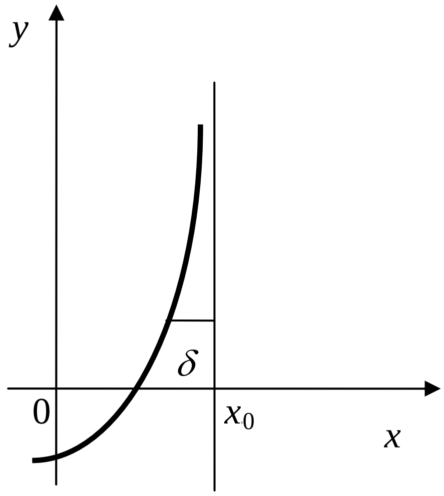


Рис. 6.29

Если при $x \to x_0$ точка кривой $y = f(x)$ при неограниченном удалении вверх или вниз одновременно сколь угодно близко приближается к прямой: $x = x_0$ $\lim\limits_{x \to x_0 \pm 0} f(x) = \infty$, то $x = x_0$ - вертикальная асимптота данной кривой.

Замечание 6.18 . Очевидно, x_0- точка разрыва 2-го рода, следовательно, график непрерывной функции не имеет вертикальных асимптот.

Пример 6.27. $y = x \ln\left(e + \dfrac{1}{x}\right)$

Решение. $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{e}} x \ln\left(e + \dfrac{1}{x}\right) = \infty \quad \Rightarrow \quad x = -\dfrac{1}{e}$ - вертикальная асимптота.

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{x \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)}{x} = \ln e = 1$$

$$b = \lim_{x \to \infty} \left(x \ln\left(e + \frac{1}{x}\right) - x \right) (\infty - \infty) = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln\left(e + \frac{1}{x}\right) - 1}{\frac{1}{x}} \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$\lim_{x \to \infty} = \frac{\frac{1}{e + \frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{e} \quad \Rightarrow \quad y = x + \frac{1}{e}$$ - наклонная асимптота.

План полного исследования функции для построения графика

1. $D(y)$.
2. Четность, периодичность, интервалы знакопостоянства.
3. Непрерывность, точки разрыва, вертикальные асимптоты.
4. Интервалы монотонности, экстремум.
5. Интервалы выпуклости, точки перегиба.
6. Асимптоты.
7. Для уточнения графика: точки пересечения с осями координат, поведение функции на концах $D(y)$.

РАЗДЕЛ 7. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§1. Функции двух переменных

1. Основные понятия

Определение 7.1. Соответствие *f*, которое каждой паре чисел $(x;y)\in D$ сопоставляет одно и только одно число $z\in R$, называется функцией двух переменных, определенной на множестве D со значениями в R, и записывается $z=f(x,y)$, где x и y – аргументы, z – функция.

Определение 7.2. Множество $D=D(f)$ называется областью определения функции, а множество значений, принимаемых z называется областью изменения функции и обозначается $E(f)$.

Пример 7.1. Для функции $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ областью определения является круг $x^2+y^2\le 1$, а областью значений отрезок [0,1]. Функция изображается верхней полусферой с центром в точке O (0,0,0) и радиусом R = 1 (рис. 7.1)

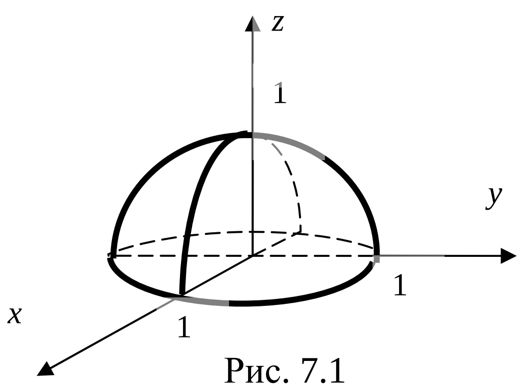


Рис. 7.1

Геометрически $z=f(x,y)$ представляет собой некоторую поверхность и как функция одной переменной может быть задана таблицей, аналитически, графиком.

Определение 7.3. Множество точек $M(x,y)$ плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$, называется δ – окрестностью точки $M_0(x_0,y_0)$.

Другими словами, δ - окрестность M_0 – это все внутренние точки круга с центром M_0 и радиусом δ (см. рис. 7.2)

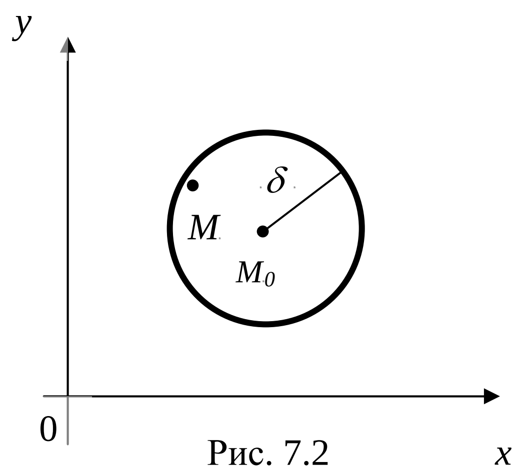


Рис. 7.2

Определение 7.4. Число A называется пределом функции $z=f(x,y)$, определенной в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$, при $x\to x_0$, $y\to y_0$ $\left(M(x,y)\to M_0(x_0,y_0)\right)$, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для всех $x\neq x_0$, $y\neq y_0$ и удовлетворяющих неравенству $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ выполняется неравенство $\left|f(x,y)-A\right|<\varepsilon$.

Записывают:

$$A=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) \quad \text{или} \quad A=\lim_{M\to M_0} f(x,y)$$

Из определения следует, что если предел существует, то он не зависит от пути, по которому $M\to M_0$.

Геометрический смысл предела функции двух переменных состоит в следующем. Каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, найдется δ - окрестность точки $M_0(x_0, y_0)$, что во всех ее точках $M(x, y)$, отличных от M_0, аппликаты соответствующих точек поверхности $z = f(x, y)$ отличаются от числа A по модулю меньше, чем ε.

Пример 7.2. Выяснить, имеет ли функция $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ предел в точке $O(0,0)$.

Решение. Пусть сначала точка $M(x, y) \to O(0,0)$ по оси X, т.е. $M = (x,0)$. Тогда

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot 0}{x^2 + 0} = 0.$$

Аналогично при стремлении т. $M \to 0$ вдоль оси Y $(M = (0, y))$ имеем

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0 \cdot y}{0 + y^2} = 0.$$

Пусть теперь точка $M \to 0$ вдоль прямой $y = kx$, т.е $M = (x, kx)$, $\quad k \neq 0$. Тогда

$$\lim_{(x,kx)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{xkx}{x^2 + k^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2k}{x^2(1+k^2)} = \frac{k}{1+k^2}.$$

Таким образом, при стремлении точки $(x, y) \to (0,0)$ вдоль разных лучей получаются разные пределы. Следовательно, искомая функция в точке O предела не имеет.

3. Непрерывность функции двух переменных

Определение 7.5. Функция $z = f(x, y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0, y_0)$, если она:

а) определена в этой точке и некоторой ее окрестности;

б) имеет предел $\lim\limits_{M \to M_0} f(M)$;

в) этот предел равен значению функции z в точке M_0, т.е.

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0) \qquad \text{или} \qquad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = f(x_0, y_0)$$

Определение 7.6. Функция непрерывная в каждой точке некоторой области, называется непрерывной в этой области.

Определение 7.7. Точки, в которых непрерывность нарушается, называются точками разрыва, которые могут образовывать линии разрыва.

Пример 7.3. Так функция $z = \dfrac{3}{y - 2x}$ имеет линию разрыва $y = 2x$.

§ 2. Производные и дифференциалы функции нескольких переменных

1. Частные производные первого порядка и их геометрическое истолкование

Пусть задана функция $z = f\left(x, y\right)$. Так как x и y – независимые переменные, то одна из них может изменятся, а другая сохранять свое значение. Дадим независимой переменной x приращение Δx, сохраняя значение y неизменным.

Определение 7.8. Приращение, которое при этом получит z называется частным приращением z по x и обозначается $\Delta_x z$.

Итак,

$$\Delta_x z = f\left(x + \Delta x, y\right) - f\left(x, y\right).$$

Дадим переменной y приращение Δy, сохраняя значение x неизменным.

Определение 7.9. Приращение, которое при этом получит z называется частным приращением z по y и обозначается $\Delta_y z$.

Итак,

$$\Delta_y z = f\left(x, y + \Delta y\right) - f\left(x, y\right).$$

Определение 7.10. Полным приращением Δz функции $z = f\left(x, y\right)$ называется равенство

$$\Delta z = f\left(x+\Delta x, y+\Delta y\right) - f\left(x, y\right).$$

Определение 7.11. Частной производной функции $z = f\left(x, y\right)$ в точке $M\left(x, y\right)$ по переменной x называется

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Обозначается одним из символов:

$$z'_x; \quad \frac{\partial z}{\partial x}; \quad f'_x; \quad \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Частные производные по x в точке $M_0\left(x_0, y_0\right)$ обозначаются символами $f'_x(x_0, y_0)$; $\left. f'_x \right|_{M_0}$.

Определение 7.12. Частной производной функции $z = f\left(x, y\right)$ в точке $M\left(x, y\right)$ по переменной y называется

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Обозначается одним из символов:

$$z'_y; \quad \frac{\partial z}{\partial y}; \quad f'_y; \quad \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Частные производные по y в точке $M_0\left(x_0, y_0\right)$ обозначаются символами $f'_y(x_0, y_0)$, $\left. f'_y \right|_{M_0}$.

Пример 7.4. Найти частные производные функции $Z = 2y + e^{x^2-y} + 1$.

Решение.

$$Z'_x = (2y + e^{x^2-y} + 1)'_x = (2y)'_x + (e^{x^2-y})'_x + (1)'_x = 0 + e^{x^2-y}(x^2 - y)'_x + 0 =$$
$$= e^{x^2-y}(2x - 0) = 2xe^{x^2-y}$$
$$Z'_y = (2y + e^{x^2-y} + 1)'_y = (2y)'_y + (e^{x^2-y})'_y + (1)'_y = 2 + e^{x^2-y}(x^2 - y)'_y + 0 =$$
$$= 2 + e^{x^2-y}(0 - 1) = 2 - e^{x^2-y}$$

Пусть дана функция $z = f\left(x, y\right)$, график которой поверхность S (рис. 7.3).

Пусть точка $M_0(x_0,y_0)$ из области определения функции $f(x,y)$, а точка $N_0(x_0,y_0,z_0)$, $z_0(x_0,y_0)$ - соответствующая M_0 точка поверхности *S*.

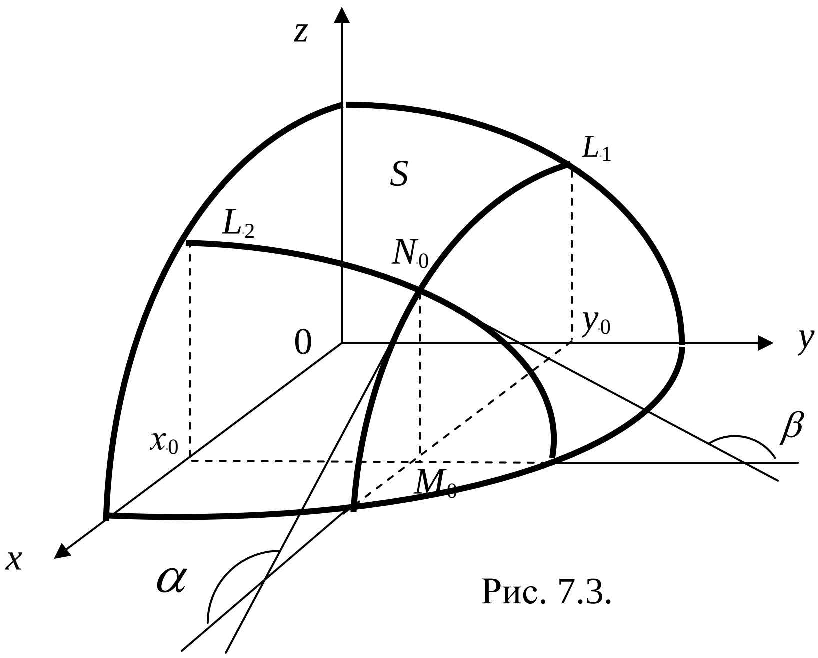


Рис. 7.3.

Известно, что при нахождении $f'_x(x_0,y_0)$ переменная y фиксируется так, что $y=y_0$. Геометрически это означает, что через точку M_0 проводится плоскость $y=y_0$ параллельная плоскости *xoz* и функция $z=f(x,y_0)$ есть линия L_1 пересечения поверхности S и плоскости $y=y_0$. Но $z=f(x,y_0)$ – функция одной переменной x в точке $x=x_0$. Исходя из геометрического смысла производной для функции одной переменной, заключаем, что $f'_x(x_0,y_0)=tg\alpha$, где α – угол между прямой, параллельной оси X и касательной к кривой L_1 $\left(z=f(x,y_0)\right)$ в точке $N_0\left(x_0,y_0,f(x_0,y_0)\right)$.

При нахождении $f'_x(x_0,y_0)$ переменная *x* фиксируется так, что $x=x_0$. Геометрически это означает, что через точку M_0 проводится плоскость $x=x_0$ параллельная плоскости *yoz* и функция $z=f(x_0,y)$ есть линия L_2 пересечения поверхности *S* и плоскости $x=x_0$. Но $z=f(x_0,y)$ – функция одной переменной y в точке $y=y_0$. Исходя из геометрического смысла производной для функции одной переменной, заключаем, что $f'_y(x_0,y_0)=tg\beta$, где β

– угол между прямой, параллельной оси Y и касательной к кривой L_2 $\left(z = f\left(x_0, y\right)\right)$ в точке $N_0\left(x_0, y_0, f\left(x_0, y_0\right)\right)$.

Определение 7.13. $f_x^{'}\left(x_0, y_0\right) = tg\alpha$ и $f_y^{'}\left(x_0, y_0\right) = tg\beta$ называются геометрическим смыслом частных производных функции двух переменных.

2. Частные производные высших порядков

Если частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = f\left(x, y\right)$ в свою очередь являются дифференцируемыми функциями, то можно находить их частные производные.

Так частные производные второго порядка определяются и обозначаются:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = Z_{xx}^{''} = f_{x^2}^{''}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = Z_{xy}^{''} = f_{xy}^{''}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = Z_{yx}^{''} = f_{yx}^{''}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = Z_{yy}^{''} = f_{y^2}^{''}(x, y)$$

Аналогично определяются частные производные третьего и четвертого и т.д порядков.

Так $z_{xxy}^{'''} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)$, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}\right) = \frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y}$.

Определение 7.14. Частная производная второго или более высокого порядка, взятая по различным переменным, называется смешанной частной производной.

Таковыми являются, например, z''_{xy}, z'''_{xyy}.

Пример 7.5. Найти частные производные второго порядка функции $z = x^4 - 2x^2y^3 + y^5 + 1$.

Решение. Так как $z'_x = 4x^3 - 4xy^3$, $z'_y = -6x^2y^2 + 5y^4$, то

$$z''_{xx} = \left(4x^3 - 4xy^3\right)'_x = 12x^2 - 4y^3$$

$$z''_{yy} = \left(-6x^2 + 5y^4\right)'_y = -12x^2y + 20y^3$$

$$z''_{xy} = \left(4x^3 - 4xy^3\right)'_y = -12xy^2$$

$$z''_{yx} = \left(-6x^2y^2 + 5y^4\right)'_x = -12xy^2$$

Оказалось, что $z''_{xy} = z''_{yx}$. Этот результат не случаен. Имеет место теорема

Теорема 7.1. Если функция $z = f(x,y)$ имеет в точке $M(x,y)$ непрерывные частные производные второго порядка f''_{xy} и f''_{yx}, то $f''_{xy} = f''_{yx}$.

3. Дифференцируемость и полный дифференциал функции

Пусть функция $z = f(x,y)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x,y)$, тогда ее полное приращение в точке $M(x,y)$

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y).$$

Определение 7.15. Функция $z = f(x,y)$ называется дифференцируемой в точке $M(x,y)$, если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

где $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y) \to 0$ и $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Определение 7.16. $A\Delta x + B\Delta y$ называют главной частью приращения функции $z = f(x,y)$.

Определение 7.17. Главная часть приращения функции $z = f(x, y)$, линейная относительно Δx и Δy называется полным дифференциалом этой функции и обозначается

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

Определение 7.18. $A\Delta x$ и $B\Delta y$ называют частными дифференциалами и обозначают $d_x z$ и $d_y z$.

Для независимых переменных x и y полагают $\Delta x = dx, \quad \Delta y = dy$. Поэтому полный дифференциал можно записать в виде $dz = Adx + Bdy$.

Теорема 7.2. (***Необходимое условие дифференцируемости функции***). Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M(x, y)$, то она непрерывна в этой точке, имеет в ней частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, причем $\frac{\partial z}{\partial x} = A, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = B$.

Доказательство. Так как функция дифференцируема в точке $M(x, y)$, то имеет место равенство $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$, где $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y) \to 0$ и $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y) \to 0$ при $\Delta x \to 0, \quad \Delta y \to 0$. Отсюда вытекает, что $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0$. Это означает, что функция непрерывна в точке *M*. Положив $\Delta y = 0, \quad \Delta x \neq 0$, получим $\Delta z = A\Delta x + \alpha\Delta x$. Отсюда находим $\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A + \alpha$. Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A$, т. $\frac{\partial z}{\partial x} = A$. Таким образом, в точке M существует частная производная $f'_x(x, y) = A$. Положив $\Delta x = 0, \quad \Delta y \neq 0$, получим $\Delta z = B\Delta y + \beta\Delta y$. Отсюда $\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = B + \beta$ и $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = B$, т т $\frac{\partial z}{\partial y} = B$. Таким образом, в точке M существует частная производная $f'_y(x, y) = B$.

Отметим, что обратное утверждение не верно, т.е. из непрерывности функции или существования частных производных не следует дифференцируемость функции.

Как следствие теоремы получаем формулу для вычисления полного дифференциала вида

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \qquad \text{или}$$

$$dz = d_x z + d_y z, \qquad \text{где}$$

$d_x z = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx, \quad d_y z = \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$ - частные дифференциалы функции $z = f(x, y)$.

Теорема 7.3. (***Достаточное условие дифференцируемости функции***). Если функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные z'_x, z'_y в точке $M(x, y)$, то она дифференцируема в этой точке и ее полный дифференциал выражается формулой

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

4. Применение полного дифференциала к приближенным вычислениям

Из определения дифференциала функции $z = f(x, y)$ следует, что при достаточно малых $|\Delta x|$ и $|\Delta y|$ имеет место приближенное равенство $\Delta z \approx dz$. Рассмотрим точку $M_0(x_0, y_0)$.

Так как $\Delta z = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ и

$$dz = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy = f'_x\big|_{M_0}\Delta x + f'_y\big|_{M_0}\Delta y.$$

Получим

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$$

или

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y. \qquad (7.1)$$

Этой формулой пользуются в приближенных расчетах.

Пример 7.6. Вычислить приближенно $1{,}02^{3,01}$.

Решение. Рассмотрим функцию $z = x^y = f(x,y)$. Тогда $1{,}02^{3,01} = (x_0 + \Delta x)^{y_0+\Delta y} = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, где $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}02$, $y_0 = 3$, $\Delta y = 0{,}01$. Найдем $f'_x(x_0, y_0)$ и $f'_y(x_0, y_0)$

$$f'_x(x_0,y_0) = f'_x(x,y)\Big|_{M_0} = (x^y)'_x\Big|_{M_0} = yx^{y-1}\Big|_{M_0} = 3\cdot 1^2 = 3$$

$$f'_y(x_0,y_0) = f'_y(x,y)\Big|_{M_0} = (x^y)'_y\Big|_{M_0} = x^y \ln x\Big|_{M_0} = 1^3 \ln 1 = 0.$$

Тогда

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = 1{,}02^{3,01} \approx 1^3 + 3\cdot 0{,}02 + 0\cdot 0{,}01 \approx 1{,}06.$$

Отметим, что с помощью полного дифференциала можно найти: границы абсолютной и относительной погрешности в приближенных вычислениях, приближенное значение полного приращения функции и т.д.

5. *Дифференциалы высших порядков*

Пусть функция $z = f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка.

Полный дифференциал функции $z = f(x,y)$ $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$ называют также дифференциалом первого порядка.

Определение 7.19. Дифференциалом второго порядка функции z называют дифференциал от дифференциала первого порядка $d^2 z = d\left(dz\right)$.

Найдем его, так как при вычислении частных производных по x и по y от dz переменные dx и dy считаются постоянными, то

$$d^2 z = d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_x dx + \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_y dy =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dy\right)dx + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\right)dy = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy +$$

$$+\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2.$$

Получили

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2.$$

Символически это записывается так:

$$d^2z=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z.$$

Аналогично можно получить формулу для дифференциала третьего порядка

$$d^3z=d(d^2z)=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 z,$$

где

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 z=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}(dx)^3+3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}(dx)^2dy+3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dx(dy)^2+\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}(dy)^3.$$

Пример 7.7. Найти d^2z, если $z=x^3y^2$.

Решение. Найдем частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y^2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6xy^2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=6x^2y; \quad \frac{\partial z}{\partial y}=2x^3y; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2x^3.$$

Тогда

$$d^2z=6xy^2\left(dx\right)^2+12x^2ydxdy+2x^3\left(dy\right)^2.$$

6. *Производная сложной функции*

Полная производная.

Пусть $z=f(x,y)$ -функция двух переменных x и y, каждая из которых является функцией независимой переменной t: $x=x(t)$, $y=y(t)$. В этом случае функция $z=f\left(x(t),y(t)\right)$ является сложной функцией одной независимой переменной t; переменные x и y – промежуточные переменные.

Теорема 7.4. Если $z = f(x, y)$ - дифференцируемая в точке $M(x, y) \in D$ функция и $x = x(t)$ и $y = y(t)$ - дифференцируемые функции независимой переменной *t*, то производная сложной функции $z(t) = f(x(t), y(t))$ вычисляется по формуле

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Доказательство. Дадим независимой переменной *t* приращение Δt. Тогда функция $x = x(t)$ получит приращение Δx, функция $y = y(t)$ получит приращение Δy, функция *z* получит приращение Δz.

Так как по условию теоремы функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M(x, y)$, то ее полное приращение

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

где $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. Разделим выражение Δz на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$. Тогда в силу непрерывности функций $x = x(t)$ и $y = y(t)$ $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$.

Получим

$$\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0}\alpha \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0}\beta \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}.$$

То есть

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + 0 \cdot \frac{dx}{dt} + 0 \cdot \frac{dy}{dt}$$

или

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Пример 7.8. Найти $\frac{dz}{dt}$ для функции $z = x^2 - y^2$, если $x = a\cos t$, $y = a\sin t$.

Решение. Так как $\frac{\partial z}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-2y,\quad \frac{dx}{dt}=-a\sin t,\quad \frac{dy}{dt}=a\cos t,$ то по формуле

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

получаем

$$\frac{dz}{dt}=2x(-a\sin t)-2ya\cos t=2a(-a\cos t\sin t-a\sin t\cos t)=-2a^2\sin t\cos t=-a^2\sin 2t.$$

Частный случай. Пусть $z=f(x,y)$, где $y=y(x)$, т.е $z=f(x,y(x))$ - сложная функция одной независимой переменной *x*. Используя формулу $\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$, где роль переменной t играет *x*, получим

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} \quad \text{или}$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}. \tag{7.2}$$

Эта формула носит название ***формулы полной производной***.

Пример 7.9. Дано $z=y^x$, $y=\cos^2 x$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$.

Решение. Имеем $\frac{\partial z}{\partial x}=y^x\ln y$. По формуле полной производной

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}=y^x\ln y+xy^{x-1}2\cos x(-\sin x)=\cos^{2x}x\ln(\cos^2 x)-x\sin 2x\cos^{2x-2}x.$$

Общий случай. Пусть $z=f(x,y)$, где $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$. Тогда $z=f(x(u,v);y(u,v))$ - сложная функция независимых переменных *u* и *v*. Ее частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ можно найти, используя формулу $\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$ следующим образом. Зафиксировав v заменяем в ней

$\frac{dz}{dt}, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ соответствующими частными производными $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}$. Получаем формулу

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}. \qquad (7.3)$$

Теперь зафиксируем u и заменим $\frac{dz}{dt}, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ соответствующими частными производными $\frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}$, получим формулу

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}. \qquad (7.4)$$

Таким образом, производная сложной функции (z) по каждой независимой переменной (u и v) равна сумме произведений частных производных этой функции (z) по ее промежуточным переменным (x и y) на их частные производные по соответствующей независимой переменной (u и v).

Пример 7.10. Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$, $x = uv$, $y = \frac{u}{v}$.

Решение. Найдем $\frac{\partial z}{\partial u}$ по формуле $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$. Получим

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2x}{x^2 + y^2} v + \frac{2y}{x^2 + y^2} \cdot \frac{1}{v} = \frac{2}{x^2 + y^2}\left(xv + \frac{y}{v}\right) = \frac{2}{(uv)^2 + \left(\frac{u}{v}\right)^2}\left(uvv + \frac{u}{vv}\right) =$$

$$= \frac{2}{u^2v^2 + \frac{u^2}{v^2}}\left(uv^2 + \frac{u}{v^2}\right) = \frac{2v^2}{u^2(v^4+1)} u\left(\frac{v^4+1}{v^2}\right) = \frac{2}{u}.$$

По формуле $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$ найдем $\frac{\partial z}{\partial v}$,

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{2x}{x^2 + y^2} u + \frac{2y}{x^2 + y^2}\left(-\frac{u}{v^2}\right) = \frac{2u}{x^2 + y^2}\left(x - \frac{y}{v^2}\right) = \frac{2u}{u^2v^2 + \frac{u^2}{v^2}}\left(uv - \frac{u}{v^3}\right) =$$

$$= \frac{2v^2}{u(v^4+1)} u\left(\frac{v^4-1}{v^3}\right) = \frac{2(v^4-1)}{v(v^4+1)}.$$

7. Инвариантность формы полного дифференциала

Используя правило дифференцирования сложной функции, покажем, что полный дифференциал обладает свойством инвариантности, то есть сохраняет свой вид независимо от того, является ли x и y независимыми переменными или являются функциями других независимых переменных.

Пусть $z = f(x, y)$, где x и y – независимые переменные. Тогда полный дифференциал функции имеет вид

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Пусть теперь $z = f(x, y)$, где $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, т.е функция $z = f(x(u,v); y(u,v)) = F(u,v)$ сложная , где u и v – независимые переменные . Тогда

$$dz = \frac{\partial F}{\partial u}du + \frac{\partial F}{\partial v}dv = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)du + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right)dv =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right).$$

Так как $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, то

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv, \qquad dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv.$$

Следовательно, и в этом случае,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

8. Дифференцирование неявной функции

Определение 7.20. Функция $z = f(x, y)$ называется неявной, если она задана уравнением $F(x, y, z) = 0$.

Теорема 7.5. Существование неявной функции двух переменных: если функция

$F(x,y,z)$ и ее производные $F'_x(x,y,z)$, $F'_y(x,y,z)$, $F'_z(x,y,z)$ определены и непрерывны в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$, причем $F(x_0,y_0,z_0)=0$, а $F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$, то существует окрестность точки M_0, в которой уравнение $F(x,y,z)=0$ определяет единственную функцию $z=f(x,y)$, непрерывную и дифференцируемую в окрестности точки (x_0,y_0) и такую, что $f(x_0,y_0)=z_0$.

Найдем частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ неявной функции z, заданной уравнением $F(x,y,z)=0$, для этого, подставив в уравнение вместо z функцию $f(x,y)$, получим тождество $F(x,y,f(x,y))=0$. Следовательно, полный дифференциал функции $F(x,y,z)$, где $z=f(x,y)$ равен нулю. То есть

$$dF=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0,\ \text{отсюда}$$

$$dz=\frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}dx-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}dy.$$

Сравнивая полученные выражения с $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$, получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \tag{7.5}$$

Частный случай. Неявная функция одной переменной $y=f(x)$ задается уравнением $F(x,y)=0$. В этом случае $dF=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=0$, получаем

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}. \qquad (7.6)$$

Пример 7.11. Найти частные производные функции *z*, заданной уравнением $e^z + z^2 - x^2 y + 1 = 0$.

Решение. Здесь $F(x, y, z) = e^z + z^3 - x^2 y + 1 = 0$, $F'_x = -2xy, F'_y = -x^2$, $F'_z = e^z + 3z^2$. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{-2xy}{e^z + 3z^2} = \frac{2xy}{e^z + 3z^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{-x^2}{e^z + 3z^2} = \frac{x^2}{e^z + 3z^2}.$$

Пример 7.12. Найти $\frac{dy}{dx}$, если неявная функция $y = f(x)$ задана уравнением $y^3 + 2y = 2x$.

Решение. Здесь $F(x, y) = y^3 + 2y - 2x$, $F'_x = -2$, $F'_y = 3y^2 + 2$. Следовательно,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{-2}{3y^2 + 2} = \frac{2}{3y^2 + 2}.$$

§3. Касательная плоскость и нормаль к поверхность

Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0) некоторой области $D \in R^2$. Рассечем поверхность *S*, изображающую функцию *z*, плоскостями $x = x_0$, $y = y_0$ (см. рис. 7.4).

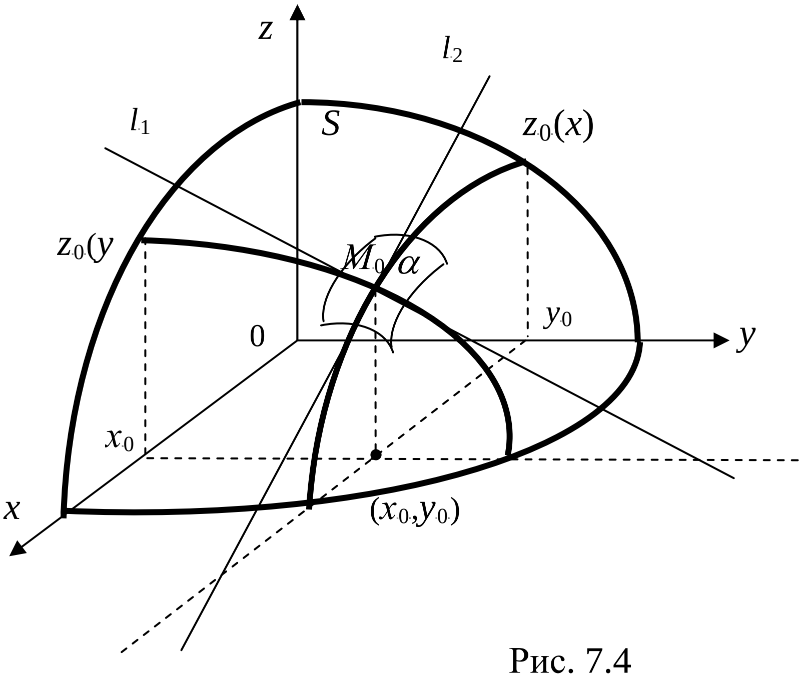


Рис. 7.4

Плоскость $x = x_0$ пересекает поверхность S по некоторой линии $z_0(y)$, уравнение которой получается подстановкой в выражение $z = f(x, y)$ вместо x числа x_0. Точка $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ принадлежит кривой $z_0(y)$. В силу дифференцируемости функции z в точке M_0 функция $z_0(y)$ также является дифференцируемой в точке $y = y_0$. Следовательно, в этой точке в плоскости $x = x_0$ к кривой $z_0(y)$ может быть проведена касательная l_1.

Рассечем поверхность S теперь плоскостью $y = y_0$. Плоскость $y = y_0$ пересекает поверхность S по некоторой линии $z_0(x)$, уравнение которой получается подстановкой в выражение $z = f(x, y)$ вместо y числа y_0. Точка $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ принадлежит кривой $z_0(x)$. В силу дифференцируемости функции z в точке M_0 функция $z_0(x)$ также является дифференцируемой в точке $x = x_0$. Следовательно, в этой точке в плоскости $y = y_0$ к кривой $z_0(x)$ может быть проведена касательная l_2. Прямые l_1 и l_2 определяют плоскость α, которая называется **касательной плоскостью** к поверхности S в точке M_0.

Составим ее уравнение. Так как плоскость α проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, то ее уравнение может быть записано в виде

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Преобразуем это уравнение

$$z-z_0=-\frac{A}{C}(x-x_0)-\frac{B}{C}(y-y_0) \qquad \text{или}$$

$$z-z_0=A_1(x-x_0)+B_1(y-y_0), \quad \text{где } A_1=-\frac{A}{C}, \quad B_1=-\frac{B}{C}.$$

Найдем A_1, B_1.

Уравнения касательных l_1 и l_2 имеют вид

$$(l_1) \qquad z-z_0=f'_y(x_0,y_0)(y-y_0), \quad x=x_0$$

$$(l_2) \qquad z-z_0=f'_x(x_0,y_0)(x-x_0), \quad y=y_0.$$

Касательная l_1 лежит в плоскости α, следовательно, координаты всех точек l_1 удовлетворяют уравнению $z-z_0=A_1(x-x_0)+B_1(y-y_0)$. Этот факт можно записать в виде системы

$$\begin{cases} z-z_0=f'_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\ x=x_0 \\ z-z_0=A_1(x-x_0)+B_1(y-y_0). \end{cases}$$

Разрешая эту систему относительно B_1, получим

$$\begin{cases} z-z_0=f'_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\ x=x_0 \\ z-z_0=B_1(y-y_0) \end{cases} \Leftrightarrow B_1(y-y_0)=f'_y(x_0,y_0)(y-y_0) \Leftrightarrow B_1=f'_y(x_0,y_0)$$

Касательная l_2 лежит в плоскости α, следовательно, координаты всех точек l_2 удовлетворяют уравнению $z-z_0=A_1(x-x_0)+B_1(y-y_0)$. Этот факт можно записать в виде системы

$$\begin{cases} z-z_0=f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) \\ y=y_0 \\ z-z_0=A_1(x-x_0)+B_1(y-y_0) \end{cases}$$

Разрешая эту систему относительно A_1, получим:

$$\begin{cases} z - z_0 = f_x'(x_0,y_0)(x-x_0) \\ y = y_0 \\ z - z_0 = A_1(x - x_0) \end{cases} \Leftrightarrow A_1(x-x_0) = f_x'(x_0,y_0)(x-x_0) \Leftrightarrow A_1 = f_x'(x_0,y_0)$$

Подставив значения A_1 и B_1 в уравнение $z - z_0 = A_1(x-x_0) + B_1(y-y_0)$, получаем искомое **уравнение касательной плоскости**

$$z - z_0 = f_x'(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y'(x_0,y_0)(y-y_0). \qquad (7.7)$$

Определение 7.21. Прямая, проходящая через точку M_0 и перпендикулярная касательной плоскости, построенной в этой точке поверхности, называется ее нормалью.

Запишем уравнение нормали.

Если прямая $L: \dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p}$ перпендикулярна плоскости $\beta: A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$, то имеет место равенство $\dfrac{m}{A} = \dfrac{n}{B} = \dfrac{p}{C}$. В нашем случае прямая $L: \dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p}$, а плоскость $\beta: f_x'(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y'(x_0,y_0)(y-y_0) - (z-z_0) = 0$.

Используя условие перпендикулярности прямой и плоскости, получим уравнение нормали

$$\frac{x-x_0}{f_x'(x_0,y_0)} = \frac{y-y_0}{f_y'(x_0,y_0)} = \frac{z-z_0}{-1}. \qquad (7.8)$$

Если поверхность S задана уравнением $F(x,y,z) = 0$, то

$f_x'(x_0,y_0) = -\dfrac{F_x'(x_0,y_0)}{F_z'(x_0,y_0)}$, $\quad f_y'(x_0,y_0) = -\dfrac{F_y'(x_0,y_0)}{F_z'(x_0,y_0)}$ и получим:

уравнение касательной плоскости

$$-\frac{F_x'(x_0,y_0)}{F_z'(x_0,y_0)}(x-x_0) - \frac{F_y'(x_0,y_0)}{F_z'(x_0,y_0)}(y-y_0) - (z-z_0) = 0, \quad \text{или}$$

$$F'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0)(z-z_0)=0 \qquad (7.9)$$

Уравнение нормали

$$\frac{x-x_0}{-\dfrac{F'_x(x_0,y_0)}{F'_z(x_0,y_0)}}=\frac{y-y_0}{-\dfrac{F'_y(x_0,y_0)}{F'_z(x_0,y_0)}}=\frac{z-z_0}{-1}, \quad \text{или}$$

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0)} \qquad (7.10)$$

Пример 7.13. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к параболоиду вращения $z=x^2+y^2$ в точке $M_0(1,-1,2)$.

Решение. Здесь $z'_x=f'_x(x,y)=2x$, $z'_y=f'_y(x,y)=2y$, $f'_x(1,-1)=2$, $f'_y(1,-1)=-2$. По формулам: касательная плоскость

$f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$, получаем уравнение

$2(x-1)-2(y+1)-(z-2)=0$ или $2x-2y-z-2=0$ **касательной плоскости**;

нормали

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1},$$

получаем уравнение $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-2}{-1}$ нормали.

§4. Экстремум функции двух переменных

1. Основные понятия

Пусть функция $z=f(x,y)$ определена в некоторой области D, точка $N(x_0,y_0)\in D$.

Определение 7.22. Точка (x_0,y_0) называется точкой максимума функции $z=f(x,y)$, если существует такая окрестность точки (x_0,y_0), что для каждой точки (x, y), отличной от (x_0, y_0), из этой окрестности выполняется неравенство $f(x, y) < f(x_0, y_0)$.

Определение 7.23. Точка (x_1, y_1) называется точкой минимума функции $z = f(x, y)$ если существует такая окрестность точки (x_1, y_1), что для каждой точки (x, y), отличной от (x_1, y_1), из этой окрестности выполняется неравенство $f(x, y) < f(x_1, y_1)$.

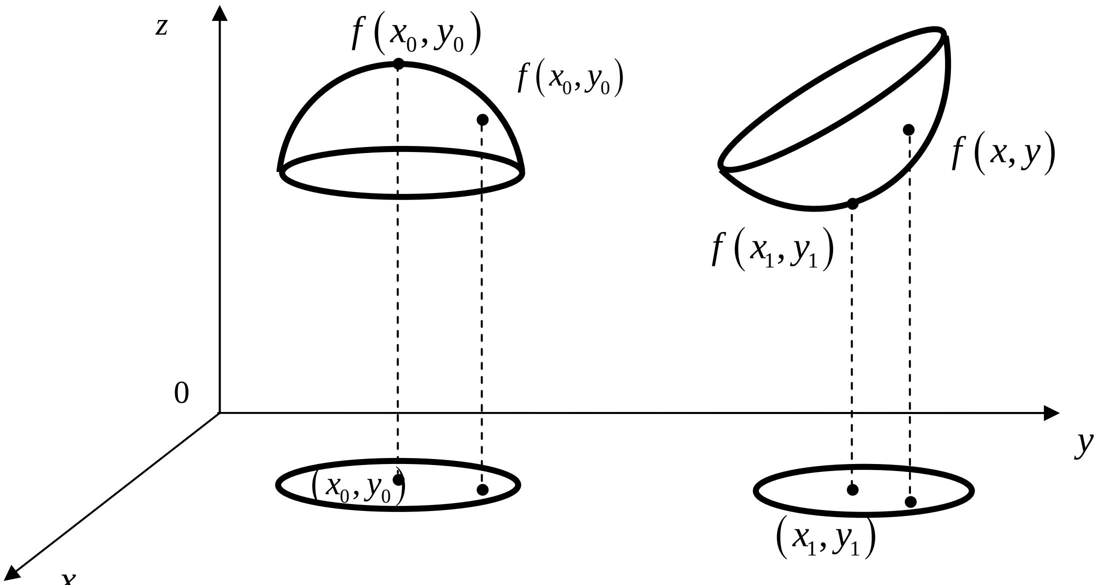


Рис. 7.5

Определение 7.24. Максимум и минимум функции называют экстремумами функции. В силу определения, точка экстремума функции лежит внутри области определения функции; максимум и минимум имеют локальный (местный) характер, так как значение функции в точках (x_0, y_0) и (x_1, y_1) сравнивается с ее значениями в точках, достаточно близких к (x_0, y_0) и (x_1, y_1). В области D функция $z = f(x, y)$ может иметь несколько экстремумов или не иметь ни одного.

Теорема 7.6. **(Необходимые условия экстремума).** Если в точке $N(x_0, y_0)$ дифференцируемая функция $z = f(x, y)$ имеет экстремум, то ее частные производные в этой точке равны нулю: $f'_x = (x_0, y_0) = 0, \quad f'_y = (x_0, y_0) = 0$.

Доказательство. Зафиксируем *y*, положим $y = y_0$. Тогда получим функцию $f(x, y_0) = \varphi(x)$ одной переменной, которая имеет экстремум при $x = x_0$. Тогда из необходимого условия экстремума функции одной переменной следует, что $\varphi'(x_0) = 0$, то есть $f'_x(x_0, y_0) = 0$.

Теперь зафиксируем *x*, положим $x = x_0$, тогда получим функцию $f(x_0, y) = \psi(y)$ одной переменной, которая имеет экстремум при $y = y_0$ и из необходимого условия экстремума функции одной переменной следует, что $\psi'(y_0) = 0$, то есть $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Определение 7.25. Точка, в которой частные производные первого порядка функции $z = f(x, y)$ равны нулю, т.е

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$$

называется стационарной точкой функции.

Определение 7.26. Критическими точками называются стационарные точки и точки, в которых хотя бы одна частная производная не существует.

В критических точках функция $z = f(x, y)$ может иметь экстремум, а может и не иметь. Для нахождения экстремумов функции в данной области необходимо каждую критическую точку функции дополнительно исследовать.

Теорема 7.7. **(Достаточное условие экстремума).** Пусть в стационарной точке (x_0, y_0) и некоторой ее окрестности функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Вычислим в точке (x_0, y_0) значения

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0), \quad B = f''_{xy}(x_0, y_0), \quad C = f''_{yy}(x_0, y_0).$$

Обозначим

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

Тогда

1. если $\Delta > 0$, то функция $f(x,y)$ в точке (x_0, y_0) имеет экстремум: максимум, если $A < 0$; минимум, если $A > 0$;
2. если $\Delta < 0$, то функция $f(x,y)$ в точке (x_0, y_0) экстремума не имеет;
3. если $\Delta = 0$, то экстремум в точке (x_0, y_0) может быть, может не быть. Необходимы дополнительные исследования.

Пример 7.14. Найти экстремум функции $z = 3x^2 y - x^3 - y^4$.

Решение. Здесь $z'_x = 6xy - 3x^2$, $z'_y = 3x^2 - 4y^3$ точки, в которых частные производные не существуют - отсутствуют. Найдем стационарные точки, решая систему

$$\begin{cases} 6xy - 3x^2 = 0 \\ 3x^2 - 4y^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 = 6xy \\ 3x^2 = 4y^3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$6xy = 4y^3; \quad 2y(3x - 2y^2) = 0, \qquad \begin{cases} 2y = 0 \Rightarrow y_1 = 0 \\ 3x = 2y^2 \Rightarrow x = \dfrac{2}{3}y^2 \end{cases}.$$

Пусть $y_1 = 0,$ тогда $x_1 = \dfrac{2}{3} \cdot 0 = 0,$ получили точку $M_1(0{,}0)$.

Пусть $x = \dfrac{2}{3}y^2$, подставим во второе уравнение системы, получим

$$3 \cdot \frac{4}{9}y^4 - 4y^3 = 0 \Rightarrow 4y^3\left(\frac{1}{3}y - 1\right) = 0; \qquad \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 3 \end{cases}$$

тогда

$x_2 = \dfrac{2}{3} \cdot 3^2 = 6,$ получили точку $M_2(6{,}3)$.

Найдем частные производные второго порядка данной функции:

$$z''_{xx} = 6y - 6x, \qquad z''_{xy} = 6x, \qquad z''_{yy} = -12y^2.$$

В точке $M_2(6{,}3)$ имеем:

$$A = z''_{xx}(M_2) = 6\cdot 3 - 6\cdot 6 = 18 - 36 = -18,$$

$$B = z''_{xy}(M_2) = 6\cdot 6 = 36,$$

$$C = z''_{yy}(M_2) = -12\cdot 9 = -108,$$

отсюда

$$AC - B^2 = (-18)(-108) - 36^2 = 648,$$

т.е. $\Delta > 0$. Так как $A < 0$, то в точке M_2 функция имеет локальный максимум;

$$z_{\max} = z(6{,}3) = 3\cdot 6^2\cdot 3 - 6^3 - 3^4 = 324 - 216 - 81 = 27.$$

В точке $M_1(0{,}0)$ имеем: A=0, B=0, C=0 и, значит $\Delta = 0$. Необходимы дополнительные исследования.

3. Наибольшее и наименьшее значение функции в замкнутой области

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области *D*. Тогда она достигает в некоторых точках *D* своего наибольшего *M* и наименьшего *m* значений (глобальный экстремум). Эти значения достигаются функцией в точках, расположенных внутри области *D*, или в точках, лежащих на границе области.

Правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $z = f(x, y)$, дифференцируемой в области *D*, состоит в следующем:

1. Найти все критические точки функции $\in D$ и вычислить значения функции в них.
2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ на границах области.
3. Сравнить все найденные значения функции и выбрать из них наибольшее M и наименьшее m.

Пример 7.15. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 2x^2y - x^3y - x^2y^2$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x = 0,\quad y = 0,\quad x + y = 6$ (рис. 7.6).

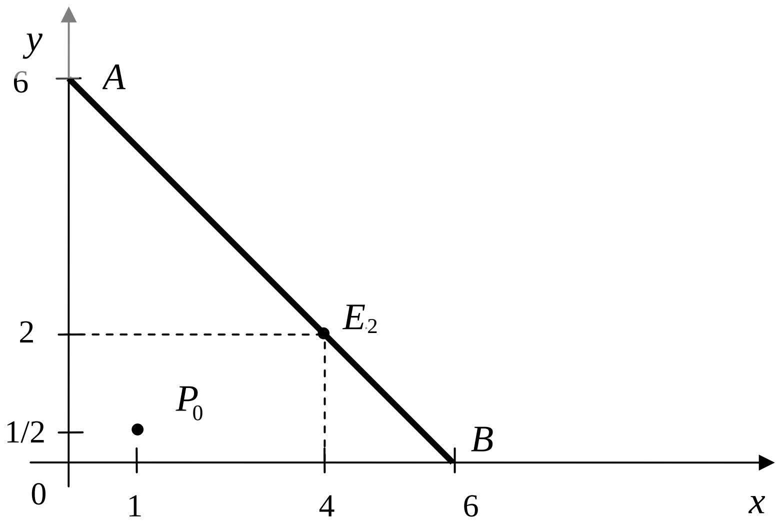


Рис. 7.6

Решение. Найдем стационарные точки, лежащие внутри треугольника ΔOAB

$$\left.\begin{aligned} z'_x &= 4xy - 3x^2y - 2xy^2 = xy(4-3x-2y) = 0 \\ z'_y &= 2x^2 - x^3 - 2x^2y = x^2(2-x-2y) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 4-3x-2y=0 \quad (-1) \\ 2-x-2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4+3x+2y=0 \\ 2-x-2y=0 \end{cases} + \Rightarrow -2+2x=0; \quad x=1;$$

$4-3-2y$, $\quad y = 1/2$. Получили точку $P_0\left(1, 1/2\right)$, лежащую внутри треугольника

$$z\left(P_0\right) = 2\cdot 1^2 \cdot \frac{1}{2} - 1^3 \cdot \frac{1}{2} - 1^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Рассмотрим границы треугольника

Сторона $\left(OA\right)$ $x=0 \;\Rightarrow\; z = 2\cdot 0\cdot y - 0\cdot y - 0\cdot y^2 = 0$

Сторона $\left(OB\right)$ $y=0 \;\Rightarrow\; z = 2x^2\cdot 0 - x^3\cdot 0 - x^2\cdot 0 = 0$

Сторона $\left(AB\right)$

$$x+y=6 \;\Rightarrow\; y=6-x \text{ и } z=2x^2\left(6-x\right) - x^3\left(6-x\right) - x^2\left(6-x\right)^2 =$$
$$=12x^2 - 2x^3 - 6x^3 + x^4 - 36x^2 + 12x^3 - x^4 = 4x^3 - 24x^2.$$

Итак $z = 4x^3 - 24x^2$, $x \in \left[0,6\right]$, $\quad y = 6-x$

$Z'_x = 12x^2 - 48x = 0$; $\quad 12x\left(x-4\right)=0$; $\quad x_1 = 0, \quad x_2 = 4$

$$y_1 = 6, \quad y_2 = 6-4 = 2.$$

Значения функции

$$z(0)=0, \quad z(4)=4\cdot 4^3-24\cdot 4^2=-128; \quad E_2(4,2), \quad A(0,6).$$

Сравнивая полученные результаты, имеем:

$$M=\frac{1}{4}=z\left(1;\, 1/2\right)=z(P_0)$$

$$m=-128=z(4,2)=z(E_2).$$

РАЗДЕЛ 8. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

(НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ)

§1. Первообразная функции и неопределенный интеграл

Основной задачей интегрального исчисления является восстановление функции $F(x)$ по известной производной (дифференциалу) этой функции, т.е. по заданной функции $f(x)$ требуется найти такую функцию $F(x)$, что $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$. Интегральное исчисление имеет многочисленные приложения в геометрии, механике, физике и технике. Оно дает общий метод нахождения площадей, объемов, центров тяжести и т. д.

Определение 8.1. Функция $F(x)$, $x \in X \subset R$, называется первообразной для функции $f(x)$ на множестве X, если она дифференцируема для любого $x \in X$ и $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$.

Пример 8.1. Функция $F(x) = \cos(2x-8)$ есть первообразная для функции $f(x) = -2\sin(2x-8)$ на (-∞;∞), т.к. $F'(x) = (\cos(2x-8))' = -2\sin(2x-8)$ или $dF(x) = d(\cos(2x-8)) = -2\sin x(2x-8)dx, \quad \forall x \in R$.

Пример 8.2. Дана функция $f(x) = \sin x$ на множестве R. Первообразной для нее является функция $F(x) = -\cos x$, т.к. $F'(x) = (-\cos x)' = \sin x$ или $dF(x) = d(-\cos x) = \sin x dx, \quad \forall x \in R$.

Для всякой ли функции $f(x)$ существует первообразная $F(x)$? Нет. Имеет место следующая теорема:

Теорема 8.1. Любая непрерывная на отрезке [a;b] функция $f(x)$ имеет на этом отрезке первообразную $F(x)$.

Пример 8.3. Если $f(x)=e^{5x}$, то первообразной для этой функции является не только $F(x)=\frac{1}{5}e^{5x}$, но также и множество функций $\frac{1}{5}e^{5x}+C$, где C – произвольно выбранная постоянная.

Теорема 8.2. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ - две различные первообразные одной и той же функции f(x) на интервале (a,b), то они отличаются друг от друга постоянным слагаемым, т.е. $F_2(x)=F_1(x)+C$, где C - постоянная, $\forall x\in(a,b)$.

Доказательство. Обозначим $\Phi(x)=F_1(x)-F_2(x)$. В силу дифференцируемости функций $F_1(x)$ и $F_2(x)$ на (a,b) функция $\Phi(x)$ также дифференцируема на ($a;b$) и $\Phi'(x)=F_1'(x)-F_2'(x)=f(x)-f(x)=0,\quad \forall x\in(a,b)$.

Покажем теперь, что если $\Phi'(x)=0,\ \forall x\in(a,b)$, то $\Phi(x)$ - постоянная на (a,b). Действительно, пусть x_0 – некоторая фиксированная точка из (a,b). Тогда для любой точки $x\in(a,b)$ в силу теоремы Лагранжа справедливо равенство $\Phi(x)-\Phi(x_0)=\Phi'(C)(x-x_0)$, где C - некоторая точка, находящаяся между x_0 и x. Так как $\Phi'(C)=0$, то отсюда $\Phi(x)=\Phi(x_0)=C,\quad \forall x\in(a,b)$, т. е. $F_1(x)-F_2(x)=C$, $\forall x\in(a,b)$.

Следствие. Если $F(x)$ - некоторая первообразная функции $f(x)$ на множестве X, все первообразные этой функции определяются выражением F(x)+C, где C - произвольная постоянная.

Замечание 8.1. В процессе доказательства теоремы 2 установлено: если функция имеет на интервале (a,b) производную, тождественно равную нулю, то она постоянна на (a,b).

Определение 8.2. Совокупность всех первообразных $F(x)+C$ для функции $f(x)$ на интервале (a,b) называется неопределенным интегралом от $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$, при этом знак $\int$ называется знаком неопределенного интеграла, $f(x)$ – подынтегральной функцией, $f(x)dx$ – подынтегральным выражением, x – переменная интегрирования.

Если $F(x)$ – одна из первообразных для функции $f(x)$ на (a,b), то в силу теоремы 2 и определения неопределенного интеграла верно равенство

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \qquad (8.1)$$

где C – некоторая постоянная, называемая постоянной интегрирования.

Таким образом, неопределенный интеграл представляет собой любую функцию, дифференциал которой равен подынтегральному выражению, а производная – подынтегральной функции.

Исходя из примера 1, имеем:

$$\int(-2\sin(2x-8))dx = \cos(2x-8) + C\,.$$

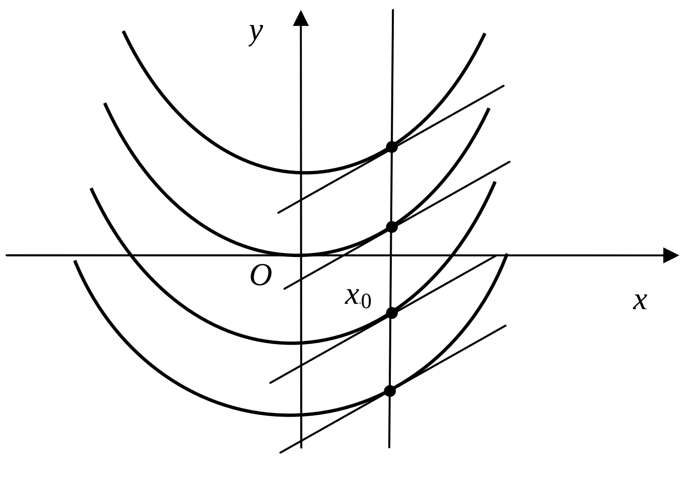
Операция нахождения первообразной или неопределенного интеграла от функции $f(x)$ называется *интегрированием* функции $f(x)$.

С геометрической точки зрения неопределенный интеграл представляет собой однопараметрическое семейство кривых $y = F\left(x\right) + C$ (C – параметр), обладающих следующим свойством: все касательные к кривым в точках с абсциссой $x = x_0$ параллельны между собой:

$$(F(x)+C)'\Big|_{x=x_0} = F'\left(x_0\right) = f\left(x_0\right)$$

Кривые семейства $\{F(x)+C\}$ называются интегральными кривыми. Они не пересекаются между собой и не касаются друг друга. Через каждую точку плоскости проходит только одна интегральная кривая. Все интегральные кривые получаются одна из другой параллельным переносом вдоль оси OY.

Пример 8.4. Изобразим неопределенный интеграл от функции $f(x)=2x$. $\int 2xdx = x^2 + C$, т.е. имеем семейство парабол $\{y=x^2+C\}$.



§ 2. Основные свойства неопределенного интеграла

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$\left(\int f\left(x\right)dx\right)' = f\left(x\right) \text{ и } d\left(\int f\left(x\right)dx\right) = f\left(x\right)dx.$$

Доказательство. Пусть $\int f(x)dx = F(x) + C$. Тогда

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x) + C\right)' = F'(x) = f(x).$$

$$d\left(\int f\left(x\right)dx\right) = \left(\int f\left(x\right)dx\right)' dx = f\left(x\right)dx.$$

2. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int dF\left(x\right) = F\left(x\right) + C$$

Доказательство. Так как $dF\left(x\right) = F'\left(x\right)dx$, то $\int F'\left(x\right) = F\left(x\right) + C$.

Например, $\int 5xe^{x^5}dx = \int d\left(e^{x^5}\right) = e^{x^5} + C$.

3. Постоянный множитель $a(a \neq 0)$ можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int af\left(x\right)dx = a\int f\left(x\right)dx.$$

Доказательство. Пусть $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$: $F'\left(x\right) = f\left(x\right)$. Тогда $aF(x)$ - первообразная функции $af(x)$: $\left(aF\left(x\right)\right)' = aF'\left(x\right) = af\left(x\right)$. Отсюда следует, что

$a\int f(x)dx = a\left(F\left(x\right) + C\right) = aF\left(x\right) + C_1 = \int af(x)dx$, где $C_1 = aC$.

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа равен алгебраической сумме интегралов от этих функций:

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x) \pm ... \pm f_n(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm ... \pm \int f_n(x)dx.$$

Доказательство. Пусть для функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ существуют первообразные $F(x)$ и $\Phi(x)$: $F'(x)=f_1(x)$, $\Phi'(x)=f_2(x)$. Тогда функции $F(x)\pm\Phi(x)$ являются первообразными функций $f_1(x)\pm f_2(x)$. Следовательно,

$$\int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx = \left(F(x)+C_1\right) \pm \left(\Phi(x)+C_2\right) = \left(F(x)\pm\Phi(x)\right) + \left(C_1 \pm C_2\right) =$$
$$= \left(F(x)\pm\Phi(x)\right) + C = \int \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx$$

5. Если $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$, то

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C.$$

Доказательство:

$$\left(\frac{1}{a}F(ax+b)\right)' = \frac{1}{a}F'(ax+b) = f(ax+b).$$

6. Инвариантность формул интегрирования: любая формула интегрирования сохраняет свой вид, если переменную интегрирования заменить любой дифференцируемой функцией этой переменной:

$$\int f(x)dx = F(x)+C \Rightarrow \int f(u)du = F(u)+C,$$

где u - дифференцируемая функция .

Доказательство. Воспользуемся свойством инвариантности формы дифференциала первого порядка : если $dF(x)=F'(x)dx \Rightarrow dF(u)=F'(u)du$, где $u = u(x)$. Пусть $\int f(x)dx = F(x)+C \Rightarrow F'(x)=f(x)$.

Докажем, что $\int f(u)du = F(u)+C$. Для этого найдем дифференциал от левой и правой частей последнего равенства :

$$d\left(\int f(u)du\right) = f(u)du$$

и

$$d\left(F(u)+C\right) = F'(u)du = f(u)du.$$

Из равенств этих дифференциалов следует справедливость свойства 6.

§ 3. Основные правила интегрирования функций

1) $\left(\int f(u)du\right)' = f(u)$.

2) $d\left(\int f(u)du\right) = f(u)du$.

3) $\int dF(u) = F(u) + C$.

4) $\int af(u)du = a\int f(u)du$.

5) $\int\left(f_1(u) \pm f_2(u) \pm \ldots \pm f_n(u)\right)du = \int f_1(u)du \pm \int f_2(u)du \pm \ldots \pm \int f_n(u)du$.

6) $\int f(au+b)du = \frac{1}{a}F(au+b) + C$.

Таблица основных неопределенных интегралов

(Заметим, что буква *u* может здесь обозначать как независимую переменную *u* = *x*, так и функцию от независимой переменной *u* = *u*(*x*)).

1) $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$

2) $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C \qquad (a > 0,\ \ a \neq 1)$

3) $\int e^u du = e^u + C$

4) $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

5) $\int \sin u du = -\cos u + C$

6) $\int \cos u du = \sin u + C$

7) $\int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + C$

8) $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + C$

9) $\int shudu = chu + C$

10) $\int chudu = shu + C$

11) $\int \frac{du}{ch^2 u} = thu + C$

12) $\int \frac{du}{sh^2 u} = -cthu + C$

13) $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C$

14) $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + C = -\frac{1}{a} arcctg \frac{u}{a} + C, \quad (a \neq 0)$

15) $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C \quad (a \neq 0)$

16) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C \qquad (|u| > |a|)$

17) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C = -\arccos \frac{u}{a} + C \qquad (|u| < |a|)$

18) $\int \sqrt{u^2 + a^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right| + C$

19) $\int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{u}{a} + C$

Интегралы 1-17 называются табличными. Некоторые из формул таблицы интегралов, не имеющие аналога в таблице производных, проверяются дифференцированием их правых частей. Например, докажем формулу 14:

$$\left(\frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + C\right)' = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 + \frac{u^2}{a^2}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{u^2 + a^2}$$

Если первообразная $F(x)$ функции $f(x)$ является элементарной функцией, то говорят, что интеграл $\int f(x)dx$ выражается в элементарных функциях или $f(x)$ интегрируема в конечном виде. Однако не всякий интеграл от элементарной функции выражается в элементарных функциях. Например, известно что интегралы $\int e^{-x^2}dx$, $\int \sin x^2 dx$, $\int \frac{\sin x}{x}dx$, $\int \frac{\cos x}{x}dx$, $\int \frac{dx}{\ln x}$, хотя и существуют, но не выражаются в виде конечных комбинаций элементарных функций.

Используя основные правила интегрирования, можно находить интегралы от более сложных функций.

Пример 8.5.

$$\int\left(7\sqrt{x}+\frac{3}{x}\right)^2 dx=\int\left(49x+\frac{42}{\sqrt{x}}+\frac{9}{x^2}\right)dx=49\int xdx+42\int x^{-\frac{1}{2}}dx+9\int x^{-2}dx=$$

$$=\frac{49}{2}x^2+84\sqrt{x}-\frac{9}{x}+C$$

Пример 8.6.

$$\int\cos^2(5x-1)dx=\int\frac{1+\cos(10x-2)}{2}dx=\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\cos(10x-2)dx=$$

$$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{20}\sin(10x-2)+C$$

При интегрировании каждого слагаемого появляется своя произвольная постоянная, но в конечном итоге записывают только одну, так как сумма нескольких постоянных есть величина постоянная. Правильность полученного результата можно проверить дифференцированием.

§ 4. Основные методы интегрирования

а) Метод непосредственного интегрирования основан на приведении подынтегрального выражения к табличной форме и использовании свойств неопределенного интеграла.

Пример 8.7.

$$\int(\cos x-shx+e^x)dx=\int\cos xdx-\int shxdx+\int e^x dx=\sin x-chx+e^x+C.$$

Пример 8.8.

$$\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx=\int\left(\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)dx=\int(1+\sin x)dx=$$

$$=\int dx+\int\sin x dx=x-\cos x+C$$

б) Метод замены переменной (или метод подстановки).

Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)dx$, который не является табличным. Суть метода подстановки состоит в том, что в интеграле $\int f(x)dx$ переменную x заменяют переменной t по формуле $x=\varphi(t)$, откуда $dx=\varphi'(t)dt$.

Теорема 8.3. Пусть функция $x=\varphi(t)$ определена и дифференцируема на некотором множестве T и пусть X – множество значений этой функции, на котором определена функция $f(x)$. Тогда если на множестве X функция $f(x)$ имеет первообразную, то на множестве T справедлива формула

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{8.2}$$

Формула (8.2) называется формулой замены переменной в неопределенном интеграле.

Доказательство. Формула (8.2) справедлива, если после дифференцирования обеих ее частей получаются одинаковые выражения. Учитывая, что $f(x)=f(\varphi(t))$ - сложная функция, имеем:

$$d(\int f(x)dx)=f(x)dx=f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Продифференцировав правую часть формулы (8.2), получим

$$d(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt)=f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Таким образом, формула (8.2) справедлива.

Пример 8.9.

$$\int\sin(2-3x)dx=\left[2-3x=t,\quad x=\frac{2-t}{3},\quad dx=-\frac{dt}{3}\right]=\int\sin t\left(-\frac{dt}{3}\right)=-\frac{1}{3}\int\sin t dt=$$

$$=\frac{1}{3}\cos t+C=\frac{1}{3}\cos(2-3x)+C.$$

в) Метод «подведения» подынтегральной функции под знак дифференциала.

По определению дифференциала функции $\varphi'(x)dx = d(\varphi(x))$. Переход от левой части этого равенства к правой называют «подведением» множителя $\varphi'(x)$ под знак дифференциала.

Пусть требуется найти интеграл вида: $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$.

Внесем в этом интеграле множитель $\varphi'(x)$ под знак дифференциала, а затем выполним подстановку $\varphi(x) = u$:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d(\varphi(x)) = \int f(u)du.$$

Пример 8.10.

$$\int \sqrt{1+x^2}\,xdx = \left[xdx = \frac{1}{2}d(1+x^2) \right] = \frac{1}{2}\int (1+x^2)^{\frac{1}{2}} d(1+x^2) = \left[1+x^2 = u\right] = \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}du =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}\sqrt{(1+x^2)^3} + C.$$

Пример 8.11.

$$\int tgxdx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos(x)} = \left[u = \cos x\right] = -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C$$

г) Метод интегрирования по частям.

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – непрерывно-дифференцируемые функции на некотором интервале. Формула дифференциала произведения двух функций имеет вид:

$$d(uv) = udv + vdu\,.$$

Интегрируя обе части этого равенства, получаем $\int d(uv) = \int udv + \int vdu$. Так как $\int d(uv) = uv + C,$ то

$$\int udv = uv - \int vdu\,. \qquad (8.3)$$

Соотношение (8.3) называют формулой интегрирования по частям.

Типы интегралов, вычисляемых методом интегрирования по частям:

I. Интегралы вида $\int P_n(x)e^{kx}dx,$ $\int P_n(x)\sin kxdx,$ $\int P_n(x)\cos kxdx,$ где $P_n(x)$ - многочлен степени n, k – некоторое число. Для нахождения этих интегралов по формуле (8.3) необходимо положить $u = P_n(x)$, dv равно оставшейся части подынтегрального выражения и применить формулу (8.3) n раз.

II. Интегралы вида $\int P_n(x)\ln x dx$, $\int P_n(x)\arcsin x dx$, $\int P_n(x)\arccos x dx$, $\int P_n(x)\mathrm{arc}tgx dx$, $\int P_n(x) arcctgx dx$, где $P_n(x)$ - многочлен степени n относительно x. Эти интегралы можно найти по формуле (8.3), принимая за u функции lnx, arcsin$x$, arccos$x$, $arctgx$, $arcctgx$.

III. Интегралы вида $\int e^{ax}\cos bx dx$, $\int e^{ax}\sin bx dx$ (где a, b – числа) вычисляются двукратным интегрированием по частям . Так как интегрирование по частям иногда приводит к интегралу, совпадающему с исходным или сводящемуся к нему, то интеграл находится из получающегося относительно исходного интеграла уравнения.

Пример 8.12.

$$\int x\sin x dx = \begin{bmatrix} u = x,\ dv = \sin x dx = -d\cos x \\ du = dx,\ v = -\int d\cos x = -\cos x \end{bmatrix} = -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x + C$$

Пример 8.13.

$$\int (ax^2 + bx + c)\cos\alpha x dx = \begin{bmatrix} u = ax^2 + bx + c, \\ du = (2ax + b)dx, \\ dv = \cos\alpha x dx, \\ v = \frac{1}{\alpha}\sin\alpha\ x \end{bmatrix} = \frac{ax^2 + bx + c}{\alpha}\sin\alpha x -$$

$$-\frac{1}{\alpha}\int (2ax + b)\sin\alpha x = \begin{bmatrix} u = 2ax + b, \quad du = 2adx \\ dv = \sin\alpha x dx,\ v = -\frac{1}{\alpha}\cos\alpha x \end{bmatrix} = \frac{ax^2 + bx + c}{\alpha}\sin\alpha x +$$

$$+\frac{2ax + b}{\alpha^2}\cos\alpha x - \frac{2a}{\alpha^2}\int\cos\alpha x dx = \frac{ax^2 + bx + c}{\alpha}\sin\alpha x + \frac{2ax + b}{\alpha^2}\cos\alpha x - \frac{2a}{\alpha^3}\sin\alpha x + C$$

Пример 8.14.

$$J = \int e^{ax}\cos bx dx = \begin{bmatrix} u = e^{ax},\ du = ae^{ax}dx, \\ dv = \cos bx dx,\ v = \frac{1}{b}\sin bx \end{bmatrix} = \frac{e^{ax}\sin bx}{b} - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx dx =$$

$$=\begin{bmatrix} u=e^{ax}, & du=ae^{ax}dx, \\ dv=\sin bx dx, & v=-\frac{1}{b}\cos bx \end{bmatrix}=\frac{e^{ax}\sin bx}{b}+\frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx-\frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx dx.$$

Получаем уравнение:

J=$e^{ax}\dfrac{b\sin bx+a\cos bx}{b^2}-\dfrac{a^2}{b^2}$J; откуда J=$\int e^{ax}\cos bx dx=\dfrac{b\sin bx+a\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}+C.$

Пример 8.15.

$$\mathrm{J}=\int\cos(\ln x)dx=\begin{bmatrix} u=\cos\ln x, & du=-\frac{\sin\ln x}{x}dx, \\ dv=dx, & v=x \end{bmatrix}=x\cos\ln x+\int\sin\ln x dx=$$

$$=\begin{bmatrix} u=\sin\ln x, & du=\frac{\cos\ln x}{x}dx, \\ dv=dx, & v=x \end{bmatrix}=x\cos\ln x+x\sin\ln x-\mathrm{J}.$$

Откуда $\mathrm{J}=\int\cos\ln x dx=\dfrac{x}{2}(\cos\ln x+\sin\ln x)+C$.

§ 5. Интегрирование рациональных функций.

Класс функций, интегралы от которых всегда выражаются в элементарных функциях, образуют рациональные функции.

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \tag{8.4}$$

где $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n \quad (a_0\neq 0)$,

$Q_m(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_{m-1}x+b_m \qquad (b_0\neq 0)$

- многочлены степеней n и m соответственно. Рациональные функции называются рациональными дробями. Если $n < m$, то дробь (8.4) называется правильной, в противном случае неправильной. Всякую неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена (целой части) и правильной рациональной дроби (это представление достигается путем деления числителя на знаменатель по правилу деления многочленов):

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = S_k(x) + \frac{R_l(x)}{Q_m(x)}, \tag{8.5}$$

где $S_k(x) -$ целая часть дроби $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, $R_l(x) -$ остаток этой дроби, ($R_l(x) -$ многочлен степени $l < m$).

Пример 8.16.

$$\frac{x^4 - x^3 + 1}{x^2 + x + 2} = x^2 - 2x + \frac{4x+1}{x^2 + x + 2},$$

здесь при делении многочлена 4-ой степени на многочлен 2-ой степени целая часть от деления – ($x^2 - 2x$), остаток от деления – $(4x+1)$.

Согласно соотношению (8.5), интегрирование рациональной дроби сводится к интегрированию многочлена $S_k(x)$, что не представляет труда, и правильной рациональной дроби $R_l(x)/Q_m(x)$.

Будем считать, что дробь $R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ – правильная. Простейшей дробью называется правильная рациональная дробь одного из следующих четырех типов:

I. $\dfrac{A}{x-a}$; II. $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, $k \geq 2$;

III. $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$; IV. $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$ $k \geq 2$, где

A, M, N, a, p, q – постоянные;

k – целое положительное число;

трехчлен не имеет действительных корней, т. е. дискриминант $D = p^2 - 4q < 0$.

Простейшие дроби первого и второго типов интегрируются непосредственно с помощью основных правил интегрального исчисления:

I. $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C;$

II. $\displaystyle\int \frac{Adx}{(x-a)^k} = A\int (x-a)^{-k} d(x-a) = \frac{A}{1-k} \cdot \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C.$

Интеграл от простейшей дроби третьего типа приводится к табличным интегралам путем выделения в числителе дифференциала знаменателя и приведения знаменателя к сумме квадратов.

$$\text{III.}\ \int\frac{(Mx+N)dx}{x^2+px+q}=\left[\begin{array}{l} d(x^2+px+q)=(2x+p)dx \\ Mx+N=\frac{M}{2}(2x+p)+N-\frac{Mp}{2}\end{array}\right]=\frac{M}{2}\int\frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q}+$$

$$+\left(N-\frac{MP}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\left(N-\frac{MP}{2}\right)\cdot\int\frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}=$$

$$=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\left(N-\frac{MP}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

Для интегрирования простейшей дроби четвертого типа преобразуем трехчлен $x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right).$ Сделаем замену переменной, положив $x+\frac{p}{2}=t,\ \ q-\frac{p^2}{4}=a^2>0:\ \ x^2+px+q=t^2+a^2;\ \ dx=dt.$ Тогда

$$\text{IV.}\ \int\frac{(Mx+N)dx}{(x^2+px+q)^k}=\int\frac{M\left(x+\frac{p}{2}\right)+\left(N-\frac{MP}{2}\right)}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right)^k}dx=M\int\frac{tdt}{(t^2+a^2)^k}+$$

$$+\left(N-\frac{MP}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k}=MJ_0+\left(N-\frac{MP}{2}\right)J_{k.}.$$

Вычислим интеграл J_0:

$$J_0=\int\frac{tdt}{(t^2+a^2)^k}=\frac{1}{2}\int(t^2+a^2)^{-k}d(t^2+a^2)=\frac{1}{2(1-k)}\cdot\frac{1}{(t^2+a^2)^{k-1}}+C.$$

Вычислим интеграл

$$J_k=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k}=\frac{1}{a^2}\int\frac{(t^2+a^2)-t^2}{(t^2+a^2)^k}dt=\frac{1}{a^2}\left(\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}}-\int\frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^k}\right)$$

Заметим, что $\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}} = J_{k-1}$. Будем иметь:

$$J_k = \frac{1}{a^2}\left(J_{k-1} - \int \frac{t^2 dt}{(t^2+a^2)^k} \right) \tag{8.6}$$

Для вычисления интеграла $\int \frac{t^2 dt}{(t^2+a^2)^k}$ применим метод интегрирования по частям:

$$\int \frac{t^2 dt}{(t^2+a^2)^k} = \begin{bmatrix} u = t, \quad du = dt \\ dv = \frac{tdt}{(t^2+a^2)^k}, \quad v = \frac{1}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} \end{bmatrix} = \frac{t}{2(1-k)(t^2-a^2)^{k-1}} -$$

$$-\frac{1}{2(1-k)}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}} = \frac{t}{2(1-k)(t^2-a^2)^{k-1}} - \frac{1}{2(1-k)} J_{k-1.}$$

Подставляя найденное выражение в формулу (8.6), имеем

$$J_k = \frac{1}{a^2}\left(\frac{2k-3}{2k-2} J_{k-1} - \frac{t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} \right). \tag{8.7}$$

Формула (8.7) называется рекуррентной. Зная табличный интеграл

$J_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{t}{a} + C,$ по формуле (8.7) можно найти интеграл

$J_2 = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^2}$ и т.д.

$$J_2 = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+a^2} + \frac{t}{2(t^2+a^2)} \right) = \frac{t}{2a^2(t^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3} arctg \frac{t}{a} + C.$$

Таким образом, получены формулы для интегрирования всех типов простейших дробей.

§ 6. *Интегрирование рациональных дробей*

1. *Разложение рациональной дроби на простейшие дроби*

Любую правильную рациональную дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ можно представить в виде суммы конечного числа простейших рациональных дробей I – IV типов.

Необходимо разложить знаменатель дроби $Q_m(x)$ на линейные и квадратные множители, т.е. решить уравнение:

$$Q_m(x)=0 \Leftrightarrow b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m=0 \qquad (8.8)$$

Предположим, что уравнение (8.8.) решено и найдены его корни. Согласно основной теореме алгебры, уравнение $Q_m(x)=0$ имеет ровно m корней с учётом их кратности. Корни уравнения (8.8.) могут быть действительными (простыми или кратными) и комплексными (простыми или кратными). При разложении многочлена $Q_m(x)$ на линейные и квадратные множители необходимо учитывать:

1) если α является простым корнем многочлена $Q_m(x)$ $\left(Q_m(\alpha)=0\right)$, то $Q_m(x)$ делится на $(x-\alpha)$ без остатка, т.е. $Q_m(x)=(x-\alpha)Q_{m-1}(x)$;
2) если α является корнем кратности k многочлена $Q_m(x)$, то $Q_m(x)$ делится на $(x-\alpha)^k$ без остатка, т.е. $Q_m(x)=(x-\alpha)^k Q_{m-k}(x)$;
3) если комплексное число $z=u+iv$ является корнем многочлена $Q_m(x)$, то его корнем является также комплексно-сопряжённое число $\overline{z}=u-iv$.

В этом случае многочлен делится без остатка на

$$(x-z)\left(x-\overline{z}\right)=(x-u-iv)(x-u+iv)=x^2+px+q,$$

где $p=-2u$, $q=u^2+v^2$; $p^2/4-q<0$, т.е. $Q_m(x)=\left(x^2+px+q\right)Q_{m-2}(x)$;

4) если комплексно-сопряженные числа $u\pm iv$ являются корнями многочлена $Q_m(x)$ кратности k, то многочлен $Q_m(x)$ можно представить в виде произведения

$$Q_m(x)=\left(x^2+px+q\right)^k Q_{m-2k}(x).$$

Пусть для определенности число α является действительным корнем многочлена $Q_m(x)$ кратности k, число β - действительным корнем этого многочлена кратности l, комплексно-сопряженные числа $u \pm iv$ - S - кратными корнями. Тогда многочлен $Q_m(x)$ разложим на линейные и квадратные множители:

$$Q_m(x) = (x-\alpha)^k (x-\beta)^l \left(x^2 + px + q\right)^S,$$

где $k + l + 2S = m$.

Справедлива следующая

Теорема 8.4. Правильную рациональную дробь

$$P_n(x)/Q_m(x), \text{ где } Q_m(x) = (x-\alpha)^k (x-\beta)^l \left(x^2 + px + q\right)^S,$$

можно единственным образом разложить на сумму простейших дробей:

$$\begin{aligned}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} &= \frac{A_1}{(x-\alpha)} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-\alpha)^k} + \frac{B_1}{(x-\beta)} + \frac{B_2}{(x-\beta)^2} + \ldots \\ &+ \frac{B_l}{(x-\beta)^l} + \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2 x + N_2}{\left(x^2 + px + q\right)^2} + \ldots + \frac{M_S x + N_S}{\left(x^2 + px + q\right)^S}\end{aligned}, \qquad (8.9)$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_k, B_1, B_2, \ldots, B_l, M_1, N_1, M_2, N_2, \ldots, M_S, N_S$ - некоторые действительные числа, называемые коэффициентами разложения дроби на простейшие.

Согласно разложению (8.9.), линейным множителям знаменателя $Q_m(x)$ соответствуют простейшие дроби I и II типов, а квадратным множителям - III-го и IV- типов. При этом число простейших дробей, соответствующих данному множителю (линейному или квадратному), равно степени, с которой этот множитель входит в разложение знаменателя дроби.

Формула (8.9.) разложения правильной рациональной дроби на простейшие дроби остается справедливой для любого конечного числа линейных и квадратных множителей, входящих в разложение знаменателя $Q_m(x)$.

Проиллюстрируем формулу (8.9) конкретными примерами, не находя самих коэффициентов разложения.

Пример 8.17.

1) $\dfrac{x^2 - 3x + 1}{(x-1)^2(x+2)} = \dfrac{A}{(x-1)^2} + \dfrac{D}{x-1} + \dfrac{B}{x+2}$

2) $\dfrac{x^2}{(x^3-8)(x^2+1)}=\dfrac{x^2}{(x-2)(x^2+2x+4)(x^2+1)}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{Bx+C}{x^2+2x+4}+\dfrac{Dx+E}{x^2+1}$

3) $\dfrac{x^6-2x^3+1}{x^3(x+1)(x^2+1)^2}=\dfrac{A}{x^3}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x}+\dfrac{D}{x+1}+\dfrac{Ex+F}{(x^2+1)^2}+\dfrac{Kx+N}{x^2+1}$

2. Методы нахождения коэффициентов разложения рациональной функции на простейшие дроби

1) Метод неопределенных коэффициентов.

Пусть дано разложение правильной рациональной дроби $P_n(x)/Q_m(x)$ по формуле (8.9) на простейшие дроби с неопределенными коэффициентами. Необходимо привести простейшие дроби к общему знаменателю $Q_m(x)$ и приравнять многочлен, получившийся в числителе, многочлену $P_n(x)$.

Для тождественного равенства двух многочленов необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты при одинаковых степенях x этих многочленов были равны. Учитывая это, следует приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях полученного тождества. Получаем систему m линейных алгебраических уравнений для нахождения m неизвестных коэффициентов $A_1, A_2, ..., A_k, B_1, B_2, ..., B_l, M_1, N_1, ..., M_S, N_S$.

Пример 8.18. Функцию $f(x)=\dfrac{2x^2-x+3}{x^3+x^2-2x}$ разложить на простейшие дроби.

Разложим знаменатель на множители: $x^3+x^2-2x=x(x-1)(x+2)$, то

$f(x)=\dfrac{2x^2-x+3}{x(x-1)(x+2)}$, по формуле (8.9) имеем:

$$\frac{2x^2-x+3}{x(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2},$$

где A, B, C пока неизвестны.

Правую часть приведем к общему знаменателю. Тогда

$$\frac{2x^2 - x + 3}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A(x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-1)}{x(x-1)(x+2)}.$$

Отбрасывая знаменатель, получаем равенство

$$2x^2 - x + 3 = A(x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-1)$$

или $$2x^2 - x + 3 = (A+B+C)x^2 + (A+2B-C)x - 2A.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях *x*, получаем систему уравнений для нахождения неопределенных коэффициентов *A*, *B* и *C*:

$$\left.\begin{array}{l|l} x^2 & A+B+C=2; \\ x^1 & A+2B-C=-1; \\ x^0 & -2A=3. \end{array}\right\} \Rightarrow A = -\frac{3}{2},\ \ B = \frac{4}{3},\ \ C = \frac{13}{6}$$

т.е. $$\frac{2x^2 - x + 3}{x(x-1)(x+2)} = -\frac{3}{2x} + \frac{4}{3(x-1)} + \frac{13}{6(x+2)}.$$

Пример 8.19. Разложить на простейшие дроби функцию $f(x) = \dfrac{x^4 + x^2 + 2x + 1}{x^4(x+1)^2}$.

Запишем разложение рациональной дроби на простейшие дроби:

$$\frac{x^4 + x^2 + 2x + 1}{x^4(x+1)^2} = \frac{A}{x^4} + \frac{B}{x^3} + \frac{C}{x^2} + \frac{D}{x} + \frac{E}{(x+1)^2} + \frac{F}{x+1},$$

где коэффициенты *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* подлежат определению.

Приведя в правой части слагаемые к общему знаменателю, получим

$$\frac{A(x+1)^2 + Bx(x+1)^2 + Cx^2(x+1)^2 + Dx^3(x+1)^2 + Ex^4 + Fx^4(x+1)}{x^4(x+1)^2} =$$

$$= \frac{(D+F)x^5 + (C+2D+E+F)x^4 + (B+2C+D)x^3 + (A+2B+C)x^2 + (2A+B)x + A}{x^4(x+1)^2}$$

Числитель этого выражения равен $x^4 + x^2 + 2x + 1$. Отсюда приравняв коэффициенты при одинаковых степенях *x*, получим систему

$$\left.\begin{array}{l|l} x^5 & D+F=0 \\ x^4 & C+2D+E+F=1 \\ x^3 & B+2C+D=0 \\ x^2 & A+2B+C=1 \\ x^1 & 2A+B=2 \\ x^0 & A=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=0 \\ C=0 \\ D=0 \\ E=1 \\ F=0 \end{cases}$$

Окончательно имеем:

$$\frac{x^4+x^2+2x+1}{x^4(x+1)^2}=\frac{1}{x^4}+\frac{1}{(x+1)^2}.$$

2) Метод частных значений.

При нахождении неопределенных коэффициентов можно придать переменной x несколько частных значений (по числу неопределенных коэффициентов) и получить таким образом систему уравнений относительно неопределенных коэффициентов. Наиболее удобно применять этот метод в случае, когда корни знаменателя рациональной дроби $P_n(x)/Q_m(x)$ просты и действительны. В таких случаях последовательно полагают x равным каждому из корней знаменателя.

Пример 8.20. Функцию $\dfrac{3x^2+x-1}{(x-1)(x+2)x}$ разложить на простейшие дроби.

$$\frac{3x^2+x-1}{(x-1)(x+2)x}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x}$$

Приводя к общему знаменателю дроби в правой части этого равенства и отбросив затем знаменатель, получим: $3x^2+x-1=A(x+2)x+B(x-1)x+C(x-1)(x+2)$.

Придавая x последовательно частные значения, равные корням знаменателя $x=0,\ \ x=1,\ \ x=-2,$ находим:

$$\left.\begin{array}{l|l} x=0 & -1=-2C \\ x=1 & 3=3A \\ x=-2 & 9=-6B \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-\dfrac{3}{2} \\ C=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Таким образом,

$$\frac{3x^2+x-1}{(x-1)(x+2)x}=\frac{1}{x-1}-\frac{3}{2(x+2)}+\frac{1}{2x}.$$

Иногда для нахождения неопределенных коэффициентов применяют комбинацию указанных выше методов.

Сформулируем **правило** интегрирования рациональных дробей.

Для того, чтобы проинтегрировать рациональную дробь, необходимо выполнить следующие действия:

1) если рассматриваемая рациональная дробь $P_k(x)/Q_m(x)$ - неправильная $(k \geq m)$, представить её в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби:

$$\frac{P_k(x)}{Q_m(x)}=R(x)+\frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

где $n<m,\ R(x)$ - многочлен;

2) если рассматриваемая рациональная дробь $P_n(x)/Q_m(x)$ - правильная $(n<m)$, представить её в виде суммы простейших рациональных дробей по формуле (8.9);

3) интеграл от рациональной дроби представить в виде суммы интегралов от целой части и от соответствующих простейших дробей и вычислить эти интегралы.

Пример 8.21. Вычислить $I=\int\dfrac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}dx$.

Выделим из подынтегральной неправильной дроби целую часть, деля числитель на знаменатель: $\dfrac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}=2x+\dfrac{1}{x^4+3x^2}$.

Разложим полученную в результате правильную дробь на элементарные слагаемые дроби:

$$x^4+3x^2=x^2(x^2+3),$$

тогда $$\frac{1}{x^2(x^2+3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+3}.$$

Найдем коэффициенты *A, B, C, D*:

$$1=Ax(x^2+3)+B(x^2+3)+(Cx+D)x^2=(A+C)x^3+(B+D)x^2+3Ax+3B$$

$$\begin{array}{l|l} x^3 & A+C=0, \\ x^2 & B+D=0, \\ x^1 & 3A=0, \\ x^0 & 3B=1 \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l} A=0, \\ B=1/3 \\ C=0 \\ D=-1/3 \end{array}$$

Следовательно, $$\frac{1}{x^2(x^2+3)}=\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{3(x^2+3)}.$$

Интегрируя, имеем

$$\int\frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}dx=\int\left(2x+\frac{1}{x^4+3x^2}\right)dx=\int\left[2x+\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{3(x^2+3)}\right]dx=$$

$$=2\int xdx+\frac{1}{3}\int x^{-2}dx-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+3}=x^2-\frac{1}{3x}-\frac{1}{3\sqrt{3}}arctg\,\frac{x}{\sqrt{3}}+C$$

§ 7. Интегрирование некоторых иррациональных функций

Основным методом вычисления неопределенных интегралов от иррациональных функций является метод рационализации подынтегрального выражения, т.е. метод нахождения таких подстановок, которые приводят данный интеграл к интегралу от рациональной функции.

1) Интеграл вида $\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1/n_1},...,\left(\frac{ax+b}{xc+d}\right)^{m_r/n_r}\right)dx,$ где R - рациональная функция; $m_1,n_1,...,m_r,n_r$ - целые ненулевые числа.

С помощью подстановки $\frac{ax+b}{cx+d}=t^{\lambda}$, где λ - общий знаменатель дробей $\frac{m_1}{n_1},...,\frac{m_r}{n_r}$, или наименьшее общее кратное чисел $n_1,...,n_r$, указанный интеграл преобразуется в интеграл от рациональной функции переменной t_0.

Рассмотрим два частных случая.

а) Если $c=0,\ d=1,$ то данный интеграл имеет вид

$$\int R\left(x,(ax+b)^{m_1/n_1},..,(ax+b)^{m_r/n_r}\right)dx,$$

и преобразуется в интеграл от рациональной функции с помощью подстановки $ax+b=t^{\lambda}$, где $\lambda=K(n_1,...,n_r),\ K(n_1,...,n_r)$ - наименьшее общее кратное чисел $n_1,...,n_r$.

б) Если $b=c=0,\ a=d=1,$ то интеграл имеет вид $\int R(x,x^{m_1/n_1},...,x^{m_r/n_r})dx$ и приводится к интегралу от рациональной функции переменной t с помощью подстановки $x=t^{\lambda}$, где $\lambda=K(n_1,...,n_r).$

Пример 8.22. Вычислить $\int\frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx$.

Интеграл $\int\frac{x+x^{2/3}+x^{1/6}}{x(1+x^{1/3})}dx$ можно рассматривать как $\int R(x,\ x^{2/3},\ x^{1/6},\ x^{1/3})dx.$

Общим знаменателем дробей $\frac{2}{3},\frac{1}{6}$ и $\frac{1}{3}$ является число $\lambda=6$. Поэтому вводим замену $x=t^6$, $dx=6t^5dt$ и искомый интеграл приводим к виду

$$6\int\frac{t^5+t^3+1}{t^2+1}dt=6\int\left(t^3+\frac{1}{t^2+1}\right)dt=\frac{3}{2}t^4+6arctgt+C$$

Т.к. $t=\sqrt[6]{x},$ то окончательно имеем: $\int\frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+6arctg\sqrt[6]{x}+C$.

2) Интегралы вида $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$

а) Подстановки Эйлера.

Рационализация подынтегрального выражения достигается одной из трех подстановок Эйлера:

1. если $a>0,$ то полагаем $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm x\sqrt{a}+t;$
2. если $c>0$, то полагаем $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{c}+xt;\quad xt\pm\sqrt{c}$
3. если x_1 и x_2 - действительные корни трехчлена $ax^2+bx+c,$ т.е.

$ax^2+bx+c=(x-x_1)(x-x_2)$, то в этом случае $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_0)$, где x_0 - один из корней трехчлена.

Знаки в правой и второй подстановках можно брать в любой комбинации, но следует иметь в виду, что выбор знака (как и выбор самой подстановки) сильно влияет на сложность вычисления интеграла.

Пример 8.23. Вычислить $\int \frac{1-\sqrt{x^2+x+1}}{x\sqrt{x^2+x+1}}dx$.

Положим $\sqrt{x^2+x+1}=xt+1$ (c=1>0). Тогда $x=\frac{2t-1}{1-t^2}$; $dx=2\frac{t^2-t+1}{(1-t^2)^2}dt$;

$\sqrt{x^2+x+1}=\frac{1-t+t^2}{1-t^2}$, интеграл сводиться к виду $\int -\frac{2tdt}{1-t^2}=\ln\left|1-t^2\right|+C$.

Т.к. $t=\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}$, то окончательно имеем

$$\int \frac{1-\sqrt{x^2+x+1}}{x\sqrt{x^2+x+1}}dx=\ln\left|1-\left(\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}\right)^2\right|+C.$$

Подстановки Эйлера связаны обычно с громоздкими вычислениями, поэтому они применяются в том случае, если интеграл вида $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ не удается вычислить более простым способом.

б) Метод, основанный на применении тригонометрических подстановок.

В квадратном трехчлене выделяют полный квадрат

$$ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right),$$

затем с помощью подстановки $t=x+\frac{b}{2a}$ приводят исходный интеграл к интегралам одного из следующих трех типов:

$$\int R\left(t,\sqrt{k^2-t^2}\right)dt,\quad \int R\left(t,\sqrt{k^2+t^2}\right)dt,\quad \int R\left(t,\sqrt{t^2-k^2}\right)dt.$$

Эти интегралы с помощью следующих подстановок: для первого интеграла

$t = k\sin u$ (или $t = k\cos u$), для второго интеграла: $t = k\ tgu$, для третьего интеграла: $t = k/\cos u$, приводятся к интегралам от рациональной функции относительно $\sin u$, $\cos u$, т.е. к интегралам вида $\int R(\sin u, \cos u)du$, нахождение которых будет описано в следующем параграфе.

Пример 8.24. Вычислить $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx$.

Применим подстановку $x = a\sin t,\ \ dx = a\cos t dt,$ тогда $\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t$

Таким образом

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = a^2 \int \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2}\int (1 + \cos 2t)dt = \frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C =$$

$$= \frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2}{2}\sin t \cos t + C$$

Выразим t, $\sin t,\ \cos t,$ через x: $t = \arcsin\frac{x}{a},\ \ \sin t = \frac{x}{a},\ \ \cos t = \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a}}$.

Окончательно имеем: $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C.$

2) Интеграл вида

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + b + c}},\ \ I_2 = \int \frac{(Ax + B)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},\ \ I_3 = \frac{dx}{x\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

Для вычисления интеграла I_1 выделяется полный квадрат под знаком радикала:

$$ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2\right)$$

и применяется подстановка $x + \frac{b}{2a} = t,\ \ dx = dt.$

В результате этот интеграл сводится к табличному: $I_1 = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}}$.

В числителе интеграла I_2 выделяется дифференциал выражения, стоящего под знаком радикала, и этот интеграл представляется в виде суммы двух интегралов:

$$I_2=\int\frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int\frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{A}{2a}\int\frac{d(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)I_1=$$

$$=\frac{A}{2a}\int(ax^2+bx+c)^{-1/2}d(ax^2+bx+c)+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)I_1=\frac{A}{a}\sqrt{ax^2+bx+c}+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)I_1,$$

где I_1 - вычисленный выше интеграл. Вычисление интеграла I_3 сводится к вычислению интеграла I_1 подстановкой: $x=\frac{1}{t},\ \ dx=-\frac{1}{t^2}dt$.

Пример 8.25. Вычислить $\int\frac{(3x-1)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

Имеем интеграл вида I_2:

$$\int\frac{(3x-1)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}=\int\frac{(3/2)(2x+2)-4}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx=\frac{3}{2}\int(x^2+2x+2)^{-1/2}d(x^2+2x+2)-$$

$$-4\int\frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+1}}=3\sqrt{x^2+2x+2}-4\ln\left|(x+1)+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+C.$$

4) Интегралы от дифференциальных биномов.

Выражение $x^m(a+bx^n)^p$ называется дифференциальным биномом. Здесь a и b- постоянные, а $m, n,$ и p- рациональные числа. Ставится задача о вычислении интеграла $\int x^m(a+bx^n)^p dx$.

Интегралы от дифференциальных биномов выражаются через элементарные функции только в следующих трех случаях:

1) $p\in Z,\ \ m=\frac{r_1}{s_1},\ \ n=\frac{r_2}{s_2}.$

Тогда данный интеграл сводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки $x=t^{\lambda}$, где $\lambda=K(s_1,s_2)$- наименьшее общее кратное знаменателей дробей m и n;

2) $\dfrac{(m+1)}{n} \in Z$, $\quad p = \dfrac{r}{s}$. В этом случае исходный интеграл рационализируется с помощью подстановки $a + bx^n = t^s$, где s - знаменатель дроби $p = \dfrac{r}{s}$.

3) $\left(\dfrac{m+1}{n} + p\right) \in Z, \quad p = \dfrac{r}{s}$.

Тогда данный интеграл рационализуется с помощью подставки $ax^{-n} + b = t^s$, где S - знаменатель дроби p.

Пример 8.26. Вычислить $\int \dfrac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx$.

Переписав подынтегральную функцию в виде $x^{-\frac{1}{2}}\left(1 + x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}$, имеем:

$$m = -\frac{1}{2}, \quad n = \frac{1}{4}, \quad p = \frac{1}{3}.$$

Т.к. $\dfrac{m+1}{n} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2$ - целое число, то имеет место второй случай интегрируемости дифференциального бинома. Использовав подстановку $1 + x^{\frac{1}{4}} = t^3$, получим

$$x = \left(t^3 - 1\right)^4, \quad dx = 4\left(t^3 - 1\right)^3 3t^2 dt,$$

$$\int x^{-\frac{1}{2}}\left(1 + x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} dx = \int \left(t^3 - 1\right)^{-2} t \cdot 12t^2 \left(t^3 - 1\right)^3 dt = 12\int t^3\left(t^3 - 1\right)dt = 12\int \left(t^6 - t^3\right)dt =$$

$$= 12\left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^4}{4}\right) + C,$$

где $t = \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}$.

§ 8. Интегрирование тригонометрических выражений с помощью подстановок и формул тригонометрии

1. Интегрирование тригонометрических выражений с помощью подстановок

Условимся через $R(u,v)$ обозначать рациональную функцию относительно u и v, т.е. выражение, которое получено из любых величин u, v и действительных чисел с помощью четырех арифметических действий.

Рассмотрим интегралы вида

$$\int R(\sin x, \cos x)dx \ , \tag{8.10}$$

где R - рациональная функция аргументов $\sin x$ и $\cos x$. Такие интегралы приводятся к интегралам от рациональных функций с помощью *универсальной тригонометрической подстановки:*

$$t = tg\frac{x}{2}.$$

Этой подстановкой интеграл $\int R(\sin x, \cos x)dx$ преобразуется в интеграл от рациональной функции переменной t, который всегда выражается в элементарных функциях.

В результате этой подстановки имеем:

$$\sin x = \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2tg\left(\frac{x}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1-tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2arctgt, \quad dt = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Подставляя в подынтегральное выражение (8.10) вместо $\sin x$, $\cos x$, dx их значения, выраженные через переменную t, имеем:

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Подынтегральная функция рациональна относительно t.

Заметим, что с помощью универсальной подстановки удобно вычислять интегралы вида $\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + c}$.

Если подынтегральную функцию $R(\sin x, \cos x)$ можно представить в виде рациональной функции $R(tgx)$, то лучше воспользоваться подстановкой $t = tgx$, для которой

$$x = arctgt,\ dx = \frac{dt}{1+t^2},\quad \sin x = \frac{tgx}{\sqrt{1+tg^2x}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2x}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Аналогично, интегралы $\int R(ctgx)dx$ приводятся к рациональному виду с помощью подстановки $t = ctgx$.

В некоторых случаях нахождение интегралов вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ можно осуществить с помощью других подстановок. Укажем эти случаи.

1) Если $R(\sin x, \cos x)$ - четная функция относительно $\sin x,\ \cos x$, т.е. $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то интегралы $\int R(\sin x, \cos x)dx$ рационализируются подстановкой $t = tgx$, при этом используются формулы:

$$\sin^2 x = \frac{tg^2x}{1+tg^2x},\qquad \cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2x}.$$

2) Если $R(\sin x, \cos x)$ - нечетная функция относительно $\sin x$, т.е. $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то интеграл (8.10) рационализируется с помощью $t = \cos x$.

3) Если $R(\sin x, \cos x)$ - нечетная функция относительно $\cos x$, т.е. $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то интегралы $\int R(\sin x, \cos x)dx$ рационализируется с помощью $t = \sin x$.

Замечание 8.2. Интегралы вида $\int \frac{dx}{\sin^{2n+1} x}$, $\int \frac{dx}{\cos^{2n+1} x}$ лучше всего находить с помощью подстановки $t = tg\frac{x}{2}$.

Пример 8.27. Найти $\int \frac{dx}{4\cos x + 3\sin x + 5}$.

Полагаем $tg\frac{x}{2} = t$, тогда

$$\int \frac{dx}{4\cos x + 3\sin x + 5} = 2\int \frac{dt}{\left(4\frac{1-t^2}{1+t^2} + 3\frac{2t}{1+t^2} + 5\right)\left(1+t^2\right)} = 2\int \frac{dt}{t^2 + 6t + 9} = 2\int \frac{dt}{(t+3)^2} =$$

$$= -\frac{2}{t+3} + C = -\frac{2}{tg\frac{x}{2} + 3} + C$$

Пример 8.28. Найти $\int \frac{\cos^5 x dx}{\sin^6 x}$.

$R(\sin x, \cos x) = \frac{\cos^5 x}{\sin^6 x}$ - нечетная функция относительно $\cos x$: $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$. Применима подстановка $t = \sin x$.

$$\int \frac{\cos^5 x}{\sin^6 x} = \left| \begin{matrix} t = \sin x, \quad dt = \cos x dx, \\ \cos^2 x = 1 - t^2 \end{matrix} \right| = \int \frac{\left(1-t^2\right)^2 dt}{t^6} = \int \frac{1 - 2t^2 + t^4}{t^6} dt = \int \left(t^{-6} - 2t^{-4} + t^{-2}\right) dt =$$

$$= \frac{t^{-5}}{-5} - \frac{2t^{-3}}{-3} + \frac{t^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{5t^5} + \frac{2}{3t^3} - \frac{1}{t} + C,$$

где $t = \sin x$.

2. Интегрирование тригонометрических выражений с помощью тригонометрических формул

а) Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x dx;\quad m,\ n \in Z,\quad m \geq 0,\quad n \geq 0$. Если хотя бы одно из чисел m или n - нечетное положительное целое число, то, отделяя от нечетной степени один сомножитель и выражая с помощью формулы $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ оставшуюся четную степень через кофункцию, приходим к табличному интегралу. Либо, при нечетном n используют подстановку $t = \sin x$, при нечетном m - подстановку $t=\cos x$. Если же m и n- четные неотрицательные числа, то степени понижаются посредством перехода к двойному аргументу с помощью тригонометрических формул:

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2},\quad \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\quad \sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x.$$

Пример 8.29. Вычислить $\int \sin^2 x\cos^3 xdx$.

$$\int \sin^2 x\cos^3 xdx=\int \sin^2 x\left(1-\sin^2 x\right)d\sin x=\int\left(\sin^2 x-\sin^4 x\right)d\sin x=\frac{\sin^3 x}{3}-\frac{\sin^5 x}{5}+C$$

.

Пример 8.30. Найти $\int \sin^2 x\cos^4 xdx$.

$$\int \sin^2 x\cos^4 xdx=\int\left(\sin x\cos x\right)^2\cos^2 xdx=\int\frac{\sin^2 2x}{4}\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{8}\int \sin^2 2x+$$

$$+\frac{1}{8}\int \sin^2 2x\cos 2xdx=\frac{1}{8}\int\frac{1-\cos 4x}{2}dx+\frac{1}{16}\int \sin^2 2xd\sin 2x=\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}+\frac{\sin^3 2x}{48}+C.$$

Если $m+n=-2k,\ k\in N$, т.е. $\left(m+n\right)$ является целым четным отрицательным числом, то целесообразно использовать подстановки $tgx=t$ или $ctgx=t$.

б) Интегралы вида $\int tg^n xdx,\quad \int ctg^n xdx$, где $n\in N,\quad n>1$ находятся с помощью формул $tg^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}-1,\quad ctg^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}-1,$ последовательно понижая степень тангенса или котангенса. Либо эти интегралы вычисляются подстановками $tgx=t$ и $ctgx=t$ соответственно. Если $t=tgx$, то $x=arctgt,\quad dx=\frac{dt}{1+t^2}$. Тогда $\int tg^n xdx=\int\frac{t^n}{1+t^2}dt$. Последний интеграл при $n\ge 2$ является интегралом от неправильной рациональной дроби, которая вычисляется по правилу интегрирования рациональных дробей.

Аналогично, если $t=ctgx$, то $x=arcctgt,\quad dx=-\frac{dt}{1+t^2}$, откуда

$$\int ctg^n xdx=-\int\frac{t^n}{1+t^2}dt.$$

в) Интегралы вида $\int tg^m x \frac{1}{\cos^n x} dx$, $\int ctg^m x \frac{1}{\sin^n x} dx$, где n - целое четное положительное число, и интегралы вида $\int \frac{dx}{\sin^{2n} x}$, $\int \frac{dx}{\cos^{2m} x}$, где n, m - целые положительные числа, находят с помощью формул:

$$tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1, \quad ctg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1.$$

г) Интегралы вида $\int \sin mx \cos nx dx$, $\int \cos mx \cos nx dx$, $\int \sin mx \sin nx dx$ находят с помощью формул тригонометрии:

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\left(\sin(m-n)x + \sin(m+n)x\right),$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right),$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right).$$

Пример 8.31. Вычислить $\int tg^5 x dx$. Выполнив замену переменной, имеем:

$$\int tg^5 x dx = \left| \begin{matrix} tgx = t, \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{matrix} \right| = \int \frac{t^5}{1+t^2} dt = \int \left(t^3 - t + \frac{t}{t^2+1}\right) dt = \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\int \frac{d\left(t^2+1\right)}{t^2+1} =$$

$$= \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right) + C = \frac{1}{4}tg^4 x - \frac{1}{2}tg^2 x + \frac{1}{2}\ln\left(tg^2 x + 1\right) + C = \frac{1}{4}tg^4 x -$$

$$-\frac{1}{2}tg^2 x + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) + C = \frac{1}{4}tg^4 x - \frac{1}{2}tg^2 x - \ln\left|\cos x\right| + C.$$

Пример 8.32. Найти интеграл $\int \sin 3x \cos 5x dx$.

$$\int \sin 3x \cos 5x dx = \frac{1}{2}\int \left(\sin 8x - \sin 2x\right) dx = \frac{1}{2}\int \sin 8x dx - \frac{1}{2}\int \sin 2x dx =$$

$$= -\frac{1}{16}\cos 8x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$$

§ 9. Интегралы, не выражающиеся через элементарные функции

В § 1 – 8 рассматривались классы элементарных функций, интегралы от которых выражаются через элементарные функции, или, что то же, классы интегрируемых в конечном виде функций. Известно, что всякая непрерывная на $[a;b]$ функция $f(x)$ имеет первообразную, т.е. существует такая функция $F(x)$, что $F'(x)=f(x)$. Однако не всякую первообразную $F(x)$ можно выразить через конечное число элементарных функций. Так при интегрировании дифференциальных биномов $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ было отмечено, что их первообразные выражаются через элементарные функции (интегрируются в конечном виде) только в трех случаях: 1) $p\in Z$; 2) $\frac{m+1}{n}\in Z$; 3) $\frac{m+1}{n}+p\in Z$. Во всех остальных случаях интеграл от дифференциального бинома не выражается через элементарные функции.

Примеры интегралов, не выражающихся через элементарные функции:

$\int e^{-x^2}dx$ - интеграл Пуассона,

$\int \frac{\sin x}{x}dx$ - интегральный синус,

$\int \frac{\cos x}{x}dx$ - интегральный косинус,

$\int \frac{dx}{\ln x}$ - интегральный логарифм,

$\int \cos\left(x^2\right)dx, \int \sin\left(x^2\right)dx$ - интегралы Френеля,

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}$ - эллиптический интеграл первого рода,

$\int \sqrt{1-k^2\sin^2 x}dx$ - эллиптический интеграл второго рода.

Каждый из приведенных выше интегралов представляет собой функцию, не являющуюся элементарной.