при $\alpha = 0,05$, степенях свободы $f_1 = 10$ и даже $f_1 = 14$. Следовательно, уравнение (12) адекватно описывает факторное пространство.

Анализ уравнения (12) показывает, что на содержание Fe наибольшее влияние оказывает x_2 (смесь), влияние времени размола x_1 меньше. Минимальное содержание Fe ($y_1 = 1,714$ %) будет при $x_1 = -1$ и $x_2 = -1$, т.е. при времени размола 25 ч и смеси 3, а максимальное значение $y_1 = 8,571$ % – при $x_1 = +1$ и $x_2 = +1$, т.е. при времени измельчения 75 ч и смеси 1.

Литература

1. Podobeda, L.G. Effect of impurities on the properties of silicon nitride materials / L.G. Podobeda // Soviet powder metallurgy and Ceramics. – 1979. – V. 18, Issue 1. – pp. 59–63.

2. Вознесенский, В.А. Статистические методы планирования эксперимента в технико-экономических исследованиях / В.А. Вознесенский. – М.: Статистика, 1974. – 192 с.

УДК 666.3:661.687-026.771-046.66:519.2

Е.С. ГОЛУБЦОВА, д-р техн. наук (БНТУ),
Н.Б. КАЛЕДИНА (БГТУ),
Н.Б. БАЗЫЛЕВ, канд. физ.-мат. наук
(ИТМО им. А.В. ЛЫКОВА НАН РБ)

ВЛИЯНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ФАКТОРОВ НА СВОЙСТВА КЕРАМИКИ НА ОСНОВЕ НИТРИДА КРЕМНИЯ. СООБЩЕНИЕ II. ИССЛЕДОВАНИЕ ГРАНУЛОМЕТРИЧЕСКОГО СОСТАВА ИСХОДНОГО ПОРОШКА β-Si_3N_4 И ЕГО СМЕСИ С ОКСИДАМИ АЛЮМИНИЯ (Al_2O_3) И ТИТАНА (TiO_2) ОТ ВРЕМЕНИ ИЗМЕЛЬЧЕНИЯ

В настоящей работе приведены результаты исследования гранулометрического состава исходного порошка β-Si_3N_4 и смесей. По аналогии с предыдущей работой, исследования проводили также по плану эксперимента 3×5, где 3 – три уровня диаметра частиц порошка d, мкм (x_1 = 1, 3 и 5 мкм) и пять уровней времени размола x_2 = 0, 25, 50, 75 и 100 ч). В качестве параметра оптимизации было взято распределение частиц по размерам ($y_2 = V$, %).

Матрица плана 3×5 и результаты эксперимента приведены в таблице 1. Статистическую обработку результатов эксперимента проводили по методике [1] и формулам:

$$b_0 = A_0(0Y) - A_{01}(11Y) - A_{02}(22Y); \quad (1)$$

$$b_1 = A_1(1Y); \quad (2)$$

$$b_2 = A_2(2Y); \quad (3)$$

$$b_{12} = A_{12}(12Y); \quad (4)$$

$$b_{11} = A_{11}(11Y) - A_{01}(0Y); \quad (5)$$

$$b_{22} = A_{22}(22Y) - A_{02}(0Y); \quad (6)$$

$$\Delta b_0 = t \cdot S_y \sqrt{A_0}; \quad (7)$$

$$\Delta b_i = t \cdot S_y \sqrt{A_i}; \quad (8)$$

$$\Delta b_{ij} = t \cdot S_y \sqrt{A_{ij}}; \quad (9)$$

$$\Delta b_{ii} = t \cdot S_y \sqrt{A_{ii}}; \quad (10)$$

Здесь A_0 = 0,2954; A_{01} = 0,2 = A_{12}; A_{02} = 0,19048; A_1 = 0,1; A_2 = 0,1333; A_{11} = 0,3 и A_{22} = 0,38095.

Ошибка эксперимента S_2 = 8 %, дисперсия $S_2^2 = 64$, t = 1,753. Доверительные интервалы Δb_i соответственно были равны (после расчета по формулам (7)–(10)): Δb_0 = 7,62; Δb_1 = 4,43; Δb_2 = 5,12; Δb_{12} = 6,27; Δb_{11} = 7,68; Δb_{22} = 8,66. Коэффициенты уравнения регрессии после их расчетов по формулам (1)–(6) оказались равны b_0 = 94,3; b_1 = 12,4; b_2 = 17,4; b_{12} = –7; b_{11} = 7,3; b_{22} = –17,3, т.е. все коэффициенты можно считать значимыми (коэффициент b_{11} меньше Δb_{11} в пределах ошибки).

Таблица 1 – Матрица плана 3×5 и распределение частиц по размерам после 0; 25; 50; 75 и 100 ч размола

№ опыта	x_1	x_2	$x_1\ x_2$	x_1^2	x_2^2	$y_2 = V,\%$
1	–	–	+	+	+	25,7
2	–	–0,5	+0,5	+	0,25	68,6
3	–	0	0	+	+	75,7
4	–	+0,5	–0,5	+	0,25	77,1
5	–	+	–	+	+	82,9
6	0	–	0	0	+	57,1
7	0	–0,5	0	0	0,25	88,6
8	0	0	0	0	+	91,4
9	0	+0,5	0	0	0,25	94,3
10	0	+	0	0	+	97,1
11	+	–	–	+	+	71,4
12	+	–0,5	–0,5	+	0,25	94,3
13	+	0	0	+	+	95,7
14	+	+0,5	+0,5	+	0,25	95,7
15	+	+	+	+	+	97,1
$\sum$	124,2	130,7	–35,05	784,2	561	1212,7

Уравнение регрессии будет следующим:

$$y_2 = V,\% = 94{,}3 + 12{,}4x_1 + 17{,}4x_2 - 7x_1x_2 - 7{,}3x_1^2 - 17{,}3x_2^2 . \quad (11)$$

Проверка адекватности этого уравнения подтвердила эту гипотезу, т.к. $S_{\text{ад}}^2 = \dfrac{364{,}2}{15-6} = 40{,}466$, а $F = \dfrac{40{,}466}{64}$ < 1, т.е. адекватно при всех уровнях доверия α.

Анализ уравнения (11) показывает, что наибольшее влияние на содержание V, % (y_2) оказывает второй фактор x_2 (время размола). Чем оно больше, тем выше y_2 = V, %. Максимальная величина y_2 = 97 % будет при x_1 = –1 и x_2 = +1, т.е. диаметре частиц 5 мкм и времени размола 100 ч, а минимальная величина y_2 = 25,7 % будет при x_1 = –1 и x_2 = –1, т.е. при диаметре частиц 1 мкм и времени размола 0 ч.

В зависимости от времени размола и вида смесей дисперсность порошка также изменяется. Поэтому был проведен еще один эксперимент, в котором исследовали влияние этих факторов на величину пяти параметров оптимизации: y_3 – содержание частиц порошка размером до 1 мкм, %; y_4 – средний размер частиц порошка, мкм; y_5 – медианный размер частиц, мкм; y_6 – максимальный размер частиц, мкм; y_7 – удельная поверхность частиц порошка, м^2/г. Этот эксперимент проводился по плану N = 4×6, где 4 – четыре уровня времени размола (x_1 = –1, 25 ч; x_1 = –1/3, 50 ч; x_1 = +1/3, 75 ч; x_1 = +1, 100 ч); 6 – шесть уровней смесей (x_2 = –1, смесь 1; x_2 = –3/5, смесь 2; x_2 = –1/5, смесь 3; x_2 = +1/5, смесь 4; x_2 = +3/5, смесь 5 и x_2 = +1, смесь 6). Матрица плана 4×6 и результаты эксперимента приведены в таблице 2.

Таблица 2 – Матрица плана 4×6 и характеристики исследуемых порошков

№ опыта	x_1	x_2	x_1x_2	x_1^2	x_2^2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	D
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	–	–	+	+	+	64,7	1,6	0,75	15	3,3	0,469
2	–	–3/9	+3/5	+	9/25	70	1,6	0,68	15	3,7	0,928
3	–	–1/5	+1/5	+	1/25	57,5	2,7	0,67	20	3,3	0,327
4	–	+1/5	–1/5	+	1/25	57,6	2,9	0,81	20	3,1	0,244
5	–	+3/5	–3/5	+	9/25	78,4	1,3	0,57	12	4,2	0,723
6	–	+	–	+	+	63,6	2,2	0,71	20	3,6	0,400
7	–1/3	–	+1/3	+1/9	+	73,7	1,4	0,61	10	4,1	0,76
8	–1/3	–3/5	+0,2	+1/9	9/25	82,6	1,2	0,41	15	4,6	0,827
9	–1/3	–1/5	+0,07	+1/9	1/25	69,5	1,5	0,65	15	4,3	0,674
10	–1/3	+1/5	–0,07	+1/9	1/25	53,2	2,3	0,90	15	3,1	0,303
11	–1/3	+3/5	–0,2	+1/9	9/25	79,6	1,0	0,45	8	4,7	0,921
12	–1/3	+	–1/3	+1/9	+	68,4	1,8	0,63	16	3,9	0,608
13	+1/3	–	–1/3	+1/9	+	78,5	1,4	0,53	15	4,4	0,758
14	+1/3	–3/5	–0,2	+1/9	9/25	81,4	1,2	0,51	15	4,6	0,796
15	+1/3	–1/5	–0,07	+1/9	1/25	74,8	1,2	0,55	8	4,7	0,615
16	+1/3	+1/5	+0,07	+1/9	1/25	64,8	1,5	0,61	10	3,5	0,634
17	+1/3	+3/5	+0,2	+1/9	9/25	80,6	1,2	0,50	9	4,3	0,854
18	+1/3	+	+1/3	+1/9	+	67,6	1,8	0,64	16	3,8	0,587
19	+	–	–	+	+	70,2	1,6	0,67	10	3,8	0,661
20	+	–3/5	–3/5	+	9/25	76,4	1,5	0,54	15	4,3	0,735
21	+	–1/5	–1/5	+	1/25	74,0	1,2	0,52	10	4,5	0,828
22	+	+1/5	+1/5	+	1/25	80,4	1,1	0,47	8	4,6	0,910
23	+	+3/5	+3/5	+	9/25	81,2	1,1	0,48	10	4,4	0,868
24	+	+	+	+	+	69,2	1,8	0,65	18	3,7	0,529

Окончание таблицы 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\sum_1$	66,2	–16,6	–16,6	940,7	804,04	1718,2	–	–	–	–	–
$\sum_2$	–4	1,32	–0,44	22,54	11,412	–	38,1	–	–	–	–
$\sum_3$	–0,963	0,066	0,019	8,297	6,887	–	–	14,51	–	–	–
$\sum_4$	–3,3	7,4	0,07	190	159,16	–	–	–	325	–	–
$\sum_5$	4,3	–1,16	–0,213	52,06	44,372	–	–	–	–	96,5	–
$\sum_6$	1,447	–0,807	0,124	8,603	7,37	–	–	–	–	–	16,02

Для этого плана эксперимента A_0 = 0,16374; A_{01} = 0,11719; A_{02} = 0,12207; A_1 = 0,075; A_2 = 0,08929; A_{11} = 0,21094; A_{12} = 0,16071; A_{22} = 0,26158.

Для y_3 (содержание частиц размером до 1 мкм) после расчета значений коэффициентов уравнения при ошибке опытов S_3 = 3,6 ($S_3^2 = 12{,}96$) и t = 1,71 получены следующие величины: b_0 = 73; b_1 = 5; b_2 = 1,5; b_{12} = –2,8; b_{11} = –2,9; b_{22} = 0,6. Доверительные интервалы для них, рассчитанные по формулам (7)–(10), оказались равны: Δb_0 = 2,5; Δb_1 = 1,7; Δb_2 = 1,83; Δb_{12} = 2,45; Δb_{11} = 2,8; Δb_{22} = 3,8. Коэффициенты b_2 и b_{22} оказались незначимы. Уравнение регрессии будет иметь вид:

$$y_3 = 73 + 5x_1 - 2{,}8x_1x_2 - 2{,}9x_1^2 . \qquad (12)$$

Это уравнение можно представить графически (рисунок 1).

Проверка адекватности этого уравнения подтвердила эту гипотезу, т.к. $S_{\text{ад}}^2 = \dfrac{1322}{24-4} = 66$, а $F = \dfrac{66}{12{,}96} = 5{,}1$, что меньше $F_{\text{кр}}$ = 5,8 при α = 0,05, f_1 = 20, f_2 = 4.

Анализ этого уравнения показывает, что наибольшее влияние на этот параметр оптимизации оказывает x_1 (время размола); влияние вида смеси x_2 весьма невелико и сказывается только на величине взаимодействия x_1x_2.

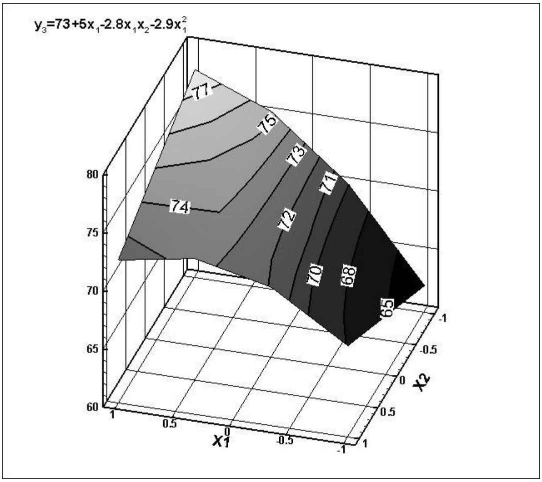

Рисунок 1 – Графическое представление уравнения (12)

Максимальная величина y_3 = 82,6 % получена при x_1 = –1/3 (50 ч) и x_2 = –3/5 (смесь 2). Однако расчетная величина $\hat{y}_3$ при x_1 = –1/3 и x_2 = –3/5 будет иметь значение 71,6 %. Поэтому более правильным следует считать максимальную величину y_3 = 81,2 % при x_1 = +1 (100 ч) и x_2 = +3/5 (смесь 5), т. к. расчетная величина $\hat{y}_3$ будет равна 73,4 %. Минимальная величина y_3 = 53,2 % получена при x_1 = –1/3 и x_2 = +1/5, т.е. при времени размола 50 ч и смеси 4.

Для y_4 (средний размер частиц порошка, мкм) коэффициенты уравнения регрессии, рассчитанные по формулам (1)–(6), оказались равны: b_0 = 2,204; b_1 = –0,3; b_2 = 0,12; b_{12} = –0,07; b_{11} = 0,29; и b_{22} = = –1,67. Доверительные интервалы Δb_i, рассчитанные по формулам (7)–(10) при ошибке опыта S_4 = 0,16 ($S_4^2 = 0{,}0256$), имеют значения: Δb_0 = 0,111; Δb_1 = 0,075; Δb_2 = 0,082; Δb_{12} = 0,11; Δb_{11} = 0,126 и Δb_{22} = 0,14. Следовательно, коэффициент b_{12} = –0,07 < Δb_{12} = 0,11 незначим, а уравнение регрессии будет таким:

$$y_4 = 2{,}204 - 0{,}3x_1 + 0{,}12x_2 + 0{,}29x_1^2 - 1{,}67x_2^2. \qquad (13)$$

Графическая интерпретация уравнения (13) представлена на рисунке 2.

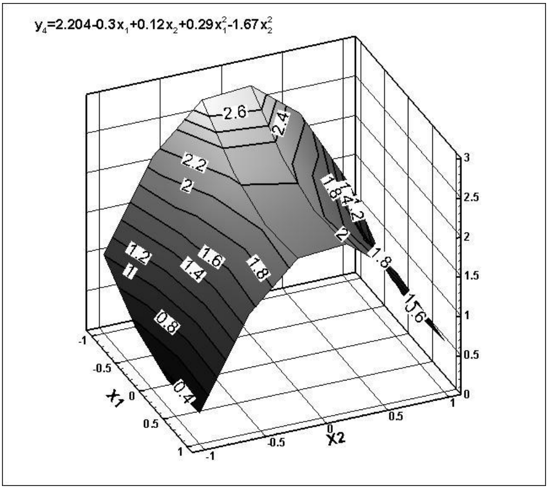

Рисунок 2 – Графическое представление уравнения (13)

Проверка адекватности этого уравнения показала, что дисперсия адекватности $S^2_{\text{ад}} = \dfrac{14{,}5}{24-5} = 0{,}763$, $F = \dfrac{0{,}763}{0{,}0256} = 29{,}81$. Табличное значение $F_{\text{кр}}$ = 99,4 при α = 0,01, f_1 = 19, f_2 = 2. Следовательно, уравнение (13) можно считать адекватным.

Анализ этого уравнения показывает, что здесь наибольшее влияние на средний размер частиц y_4 оказывает вид смеси x_2. Влияние времени размола x_1 намного меньше. Минимальное значение этого параметра y_4 = 1 мкм будет при x_1 = –1/3 (50 ч) и x_2 = +3/5 (смесь 5). Максимальный размер y_4 = 2,9 мкм будет при x_1 = –1 (25 ч) и x_2 = + 1/5 (смесь 4).

Для y_5 (медианный размер частиц, мкм) коэффициенты уравнения оказались равными: b_0 = 0,563; b_1 = –0,07; b_2 = 0,006; b_{12} = 0,003; b_{11} = 0,05; и b_{22} = 0,03, а доверительные интервалы (при ошибке опытов S_5 = 0,06 ($S_5^2 = 0{,}0036$) были равны: Δb_0 = 1,04; Δb_1 = 0,028; Δb_2 = 0,031; Δb_{12} = 0,048; Δb_{11} = 0,049 и Δb_{22} = 0,053, т.е. коэффициенты b_2, b_{12} и b_{22} – незначимы. Уравнение регрессии в этом случае будет иметь вид:

$$y_5 = 0{,}563 - 0{,}072 x_1 + 0{,}05 x_1^2 \,. \tag{14}$$

Графическое представление уравнения (14) дано на рисунке 3.

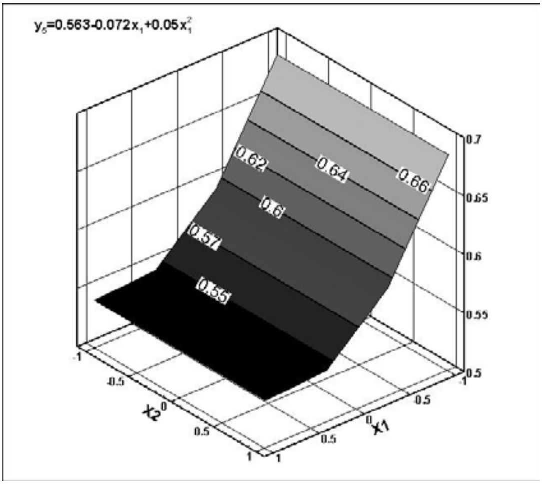

Рисунок 3 – Графическое представление уравнения (14)

Проверка адекватности этого уравнения подтвердила эту гипотезу, т.к. $S^2_{\text{ад}} = \dfrac{0{,}24152}{24-3} = 0{,}0115$, а $F = \dfrac{0{,}0115}{0{,}0036} = 3{,}194$, что меньше табличного значения $F_{\text{кр}} = 3{,}4$ при $\alpha = 0{,}05$, $f_1 = 21$, $f_2 = 7$.

Минимальная величина $y_5 = 0{,}41$ мкм получена при $x_1 = -1/3$ (50 ч), однако расчетная минимальная величина $y_5 = 0{,}541$ мкм будет при $x_1 = +1$ (100 ч). Влияние смеси x_2 нет, т.е. доля всех смесей порошков при 100 ч времени размола $y_5 = 0{,}541$ мкм.

Для y_6 (максимальный размер частиц, мкм) при ошибке опыта $S_6 = 1{,}354$ и ($S_6^2 = 1{,}833$) коэффициенты уравнения оказались равны: $b_0 = 11{,}521$; $b_1 = -2{,}475$; $b_2 = 0{,}661$; $b_{12} = 0{,}011$; $b_{11} = 2$; и $b_{22} = 1{,}96$.

Доверительные интервалы были равны: $\Delta b_0 = 0{,}937 < 11{,}521$; $\Delta b_1 = 0{,}634 < 2{,}475$; $\Delta b_2 = 0{,}692 > 0{,}661$; $\Delta b_{12} = 0{,}928 > 0{,}011$; $\Delta b_{11} = 1{,}063 < 2$ и $\Delta b_{22} = 1{,}184 < 1{,}96$, т.е. уравнение (после исключения незначимого b_{12}) может быть представлено в виде:

$$y_6 = 11{,}521 - 2{,}475x_1 + 0{,}661x_2 + 2x_1^2 + 1{,}96x_2^2. \qquad (15)$$

На рисунке 4 приведена графическая интерпретация уравнения (15).

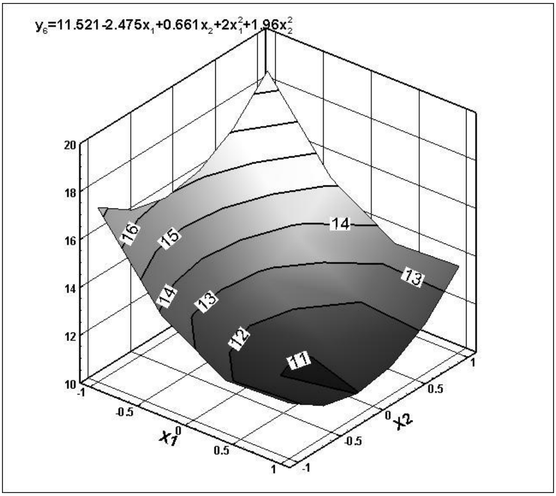

Рисунок 4 – Графическое представление уравнения (15)

Проверка адекватности этого уравнения подтвердила эту гипотезу, т.к. $S_{\text{ад}}^2 = \dfrac{230{,}466}{24-5} = 12{,}13$, а $F = \dfrac{12{,}13}{1{,}833} = 6{,}617$, что меньше $F_{\text{кр}} = 7{,}3$ при $\alpha = 0{,}01$, $f_1 = 19$, $f_2 = 6$. Здесь максимальный размер частиц $y_6 = 20$ мкм получен при $x_1 = -1$ (25 ч) и $x_2 = +1$ (смесь 6). Расчетная величина $\hat{y}_6 = 18{,}62$ мкм.

Для последнего параметра y_7 (удельная поверхность, м^2/г) значения коэффициентов (при ошибке опытов $S_7 = 0{,}402$, $S_7^2 = 0{,}1617$) оказались равны: $b_0 = 4{,}284$; $b_1 = 0{,}323$; $b_2 = -0{,}104$; $b_{12} = -0{,}034$; $b_{11} = 0{,}327$; и $b_{22} = -0{,}173$, доверительные интервалы соответственно: $\Delta b_0 = 0{,}278$; $\Delta b_1 = 0{,}188$; $\Delta b_2 = 0{,}205$; $\Delta b_{12} = 0{,}275$; $\Delta b_{11} = 0{,}316$ и $\Delta b_{22} = 0{,}351$.

Таким образом, коэффициенты b_2, b_{12} и b_{22} – незначимы, а уравнение регрессии может быть представлено в виде:

$$y_7 = 4{,}284 + 0{,}323x_1 - 0{,}327x_1^2. \qquad (16)$$

Графическое представление уравнения (16) дано на рисунке 5.

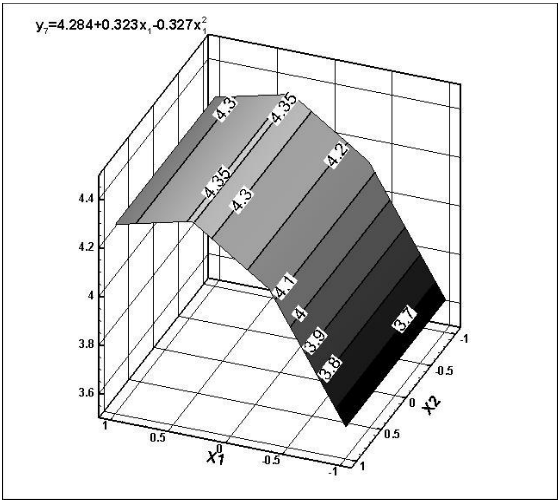

Рисунок 5 – Графическое представление уравнения (16)

Это уравнение адекватно, т.к. $S^2_{\text{ад}} = \frac{4{,}483}{24-3} = 0{,}213$, а $F = \frac{0{,}213}{0{,}1617} = 1{,}278$, что меньше $F_{\text{кр}} = 2{,}0$ при $\alpha = 0{,}05$, $f_1 = 21$ и даже $f_2 = 23$.

Анализ этого уравнения показывает, что вид смеси x_2 не оказывает влияния на удельную поверхность частиц; главным определяющим фактором является время размола x_1. Максимальная величина $y_7 = 4{,}7$ будет при $x_1 = +1/3$ (75 ч времени размола).

Анализ полученных уравнений (12)–(16) показывает, насколько противоречивый характер влияния времени размола и вида смеси на исследуемые параметры y_3, y_4, y_5, y_6 и y_7. В связи с этим для поиска оптимальных условий для этих параметров можно использовать обобщенный параметр оптимизации $D = \sqrt[n]{d_1 \cdot d_2 \ldots d_i}$ [1], где d_1; $d_2 \ldots d_i$ – частные функции желательности i–го параметра, который в свою очередь определяется по формуле:

$$d_i = \exp[-\exp(-y')] = e^{-e^{-y'_i}}, \tag{17}$$

где y'_i – кодированный уровень i–го параметра.

Для нахождения y'_i, d_i и D сначала составим таблицу 3 частных функций желательности d_i для исследуемых частных параметров оптимизации y_3, y_4, y_5, y_6 и y_7.

Таблица 3 – Частные функции желательности для параметров оптимизации

Частная функция желательности, d_i	Кодированное значение параметров, y_i	y_3 – содержание частиц до 1 мкм	y_4 – средний размер частиц, мкм	y_5 – медианный размер частиц, мкм	y_6 – максимальный размер частиц, мкм	y_7 – удельная поверхность, $м^2/г$
1,00–0,80 (отлично)	3,000	85	1,0	0,4	8	5,0
0,80–0,63 (хорошо)	1,500	75	1,5	0,5	11	4,5
0,63–0,37 (удовл-но)	0,850	65	2,0	0,6	14	4,0
0,37–0,20 (плохо)	0,000	55	2,5	0,7	17	3,5
0,20–0,00 (очень плохо)	–0,500	45	3,0	0,8	20	3,0

При выборе уровней параметров полагали, что содержание частиц до 1 мкм должно быть больше, средний размер частиц, напротив, должен быть меньше, также как и медианный размер частиц, а максимальный размер и величина удельной поверхности – больше.

Для расчета кодированных значений уровней параметров построим график функции желательности (рисунок 6). Для кодирования частных параметров оптимизации взяты три равномерных интервала на оси абсцисс (–3, –2, –1, 0; +1, +2, +3), параллельно оси абсцисс проведены пять прямых и отложены на них натуральные значения параметров оптимизации, соответствующие кодированным значениям.

Пользуясь рисунком 6 и данными таблицы 3, найдем y_i' и d_i для каждой строки таблицы 3. Частные функции желательности находим по формуле (17). Результаты этих расчетов приведены в таблице 4.

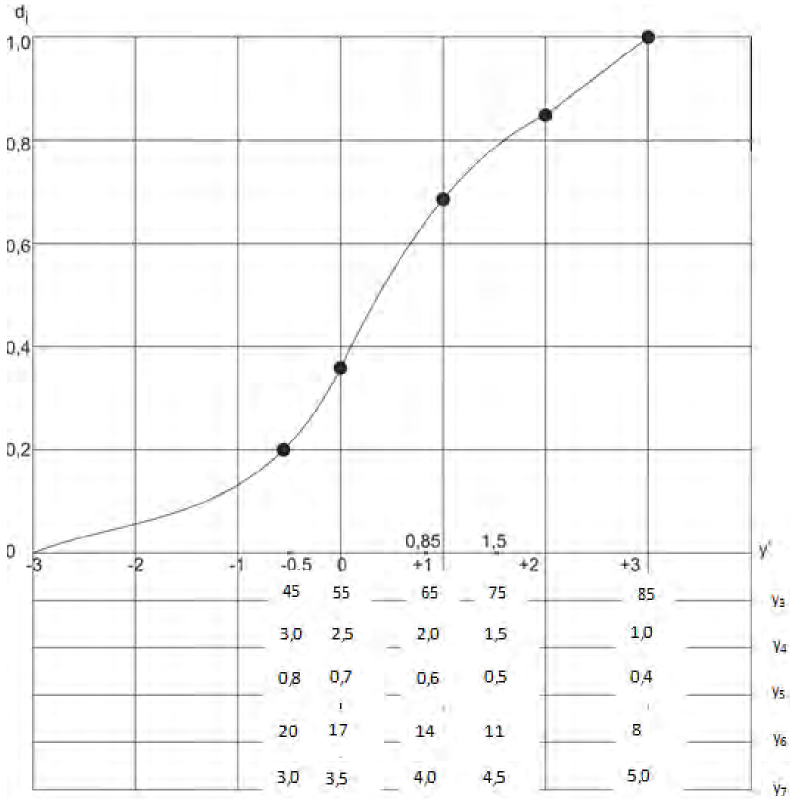

Рисунок 6 – График функции желательности

Таблица 4 – Кодированные уровни и частные функции желательности d_i для исследуемых параметров оптимизации

№ опыта	y'_3	d_3	y'_4	d_4	y'_5	d_5	y'_6	d_6	y'_7	d_7	D
1	0,85	0,63	1,37	0,776	–0,250	0,277	0,57	0,570	–0,20	0,295	0,469
2	1,175	0,734	1,37	0,776	0,170	0,432	0,57	0,570	0,34	0,491	0,928
3	0,213	0,466	–0,20	0,295	0,255	0,461	–0,50	0,200	–0,20	0,295	0,327
4	0,214	0,470	–0,40	0,225	–0,520	0,180	–0,50	0,200	–0,40	0,225	0,244
5	2,01	0,875	2,10	0,885	1,045	0,702	1,28	0,756	1,11	0,718	0,783
6	0,731	0,616	0,51	0,548	–0,05	0,349	–0,50	0,200	0,17	0,432	0,400
7	1,416	0,785	1,80	0,848	0,765	0,631	2,00	0,873	0,98	0,691	0,760
8	2,64	0,930	2,40	0,913	2,85	0,944	0,57	0,570	1,70	0,848	0,827
9	1,143	0,786	1,50	0,800	0,425	0,520	0,52	0,570	1,24	0,748	0,674
10	–0,09	0,335	0,34	0,492	–1,00	0,120	0,57	0,570	–0,40	0,225	0,303
11	2,19	0,831	3,00	1,000	2,25	0,900	3,00	1,00	2,10	0,885	0,921
12	1,07	0,711	1,11	0,718	0,595	0,578	0,28	0,468	0,68	0,601	0,608
13	2,03	0,875	1,80	0,848	1,305	0,763	0,57	0,570	1,37	0,776	0,758
14	2,46	0,920	2,40	0,913	1,435	0,786	0,57	0,570	1,80	0,848	0,796
15	1,50	0,800	2,40	0,913	1,175	0,734	3,00	1,00	2,10	0,885	0,615
16	0,85	0,630	1,50	0,800	0,765	0,630	2,00	0,873	0,00	0,370	0,634
17	2,34	0,903	2,40	0,913	1,500	0,800	2,50	0,921	1,24	0,748	0,854
18	1,02	0,698	1,11	0,718	0,51	0,548	0,28	0,468	0,51	0,548	0,587
19	1,19	0,738	1,37	0,776	0,255	0,461	2,00	0,873	0,51	0,548	0,661
20	1,71	0,842	1,50	0,800	1,240	0,748	0,57	0,570	1,24	0,748	0,735
21	1,44	0,786	2,40	0,913	1,370	0,776	2,00	0,873	1,50	0,800	0,828
22	2,31	0,907	2,70	0,935	1,950	0,867	3,00	1,00	1,80	0,848	0,910
23	2,43	0,915	2,70	0,935	1,800	0,848	2,00	0,873	1,37	0,776	0,868
24	1,129	0,744	1,11	0,718	0,425	0,520	–0,17	0,304	0,34	0,491	0,529

Полученные значения обобщенного параметра D внесены также в таблицу 4. Пользуясь полученными значениями D, можно получить уравнение регрессии, связывающее этот параметр со временем размола (x_1) и видом смесей (x_2). В результате расчетов получили следующие значения коэффициентов уравнения: b_0 = 0,715; b_1 = 0,109; b_2 = –0,072; b_{12} = 0,02; b_{11} = –0,63 и b_{22} = –0,028.

Доверительные интервалы Δb_i для этих коэффициентов, рассчитанные по формулам (7)–(10), оказались равны (при ошибке эксперимента S_D = 0,067, $S_D^2 = 0{,}0045$): Δb_0 = 0,046; Δb_1 = 0,031; Δb_2 = 0,034; Δb_{12} = 0,0457; Δb_{11} = 0,0523 и Δb_{22} = 0,0589.

Таким образом, коэффициенты b_{12} и b_{22} незначимы, а уравнение будет таким:

$$D = 0{,}715 + 0{,}109x_1 - 0{,}072x_2 - 0{,}063x_1^2 . \quad (18)$$

Это уравнение оказалось адекватным, т.к. $S^2_{\text{ад}} = \dfrac{1{,}380708}{24-3} = 0{,}069$,

а $F = \dfrac{0{,}069}{0{,}0045} = 15{,}3$, что меньше $F_{\text{кр}} = 26$ при $\alpha = 0{,}01$, $f_1 = 20$ и $f_2 = 3$.

Анализ этого уравнения показывает, что на обобщенный параметр D наибольшее влияние оказывает x_1 (время размола); влияние смеси (x_2) намного меньше. Максимальная расчетная величина $D_{\max} = 0{,}833$ (отличный результат) будет при $x_1 = -1$ (25 ч) и $x_2 = -1$ (смесь 1). Опытные значения $D = 0{,}469$ в первой строке следует признать ошибочными. Но, строго говоря, оптимальными условиями будут $x_1 = -1$ и $x_2 = -3/5$ (смесь 2), когда расчетная величина $\hat{D} = 0{,}804$, а опытное значение этого параметра $D = 0{,}928$ (см. опыт № 2).

Определенный интерес может вызвать вопрос о корреляции исследуемых частных параметров, чтобы, зная тесную корреляционную связь, можно было бы рассчитать величину другого параметра, не проводя дальнейших измерений.

Для этого рассчитаем величину коэффициента парной корреляции $r_{i,j}$ по формуле :

$$r_{i,j} = \frac{\sum_1^N (y_i - \bar{y}_i)(y_i - \bar{y}_j)}{\sqrt{\sum_1^N (y_i - \bar{y}_i)^2 \sum_1^N (y_i - \bar{y}_j)^2}}, \qquad (19)$$

где $\bar{y}_i$ и $\bar{y}_j$ средние значения i- и j-го параметров. В результате получили следующие значения этих коэффициентов: $r_{3,4} = -0{,}806$; $r_{3,5} = -0{,}448$; $r_{3,6} = -0{,}586$; $r_{3,7} = 0{,}181$; $r_{4,5} = 0{,}776$; $r_{4,6} = 0{,}788$; $r_{4,7} = -0{,}854$; $r_{5,6} = 0{,}545$; $r_{5,7} = -0{,}901$; $r_{6,7} = -0{,}606$. Табличное (критическое) значение $r_{i,j} = 0{,}445$ наблюдается при $\alpha = 0{,}02$ и $n = 24$.

Таким образом, только между y_3 и y_7 нет линейной корреляции. Для остальных параметров можно рассчитать корреляционную связь в виде $y_j = b_0 + b_1 y_i$, пользуясь формулами:

$$b_i = \frac{\sum_1^N (y_i - \bar{y}_i)(y_i - \bar{y}_j)}{\sqrt{\sum_1^N (y_i - \bar{y}_i)^2}}; \tag{20}$$

$$b_0 = \bar{y}_j + b_1 \bar{y}_i . \tag{21}$$

Эти уравнения будут такими:

$$y_4 = 5{,}486 - 0{,}055 y_3 ; \tag{22}$$

$$y_5 = 1{,}342 - 0{,}01 y_3 ; \tag{23}$$

$$y_7 = 33{,}2 - 0{,}28 y_3 ; \tag{24}$$

$$y_5 = 0{,}357 - 0{,}16 y_4 ; \tag{25}$$

$$y_6 = 3{,}738 + 6{,}18 y_4 ; \tag{26}$$

$$y_7 = 5{,}433 - 0{,}89 y_4 ; \tag{27}$$

$$y_6 = 2{,}559 + 18{,}235 y_5 ; \tag{28}$$

$$y_7 = 6{,}429 - 3{,}983 y_5 ; \tag{29}$$

$$y_7 = 5{,}112 - 0{,}081 y_6 . \tag{30}$$

Литература

1. Адлер, Ю.П. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий / Ю.П. Адлер, Е.В. Маркова, Ю.В. Грановский. – М.: Наука, 1976. – 277 с.

2. Вознесенский, В.А. Статистические методы планирования эксперимента в технико-экономических исследованиях / В.А. Вознесенский. – М.: Статистика, 1974. – 192 с.