

Министерство образования  
Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

**Конспект лекций  
по математике  
для студентов инженерно-  
технических специальностей**

**В 3 частях**

**Часть 2**

**Электронное учебное издание**

**Минск БНТУ 2006**

Авторы:

*Л.А. Барминова, Л.В. Бокуть, О.Г. Вишневская,  
Е.А. Глинская, Н.А. Кондратьева, И.Г. Латышева,  
А.Н. Мелешко, Р.В. Михнова, Н.К. Прихач,  
И.В. Прусова*

*Электронная версия И.Л. Алифановой*

*Под редакцией: В.А.Нифагина, Л.В.Бокуть*

*Рецензент: Кандидат технических наук В.И.Юринок*

© БНТУ, 2006

9. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ .....	4
9.1. Задачи, приводящие к интегральным суммам и их пределам.....	4
9.2. Определенный интеграл .....	8
9.3. Основные методы вычисления определенного интеграла .....	25
9.4. Несобственные интегралы.....	28
9.5. Геометрические и механические приложения определенного интеграла .....	37
10. ИНТЕГРАЛЫ ПО ФИГУРЕ ОТ СКАЛЯРНЫХ ФУНКЦИЙ (ОПРЕДЕЛЕННЫЙ, КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ I РОДА) .....	78
10.1. Задача о массе фигуры, приводящая к понятию интеграла по фигуре от скалярной..... функции .....	78
10.2. Основные свойства интегралов по фигуре от скалярных функций .....	83
10.3. Двойной интеграл. Определение. Свойства.....	84
10.4. Вычисление двойного интеграла в декартовых прямоугольных координатах .....	87
10.5. Тройной интеграл. Определение. Вычисление.....	90
10.6. Замена переменных в кратных интегралах (по Остроградскому) .....	94
10.7. Криволинейный интеграл по длине дуги .....	101
10.8. Поверхностный интеграл по площади поверхности.....	106
11. ИНТЕГРАЛ ПО ОРИЕНТИРОВАННОЙ ФИГУРЕ ОТ ВЕКТОРНОЙ ФУНКЦИИ .....	109
11.1. Векторная функция трех переменных. Ориентированная фигура .....	109
11.2. Интеграл по ориентированной фигуре от векторной функции. Теорема существования .....	110
11.3. Криволинейный и поверхностный интегралы второго рода. Свойства интеграла по фигуре от векторной функции и его механический смысл .....	112
11.4. Вычисление криволинейного интеграла второго рода .....	115
11.5. Вычисление поверхностного интеграла второго рода.....	119
11.6. Теорема и формула Остроградского–Грина .....	122
11.7. Независимость криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования. Условие независимости в случае плоской кривой. Определение функции двух переменных..... по ее полному дифференциалу.....	124
12. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И МЕХАНИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛА ПО ФИГУРЕ	130
12.1. Общие сведения .....	130
12.2. Применение в геометрии интеграла по фигуре от скалярной функции.....	130
12.3. Применение в механике интеграла по фигуре от скалярной функции .....	135
12.4. О приложениях интеграла по ориентированной фигуре от векторной функции.....	141
13. Теория поля .....	143
13.1. Скалярное поле .....	143
13.2. Векторное поле .....	147
13.3. Поток векторного поля через поверхность .....	155
13.4. Линейный интеграл и циркуляция векторного поля.....	166
14. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ .....	173
14.1. Потенциальное векторное поле.....	173
14.2. Соленоидальное векторное поле.....	178
14.3. Гармонические поля .....	180

## 9. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

### 9.1. Задачи, приводящие к интегральным суммам и их пределам

#### 9.1.1. Нахождение площади криволинейной трапеции

Рассмотрим произвольную криволинейную трапецию, то есть плоскую область, ограниченную графиком неотрицательной функции  $y = f(x)$ , определенной на отрезке  $[a; b]$ , и прямыми  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $y = 0$  (рис. 9.1)

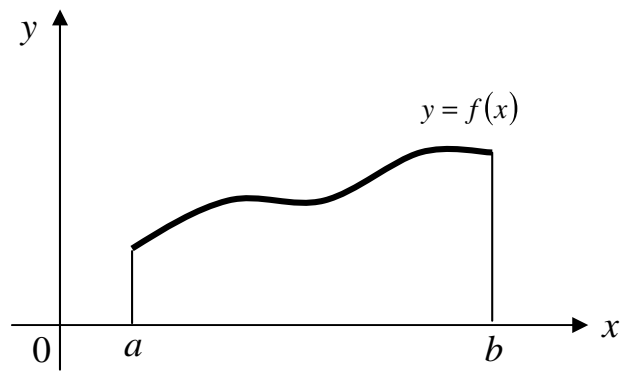


Рис. 9.1

Ставится задача о нахождении площади такой области.

Здесь возникает трудность, потому что такая область не всегда является многоугольником и может иметь сложную форму. Введем понятие площади произвольной криволинейной трапеции.

Разобьем отрезок  $[a; b]$  произвольным образом точками  $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$ .

На каждом отрезке  $[x_{i-1}, x_i]$  ( $i = \overline{1, n}$ ) выберем произвольную точку  $p_i$ . Обозначим  $(x_i - x_{i-1})$  через  $\Delta x_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ), а число  $\max \Delta x_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) – через  $\lambda$ .

Если число  $\lambda$  достаточно мало, то есть если разбиение достаточно частое, то можно считать, что на всяком отрезке  $[x_{i-1}, x_i]$  функция  $f(x)$  почти не меняется.

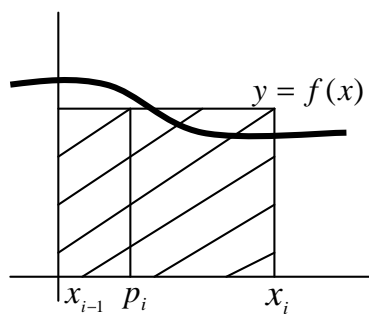


Рис. 9.2

Это означает, что произведение  $f(p_i)\Delta x_i$  есть приближенное значение “площади” части криволинейной трапеции, заключенной между прямыми  $x = x_{i-1}$ ,  $x = x_i$  (рис. 9.2).

Тогда сумму  $\sum_{i=1}^n f(p_i)\Delta x_i$  можно считать приближенным значением “площади” всей криволинейной трапеции (рис. 9.3). Это приближение тем “точнее”, чем меньше  $\lambda$ .

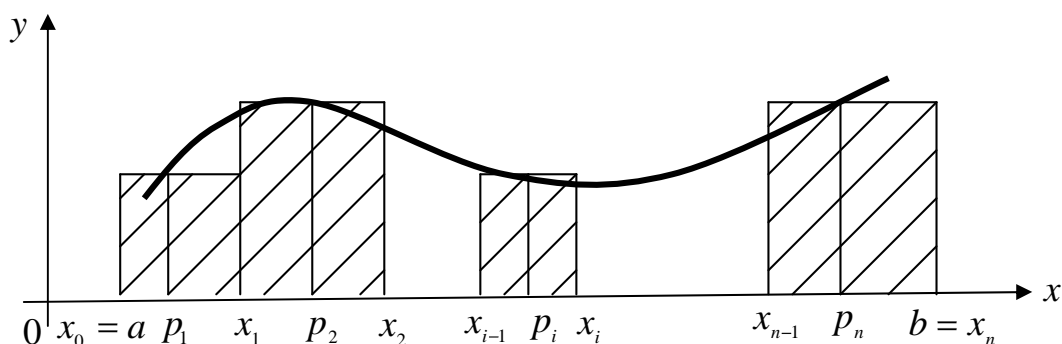


Рис. 9.3

Итак, естественно определить площадь криволинейной трапеции как предел

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(p_i)\Delta x_i,$$

если этот предел конечен и не зависит от способа разбиения отрезка  $[a; b]$  точками  $x_i$  и выбора точек  $p_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ).

### 9.1.2. Задача о вычислении длины пути по заданной скорости

Пусть точка  $M$  движется прямолинейно с переменной скоростью  $v = f(t)$ . Вычислим длину пути, пройденного точкой  $M$  за промежуток времени от  $t_0$  до

$T$ . Промежуток  $[t_0, T]$  разобьем на  $n$  элементарных промежутков  $[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, T]$  длиной  $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$  ( $t_n = T$ ).

В течение малого промежутка времени  $\Delta t_k$  скорость движения можно приближенно считать постоянной и равной  $f(t'_k)$ , где  $t'_k$  – некоторое значение  $t$  из промежутка  $[t_{k-1}; t_k]$ . Поэтому длина пути, пройденного за этот промежуток, приближенно равна  $f(t'_k)\Delta t_k$ . Складывая все частичные длины  $f(t'_k)\Delta t_k$ , получаем приближенное значение длины пути, пройденного точкой за промежуток от  $t_0$  до  $T$ :

$$S_n \approx \sum_{k=1}^n f(t'_k)\Delta t_k.$$

Переходя к пределу, находим точное значение длины пути:

$$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(t'_k)\Delta t_k, \quad (9.1)$$

где  $\lambda = \max \Delta t_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ).

Итак, пройденный путь равен пределу интегральной суммы (9.1) функции  $v = f(t)$  на отрезке  $[t_0, T]$ .

Более строгое определение интегральной суммы будет дано.

### 9.1.3. Нахождение массы прямолинейного стержня

Рассмотрим произвольный материальный прямолинейный стержень. Будем считать его идеальным (то есть таким, поперечными размерами которого можно пренебречь), и, следовательно, его можно интерпретировать как отрезок  $[a; b]$  на оси абсцисс.

Вычислим массу такого стержня.

Возникает трудность в том, что стержень не всегда однороден и что материал стержня может быть распределен вдоль него сложным образом.

Введем понятие массы такого стержня.

Будем считать, что в каждой точке  $X \in [a; b]$  задана линейная плотность массы  $\gamma(x)$  отрезка  $[a; b]$ :

$$\gamma(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\text{масса}([a; b] \cap O_\delta(x))}{\text{длина}([a; b] \cap O_\delta(x))}.$$

Здесь  $[a; b] \cap O_\delta(x)$  – это сама окрестность  $O_\delta(x)$ , если  $x \in ]a, b[$ , и это ее половина (левая или правая), если  $x = a$  или  $x = b$ . Таким образом, отношение

$$\frac{\text{масса}([a; b] \cap O_\delta(x))}{\text{длина}([a; b] \cap O_\delta(x))}$$

есть средняя плотность части стержня  $[a; b]$ , заключенной в окрестности  $O_\delta(x)$ , а линейная плотность массы в точке  $X$  есть ее предел, когда окрестность точки стягивается в эту точку.

Разобьем отрезок  $[a; b]$  произвольным образом точками  $x_0 = a < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ . На каждом отрезке  $[x_{i-1}, x_i]$  ( $i = \overline{1, n}$ ) выберем произвольную точку  $p_i$ . Обозначим  $(x_i - x_{i-1})$  через  $\Delta x_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ), а число  $\max \Delta x_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) через  $\lambda$ . Если число  $\lambda$  достаточно мало (то есть если разбиение достаточно частое), то можно считать, что на всяком отрезке  $[x_{i-1}, x_i]$  плотность почти не меняется. Это означает, что произведение  $\gamma(p_i)\Delta x_i$  есть приближенное значение “массы” отрезка  $[x_{i-1}, x_i]$ . Следовательно, сумму  $\sum_{i=1}^n \gamma(p_i)\Delta x_i$  можно считать приближенным значением “массы” всего стержня. Это приближение будет тем “точнее”, чем меньше будет значение  $\lambda$ .

Определим массу отрезка как предел

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \gamma(p_i) \Delta x_i ,$$

если этот предел конечен и не зависит от способа разбиения отрезка  $[a;b]$  точками  $x_i$  и выбора точек  $p_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) в отрезках разбиения.

## 9.2. Определенный интеграл

### 9.2.1. Понятие определенного интеграла

Очевидно, что задачи, рассмотренные выше, решались одним и тем же способом, который состоит в следующем:

1. На отрезке  $[a;b]$  задается функция  $y = f(x)$ .
2. Этот отрезок  $[a;b]$  произвольным образом разбивается точками  $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$ .
3. В каждом отрезке  $[x_{i-1}, x_i]$  произвольно выбирается точка  $p_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ).
4. Составляется сумма  $\sum_{i=1}^n f(p_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(p_i) \Delta x_i$ , которая называется  **$n$ -й интегральной суммой** для функции  $y = f(x)$  по отрезку  $[a;b]$ , соответствующей разбиению  $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$ .
5. Вычисляется предел этих сумм

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(p_i) \Delta x_i ,$$

где  $\lambda = \max \Delta x_i, 1 \leq i \leq n$ .

Полученное число называется **интегралом Римана**.

**Определение 9.1.** Пусть функция  $f$  определена на отрезке  $[a;b]$ . **Определенным интегралом (интегралом Римана)** от функции  $f$  по отрезку  $[a;b]$  называется



$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(p_i) \Delta x_i,$$

если этот предел конечен при  $\lambda \rightarrow 0$  и не зависит от способа разбиения отрезка  $[a; b]$  на отрезки  $[x_{i-1}, x_i]$  и выбора промежуточных точек  $p_i \in [x_{i-1}, x_i]$  ( $i = \overline{1, n}$ ).

Этот интеграл обозначают

$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(p_i) \Delta x_i. \quad (9.2)$$

Если указанный предел существует, то функция  $f(x)$  называется **интегрируемой на отрезке  $[a; b]$  (или интегрируемой по Риману)**. При этом  $f(x) dx$  называется подынтегральным выражением,  $f(x)$  – подынтегральной функцией,  $x$  – переменной интегрирования, а числа  $a$  и  $b$  – соответственно нижним и верхним пределами интегрирования.

**Вывод:** определенный интеграл есть число, равное пределу, к которому стремится интегральная сумма, в случае когда диаметр разбиения  $\lambda$  стремится к нулю. Вычисление определенного интеграла сводится к вычислению неопределенного интеграла от той же подынтегральной функции, причем сходство их обозначений облегчает запись и заполнение формул интегрирования. Имеется существенное отличие между определенным и неопределенным интегралом: определенный интеграл от функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$  есть некоторое число, в то время как неопределенный интеграл представляет собой множество всех первообразных функций  $F(x) + C$  для данной функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$ .

Классы функций, для которых интеграл Римана всегда существует:

- а) функции, непрерывные на  $[a; b]$ ;
- б) функции, ограниченные на  $[a; b]$  и имеющие конечное число точек разрыва первого рода;

в) ограниченные и монотонные на  $[a;b]$  функции.

### 9.2.2. Геометрический смысл определенного интеграла

Геометрически определенный интеграл (9.2) представляет собой алгебраическую сумму площадей участков криволинейной трапеции, ограниченной графиком подынтегральной функции, осью абсцисс и прямыми, параллельными оси ординат, построенными на концах интервала интегрирования, в случае если подынтегральная функция положительна.

Если подынтегральная функция отрицательна или меняет знак, то в интегральную сумму (9.2) площади участков, лежащих выше оси  $X$ , войдут со знаком “+”, а площади участков, лежащих ниже оси  $X$ , – со знаком “–”:

$$\int_b^a f(x) dx = S_1 - S_2 + S_3.$$

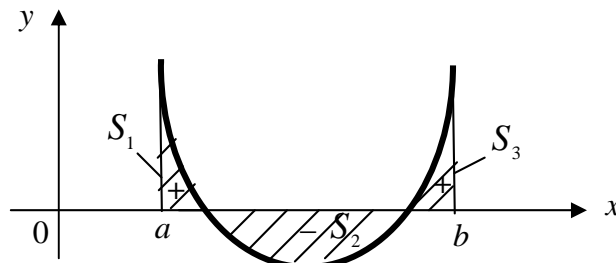


Рис. 9.4

### 9.2.3. Физический смысл определенного интеграла

Пусть имеется точка прямолинейного движения вдоль числовой оси с непрерывно меняющейся скоростью  $v(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ . Смещение точки за малый промежуток времени  $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$  приближенно можно считать равным  $v(p_k)\Delta t_k$ , где  $p_k \in [t_{k-1}; t_k]$ . Тогда интегральная сумма  $\sum_{k=1}^n v(p_k)\Delta t_k$  представляет собой

приближенное значение пути, пройденного точкой от момента времени  $t_0$  до  $T$ . В пределе при  $\lambda = \max\{\Delta t_k\} \rightarrow 0$  получим точное значение этого пути  $S$ , т. е.

$$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n v(p_k) \Delta t_k = \int_{t_0}^T v(t) dt.$$

#### 9.2.4. Условия существования определенного интеграла

Необходимое условие интегрируемости функций сформулируем без доказательства в виде следующей теоремы.

*Теорема 9.1.* Если  $\int_a^b f(x) dx$  существует, то функция  $f(x)$  ограничена на отрезке  $[a; b]$ .

Покажем на примере, что ограниченность является необходимым, но не достаточным условием интегрируемости функции на отрезке  $[a; b]$ , т. е. что существуют ограниченные функции, не являющиеся интегрируемыми.

**Пример 9.1.** Доказать, что функция Дирихле  $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ - рациональное число;} \\ 0, & \text{если } x \text{ - иррациональное число} \end{cases}$  не интегрируема на  $[0; 1]$ .

**Решение.** Если при разбиении отрезка  $[0; 1]$  на частичные отрезки выбрать на каждом из них рациональную точку  $\xi_k \in [x_{k-1}; x_k]$ , получим

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n 1 \cdot \Delta x_k = 1.$$

Если же выбрать иррациональную точку  $\xi_k$ , имеем

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n 0 \cdot \Delta x_k = 0.$$

Таким образом, при разбиении  $\tau_n$  отрезка  $[0;1]$  на частичные отрезки интегральная сумма может принимать как значение, равное 0, так и значение, равное 1. Следовательно, предел интегральной суммы не существует, т. е. не существует определенный интеграл, хотя функция Дирихле ограничена на всей числовой оси.

Сформулируем без доказательства достаточное условие интегрируемости функции.

*Теорема 9.2.* Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a;b]$ , то она интегрируема на этом отрезке, т. е. существует  $\int_a^b f(x)dx$ .

Интеграл Римана существует для значительно более широкого класса функций, нежели класс непрерывных функций.

*Теорема 9.3.* Если функция  $f(x)$  ограничена на отрезке  $[a;b]$  и непрерывна на нем всюду, кроме конечного числа точек разрыва первого рода, то она интегрируема на этом отрезке.

### 9.2.5. Связь определенного интеграла с неопределенным

*Замечание.* Определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования, т. е.

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(s)ds = \dots \quad (9.3)$$

Это вытекает хотя бы из геометрического смысла интеграла, так как все записанные интегралы равны одной и той же площади.

Пусть дана некоторая функция  $f(x)$ , которую мы будем интегрировать. Однако только нижний предел  $x_0$  мы будем считать зафиксированным, а верхний предел  $x$  будем считать произвольным, переменным. Тогда результат

интегрирования будет зависеть от  $x$ , и мы его обозначим через  $\Phi(x)$ :

$$\Phi(x) = \int_{x_0}^x f(x) dx \quad \left( \begin{array}{l} x_0 = \text{const} \\ x \in [\alpha; \beta] \end{array} \right) \text{ или, имея в виду равенства (9.3):}$$

$$\Phi(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt \quad \left( \begin{array}{l} x_0 = \text{const} \\ x \in [\alpha; \beta] \end{array} \right). \quad (9.4)$$

Первая запись, хотя и допустимая, иногда приводит к недоразумениям, так как буква  $x$  в ней имеет два различных смысла (верхний предел и переменная интегрирования), о чем надо помнить.

Интеграл вида (9.4) называется определенным интегралом с переменным верхним пределом. С геометрической точки зрения функция  $\Phi(x)$ , в случае  $f(t) \geq 0$ , представляет собой площадь заштрихованной на рис. 9.5 криволинейной трапеции.

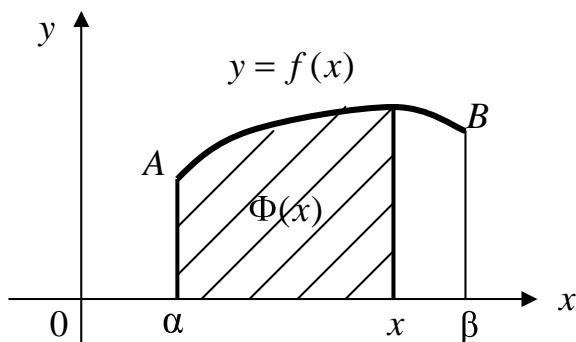


Рис. 9.5

Найдем производную от  $\Phi(x)$  по  $x$ ,

т. е. производную определенного интеграла по верхнему пределу.

*Теорема 9.4.* Производная определенного интеграла от непрерывной функции  $f(x)$  по его переменному верхнему пределу существует и равна подынтегральной функции, в которой вместо переменной

интегрирования подставлено значение верхнего предела:

$$\frac{d}{dx} \int_{x_0}^x f(t) dt = f(x).$$

**Доказательство.** Пусть функция  $f(x)$  непрерывна. Рассмотрим рис. 9.6.

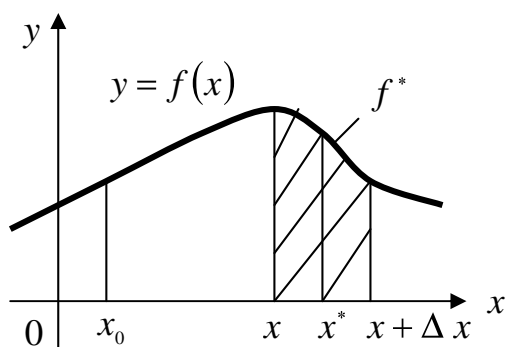


Рис. 9.6.

Из геометрического смысла интеграла вытекает, что если  $x$  получит приращение  $\Delta x$ , то  $\Delta\Phi$  равно заштрихованной площади. Эта площадь равна произведению  $\Delta x \cdot f^*$ , где  $f^*$  – некоторая средняя ордината между  $x$  и  $x + \Delta x$ . Отсюда  $\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = f^* = f(x^*)$ , и

если  $\Delta x \rightarrow 0$ , то  $x^* \rightarrow x$  и в пределе получаем

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x^*) = f(x),$$

что и требовалось доказать.

Из теоремы 9.4 следует, что определенный интеграл с переменным верхним пределом  $\int_{x_0}^x f(t)dt$  является первообразной для подынтегральной функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$ . Но, согласно теореме 9.2, интеграл  $\int_{x_0}^x f(t)dt$  существует для любого значения  $x$ . Таким образом, теорема 9.4 является одновременно и теоремой о существовании первообразной  $\Phi$  у каждой непрерывной функции  $f$ . Этой первообразной может быть определенный интеграл с переменным верхним пределом:

$$\int f(x)dx = \int_{x_0}^x f(t)dt + C, \quad (9.6)$$

где  $C$  – некоторая постоянная.

Формула (9.6) устанавливает связь между неопределенным и определенным интегралами.

### 9.2.6. Формула Ньютона–Лейбница

Пусть, зная одну из первообразных  $\Phi(x)$  функции  $f(x)$  на отрезке  $[a;b]$ , необходимо вычислить определенный интеграл от функции  $f(x)$  на этом отрезке или, что то же, найти определенный интеграл по известному неопределенному. Пусть  $F(x)$  – любая другая первообразная функции  $f(x)$  на том же отрезке  $[a;b]$ . Так как первообразные  $\Phi(x)$  и  $F(x)$  отличаются друг от друга постоянным слагаемым, то имеет место равенство

$$\int_{\alpha}^x f(t)dt = F(x) + C, \quad \forall x \in [\alpha; \beta], \quad C \in R.$$

Подставляя в это равенство значение  $x = \alpha$  и используя геометрический смысл интеграла, видим, что левая часть обратится в нуль, т. е.

$$0 = F(\alpha) + C; \quad C = -F(\alpha), \quad \int_{\alpha}^x f(t)dt = F(x) - F(\alpha), \quad \forall x \in [\alpha, \beta].$$

Если в последней формуле положить  $x = \beta$ , то на основе (9.3) получим

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha), \quad (9.7)$$

т. е. определенный интеграл равен приращению первообразной к подынтегральной функции, когда независимая переменная изменяется от нижнего до верхнего предела. Формула (9.7) называется **формулой Ньютона–Лейбница**, она дает правило вычисления определенного интеграла: значение определенного интеграла на отрезке  $[\alpha; \beta]$  от непрерывной функции  $f(x)$  равно разности значений любой ее первообразной, вычисленной при  $x = \beta$  и  $x = \alpha$ .

Разность  $F(\beta) - F(\alpha)$  в правой части формулы (9.7) удобно записать так:

$$F(x)\Big|_{\alpha}^{\beta}.$$

Тогда формула Ньютона–Лейбница принимает следующий вид:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = F(x)\Big|_{\alpha}^{\beta} = F(\beta) - F(\alpha), \quad (9.8)$$

так как  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\Big|_{\alpha}^{\beta} = (F(x) + C)\Big|_{\alpha}^{\beta} = (F(\beta) + C) - (F(\alpha) + C) = F(\beta) - F(\alpha)$ .

Итак, определенный интеграл равен приращению неопределенного. Этот результат, один из важнейших в математике, называется **теоремой Ньютона–Лейбница**.

**Пример 9.2.**  $\int_0^1 x^2 dx = \left(\int x^2 dx\right)\Big|_0^1 = \left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$

Формула (9.8) позволяет избавиться от вычисления определенных интегралов как пределов интегральных сумм, а задача вычисления определенного интеграла сводится к задаче вычисления неопределенного интеграла. Основное отличие определенного интеграла от неопределенного состоит в том, что определенный интеграл при заданных пределах интегрирования является постоянным числом, тогда как неопределенный интеграл является функцией.

До сих пор мы считали, что  $\alpha < \beta$ . Если  $\alpha \geq \beta$ , то формула (9.7) принимается за определение интеграла, стоящего в левой части.

Так как  $f(x) = F'(x)$ , то формулу (9.7) можно переписать так:

$$\int_{\alpha}^{\beta} F'(x)dx = F(\beta) - F(\alpha),$$



т. е. определенный интеграл от производной равен приращению первообразной.

### 9.2.7. Основные свойства определенного интеграла

1. Если нижний и верхний пределы интегрирования равны ( $\alpha = \beta$ ), то интеграл равен нулю:  $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$ .

Это свойство следует из определения интеграла.

2. Если  $f(x) = 1$ , то  $\int_{\alpha}^{\beta} dx = \beta - \alpha$ .

**Доказательство.** Так как  $f(x) = 1$ , то

$$\int_{\alpha}^{\beta} dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n 1 \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \Delta x_k = \beta - \alpha.$$

3. При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак на противоположный:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = - \int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx.$$

Если  $\alpha > \beta$ , то свойство 3 рассматривают как дополнение к определению определенного интеграла. Свойство 3 можно интерпретировать следующим образом: определенные интегралы  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$  и  $\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx$  являются пределами интегральных сумм, различающихся лишь знаком. Это следует из того, что в случае  $\beta < \alpha$  все числа  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$  в разбиении  $\tau_n = \{\alpha = x_0 > x_1 > \dots > x_n = \beta\}$  будут отрицательными (при  $\alpha < \beta$  все  $\Delta x_k > 0$ ).

4. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int_{\alpha}^{\beta} c \cdot f(x) dx = c \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx, \quad \forall c \in R.$$

**Доказательство.**

$$\int_{\alpha}^{\beta} c \cdot f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n c f(\xi_k) \Delta x_k = c \cdot \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = c \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx.$$

5. Определенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа интегрируемых на  $[\alpha; \beta]$  функций  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  равен алгебраической сумме определенных интегралов от слагаемых:

$$\int_{\alpha}^{\beta} (f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_n(x)) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f_1(x) dx \pm \int_{\alpha}^{\beta} f_2(x) dx \pm \dots \pm \int_{\alpha}^{\beta} f_n(x) dx.$$

Доказательство этого свойства аналогично приведенному выше.

**Замечание.** Совокупность свойств 4 и 5 называют **свойством линейности**: если  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  интегрируемы на  $[\alpha; \beta]$ , то любая их линейная комбинация  $c_1 \cdot f_1(x) + c_2 \cdot f_2(x)$ , где  $c_1, c_2 \in R$ , также интегрируема на  $[\alpha; \beta]$  и

$$\int_{\alpha}^{\beta} (c_1 \cdot f_1(x) + c_2 \cdot f_2(x)) dx = C_1 \int_{\alpha}^{\beta} f_1(x) dx + C_2 \int_{\alpha}^{\beta} f_2(x) dx.$$

6. Аддитивность определенного интеграла.

Если существуют интегралы  $\int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx$  и  $\int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx$ , то существует также

интеграл  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$  и для любых чисел  $\alpha, \beta, \gamma$ :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx.$$

**Доказательство.** Предел интегральной суммы не зависит от способа разбиения отрезка  $[\alpha; \beta]$  на частичные отрезки и от выбора  $\xi_k$ . Это позволяет при составлении интегральной суммы включить точку  $\gamma$  в число точек разбиения.

Пусть  $\gamma = x_m$ , т. е.

$$[\alpha; \beta] = [\alpha; \gamma] \cup [\gamma; \beta] = ([\alpha; x_1] \cup [x_1; x_2] \cup \dots \cup [x_{m-1}; x_m]) \cup ([x_m; x_{m+1}] \cup \dots \cup [x_{n-1}; \beta]).$$

Тогда 
$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^m f(\xi_k) \Delta x_k + \sum_{k=m}^n f(\xi_k) \Delta x_k.$$

Переходя к пределу при  $\max\{\Delta x_k\} = \lambda \rightarrow 0$ , имеем

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx.$$

Геометрический смысл свойства 6 состоит в том, что площадь криволинейной трапеции с основанием  $[\alpha; \beta]$  равна сумме площадей криволинейных трапеций с основанием  $[\alpha; \gamma]$  и  $[\gamma; \beta]$ .

7. Если  $f(x) \geq 0, \forall x \in [\alpha; \beta]$ , то  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0, \alpha < \beta$ .

**Доказательство.** Так как  $f(\xi_k) \geq 0$  и  $\Delta x_k \geq 0$ , то интегральная сумма

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \geq 0.$$
 Переходя к пределу в последнем равенстве имеем

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0.$$

8. Монотонность определенного интеграла.

Если интегрируемые функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  удовлетворяют неравенству  $f(x) \geq \varphi(x)$ ,  $\forall x \in [\alpha; \beta]$ , то

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x) dx, \quad \alpha < \beta.$$

**Доказательство.** Так как  $f(x) - \varphi(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in [\alpha; \beta]$ , то согласно свойствам 5 и 7 имеем

$$\int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - \varphi(x)) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x) dx \geq 0 \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x) dx.$$

$$9. \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| dx.$$

**Доказательство** по свойству 8. Так как  $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ ,  $\forall x \in [\alpha; \beta]$ , то

$$-\int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| dx \Leftrightarrow \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| dx.$$

10. Об оценке определенного интеграла.

Если  $m$  и  $M$  – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции  $f(x)$ , непрерывной на отрезке  $[\alpha; \beta]$ , то

$$m(\beta - \alpha) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq M(\beta - \alpha), \quad \alpha < \beta. \quad (9.9)$$

**Доказательство.** По условию  $m \leq f(x) \leq M$ ,  $\forall x \in [\alpha; \beta]$ . Применяя свойство 8 к этим неравенствам, имеем  $m \int_{\alpha}^{\beta} dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq M \int_{\alpha}^{\beta} dx$ . Согласно свойству 2,  $\int_{\alpha}^{\beta} dx = \beta - \alpha$ , следовательно,  $m(\beta - \alpha) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq M(\beta - \alpha)$ .

Геометрическая интерпретация свойства 10 в случае, когда  $f(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in [\alpha; \beta]$ , дана на рис. 9.7.

Площадь прямоугольника  $aA_1B_1b$  равна  $m(b-a)$ , площадь прямоугольника  $aA_2B_2b$  равна  $M(b-a)$ .

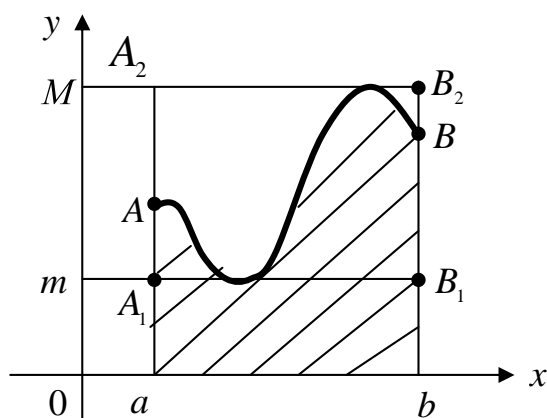


Рис 9.7

Из равенства (9.9) следует, что площадь криволинейной трапеции  $aABb$  не меньше площади первого прямоугольника и не больше площади второго.

**Пример 9.3.** Оценить интеграл

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}.$$

**Решение.**  $1 \leq 1+x^4 \leq 2$  при  $0 \leq x \leq 1$ ;  $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \leq 1$ , т. е.  $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,

$M = 1$ ,  $b - a = 1$ .

Следовательно,  $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq I \leq 1$ .

11. Обобщенная теорема об оценке определенного интеграла.

Если  $f(x)$  непрерывна, а  $g(x)$  интегрируема на  $[\alpha; \beta]$ ,  $g(x) \geq 0$ ,  $m$  и  $M$  – наименьшее и наибольшее значения  $f(x)$  на  $[\alpha; \beta]$ , то

$$m \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cdot g(x) dx \leq M \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx.$$

12. Теорема о среднем значении.

Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[\alpha; \beta]$ , то существует такая точка  $\xi \in [\alpha; \beta]$ , что

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = f(\xi)(\beta - \alpha),$$

т. е. определенный интеграл от непрерывной функции равен произведению значения подынтегральной функции в некоторой промежуточной точке  $\xi$  отрезка интегрирования  $[\alpha; \beta]$  и длины  $(\beta - \alpha)$  этого отрезка.

**Доказательство.** Известно, что непрерывная функция  $f(x)$  на отрезке  $[\alpha; \beta]$  достигает своего наименьшего  $m$  и наибольшего  $M$  значений. Из данного неравенства:  $m \leq f(x) \leq M, \quad \forall x \in [\alpha; \beta]$ , и свойства 10 имеем:

$$m(\beta - \alpha) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq M(\beta - \alpha).$$

Разделив все члены двойного неравенства на  $\beta - \alpha > 0$ , получим

$$m \leq \frac{\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx}{\beta - \alpha} \leq M.$$

Другими словами, число  $\lambda = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx}{\beta - \alpha}$  находится между наименьшим и наибольшим значениями функции  $f(x)$ . Поскольку непрерывная на отрезке  $[\alpha; \beta]$  функция  $f(x)$  принимает все промежуточные значения, лежащие между  $m$  и  $M$ , в том числе и значения  $\lambda$ , то существует  $\xi \in [\alpha; \beta]$  такое, что  $f(\xi) = \lambda$ . Значит,

$$f(\xi) = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx}{\beta - \alpha}, \tag{9.10}$$

откуда

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = f(\xi)(\beta - \alpha).$$

Число  $f(\xi)$ , определяемое по формуле (9.10), называется **интегральным средним значением функции  $f(x)$  на отрезке  $[\alpha; \beta]$** .

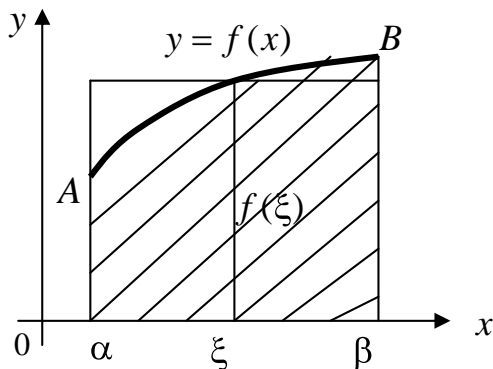


Рис. 9.8

Геометрическая интерпретация свойства 12 в случае, когда  $f(x) > 0, \forall x \in [\alpha; \beta]$ , дана на рис. 9.8. Так как значение  $f(\xi)(\beta - \alpha)$  численно равно площади прямоугольника с основанием  $(\beta - \alpha)$  и высотой  $f(\xi)$ , то теорема о среднем утверждает, что существует прямоугольник, равновеликий криволинейной трапеции  $aABb$ .

### 13. Обобщенная теорема о среднем.

Если  $f(x)$  непрерывна, а  $g(x)$  интегрируема на  $[\alpha; \beta]$  и  $g(x) \geq 0$ , то существует такая точка  $\xi \in (\alpha; \beta)$ , что справедливо равенство

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cdot g(x) dx = f(\xi) \cdot \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx.$$

### 14. Неравенство Коши–Буняковского.

Если  $f^2(x)$  и  $g^2(x)$  интегрируемы на  $[\alpha; \beta]$ , то

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cdot g(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_{\alpha}^{\beta} f^2(x) dx \int_{\alpha}^{\beta} g^2(x) dx}.$$

### 15. Интегрирование четных и нечетных функций в симметричных пределах.

Если функция  $f(x)$  четная, то  $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 2 \int_0^{\alpha} f(x) dx$ . Если функция  $f(x)$

нечетная, то  $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 0$ .

16. Интеграл от периодической функции по периоду не зависит от положения интервала интегрирования. Другими словами, если  $f(x + A) \equiv f(x)$ , то интеграл  $I = \int_x^{x+A} f(s)ds$  не зависит от  $x$ .

17. Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[\alpha; \beta]$ , то интеграл с переменным верхним пределом  $\Phi(x) = \int_{\alpha}^x f(t)dt$  является первообразной для функции  $f(x)$ , т. е.

$$\Phi'(x) = \left( \int_{\alpha}^x f(t)dt \right)' = f(x), \quad x \in [\alpha; \beta].$$

18. Если функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  дифференцируемы в точке  $x \in [\alpha, \beta]$  и  $f(t)$  непрерывна при  $\varphi(\alpha) \leq t \leq \psi(\beta)$ , то

$$\left( \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt \right)' = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

**Пример 9.4.** Дано:  $I(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt$ . Найти  $I'(x)$ .

**Решение.** Используя свойство 18 и учитывая, что  $\varphi(x) = 0$ , т. е.  $\varphi'(x) = 0$ , имеем  $I'(x) = e^{-(x^2)^2} \cdot (x^2)' = 2xe^{-x^4}$ .



### 9.3. Основные методы вычисления определенного интеграла

#### 9.3.1. Вычисление простейших интегралов с помощью формулы Ньютона–Лейбница

Определенный интеграл от непрерывной функции равен разности значений любой ее первообразной для верхнего и нижнего предела интегрирования (смотри формулу (9.7)).

**Пример 9.5.** Вычислить  $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$ .

**Решение.**  $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x} = \int_e^{e^2} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln|\ln x| \Big|_e^{e^2} = \ln(\ln e^2) - \ln(\ln e) = \ln 2 \approx 0,69$ .

**Пример 9.6.** Вычислить  $\int_1^6 \frac{dx}{\sqrt{3+x}}$ .

**Решение.**  $\int_1^6 \frac{dx}{\sqrt{3+x}} = \int_1^6 (3+x)^{-\frac{1}{2}} d(3+x) = 2\sqrt{3+x} \Big|_1^6 = 2(\sqrt{9} - \sqrt{4}) = 2$ .

#### 9.3.2. Замена переменной в определенном интеграле

*Теорема 9.5.* Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[\alpha; \beta]$ , а функция  $x = \varphi(t)$  непрерывно дифференцируема на отрезке  $[t_1, t_2]$ , причем  $\varphi([t_1, t_2]) = [\alpha; \beta]$  и  $\varphi(t_1) = \alpha$ ,  $\varphi(t_2) = \beta$ , то справедлива формула

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt. \quad (9.11)$$

**Доказательство.** Пусть  $F(x)$  – первообразная для функции  $f(x)$  на отрезке  $[\alpha; \beta]$ . Поскольку  $\varphi(t_1) = \alpha$ ,  $\varphi(t_2) = \beta$ , то по формуле Ньютона–Лейбница имеем

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx &= F(\beta) - F(\alpha) = F(\varphi(t_2)) - F(\varphi(t_1)) = \int_{t_1}^{t_2} d(\varphi(t)) = \int_{t_1}^{t_2} F'(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt. \end{aligned}$$

Формула (9.11) называется **формулой замены переменной в определенном интеграле**. Для вычисления определенного интеграла по этой формуле необходимо сделать замену  $x = \varphi(t)$ , вычислить  $dx = \varphi'(t) dt$ , где  $\varphi(t)$  – некоторая непрерывно дифференцируемая функция, найти пределы интегрирования по  $t$ , решив уравнения  $\varphi(t_1) = \alpha$  и  $\varphi(t_2) = \beta$ .

**Пример 9.7.** Вычислить  $\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx$ .

**Решение.** Если при решении данного интеграла совершить подстановку  $x = R \sin t$ , то надо учесть, что если  $x$  менялось от 0 до  $R$ , то  $t$  уже будет меняться от 0 до  $\frac{\pi}{2}$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 t} R \cos t dt = R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{R^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \\ &= \frac{R^2}{2} \left( t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi R^2}{4}. \end{aligned}$$

Как видим, в отличие от замены переменной в неопределенном интеграле, здесь не требуется выполнять обратную подстановку.

### 9.3.3. Интегрирование по частям в определенном интеграле

Пусть  $u(x)$  и  $v(x)$  – дифференцируемые на отрезке  $[\alpha; \beta]$  функции переменной  $x$ . Тогда  $d(uv) = u dv + v du$ . Проинтегрируем обе части последнего равенства на отрезке  $[\alpha; \beta]$

$$\int_{\alpha}^{\beta} d(uv) = \int_{\alpha}^{\beta} u dv + \int_{\alpha}^{\beta} v du. \quad (9.12)$$

С другой стороны, по формуле Ньютона–Лейбница

$$\int_{\alpha}^{\beta} d(uv) = uv \Big|_{\alpha}^{\beta}.$$

Следовательно, формула (9.12) примет вид

$$\int_{\alpha}^{\beta} u dv = uv \Big|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} v du. \quad (9.13)$$

Формула (9.13) называется формулой **интегрирования по частям в определенном интеграле**.

**Пример 9.8.** Вычислить  $\int_0^{\pi} x \sin x dx$ .

**Решение.**  $\int_0^{\pi} x \sin x dx = \int_0^{\pi} x d(-\cos x) = x(-\cos x) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\cos x) dx =$

$$= -x \cos x \Big|_0^{\pi} + \sin x \Big|_0^{\pi} = -(\pi \cos \pi - 0 \cdot \cos 0) + (\sin \pi - \sin 0) = \pi.$$

## 9.4. Несобственные интегралы

При введении понятия определенного интеграла как предела интегральной суммы предполагалось, что выполняются следующие условия:

- 1) пределы интегрирования  $a$  и  $b$  являются конечными;
- 2) подынтегральная функция  $f(x)$  на отрезке  $[a;b]$  непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода.

В этом случае определенные интегралы называются собственными. Если хотя бы одно из указанных условий не выполняется, то интегралы называются несобственными.

Несобственные интегралы являются обобщением определенных интегралов в случаях бесконечных промежутков интегрирования и неограниченных функций.

### 9.4.1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования (первого рода)

Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на промежутке  $[a;+\infty)$ . Тогда она будет непрерывной на любом конечном отрезке  $[a;b]$ ,  $a < b$ .

Если существует конечный предел  $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx$ , то его называют несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом интегрирования от непрерывной функции  $f(x)$  на промежутке  $[a;+\infty)$  и обозначают  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ . Таким образом, по определению

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx. \quad (9.14)$$

В этом случае говорят, что несобственный интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  сходится. Если же указанный предел не существует или он бесконечен, то говорят, что интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  расходится.

Аналогично определяется несобственный интеграл с бесконечным нижним пределом интегрирования от непрерывной функции  $f(x)$  на промежутке  $(-\infty; b]$ :

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx. \quad (9.15)$$

Несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами интегрирования от непрерывной функции  $f(x)$  на промежутке  $(-\infty; +\infty)$ , обозначаемый  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ , представляют в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx, \quad c \in (-\infty; \infty).$$

Тогда по определению

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x)dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x)dx. \quad (9.16)$$

Этот несобственный интеграл называется сходящимся, если оба предела существуют. Если хотя бы один из пределов не существует или бесконечен, то несобственный интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$  называется расходящимся.

Интегралы (9.14)–(9.16) называются также несобственными интегралами первого рода.

Несобственные интегралы первого рода обладают рядом свойств, присущих определенным интегралам. В частности, формула Ньютона–Лейбница в случае

сходящегося интеграла  $\int_a^{\infty} f(x)dx$  имеет вид

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = F(x) \Big|_a^{\infty} = F(\infty) - F(a), \quad (9.17)$$

где через  $F(\infty)$  обозначен предел  $\lim_{b \rightarrow \infty} F(b)$ .

Из формулы (9.17) следует, что несобственный интеграл сходится, когда существует конечный предел  $F(b)$  при  $b \rightarrow \infty$ .

**Пример 9.9.** Исследовать на сходимость интеграл  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**Решение.** Пусть  $\alpha = 1$ . Тогда  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln x \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln b - \ln 1) = \infty$ .

Пусть  $\alpha \neq 1$ .

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{1-\alpha} (b^{1-\alpha} - 1) = \begin{cases} \infty, & \forall \alpha < 1, \\ \frac{1}{\alpha-1}, & \forall \alpha > 1. \end{cases}$$

Итак, интеграл  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$  сходится при  $\alpha > 1$  и расходится при  $\alpha \leq 1$ .

**Пример 9.10.** Исследовать на сходимость интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ .

**Решение.**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_a^0 +$$

$$+ \lim_{b \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x \Big|_0^b = \lim_{a \rightarrow -\infty} (\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} a) + \lim_{b \rightarrow \infty} (\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0) = \left(0 + \frac{\pi}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \pi,$$

т. е. данный интеграл сходится.

С геометрической точки зрения сходящийся интеграл  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  означает, что фигура, ограниченная кривой  $y = f(x) \geq 0$ , прямыми  $x = a$  и  $y = 0$  (осью  $OX$ ), бесконечно вытянутая в направлении оси  $OX$ , имеет конечную площадь (рис. 9.9).

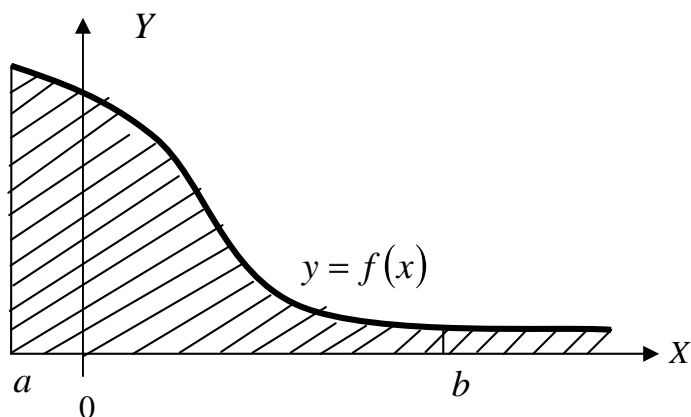


Рис. 9.9

Аналогично сходящиеся интегралы  $\int_{-\infty}^b f(x) dx$  и  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  определяют конечную площадь фигур, изображенных на рис. 9.10 а и б соответственно.

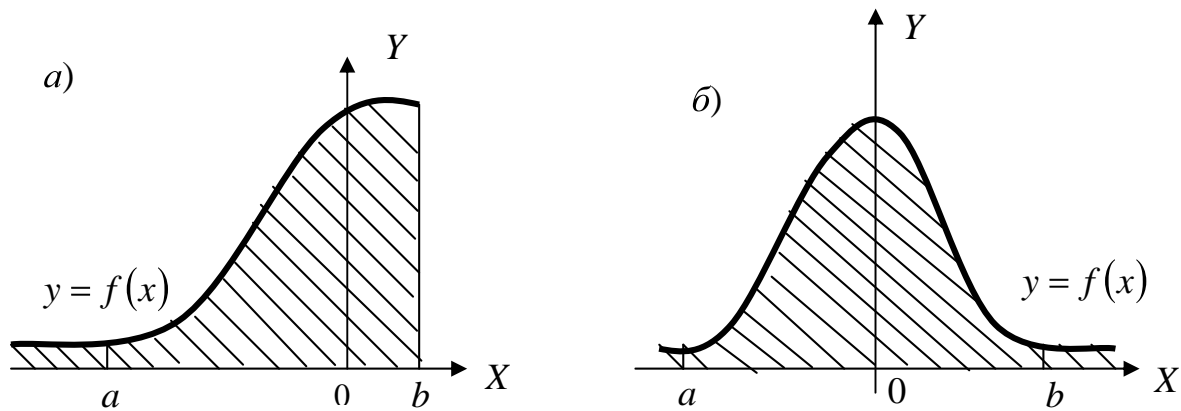


Рис. 9.10

В некоторых задачах нет необходимости вычислять интеграл; достаточно лишь знать, сходится он или нет.

Приведем без доказательства три теоремы, с помощью которых можно исследовать вопрос о сходимости некоторых несобственных интегралов первого рода.

*Теорема 9.6 (признак сравнения).* Если на промежутке  $[a; +\infty)$  непрерывные функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  удовлетворяют условию  $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$ , то из сходимости

интеграла  $\int_a^{\infty} \varphi(x) dx$  следует сходимость интеграла  $\int_a^{\infty} f(x) dx$ , а из расходимости

интеграла  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  следует расходимость интеграла  $\int_a^{\infty} \varphi(x) dx$ .

**Пример 9.11.** Исследовать на сходимость интеграл  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^5(1+7^x)}$ .

**Решение.** При  $x \geq 1$  имеем  $\frac{1}{x^5(1+7^x)} < \frac{1}{x^5}$ . Но интеграл  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^5} = \frac{1}{4}$  сходится.

Следовательно, интеграл  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^5(1+7^x)}$  также сходится.



*Теорема 9.7 (предельный признак сравнения).* Если существует предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = k$ ,  $0 < k < \infty$  ( $f(x) > 0$ ,  $\varphi(x) > 0$ ), то интегралы  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  и  $\int_a^{\infty} \varphi(x) dx$

одновременно оба сходятся или оба расходятся.

*Теорема 9.8.* Если на промежутке  $[a; +\infty)$  функция  $y = f(x)$  меняет знак и несобственный интеграл  $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$  сходится, то сходится также и  $\int_a^{\infty} f(x) dx$ .

Несобственный интеграл  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  называют абсолютно сходящимся, если сходится интеграл  $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$ .

**Пример 9.12.** Исследовать сходимость интеграла  $\int_1^{\infty} \ln \frac{x^5 + 2}{x^5 + 1} dx$ .

**Решение.** Применим предельный признак сравнения. Так как интеграл  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^5}$

сходится и

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{x^5 + 2}{x^5 + 1}}{\frac{1}{x^5}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{x^5 + 1})}{\frac{1}{x^5}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^5 + 1} = 1,$$

то интеграл  $\int_1^{\infty} \ln \frac{x^5 + 2}{x^5 + 1} dx$  сходится.

#### 9.4.2. Несобственные интегралы от неограниченных функций (второго рода)

Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на промежутке  $[a; b)$  и неограничена в левосторонней окрестности точки  $b$ , т. е.  $b$  – точка разрыва второго рода,  $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \infty$ . Будем считать, что функция  $f(x)$  интегрируема на отрезке

$[a; b - \varepsilon]$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ , т. е. существует интеграл  $\int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$ , зависящий от переменного верхнего предела интегрирования.

Если существует конечный предел  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$ , то его называют несобственным интегралом от неограниченной функции  $f(x)$  или несобственным интегралом второго рода и обозначают  $\int_a^b f(x) dx$ .

Таким образом, по определению

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx, \quad \varepsilon > 0. \quad (9.18)$$

Аналогично, если функция  $f(x)$  имеет бесконечный разрыв в точке  $x = a$ , то полагают

$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx. \quad (9.19)$$

Если же функция  $f(x)$  имеет разрыв второго рода в некоторой внутренней точке  $c$  отрезка  $[a; b]$ , то данный интеграл представляют в виде суммы двух интегралов:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x) dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x) dx. \quad (9.20)$$

Если пределы в правых частях формул (9.18)–(9.20) существуют и конечны, то соответствующие несобственные интегралы от разрывной функции в точках  $a$ ,  $b$  и  $c$  называются сходящимися, в противном случае – расходящимися.

**Пример 9.13.** Вычислить  $\int_0^1 \frac{dx}{x^3}$ .

**Решение.** При  $x = 0$  функция  $y = \frac{1}{x^3}$  терпит бесконечный разрыв.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^3} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \Big|_{0+\varepsilon}^1 = -\frac{1}{2} \left( 1 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^2} \right) = \infty,$$

интеграл расходится.

С геометрической точки зрения сходящийся несобственный интеграл второго рода означает, что фигура, ограниченная кривой  $y = f(x)$ , прямыми  $x = a$ ,  $x = b$ , бесконечно вытянута в направлении оси  $OY$  при  $x \rightarrow b - 0$  ( $x \rightarrow a + 0$ ,  $x \rightarrow c \pm 0$ ), имеет конечную площадь (рис.9.11 а – в соответственно).

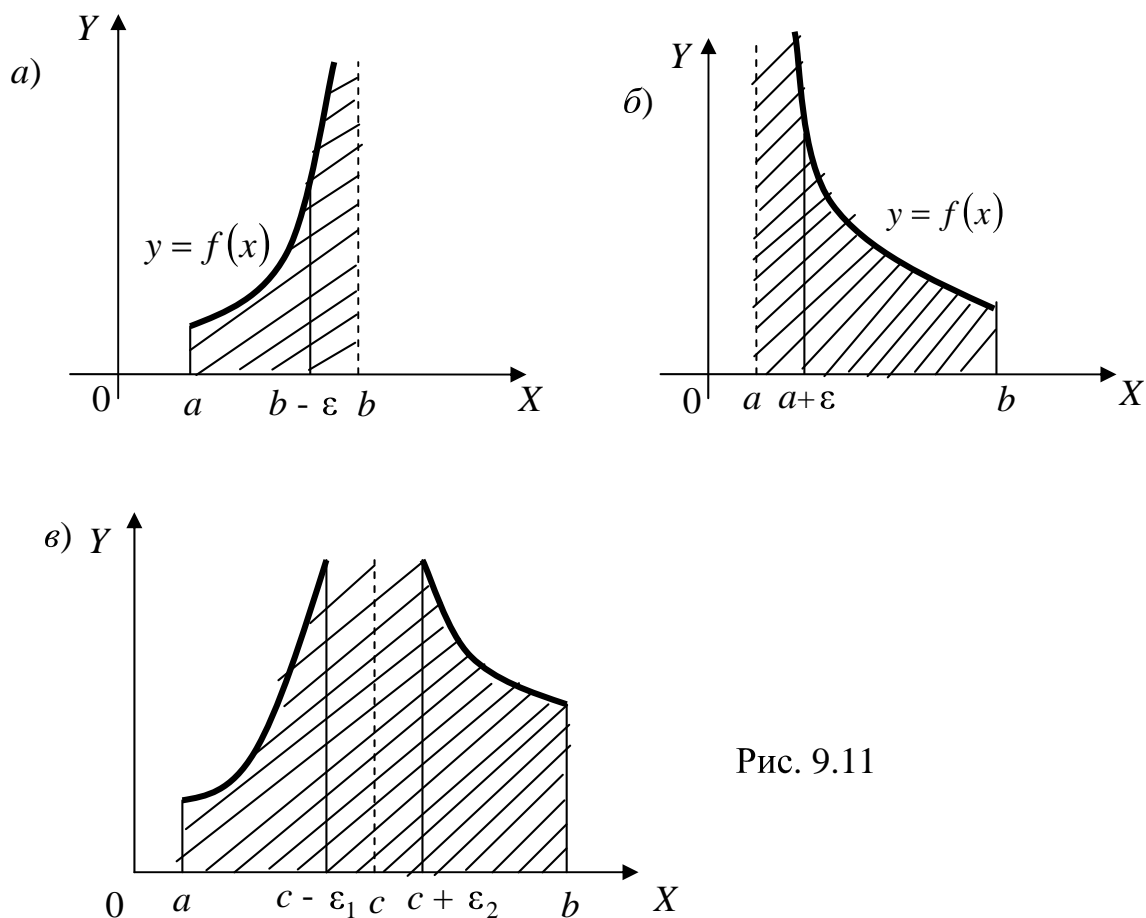


Рис. 9.11

Сформулируем признаки сходимости для несобственных интегралов второго рода.

*Теорема 9.9 (признак сравнения).* Пусть в левой окрестности точки  $b$  (в правой окрестности точки  $a$ ) определены две неотрицательные функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$ , причем  $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$ . Тогда из сходимости несобственного интеграла

$\int_a^b \varphi(x) dx$  следует сходимость интеграла  $\int_a^b f(x) dx$ , а из расходимости

несобственного интеграла  $\int_a^b f(x) dx$  следует расходимость интеграла  $\int_a^b \varphi(x) dx$ .

*Теорема 9.10 (предельный признак сравнения).* Пусть функции  $f(x)$ ,  $\varphi(x)$ , непрерывны на промежутке  $[a; b)$  и в точке  $x = b$  имеют разрыв. Если существует

предел  $\lim_{x \rightarrow b-\varepsilon} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = k$ ,  $0 < k < \infty$ , то интегралы  $\int_a^b f(x) dx$  и  $\int_a^b \varphi(x) dx$  одновременно

сходятся или одновременно расходятся.

Аналогично формулируется предельный признак сравнения несобственных интегралов, имеющих разрыв в точке  $c \in (a; b)$ .

**Пример 9.14.** Исследовать на сходимость интеграл  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + 3x^2 + 4x}$ .

**Решение.** Подынтегральная функция разрывна на левом конце отрезка интегрирования, т. е. при  $x = 0$ . Сравним ее с функцией  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ :

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x} + 3x^2 + 4x} < \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, \quad \forall x \in (0; 1),$$

так как несобственный интеграл  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt[3]{x^2} \Big|_{\varepsilon}^1 = \frac{3}{2}$  сходится, то

по теореме 9.8 несобственный интеграл  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + 3x^2 + 4x}$  сходится.

## 9.5. Геометрические и механические приложения определенного интеграла

### 9.5.1. Вычисление площадей плоских фигур в прямоугольной системе координат

Из геометрического смысла определенного интеграла следует, что если  $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$ , то площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой  $y = f(x)$ , осью  $Ox$  и прямыми  $x = a, x = b$  (рис. 9.12), может быть вычислена по формуле

$$S = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b y dx, \quad (9.21)$$

причем  $S \geq 0$ .

Если  $f(x) \leq 0, \forall x \in [a, b]$ , то  $\int_a^b f(x) dx \leq 0, a < b$  (рис. 9.13). Следовательно,

в этом случае

$$S = \left| \int_a^b f(x) dx \right| = - \int_a^b f(x) dx = - \int_a^b y dx. \quad (9.22)$$

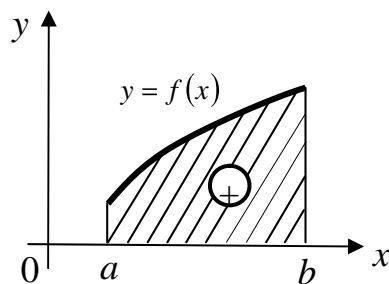


Рис. 9.12

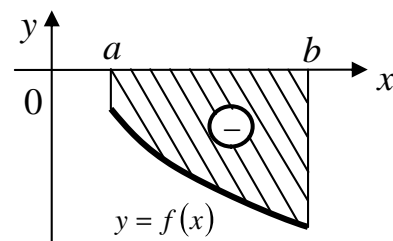


Рис. 9.13

Если криволинейная трапеция ограничена кривой  $x = \varphi(y)$ , осью ординат  $Oy$  и прямыми  $y = c, y = d$  (рис. 9.14), то ее площадь определяется формулами:

$$S = \int_c^d \varphi(y) dy = \int_c^d x dy,$$

если  $\varphi(y) \geq 0, \forall y \in [c, d]$ ;

$$S = \left| \int_c^d \varphi(y) dy \right| = - \int_c^d x dy ,$$

если  $\varphi(y) \leq 0, \forall y \in [c, d]$  (рис. 9.15).

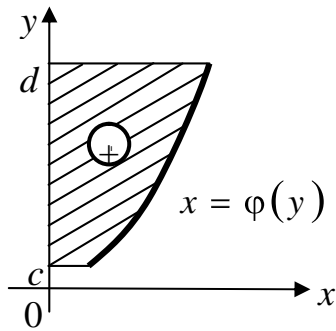


Рис. 9.14

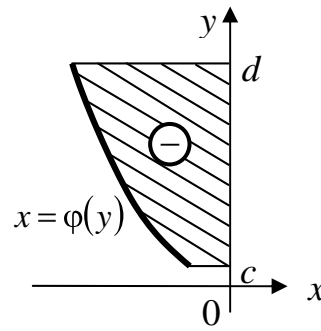


Рис. 9.15

Если подынтегральная функция  $f(x)$  конечное число раз меняет знак на отрезке  $[a, b]$ , то интеграл (9.21) равен алгебраической сумме площадей соответствующих криволинейных трапеций, лежащих над осью  $Ox$  (со знаком “+”) и под этой осью (со знаком “-“) (рис. 9.16).

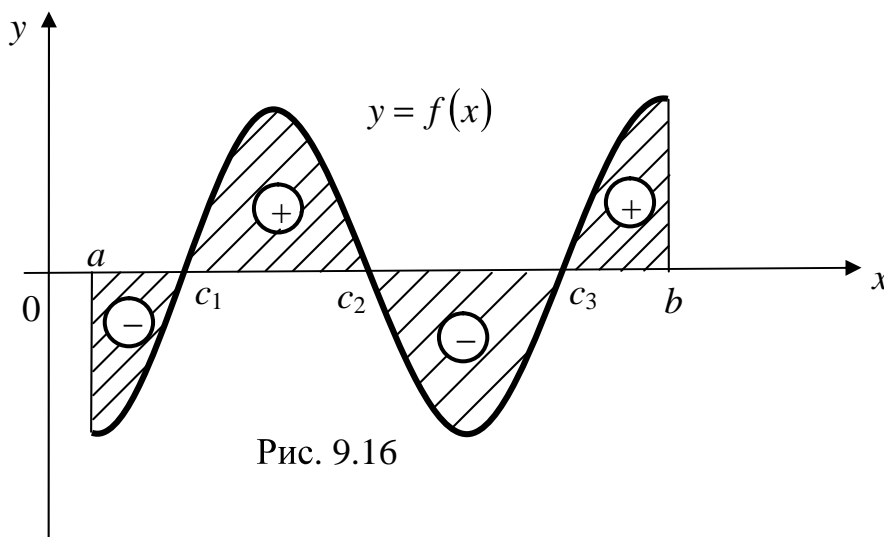


Рис. 9.16

Для того чтобы получить общую площадь заштрихованной фигуры, отрезок интегрирования  $[a, b]$  надо разбить на частичные отрезки, на которых функция

$f(x)$  сохраняет знак, и применить формулы (9.21) и (9.22). Тогда

$$S = - \int_a^{c_1} f(x) dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x) dx - \int_{c_2}^{c_3} f(x) dx + \int_{c_3}^b f(x) dx .$$

Если криволинейная трапеция ограничена линиями  $y = f_1(x) \leq 0$ ,  $y = f_2(x) \geq 0$ ,  $x = a$ ,  $x = b$  (рис. 9.17,а), то ее площадь в силу равенств (9.21) и (9.22)

$$S = \int_a^b f_2(x) dx + \left| \int_a^b f_1(x) dx \right| = \int_a^b f_2(x) dx - \int_a^b f_1(x) dx = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx. \quad (9.23)$$

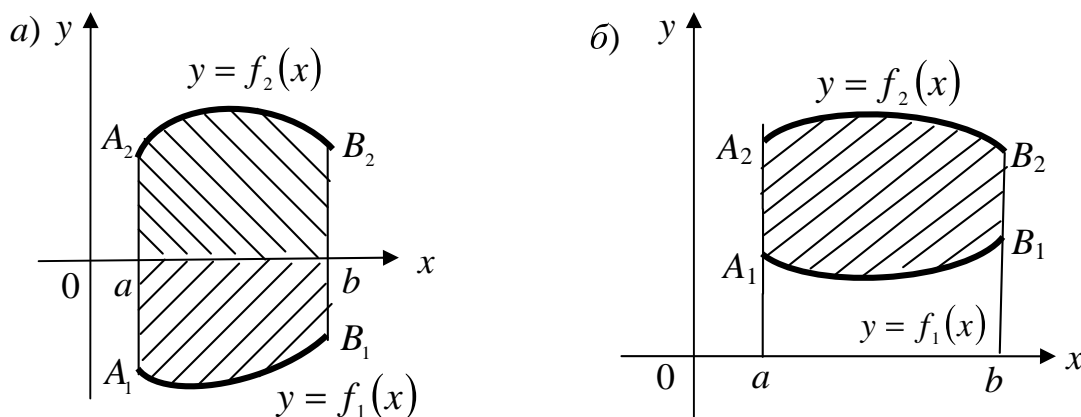


Рис. 9.17

Площадь криволинейной трапеции  $A_1A_2B_1B_2$  (рис. 9.17 а, б)

$$S_{A_1A_2B_1B_2} = S_{aA_2B_2b} - S_{aA_1B_1b} = \int_a^b f_2(x) dx - \int_a^b f_1(x) dx = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx.$$

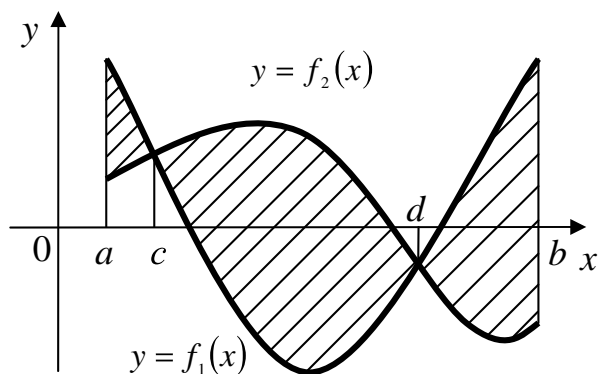


Рис. 9.18

В случае когда разность  $f_2(x)dx - f_1(x)dx$  не сохраняет знак на отрезке  $[a,b]$ , этот отрезок разбивают на частичные отрезки, на каждом из которых функция  $f_2(x) - f_1(x)$  сохраняет знак. Например, площадь заштрихованной фигуры — (рис. 9.18) находится по формуле

$$S = \int_a^c (f_1(x) - f_2(x))dx + \int_c^d (f_2(x) - f_1(x))dx + \int_d^b (f_1(x) - f_2(x))dx.$$

Если криволинейная трапеция ограничена линией, заданной уравнениями в параметрической форме:  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ , где  $t_1 \leq t \leq t_2$ , осью  $Ox$  и прямыми  $x = a$ ,  $x = b$ , причем  $x(t_1) = a$ ,  $x(t_2) = b$ , то ее площадь  $S$  при  $y(t) \geq 0$  вычисляется по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt,$$

которая получена из формулы (9.21) заменой переменной  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $dx = x'(t)dt$ . Пределы  $t_1$  и  $t_2$  определяются из уравнений  $a = x(t_1)$ ,  $b = x(t_2)$ .

**Пример 9.15.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой  $y = x^2 - 4x + 3$  и осями координат (рис. 9.19).

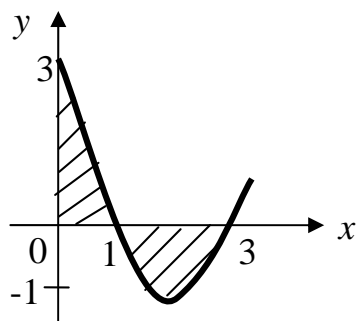


Рис. 9.19

**Решение.** Данная парабола пересекает ось абсцисс в точках  $x_1 = 1$  и  $x_2 = 3$ . На отрезке  $[0;1]$  криволинейная трапеция расположена над осью абсцисс; площадь  $S_1$  этой трапеции можно найти по формуле (9.21). На отрезке  $[1;3]$  трапеция расположена ниже оси абсцисс; площадь  $S_2$  этой трапеции находим по формуле (9.22). Искомая площадь  $S$  равна сумме

площадей  $S_1$  и  $S_2$ .

$$S_1 = \int_0^1 (x^2 - 4x + 3)dx = \left[ \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right]_0^1 = \frac{1}{3} - 2 + 3 = \frac{4}{3};$$



$$S_2 = \left| \int_1^3 (x^2 - 4x + 3) dx \right| = \left| \left[ \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right]_1^3 \right| = \left| -\frac{4}{3} \right| = \frac{4}{3}.$$

Следовательно, искомая площадь  $S = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$  кв. ед.

**Пример 9.16.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой  $y = x^2 - 3x$  и прямой  $y = 4 - 3x$  (рис. 9.20).

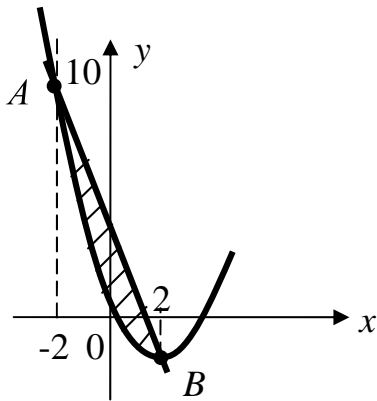


Рис. 9.20

**Решение.** Находим точки пересечения параболы и прямой, решив систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 - 3x, \\ y = 4 - 3x, \end{cases} \quad A(-2; 10), B(2; -2).$$

Полагая в формуле (9.23)  $f_1(x) = x^2 - 3x$ ,  $f_2(x) = 4 - 3x$ ,  $a = -2$ ,  $b = 2$ , получим искомую площадь:

$$\begin{aligned} S &= \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx = \int_{-2}^2 (4 - 3x - x^2 + 3x) dx = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = 2 \int_0^2 (4 - x^2) dx = \\ &= 2 \left[ 4x - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 2 \left( 8 - \frac{8}{3} \right) = \frac{32}{3} \text{ кв. ед.} \end{aligned}$$

**Пример 9.17.** Найти площади двух фигур, ограниченных параболой  $y^2 = 2x$  и окружностью  $y^2 = 4x - x^2$  (рис. 9.21).

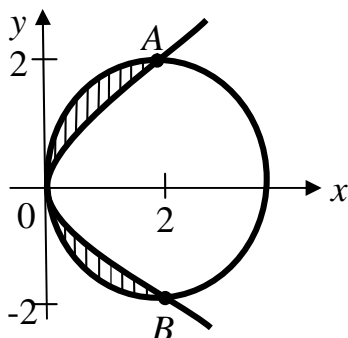


Рис. 9.21

**Решение.** Преобразуя уравнение окружности, получаем  $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ , откуда следует, что центр окружности лежит в точке  $C(2; 0)$  и ее радиус  $R = 2$ .

Решив систему уравнений

$$\begin{cases} y^2 = 2x, \\ y^2 = 4x - x^2, \end{cases}$$

получим следующие точки пересечения данных кривых:  $O(0; 0)$ ,  $A(2; 2)$ ,  $B(2; -2)$ .

Площадь заштрихованной фигуры

$$S = 2 \int_0^2 (\sqrt{4x - x^2} - \sqrt{2x}) dx = 2 \left( \int_0^2 \sqrt{4x - x^2} dx - \sqrt{2} \int_0^2 \sqrt{x} dx \right).$$

Первый интеграл в правой части равенства равен площади круга, т. е.  $\pi$ , поэтому

$$S = 2 \left( \pi - \frac{2\sqrt{2}}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 \right) = 2 \left( \pi - \frac{8}{3} \right) \text{ кв.ед.}$$

Площадь незаштрихованной фигуры

$$S_1 = \pi R^2 - S = 4\pi - 2 \left( \pi - \frac{8}{3} \right) = 2 \left( \pi + \frac{8}{3} \right) \text{ кв.ед.}$$

**Пример 9.18.** Найти площадь эллипса, заданного параметрическими уравнениями  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$  (рис. 9.22).

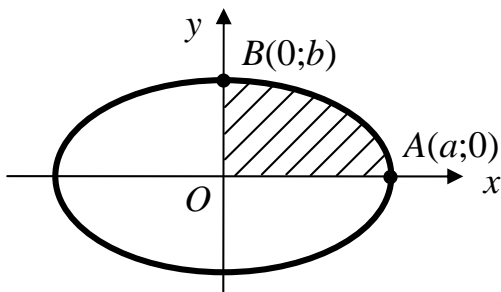


Рис. 9.22

**Решение.** Ввиду симметрии эллипса относительно осей координат достаточно вычислить площадь его четвертой части  $OAB$ , а затем учетверить результат:  $\frac{1}{4} S = \int_0^a y dx$ .

Сделаем замену переменной, воспользовавшись параметрическими

уравнениями эллипса:  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$ . Тогда  $dx = -a \sin t dt$ . Если  $x_1 = 0$ , то  $t_1 = \frac{\pi}{2}$ , если  $x_2 = a$ , то  $t_2 = 0$ . Следовательно,

$$S = 4 \int_0^a y dx = 4 \int_{\pi/2}^0 b \sin t (-a \sin t) dt = -4ab \int_{\pi/2}^0 \sin^2 t dt = 4ab \int_0^{\pi/2} \left( \frac{1 - \cos 2t}{2} \right) dt =$$

$$= 2ab \left( t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi/2} = \pi ab \text{ кв. ед.}$$

В частности, при  $a = b = R$  получим формулу площади круга:  $S = \pi R^2$ .

### 9.5.2. Вычисление площадей плоских фигур в полярной системе координат

Пусть требуется вычислить площадь фигуры, ограниченной линией  $l$ , заданной в полярной системе координат уравнением  $r = r(\varphi)$ ,  $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ .

За базовую фигуру в полярной системе координат принимается криволинейный сектор – фигура, ограниченная линией  $r = r(\varphi)$  и радиусами-векторами  $\varphi = \alpha$ ,  $\varphi = \beta$  (рис. 9.23). При этом криволинейный сектор будем считать правильной фигурой, т. е. такой, что любой луч  $\varphi = \varphi_i$ ,  $\alpha \leq \varphi_i \leq \beta$ ,  $i = \overline{1, n}$ , исходящий из полюса  $O$ , пересекает линию  $r = r(\varphi)$  не более чем в одной точке. Будем также предполагать, что

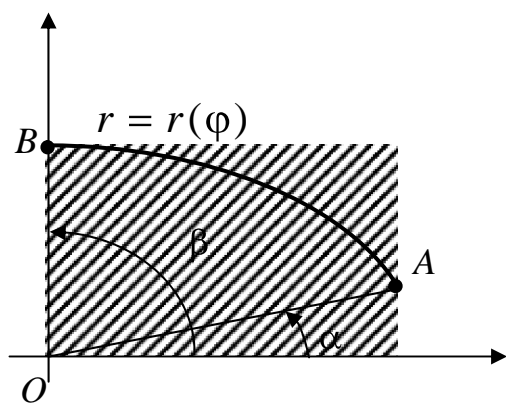


Рис. 9.23

функция  $r = r(\varphi)$  непрерывна на отрезке  $[\alpha, \beta]$ .

Применим алгоритм составления интегральной суммы с последующим предельным переходом к определенному интегралу.

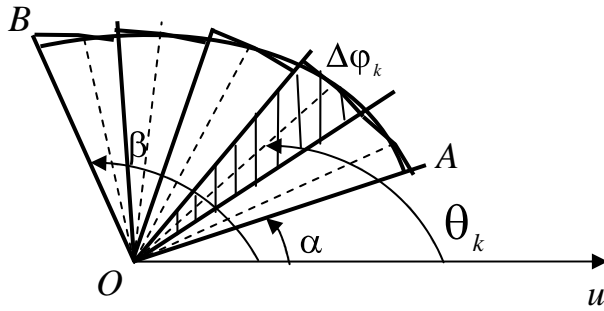


Рис. 9.24

1. Разобьем отрезок  $[\alpha, \beta]$  на  $n$  частичных отрезков точками  $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_n = \beta$ . Обозначим  $\Delta\varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$ ,  $k = \overline{1, n}$ . Проведем лучи  $\varphi = \varphi_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ . Тогда криволинейный сектор  $OAB$  разобьется на  $n$  частичных

криволинейных секторов (рис. 9.24).

2. На каждом частичном отрезке  $[\varphi_{k-1}, \varphi_k]$ ,  $k = \overline{1, n}$ , выберем произвольным образом точку  $\theta_k$  и найдем значение функции  $r(\varphi)$  в этих точках:  $r_k = r(\theta_k)$ ,  $k = \overline{1, n}$ .

3. Предположим, что на каждом из частичных отрезков  $[\varphi_{k-1}, \varphi_k]$  функция  $r = r(\varphi)$  постоянна и совпадает со значением  $r_k = r(\theta_k)$ . Тогда каждый частичный криволинейный сектор можно заменить круговым сектором с радиусом  $r_k = r(\theta_k)$  и центральным углом  $\Delta\varphi_k$  (см. рис. 9.24). Площадь такого кругового сектора вычисляется по формуле

$$\Delta S_k = \frac{1}{2} r^2(\theta_k) \Delta\varphi_k.$$

За площадь криволинейного сектора  $OAB$  примем площадь фигуры, состоящей из  $n$  частичных круговых секторов:

$$S \approx \sum_{k=1}^n \Delta S_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} r^2(\theta_k) \Delta\varphi_k. \quad (9.24)$$

Приближенное равенство (9.24) тем точнее, чем меньше отрезки  $[\varphi_{k-1}, \varphi_k]$ , т. е. чем больше  $n$ . Правая часть равенства (9.24) является интегральной суммой для непрерывной функции  $\frac{1}{2} r^2(\varphi)$  на отрезке  $[\alpha, \beta]$ .

4. За точное значение площади  $S$  криволинейного сектора  $OAB$  примем предел интегральной суммы (9.24) при  $\lambda = \max_{[\alpha, \beta]} \{\Delta\varphi_k\} \rightarrow 0$ :

$$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n r^2(\theta_k) \Delta\varphi_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi.$$

Таким образом, площадь криволинейного сектора вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi. \quad (9.25)$$

**Пример 9.19.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой  $r = a(1 + \cos \varphi)$  (рис. 9.25).

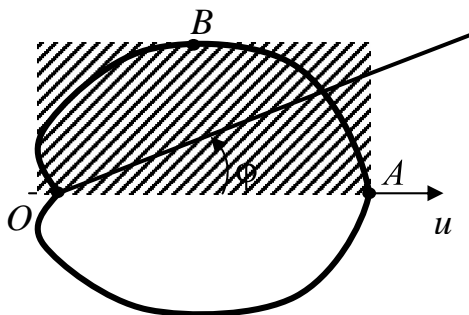


Рис. 9.25

**Решение.** Кардиоиды симметричны относительно полярной оси, следовательно, искомая площадь равна удвоенной площади криволинейного сектора  $OAB$ . Дуга  $ABO$  описывается при изменении полярного угла от 0 до  $\pi$ .

Поэтому, согласно формуле (9.25), получим

$$\begin{aligned} S &= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} r^2 d\varphi = a^2 \int_0^{\pi} (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi = a^2 \int_0^{\pi} (1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi = \\ &= a^2 \int_0^{\pi} \left( 1 + 2 \cos \varphi + \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right) d\varphi = a^2 \left( \frac{3}{2} \varphi + 2 \sin \varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{3}{2} \pi a^2 \text{ кв.ед.} \end{aligned}$$

**Пример 9.20.** Найти площадь фигуры, лежащей вне круга  $r = 3$  и ограниченной кривой  $r = 6 \cos 3(\varphi)$  (рис. 9.26).

**Решение.** Рассмотрим лепесток  $OABC$ , симметричный относительно полярной оси. Решая совместно систему уравнений

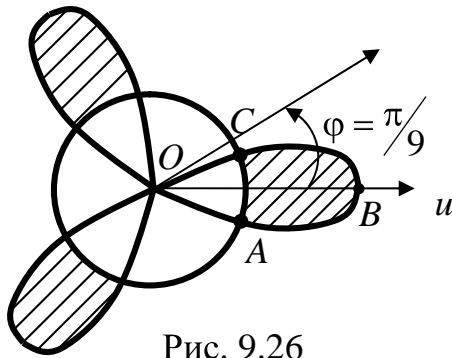


Рис. 9.26

$$\begin{cases} r = 3, \\ r = 6 \cos 3\varphi, \end{cases}$$

определим полярные координаты точек  $A$  и  $C$ .

$$6 \cos 3\varphi = 3 \Rightarrow \cos 3\varphi = \frac{1}{2}, \quad \varphi = \pm \frac{\pi}{9}. \quad \text{Таким}$$

образом,  $A\left(-\frac{\pi}{9}; 3\right), C\left(\frac{\pi}{9}; 3\right)$ .

Искомая площадь будет равна утроенной площади фигуры  $ABCA$ , равной разности площадей секторов  $OABCO$  и  $OACO$ :

$$\begin{aligned} S &= 3S_{ABCA} = S_{OABCO} - S_{OACO} = 3 \left( \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}} (6 \cos 3\varphi)^2 d\varphi - \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}} 3^2 d\varphi \right) = \\ &= 3 \left( 36 \int_0^{\frac{\pi}{9}} \cos^2 3\varphi d\varphi - 9 \int_0^{\frac{\pi}{9}} d\varphi \right) = 3 \left( 18 \int_0^{\frac{\pi}{9}} (1 + \cos 6\varphi) d\varphi - 9\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{9}} \right) = 3(18\varphi + 3 \sin 6\varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{9}} - \pi = \\ &= 3\pi + \frac{9\sqrt{3}}{2} \approx 17,22 \text{ кв.ед.} \end{aligned}$$

### 9.5.3. Вычисление длины дуги кривой

#### Длина дуги плоской кривой в прямоугольной системе координат

Пусть функция  $y = f(x)$  определена и непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и

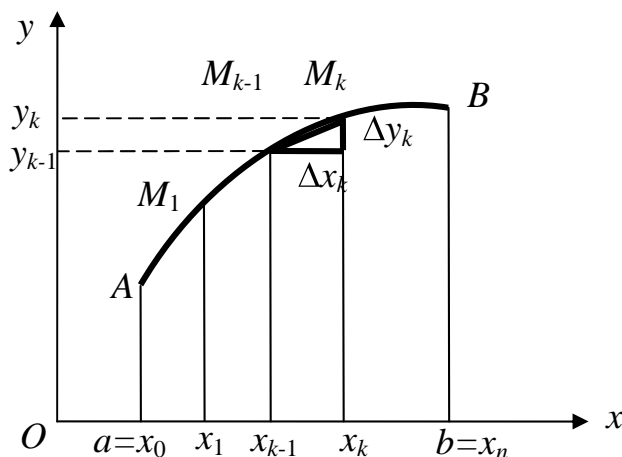


Рис. 9.27

кривая  $l$  – график этой функции (рис. 9.27).

Требуется найти длину дуги плоской кривой  $l$ , заключенной между вертикальными прямыми  $x = a$  и  $x = b$ .

Разобьем отрезок  $[a, b]$  произвольным образом на  $n$  частей точками  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k <$

$\dots < x_n = b$ . Обозначим  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ,  $k = \overline{1, n}$ . Через точки  $x_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , проведем вертикальные прямые, параллельные оси  $Oy$ , до пересечения с кривой  $l$ . Тогда дуга  $AB$  разобьется на  $n$  частей. Соединив каждые две соседние точки разбиения кривой  $l$  отрезками (хордами), получим ломаную  $AM_1M_2\dots M_{n-1}B$ , вписанную в дугу  $AB$ . Обозначим длину ломаной через  $l_n$ :

$$l_n = |AM_1| + |M_1M_2| + \dots + |M_{n-1}B| = \sum_{k=1}^n \Delta l_k,$$

где  $\Delta l_k$  – длина хорды, стягивающей дугу  $M_{k-1}M_k$ . Длина ломаной является приближенным значением длины дуги  $AB$  ( $l \approx l_n$ ). Очевидно, что если увеличить число  $n$  точек разбиения отрезка  $[a, b]$  на частичные отрезки, при том что длина максимального из них стремилась к нулю, то длина вписанной ломаной стремится к длине дуги кривой  $AB$ . Если существует конечный предел  $l_n$  при

$\lambda = \max_{[a,b]} \{\Delta x_n\} \rightarrow 0$ , то этот предел принимается за длину дуги  $l$ , а саму дугу называют **спрямляемой**:

$$l = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \Delta l_k. \quad (9.26)$$

Покажем, что если функция  $f(x)$  на отрезке  $[a,b]$  имеет непрерывную производную  $f'(x)$ , то кривая  $l$  – спрямляемая, и выведем формулу для вычисления ее длины.

Длина стягивающей хорды  $M_{k-1}M_k$  равна:

$$\Delta l_k = |M_{k-1}M_k| = \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2} \Delta x_k.$$

По теореме Лагранжа имеем

$$\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f'(\xi_k), \quad \xi_k \in (x_{k-1}, x_k).$$

Следовательно,  $\Delta l_k = \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \Delta x_k$ .

Подставляя полученное выражение в формулу (9.26), получаем

$$l = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \Delta x_k. \quad (9.27)$$

В правой части формулы (9.27) стоит интегральная сумма для функции  $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$  на отрезке  $[a, b]$ . Предел такой суммы существует и равен определенному интегралу от этой функции на отрезке  $[a, b]$ :



$$l = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \Delta x_k \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx .$$

Итак, если функция  $f(x)$  имеет на отрезке  $[a, b]$  непрерывную производную, то дуга  $AB$  – спрямляемая и ее длина  $l$  вычисляется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx . \quad (9.28)$$

Найдем теперь длину дуги плоской кривой в случае, когда уравнение кривой задано параметрически:  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $t \in [t_1, t_2]$ , где  $x(t)$ ,  $y(t)$  – непрерывно дифференцируемые функции, причем  $x'(t) \neq 0$  для любого  $t \in [t_1, t_2]$ .

Для вычисления длины дуги кривой воспользуемся формулой (9.28), выполнив замену переменной:

$$x = x(t), \quad dx = x'(t)dt, \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} .$$

Имеем

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)^2} x'(t) dt$$

или

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt . \quad (9.29)$$

### Длина дуги кривой в полярной системе координат

Пусть кривая задана в полярной системе координат уравнением  $r = r(\varphi)$ ,  $\varphi \in [\alpha, \beta]$ . Предположим, что  $r(\varphi)$  и  $r'(\varphi)$  непрерывны на отрезке  $[\alpha, \beta]$ .

Тогда параметрические уравнения кривой имеют вид  $x = r(\varphi)\cos \varphi$ ,  $y = r(\varphi)\sin \varphi$ ,  $\varphi \in [\alpha, \beta]$ , где роль параметра  $t$  играет роль  $\varphi$ . Тогда для вычисления длины дуги можно применить формулу (9.29). Найдем производные от  $x$  и  $y$  по параметру  $\varphi$ :

$$\left. \begin{aligned} x'_\varphi &= r' \cos \varphi - r \sin \varphi, \\ y'_\varphi &= r' \sin \varphi + r \cos \varphi \end{aligned} \right\} \Rightarrow (x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2 = r'^2 + r^2.$$

Следовательно,

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r'^2 + r^2} d\varphi. \quad (9.30)$$

**Пример 9.21.** Вычислить длину окружности  $x^2 + y^2 = R^2$ .

**Решение.** Найдем сначала длину четвертой части окружности, лежащей в первом квадранте. Уравнение дуги этой окружности имеет вид  $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ ,  $0 \leq x \leq R$ . Отсюда  $y' = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$ . Следовательно, согласно формуле (9.28),

получим

$$\frac{1}{4}l = \int_0^R \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx = \int_0^R \frac{R dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = R \arcsin \frac{x}{R} \Big|_0^R = R \frac{\pi}{2}.$$

Итак, длина всей окружности  $l = 2\pi R$ .

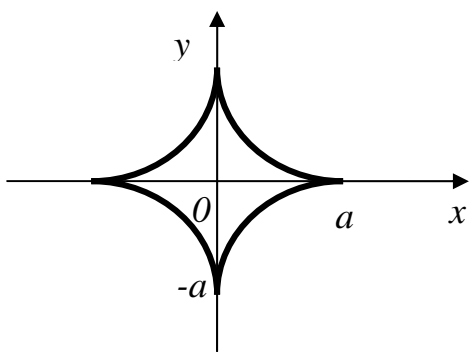


Рис. 9.28

**Пример 9.22.** Найти длину астроида  $x = a \cos^3 t$ ,  $y = a \sin^3 t$  (рис. 9.28).

**Решение.** Так как астроида симметрична относительно координатных осей, то достаточно вычислить длину одной четвертой части

астроиды, которая расположена в первом квадранте. Найдем пределы интегрирования по  $t$ :

$$\text{при } x=0 \quad \cos t=0 \Rightarrow t=\frac{\pi}{2},$$

$$\text{при } x=a \quad \cos t=1 \Rightarrow t=0, \text{ значит, } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Предварительно вычислим производные:

$$x'_t = -3a \cos^2 t \cdot \sin t, \quad y'_t = 3a \sin^2 t \cdot \cos t.$$

Применяя формулу (9.29), имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}l &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt = \\ &= 3a \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 t \sin^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)} dt = 3a \int_0^{\pi/2} \cos t \sin t dt = 3a \left( \frac{\sin^2 t}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{3}{2}a, \end{aligned}$$

откуда  $l = 6a$ .

**Пример 9.23.** Вычислить длину первого витка логарифмической спирали  $r = e^\varphi$  (рис. 9.29).

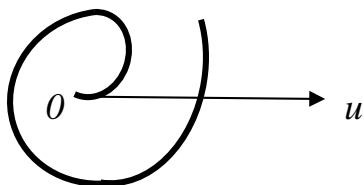


Рис. 9.29

**Решение.** Из формулы (9.30) следует, что

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{e^{2\varphi} + e^{2\varphi}} d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2} e^\varphi d\varphi = \sqrt{2} e^\varphi \Big|_0^{2\pi} = \sqrt{2}(e^{2\pi} - 1) \approx 108,16.$$

## 9.5.4. Вычисление объемов пространственных тел

### Вычисление объемов тел по известным поперечным сечениям

Пусть дано тело  $T$ , ограниченное замкнутой поверхностью, и известна площадь любого его сечения плоскостью, перпендикулярной к некоторой прямой, например, к оси  $Ox$  (рис. 9.30,а).

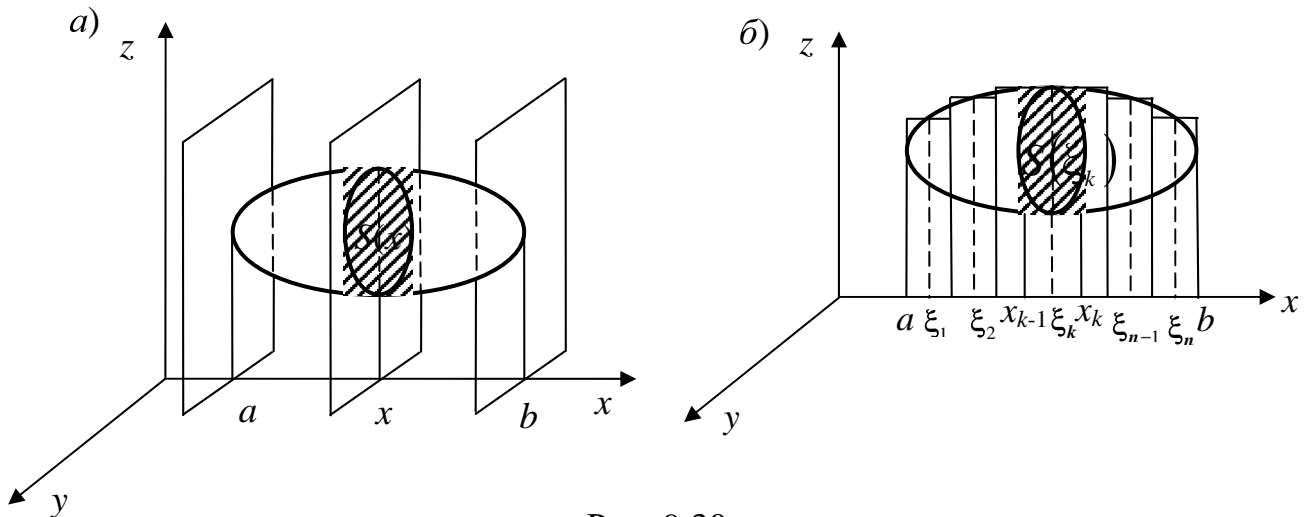


Рис. 9.30

Эти сечения будем называть **поперечными**. Положение поперечного сечения определяется абсциссой точки его пересечения с осью  $Ox$ . С изменением  $x$  площадь  $S$  поперечного сечения будет изменяться, т. е. является некоторой функцией от  $x$ . Обозначим ее  $S(x)$ . Функцию  $S(x)$  будем считать непрерывной на отрезке  $[a, b]$ , где  $a$  и  $b$  – абсциссы крайних сечений тела  $T$ .

Для вычисления объема тела  $T$  применим алгоритм составления интегральной суммы и предельного перехода к определенному интегралу.

1. Разобьем отрезок  $[a, b]$  на  $n$  частичных отрезков точками  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ . Обозначим  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ,  $\lambda = \max_{[a,b]} \{\Delta x_k\}$ ,  $k = \overline{1, n}$ . Через точки разбиения  $x_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , проведем плоскости, перпендикулярные к оси  $Ox$ .

Семейство плоскостей  $x=x_k, k=\overline{1, n}$ , разобьет данное тело  $T$  на слои, толщина каждого из которых равна  $\Delta x_k, k=\overline{1, n}$ .

2. На каждом из частичных отрезков  $[x_{k-1}, x_k], k=\overline{1, n}$ , выберем произвольным образом точку  $\xi_k$  и найдем значения  $S(\xi_k)$  функции  $S(x)$  в этих точках.

3. Предположим, что на каждом из частичных отрезков  $[x_{k-1}, x_k]$  функция  $S = S(x)$  постоянна и совпадает со значением  $S(\xi_k)$ . Тогда каждый слой тела  $T$  представляет собой прямой цилиндр с основанием  $S(\xi_k)$  и образующими, параллельными оси  $Ox$ . Объем такого частичного прямого цилиндра вычисляется по формуле

$$\Delta V_k = S(\xi_k) \Delta x_k,$$

где  $\Delta x_k$  – высота частичного цилиндра.

Объем  $V$  всего тела  $T$  приближенно равен объему фигуры, состоящей из  $n$  ступенчатых частичных цилиндров (см. рис. 9.30, б):

$$V \approx \sum_{k=1}^n \Delta V_k = \sum_{k=1}^n S(\xi_k) \Delta x_k.$$

Очевидно, что последнее приближенное равенство тем точнее, чем меньше диаметр разбиения отрезка  $[a, b]$ :  $\lambda = \max_{[a, b]} \{\Delta x_k\}$ .

4. За точное значение искомого объема примем

$$V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n S(\xi_k) \Delta x_k.$$

Сумма  $\sum_{k=1}^n S(\xi_k) \Delta x_k$  является интегральной суммой для непрерывной функции  $S(x)$  на отрезке  $[a, b]$ .

Следовательно,

$$V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n S(\xi_k) \Delta x_k \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b S(x) dx.$$

Таким образом, объем тела, заключенного между двумя плоскостями  $x = a$  и  $x = b$ , в случае если площадь сечения, проведенного перпендикулярно к оси  $Ox$ , есть известная функция от  $x$ :  $S = S(x)$  для любого  $x \in [a, b]$ , вычисляется по формуле

$$V = \int_a^b S(x) dx. \quad (9.31)$$

**Пример 9.24.** Найти объем тела, ограниченного эллипсоидом  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

**Решение.** Пересечем эллипсоид плоскостью  $x = h$ . В сечении получится эллипс

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2 \left(1 - \frac{h^2}{a^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2 \left(1 - \frac{h^2}{a^2}\right)} = 1, \\ x = h \end{cases}$$

с полуосями  $b \sqrt{1 - \frac{h^2}{a^2}}$  и  $c \sqrt{1 - \frac{h^2}{a^2}}$  (рис. 9.31), площадь которого равна  $\pi ab$

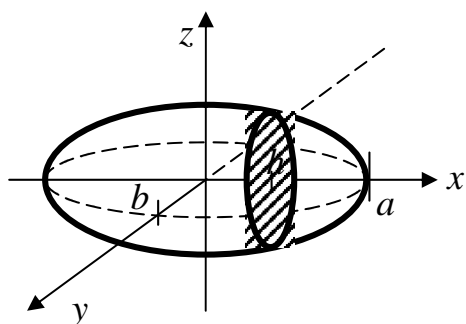


Рис. 9.31

(см. 9.5.1, пример 9.18). Следовательно, для данного случая площадь поперечного сечения эллипсоида

$$S = S(h) = \pi bc \left(1 - \frac{h^2}{a^2}\right).$$

Искомый объем тела найдем по формуле (9.31), заменив  $x$  на  $h$ :

$$V = \int_{-a}^a S(h) dh = \int_{-a}^a \pi bc \left( 1 - \frac{h^2}{a^2} \right) dh = \pi bc \left( 1 - \frac{h^3}{3a^2} \right) \Big|_{-a}^a = \frac{4}{3} \pi abc .$$

В частности, при  $a = b = c = r$  получим объем шара радиуса  $r$ :

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 .$$

### Вычисление объемов тел вращения

Рассмотрим тело, образованное вращением вокруг оси  $Ox$  криволинейной трапеции  $aABb$ , ограниченной кривой  $y = f(x)$ , осью  $Ox$  и прямыми  $x = a$ ,  $x = b$  (рис. 9.32).

Если пересечь это тело плоскостями, перпендикулярными к оси  $Ox$ ,

получим круги, радиусы которых равны модулю ординат  $y = f(x)$  точек данной кривой.

Следовательно, площадь сечения рассматриваемого тела

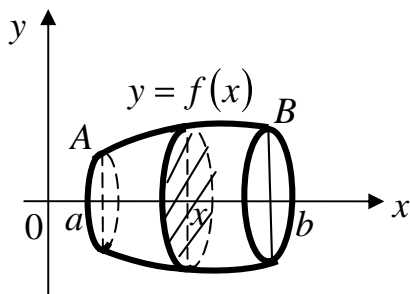


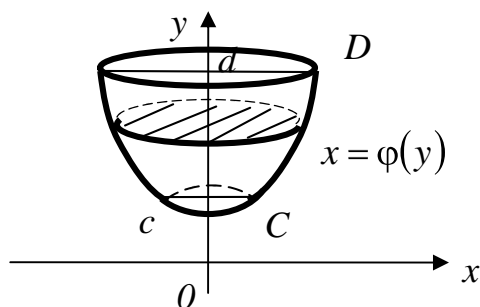
Рис. 9.32

$$S(x) = \pi y^2 = \pi (f(x))^2 .$$

Применяя формулу (9.31), получаем формулу для вычисления объема тела вращения вокруг оси  $Ox$ :

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx . \quad (9.32)$$

Если тело образовано вращением вокруг оси  $Oy$  криволинейной трапеции  $cCDd$  (рис. 9.33), то его объем вычисляется по формуле



$$V_y = \pi \int_c^d x^2 dy = \pi \int_c^d (\varphi(y))^2 dy, \quad (9.33)$$

где  $x = \varphi(y)$ ,  $c \leq y \leq d$  – уравнение кривой  $CD$ .

Рис. 9.33

**Пример 9.25.** Вычислить объем тела,

полученного вращением вокруг оси  $Ox$  криволинейной трапеции, ограниченной параболой  $y^2 = 4x$ , прямыми  $x = 1$  и  $x = 3$  и осью  $Ox$  (рис. 9.34).

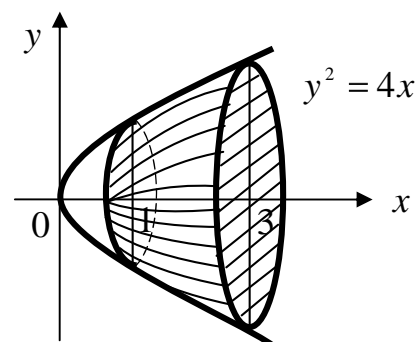


Рис. 9.34

**Решение.** Подставив в формулу (9.32)  $a = 1$ ,  $b = 3$ , получим

$$V_x = \pi \int_1^3 4x dx = 2\pi(x^2) \Big|_1^3 = 16\pi \text{ куб.ед.}$$

**Пример 9.26.** Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Oy$  фигуры, ограниченной гиперболой  $xu = 2$ , прямыми  $y = 2$ ,  $y = 4$  и осью  $Oy$  (рис. 9.35).

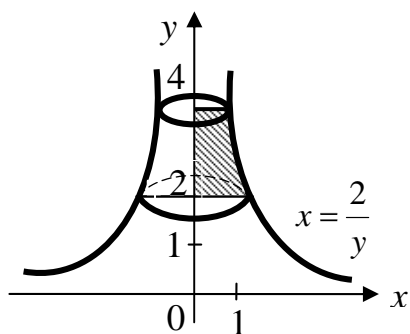


Рис. 9.35

**Решение.** Подставив в формулу (9.33)  $c = 2$ ,  $d = 4$ ,  $x = \frac{2}{y}$ , получим

$$V_y = \pi \int_2^4 \left(\frac{2}{y}\right)^2 dy = 4\pi \left(-\frac{1}{y}\right) \Big|_2^4 = \pi \text{ куб.ед.}$$



**Пример 9.27.** Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной параболой  $y = x^2$  и прямой  $y = 2x$ .

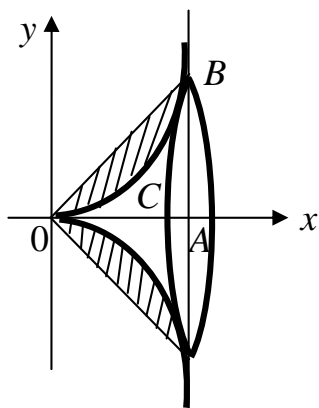


Рис. 9.36

Решение системы

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2x \end{cases}$$

дает  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 2$ .

Следовательно,

$$\begin{aligned} V_x = V_2 - V_1 &= \pi \int_0^2 (2x)^2 dx - \pi \int_0^2 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - x^4) dx = \pi \left( \frac{4x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2 = \\ &= \pi \left( \frac{32}{3} - \frac{32}{5} \right) = \frac{64}{15} \pi \text{ куб.ед.} \end{aligned}$$

### 9.5.5. Вычисление площади поверхности вращения

Пусть кривая  $AB$ , заданная уравнением  $y = f(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , вращается вокруг  $Ox$ , где  $f(x)$  – непрерывно дифференцируемая функция. Требуется найти площадь поверхности, образованной кривой  $AB$  при этом вращении.

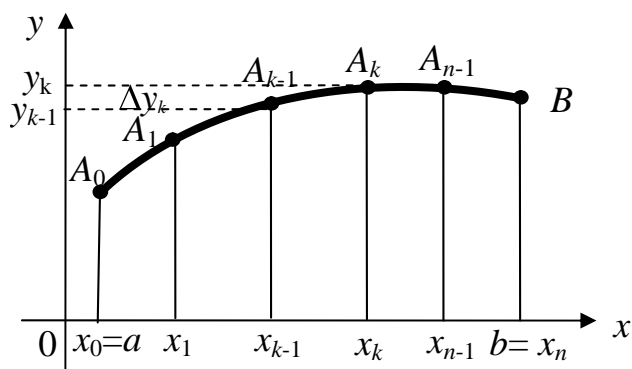


Рис. 9.37

Разобьем дугу  $AB$  на  $n$  частей точками  $A_0 = A, A_1, \dots, A_{k-1}, A_k, \dots, A_n = B$  и построим ломаную  $AA_1A_2 \dots A_{n-1}B$  (рис. 9.37).

При своем вращении вокруг оси  $Ox$  каждая трапеция  $x_{k-1}A_{k-1}A_kx_k$  опишет усеченный конус, площадь боковой поверхности которого

$$\Delta Q_k = 2\pi \frac{y_{k-1} + y_k}{2} \Delta l_k, \quad (9.34)$$

где  $\Delta l_k$  – длина хорды, стягивающей дугу  $A_{k-1}A_k$ .

Боковая поверхность тела, полученная при вращении указанной ломанной вокруг оси  $Ox$ , равна сумме боковых поверхностей  $\Delta Q_k$  всех усеченных конусов.

Так как  $y_{k-1} = y_k - \Delta y_k$ , то по формуле (9.45) имеем

$$\Delta Q_k = \pi(2y_k - \Delta y_k) \Delta l_k \approx 2\pi y_k \Delta l_k,$$

учитывая, что  $\Delta y_k \cdot \Delta l_k = o(\Delta l_k)$ ,  $\Delta l_k \rightarrow 0$ .

Так как  $\Delta l_k = \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \Delta x_k$ , где  $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ , то  $\Delta Q_k \approx 2\pi y_k \Delta l_k = 2\pi f(x_k) \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \Delta x_k$ . В силу непрерывности  $f(x)$  и  $f'(x)$  существует предел

$$Q = \lim_{\lambda \rightarrow 0} 2\pi \sum_{k=1}^n f(x_k) \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \Delta x_k,$$

где  $\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \{\Delta x_k\}$ . Этот предел равен определенному интегралу

$$Q_x = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (9.35)$$

Это и есть формула для вычисления площади поверхности, образованной вращением кривой  $y = f(x)$  вокруг оси  $Ox$ ,  $x \in [a, b]$ .

Если же график функции вращается вокруг оси  $Oy$ , то из равенства  $y = f(x)$  нужно выразить  $x$  в виде функции  $y$ , т. е.  $x = \varphi(y)$ ,  $c \leq y \leq d$ . Тогда формула (9.35) приобретает вид

$$Q_y = 2\pi \int_c^d \varphi(y) \sqrt{1 + (\varphi'(y))^2} dy.$$

При параметрическом задании функции  $y = f(x)$  в виде  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $t_1 \leq t \leq t_2$ , из формулы (9.35) в силу того, что  $f'(x) = \frac{y_t'}{x_t'}$ , получим

$$Q = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (9.36)$$

Если же кривая задана в полярных координатах равенством  $r = r(\varphi)$ , то ее параметрические уравнения имеют вид  $x = r(\varphi) \cos \varphi$ ,  $y = r(\varphi) \sin \varphi$ ,  $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ , где роль параметра  $t$  играет  $\varphi$ . Тогда формула (9.36) принимает вид

$$Q = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r(\varphi) \sin \varphi \sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2} d\varphi. \quad (9.37)$$

**Пример 9.28.** Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси  $Ox$  дуги кубической параболы  $y = x^3$ , заключенной между прямыми

$x = -\frac{2}{3}$  и  $x = \frac{2}{3}$  (рис. 9.38).

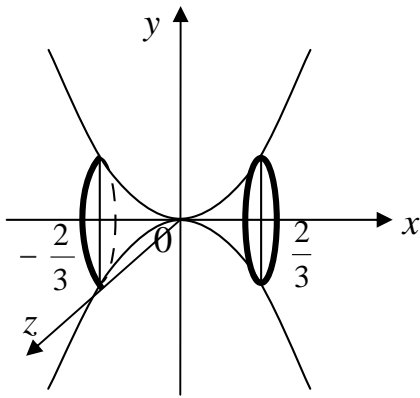


Рис. 9.38

**Решение.** Поверхность, образуемая вращением этой дуги вокруг оси  $Ox$ , состоит из двух одинаковых частей. Поэтому, используя формулу (9.35), имеем

$$Q_x = 2 \cdot 2\pi \int_0^{2/3} x^3 \sqrt{1+9x^4} dx =$$

$$= \frac{4}{36} \pi \int_0^{2/3} (1+9x^4)^{1/2} d(1+9x^4) = \frac{1}{9} \pi \frac{(1+9x^4)^{3/2}}{3/2} \Big|_0^{2/3} = \frac{2}{27} \pi \left( \sqrt{\left(1 + \frac{16}{9}\right)^3} - 1 \right) =$$

$$= \frac{2}{27} \pi \left( \frac{125-27}{27} \right) = \frac{196}{729} \pi.$$

**Пример 9.29.** Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси  $Ox$  одной арки циклоиды  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(t - \cos t)$  (рис. 9.39).

**Решение.** Уравнение линии задано в параметрическом виде, поэтому используем формулу (9.36). Найдем пределы интегрирования по  $t$ : если  $x = 0$ , то

$$t = 0; \text{ если } x = 2\pi a, \text{ то } t = 2\pi.$$

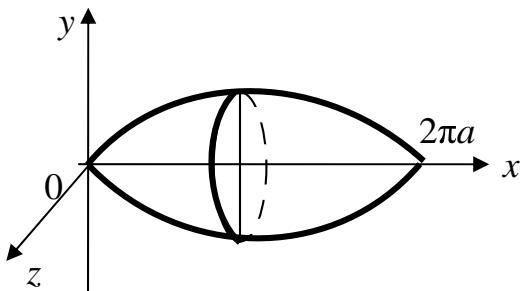


Рис. 9.39

Таким образом

$$Q_x = 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt =$$

$$= 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sqrt{2(1 - \cos t)} dt =$$

$$= 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sqrt{4 \sin^2 \frac{t}{2}} dt = 4\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sin \frac{t}{2} dt =$$

$$= 4\pi a^2 \int_0^{2\pi} 2\sin^2 \frac{t}{2} \cdot \sin \frac{t}{2} dt = -16\pi a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2 \frac{t}{2}\right) d\left(\cos \frac{t}{2}\right) =$$

$$= \left(-16\pi a^2 \left(\cos \frac{t}{2} - \frac{1}{3} \cos^3 \frac{t}{2}\right)\right) \Big|_0^{2\pi} = -16\pi a^2 \left(-1 + \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{64}{3} \pi a^2.$$

**Пример 9.30.** Вычислить площадь поверхности, полученной вращением окружности  $r = 10\sin \varphi$  вокруг полярной оси (рис. 9.40).

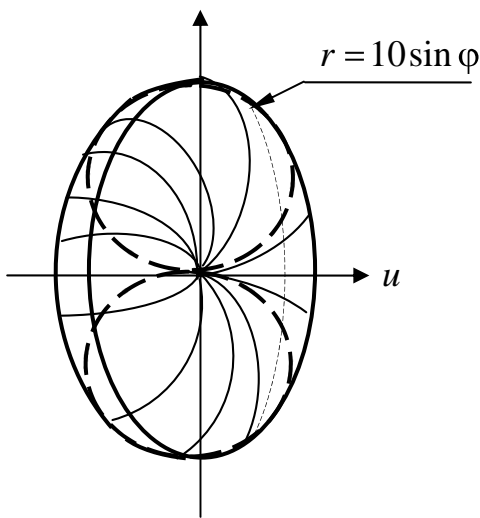


Рис. 9.40

**Решение.** Воспользуемся формулой (9.37).

Найдем:  $r'_\varphi = 10\cos \varphi$ ,  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = \pi$ . Тогда

$$Q = 2\pi \int_0^\pi 10\sin^2 \varphi \sqrt{100\cos^2 \varphi + 100\sin^2 \varphi} d\varphi =$$

$$= 200\pi \int_0^\pi \sin^2 \varphi d\varphi = 200\pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi =$$

$$= 100\pi \left(\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi\right) \Big|_0^\pi \approx 985,96.$$

## 9.5.6. Приложение определенных интегралов к решению физических задач

### Вычисление пройденного пути

Пусть материальная точка движется прямолинейно вдоль числовой оси с непрерывно меняющейся скоростью  $v(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ . Смещение точки за малый промежуток времени  $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$  приближенно можно считать равным  $v(\xi_k)\Delta t_k$ ,

где  $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$ . Тогда интегральная сумма  $\sum_{k=1}^n v(\xi_k)\Delta t_k$  представляет собой

приближенное значение пути, пройденного точкой от момента времени  $t_0$  до  $T$ . В пределе при  $\lambda = \max\{\Delta t_k\} \rightarrow 0$  получим точное значение этого пути  $s$ , т. е.

$$s = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n v(\xi_k) \Delta t_k = \int_{t_0}^T v(t) dt ;$$

$$s = \int_{t_0}^T v(t) dt . \quad (9.38)$$

**Пример 9.31.** Скорость движения точки определяется уравнением  $v = (3t^2 - 2t) \text{ м/с}$ . Найти путь  $s$ , пройденный точкой за первые 5 с после начала движения.

**Решение.** Воспользуемся формулой (9.38).

$$s = \int_0^5 (3t^2 - 2t) dt = (t^3 - t^2) \Big|_0^5 = 100 \text{ м} .$$

### ***Вычисление работы переменной силы***

Пусть материальная точка движется по прямой линии под действием некоторой переменной силы  $\vec{F}$ . Перемещение этой точки зададим вектором  $\vec{s}$  и предположим, что направление силы совпадает с направлением перемещения. Если на всем пути сила  $\vec{F}$  постоянна, то работа  $A = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}|$ .

Рассмотрим случай, когда сила  $\vec{F}$  сохраняет постоянное направление  $(\vec{F} \parallel \vec{s})$ , но меняется по модулю  $(|\vec{F}| \neq \text{const})$ . Вычислим работу этой переменной силы. За ось  $Ox$  примем прямую, вдоль которой движется материальная точка. Пусть начальная и конечная точки пути имеют абсциссы  $a$  и  $b$  ( $a < b$ ) соответственно. В

каждой точке отрезка  $[a, b]$  модуль силы является некоторой функцией абсциссы, т. е.  $|\overline{F}| = F(x)$ . Таким образом,

$$\overline{F} = |\overline{F}| \overline{i} = F(x) \overline{i}, \quad \overline{s} = (a - b) \overline{i}, \quad |\overline{s}| = b - a.$$

Будем считать функцию  $F(x)$  непрерывной. Для нахождения работы переменной силы используем алгоритм составления интегральной суммы и предельного перехода к определенному интегралу.

1. Разобьем отрезок  $[a, b]$  на  $n$  частичных отрезков точками  $x_k$ :  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , где  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ,  $k = \overline{1, n}$ , — длина  $k$ -го частичного отрезка. Работа на всем пути равна сумме работ на малых его участках:

$$A = \sum_{k=1}^n \Delta A_k,$$

где  $\Delta A_k$  — работа на частичном отрезке  $[x_{k-1}, x_k]$ .

Если отрезки  $[x_{k-1}, x_k]$  брать достаточно малыми, то на каждом таком отрезке можно считать  $|\overline{F}| \approx \text{const}$ .

2. Выберем на каждом частичном отрезке  $[x_{k-1}, x_k]$  произвольную точку  $\xi_k$  и найдем значение функции  $F(x)$  в точке  $\xi_k$ .

3. Предположим, что на каждом частичном отрезке модуль силы имеет постоянное значение, равное значению функции  $F(x)$  в точке  $\xi_k$ :  $|\overline{F}_k| = F(\xi_k)$ .

Тогда работа силы на отрезке  $[x_{k-1}, x_k]$

$$\Delta A_k \approx |\overline{F}_k| \Delta x_k = F(\xi_k) \Delta x_k.$$

Работа переменной силы  $F$ , совершаемая на всем пути  $|\overline{s}| = b - a$ :

$$A \approx A_n = \sum_{k=1}^n F(\xi_k) \Delta x_k .$$

$A_n$  представляет собой интегральную сумму, составленную для непрерывной на отрезке  $[a, b]$  функции  $F(x)$ .

4. Предел  $A_n$  при  $\lambda = \max_{[a, b]} \{\Delta x_k\} \rightarrow 0$  в силу предположения о непрерывности функции  $F(x)$  существует и выражает работу переменной силы на прямолинейном пути от точки  $a$  до точки  $b$ :

$$A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n F(\xi_k) \Delta x_k \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b F(x) dx .$$

Итак, работа переменной силы вычисляется по формуле

$$A = \int_a^b F(x) dx . \quad (9.39)$$

**Пример 9.32.** Какую работу нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05 м, если при действии силы 1 Н она растягивается на 0,01 м?

**Решение.** По закону Гука модуль силы  $\overline{F}$ , растягивающей или сжимающей пружину, пропорционален величине сжатия или растяжения, т. е.  $|\overline{F}| = kx$ , где  $x$  – величина сжатия или растяжения,  $k$  – коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств пружины. По условию при  $x = 0,01$  м сила равна 1 Н, т. е.  $1 = k \cdot 0,01$ , откуда  $k = 100$ . Следовательно,  $|F| = F(x) = 100x$ .

Искомую работу определяем по формуле (9.39):

$$A = \int_0^{0,05} 100x dx = 50x^2 \Big|_0^{0,05} = 0,18 \text{ Дж} .$$



## Вычисление работы электродвигателя переменной мощности

Найдем работу, совершаемую двигателем за промежуток времени  $\Delta t = [a, b]$ , если его мощность в момент времени  $t$  равна  $N(t)$ . Как известно, при постоянной мощности двигателя  $N$  его работа  $A = N\Delta t$ .

Воспользуемся алгоритмом составления интегральной суммы и предельного перехода к определенному интегралу.

1. Разобьем временной отрезок  $[a, b]$  на  $n$  частичных отрезков  $[t_{k-1}, t_k]$ ,  $k = \overline{1, n}$ .

Обозначим  $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ ,  $k = \overline{1, n}$ .

2. Выберем на каждом частичном отрезке произвольным образом точку  $\tau_k$ :  $t_{k-1} \leq \tau_k \leq t_k$ .

3. Будем считать мощность на каждом из частичных отрезков постоянной и равной  $N(\tau_k)$ . Тогда

$$A \approx A_n = \sum_{k=1}^n N(\tau_k) \Delta t_k .$$

4. Считая функцию  $N(t)$  непрерывной и переходя к пределу при  $\lambda = \max_{[a, b]} \{\Delta t_k\} \rightarrow 0$ , получаем

$$A = \int_a^b N(t) dt . \quad (9.40)$$

**Пример 9.33.** Вычислить работу и среднюю мощность переменного тока за промежуток времени  $[0, 2\pi/\omega]$ , если сила тока определяется формулой  $I = I_0 \sin \omega t$ , где  $I_0$  – максимальное значение тока,  $\omega$  – круговая частота,  $t$  – время, а сопротивление цепи равно  $R$ .

**Решение.** Известно, что мощность постоянного тока выражается формулой  $N = I^2 R$ , поэтому, согласно формуле (9.40), работа переменного тока

$$A = I_0^2 R \int_0^{2\pi/\omega} \sin^2 \omega t dt = I_0^2 R \int_0^{2\pi/\omega} \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} dt = \frac{I_0^2 R \pi}{\omega}.$$

Средняя мощность переменного тока

$$N_{\text{cp}} = \frac{A}{2\pi/\omega} = \frac{I_0^2 R}{2}.$$

### Вычисление силы давления жидкости

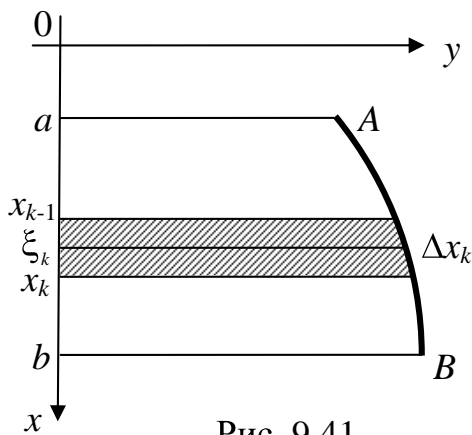


Рис. 9.41

Пусть в жидкость плотностью  $\rho$  вертикально погружается пластинка, имеющая вид криволинейной трапеции, таким образом, что ее боковые стороны параллельны поверхности жидкости и находятся ниже ее уровня (рис. 9.41). Требуется определить силу давления жидкости на пластинку.

Если пластинка находится в горизонтальном положении на глубине  $h$  от поверхности жидкости, то сила давления  $P$  на эту пластинку будет равна весу столба жидкости, основанием которого является длина пластинки, а высотой – глубина  $h$ , т. е.

$$P = g\rho hS,$$

где  $g$  – ускорение свободного падения,  $S$  – площадь пластинки.

Если пластинка погружена в жидкость вертикально, то давление жидкости – сила давления на единицу площади – изменяется с глубиной погружения.

Будем учитывать, что по закону Паскаля давление в жидкости передается одинаково по всем направлениям, в том числе и на вертикальную пластину.

Выберем систему координат так, как показано на рис. 9.41. Уравнение кривой  $AB$  имеет вид  $y = f(x)$ , где  $f(x)$  – непрерывная на  $[a, b]$  функция. Для нахождения силы давления используем алгоритм составления интегральной суммы и предельного перехода к определенному интегралу.

1. Разобьем отрезок  $[a, b]$  на  $n$  частичных отрезков  $[x_{k-1}, x_k]$  точками  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k = b$ . Обозначим  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ,  $k = \overline{1, n}$ .

Проведем через точки  $x_0, x_1, \dots, x_k$  прямые, параллельные оси  $Oy$ , которые разобьют пластинку на  $n$  малых горизонтальных полосок.

2. Выберем на каждом частичном отрезке произвольным образом точку  $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ,  $k = \overline{1, n}$ . Тогда площадь  $S_k$  малой горизонтальной полоски

$$S_k \approx f(\xi_k) \Delta x_k.$$

3. Считая глубину, на которой находятся все точки каждой элементарной пластинки, одинаковой ( $h = \xi_k$ ), значение силы давления на нее можно вычислить по формуле

$$\Delta P_k \approx g \rho \xi_k f(\xi_k) \Delta x_k.$$

Тогда приближенное значение силы давления жидкости на всю пластинку

$$P_n = \sum_{k=1}^n g \rho \xi_k f(\xi_k) \Delta x_k.$$

Точность этого приближенного равенства тем больше, чем меньше длины частичных отрезков  $[x_{k-1}, x_k]$ .

4. За точное значение  $P$  силы давления жидкости на пластинку принимается предел  $P_n$  при  $\lambda = \max_{[a, b]} \{\Delta x_k\} \rightarrow 0$ :

$$P = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n g \rho \xi_k f(\xi_k) \Delta x_k .$$

Так как  $P_n$  представляет собой интегральную сумму для непрерывной функции  $\rho x f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ , то указанный предел существует и выражается определенным интегралом:

$$P = g \int_a^b \rho x f(x) dx . \quad (9.41)$$

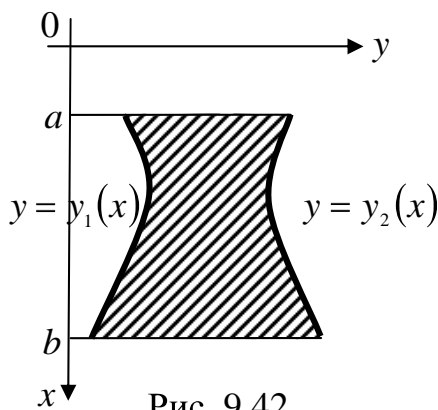


Рис. 9.42

Если в жидкость вертикально погружена пластинка (рис. 9.42), ограниченная прямыми  $x = a$ ,  $x = b$  и кривыми  $y = y_1(x)$ ,  $y = y_2(x)$ , то сила давления на эту пластинку вычисляется по формуле

$$P = g \int_a^b \rho x (y_2 - y_1) dx .$$

**Пример 9.34.** Найти силу давления жидкости на вертикальную пластинку, имеющую форму полукруга радиуса  $R$ . Диаметр круга расположен на поверхности жидкости, удельный вес жидкости равен  $\gamma$  (рис. 9.43).

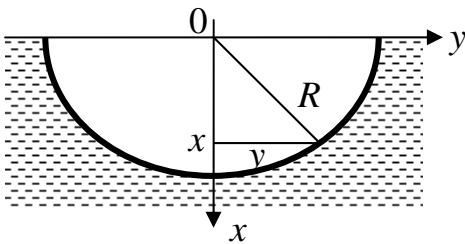


Рис. 9.43

**Решение.** По условию  $a = 0$ ,  $b = R$ . Из уравнения окружности  $x^2 + y^2 = R^2$  находим, что

$$y_1 = -\sqrt{R^2 - x^2}, \quad y_2 = \sqrt{R^2 - x^2} .$$

Применяя формулу (9.41), получаем

$$P = 2\gamma \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} x dx = \left( -\frac{2}{3} \gamma (R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^R = \frac{2}{3} \gamma R^3 .$$

**Вычисление статических моментов, моментов инерции  
и координат центра масс**

Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат  $Oxy$ .

**Определение 9.2.** Статическим моментом материальной точки  $A(x;y)$ , в которой сосредоточена масса  $m$ , относительно оси  $Ox$  ( $Oy$ ) называется величина, численно равная произведению массы этой точки и расстояния до оси  $Ox$  ( $Oy$ ):

$$M_x = my \quad (M_y = mx).$$

**Определение 9.3.** Моментом инерции материальной точки  $A(x,y)$ , в которой сосредоточена масса  $m$ , относительно оси  $Ox$  (оси  $Oy$ , точки  $O$ ) называется величина, численно равная произведению массы этой точки и квадрата расстояния до оси  $Ox$  (оси  $Oy$ , точки  $O$ ):

$$I_x = my^2, \quad I_y = mx^2, \quad I_0 = I_x + I_y = m(x^2 + y^2).$$

Для системы материальных точек  $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), \dots, A_n(x_n, y_n)$ , в которых сосредоточены массы  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , статические моменты находятся по формулам

$$M_x = \sum_{k=1}^n m_k y_k, \quad M_y = \sum_{k=1}^n m_k x_k,$$

а моменты инерции – по формулам

$$I_x = \sum_{k=1}^n m_k y_k^2, \quad I_y = \sum_{k=1}^n m_k x_k^2, \quad I_0 = I_x + I_y = \sum_{k=1}^n (x_k^2 + y_k^2) m_k.$$

**Определение 9.4.** Центром масс системы материальных точек называется точка, обладающая тем свойством, что если в ней сосредоточить всю массу  $M = \sum_{k=1}^n m_k$  системы, то статический момент этой точки относительно любой ее оси равен статическому моменту данной системы материальных точек относительно той же оси.

Обозначая центр масс системы  $C(x_c, y_c)$ , получаем

$$M_x = \sum_{k=1}^n m_k y_k = M y_c, \quad M_y = \sum_{k=1}^n m_k x_k = M x_c.$$

Таким образом, координаты центра масс системы материальных точек вычисляются по следующим формулам:

$$x_c = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k x_k}{\sum_{k=1}^n m_k}, \quad y_c = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k y_k}{\sum_{k=1}^n m_k}.$$

Найдем статические моменты, моменты инерции и координаты центра масс однородной плоской материальной кривой или плоской материальной фигуры с известной плотностью  $\rho$ .

***Вычисление статических моментов, моментов инерции  
и координат центра масс плоской линии***

Пусть материальная кривая  $AB$  длиной  $l$  задана уравнением  $y = f(x)$ ,  $x \in [a, b]$ . Будем считать кривую  $AB$  однородной ( $\rho = \text{const}$ ).

Вычисление моментов плоской линии и координат центра масс проведем по уже известному алгоритму.

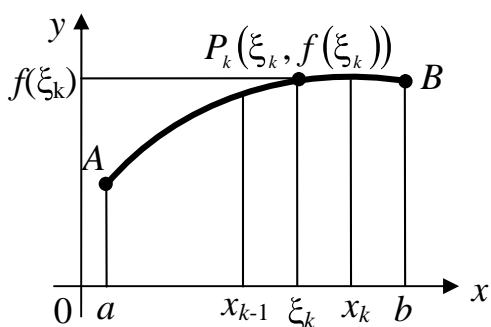


Рис. 9.44

оси  $Oy$  (рис. 9.44).

Эти прямые разобьют кривую  $AB$  на частичные дуги длиной  $\Delta l_k$  и массой  $m_k = \rho \Delta l_k$ . Тогда каждой точке  $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$  будет соответствовать точка  $P_k(\xi_k; f(\xi_k))$ .

2. Заменяем каждую часть дуги  $\Delta l_k$  материальной точкой  $P_k(\xi_k; f(\xi_k))$  массой  $m_k = \rho \Delta l_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ .

3. Будем рассматривать всю кривую  $AB$  как систему, состоящую из  $n$  материальных точек  $P_k(\xi_k; f(\xi_k))$ ,  $k = \overline{1, n}$ . Тогда масса  $M$  материальной кривой  $AB$ , статические моменты  $M_x, M_y$ , моменты инерции  $I_x, I_y, I_0$  и координаты центра масс находятся по следующим приближенным формулам:

$$M \approx \sum_{k=1}^n \rho \Delta l_k, \quad M_x \approx \sum_{k=1}^n \rho f(\xi_k) \Delta l_k, \quad M_y \approx \sum_{k=1}^n \rho \xi_k \Delta l_k,$$

$$I_x \approx \sum_{k=1}^n \rho f^2(\xi_k) \Delta l_k, \quad I_y \approx \sum_{k=1}^n \rho \xi_k^2 \Delta l_k, \quad I_0 = I_x + I_y,$$

где  $\Delta l_k = \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \Delta x_k$ ,  $x_c \approx \frac{M_y}{M}$ ,  $y_c \approx \frac{M_x}{M}$ .

1. Разобьем отрезок  $[a, b]$  на  $n$  частичных отрезков  $x_k$  :  
 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ . Обозначим  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ . Выберем внутри каждого частичного отрезка  $[x_{k-1}, x_k]$  произвольным образом точку  $\xi_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ . Через точки разбиения  $x_k$  проведем прямые, параллельные

4. Переходя к пределу при  $\lambda = \max_{[a,b]} \{\Delta x_k\} \rightarrow 0$ , получаем точные значения

искомых величин:

$$M = \int_a^b \rho \sqrt{1 + (y')^2} dx,$$

$$M_x = \int_a^b \rho y \sqrt{1 + (y')^2} dx, \quad M_y = \int_a^b \rho x \sqrt{1 + (y')^2} dx,$$

$$I_x = \int_a^b \rho y^2 \sqrt{1 + (y')^2} dx, \quad I_y = \int_a^b \rho x^2 \sqrt{1 + (y')^2} dx, \quad I_0 = I_x + I_y, \quad (9.42)$$

$$x_c = \frac{M_y}{M} = \frac{\int_a^b x \sqrt{1 + (y')^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx} = \frac{1}{l} \int_a^b x \sqrt{1 + (y')^2} dx,$$

$$y_c = \frac{M_x}{M} = \frac{\int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx} = \frac{1}{l} \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

Полученные формулы справедливы и для неоднородной ( $\rho = \rho(x)$ ) материальной кривой  $AB$ .

При параметрическом задании кривой уравнением  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $t_1 \leq t \leq t_2$ , формулы (9.42) преобразуются к виду

$$M_x = \int_{t_1}^{t_2} \rho y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt, \quad M_y = \int_{t_1}^{t_2} \rho x(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt,$$



$$I_x = \int_{t_1}^{t_2} \rho y^2(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt, \quad I_y = \int_{t_1}^{t_2} \rho x^2(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt, \quad I_0 = I_x + I_y,$$

$$x_c = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt}{\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt} = \frac{1}{l} \int_{t_1}^{t_2} x(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt, \quad (9.43)$$

$$y_c = \frac{\int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt}{\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt} = \frac{1}{l} \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

**Пример 9.35.** Найти статические моменты относительно осей координат и координаты центра масс четверти однородной ( $\rho=1$ ) окружности  $x^2 + y^2 = R^2$ , лежащей в первом квадранте.

**Решение.** Из уравнения окружности имеем  $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ , откуда  $y' = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$ ,  $\sqrt{1 + (y')^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}$ .

На основании формул (9.42) получим

$$M_x = \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = R \int_{-R}^R dx = 2R^2,$$

$$M_y = \int_{-R}^R x \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = -R \sqrt{R^2 - x^2} \Big|_{-R}^R = 0.$$

Масса полуокружности численно равна длине полуокружности ( $M = \pi R$ ; см. 9.5.3, пример 9.21), поэтому по формулам (9.42) находим координаты ее центра масс:

$$x_c = \frac{M_y}{M} = 0, \quad y_c = \frac{M_x}{M} = \frac{2R^2}{\pi R} = \frac{2R}{\pi}.$$

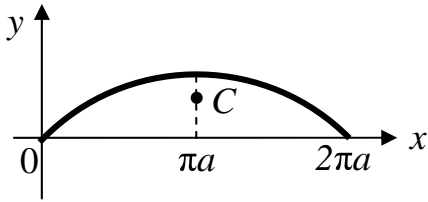


Рис. 9.45

**Пример 9.36.** Найти центр тяжести однородной арки циклоиды  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$  (рис. 9.45).

**Решение.** Данная однородная дуга ( $\rho = 1$ ) симметрична относительно прямой  $x = \pi a$ . Поэтому центр тяжести дуги лежит на этой прямой, т. е.  $x_c = \pi a$ . Для определения  $y_c$  найдем дифференциал дуги циклоиды:

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt = 2a \sin \frac{t}{2} dt$$

и вычислим интегралы, содержащиеся в формуле (9.43):

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{t_1}^{t_2} \rho y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = 2a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sin \frac{t}{2} dt = \\ &= 2a^2 \left( \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt - \int_0^{2\pi} \cos t \sin \frac{t}{2} dt \right) = 2a^2 \left[ 2 \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} d\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left( \sin \frac{3t}{2} + \sin \left(\frac{-t}{2}\right) \right) dt \right] = \\ &= 2a^2 \left( -3 \cos \frac{t}{2} + \frac{1}{3} \cos \frac{3t}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{32}{3} a^2, \end{aligned}$$

$$M = \int_{t_1}^{t_2} \rho \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 8a.$$

Тогда  $y_c = \frac{4}{3}a$ .

**Вычисление статических моментов, моментов инерции  
и координат центра масс плоской фигуры**

В этом случае, как и при вычислении площадей плоских фигур, в качестве базовой фигуры удобно принимать криволинейную трапецию.

Пусть дана криволинейная трапеция  $aABb$ , ограниченная графиком функции  $y = f(x) \geq 0$ ,  $x \in [a, b]$ , осью  $Ox$  и прямыми  $x = a$ ,  $x = b$ . По этой трапеции непрерывно с плотностью  $\rho = \text{const}$  распределена масса  $M$ . Тогда  $M = \rho S$ , где  $S$  – площадь криволинейной трапеции.

Вычисление статических моментов  $M_x$ ,  $M_y$ , моментов инерции  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_0$  и координат центров масс  $x_c$ ,  $y_c$  проведем по описанному выше алгоритму.

1. Разобьем отрезок  $[a, b]$  на  $n$  частичных отрезков точками  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ . Обозначим  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ .

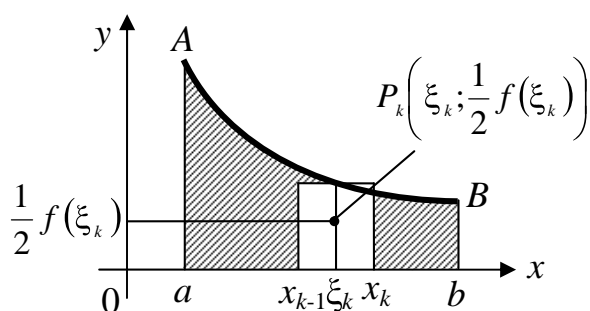


Рис. 9.46

2. Выберем точку  $\xi_k = \frac{1}{2}(x_{k-1} + x_k)$ .

Через точки разбиения  $x_k$  проведем прямые, параллельные оси  $Oy$  (рис. 9.46). Эти прямые разобьют криволинейную трапецию на частичные трапеции. Площадь каждой такой  $k$ -й частичной

трапеции приближенно равна площади прямоугольника со сторонами  $\Delta x_k$  и  $f(\xi_k)$ :  $\Delta S_k \approx f(\xi_k)\Delta x_k$ ,  $m_k = \rho \Delta S_k$ .

3. Сосредоточим массу каждой частичной криволинейной трапеции в точке  $P_k\left(\xi_k, \frac{1}{2}f(\xi_k)\right)$ , т. е. в центре симметрии прямоугольника со сторонами  $\Delta x_k$ ,

$f(\xi_k)$ . Будем рассматривать криволинейную трапецию  $aABb$  как систему  $n$  материальных точек  $P_k\left(\xi_k, \frac{1}{2}f(\xi_k)\right)$ ,  $k = \overline{1, n}$ . Тогда ее масса, статические моменты  $M_x$ ,  $M_y$ , моменты инерции  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_0$  и координаты центра масс находятся по приближенным формулам:

$$M \approx \sum_{k=1}^n \rho f(\xi_k) \Delta x_k, \quad M_x \approx \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \rho f^2(\xi_k) \Delta x_k, \quad M_y \approx \sum_{k=1}^n \rho \xi_k f(\xi_k) \Delta x_k,$$

$$I_x \approx \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \rho f^3(\xi_k) \Delta x_k, \quad I_y \approx \sum_{k=1}^n \rho \xi_k^2 f(\xi_k) \Delta x_k, \quad I_0 = I_x + I_y,$$

$$x_c \approx \frac{M_y}{M}, \quad y_c \approx \frac{M_x}{M}.$$

4. Переходя к пределу при  $\lambda = \max_{[a,b]} \{\Delta x_k\} \rightarrow 0$  ( $\lambda \rightarrow 0 \Leftrightarrow \xi_k \rightarrow x; f(\xi_k) \rightarrow y$ ),

получаем точные значения искомых величин:

$$M = \int_a^b \rho y dx, \quad M_x = \frac{1}{2} \int_a^b \rho y^2 dx, \quad M_y = \int_a^b \rho x y dx,$$

$$I_x = \frac{1}{2} \int_a^b \rho y^3 dx, \quad I_y = \int_a^b \rho x^2 y dx, \quad I_0 = I_x + I_y,$$

$$x_c = \frac{M_y}{M}, \quad y_c = \frac{M_x}{M}.$$

Для нахождения центра тяжести плоской фигуры, имеющей сложную форму, применяют метод разбиения фигуры на простейшие фигуры, координаты центра масс которых либо известны, либо достаточно легко определяются.

При нахождении координат центра масс можно использовать свойства симметрии фигуры. Если фигура имеет плоскость, ось или центр симметрии, то центр тяжести лежит в этой плоскости, на этой оси или в этом центре.

**Пример 9.37.** Найти центр тяжести однородной пластинки, ограниченной параболой  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$  и осями координат.

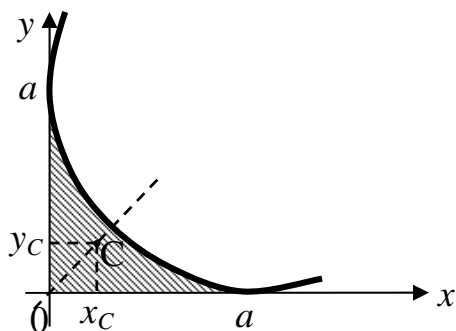


Рис. 9.47

**Решение.** Данная однородная фигура симметрична относительно биссектрисы первого координатного угла (рис. 9.47), поэтому  $x_c = y_c$ . Вычислим интегралы, содержащиеся в формуле (9.43):

$$M_y = \int_0^a \rho x y dx = \int_0^a x \left( a^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}} \right)^2 dx = \int_0^a \left( ax - 2a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} + x^2 \right) dx = \left( \frac{1}{2} ax^2 - \frac{4}{5} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^a = \frac{a^3}{30}$$

$$M = \int_a^b \rho y dx = \int_0^a \left( a^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}} \right)^2 dx = \int_0^a \left( a - 2a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + x \right) dx = \frac{a^2}{6}.$$

Следовательно,  $x_c = y_c = \frac{M_y}{M} = \frac{a}{5}$ .

## 10. ИНТЕГРАЛЫ ПО ФИГУРЕ ОТ СКАЛЯРНЫХ ФУНКЦИЙ (ОПРЕДЕЛЕННЫЙ, КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ I РОДА)

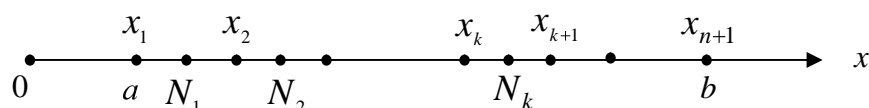
### 10.1. Задача о массе фигуры, приводящая к понятию интеграла по фигуре от скалярной функции

Линию (пространственную или плоскую), некоторую плоскую область или поверхность в пространстве  $R_3$ , некоторое тело – все эти геометрические объекты будем называть словом “фигура” ( $\Phi$ ). Диаметр  $\lambda$  фигуры называется наибольшее расстояние между двумя точками фигуры. Мерой  $\mu$  фигуры служат: для линии – длина, для поверхности – площадь, для тела – объем.

Теперь рассмотрим задачу о массе различных фигур, неоднородных, с заданной плотностью распределения массы:  $\delta = f(N)$ , где  $N$  – произвольная точка фигуры.

1. Тонкий материальный стержень с линейной плотностью  $\delta = f(N)$  представим в виде отрезка  $[a, b]$ .

Разобьем отрезок произвольным образом на  $n$  “маленьких” отрезков (элементарные части) (рис. 10.1), тогда в каждом частичном отрезке можно принять плотность постоянной, равной плотности,



$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k, \quad N_k \in [x_k, x_{k+1}] \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Рис. 10.1

вычисленной в произвольной точке этого отрезка, и масса отрезка  $\Delta m_k \approx f(N_k) \cdot \Delta x_k$ , где  $\Delta x_k$  – длина  $k$  – го отрезка.

Если стержень разбит на  $n$  частичных отрезков, то масса всего стержня приближенно выразится суммой  $M \approx \sum_{k=1}^n f(N_k) \cdot \Delta x_k$ .

Очевидно, приближение будет тем точнее, чем мельче разбиение (при этом общее количество частичных отрезков неограниченно растет). Таким образом, точная формула для вычисления массы стержня

$$M \approx \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ (n \rightarrow \infty)}} \sum_{k=1}^n f(N_k) \cdot \Delta x_k,$$

где  $\lambda = \max(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)$ .

2. Для нахождения массы тонкого неоднородного криволинейного стержня

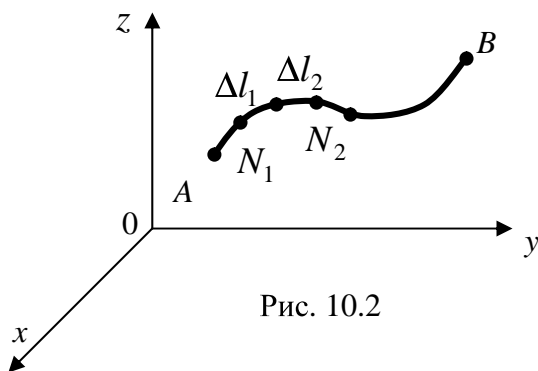


Рис. 10.2

(рис. 10.2) задача о массе решается аналогично рассмотренной. Разобьем стержень на части  $\Delta l_k$  и в каждой части выберем произвольную точку, тогда масса стержня

$$M = \sum_{k=1}^n \Delta m_k \approx \sum_{k=1}^n f(N_k) \cdot \Delta l_k.$$

Точная формула массы криволинейного стержня

$$M \approx \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ (n \rightarrow \infty)}} \sum_{k=1}^n f(N_k) \cdot \Delta l_k,$$

где  $\lambda$  – максимальный из диаметров частей  $\Delta l_1, \dots, \Delta l_n$ .

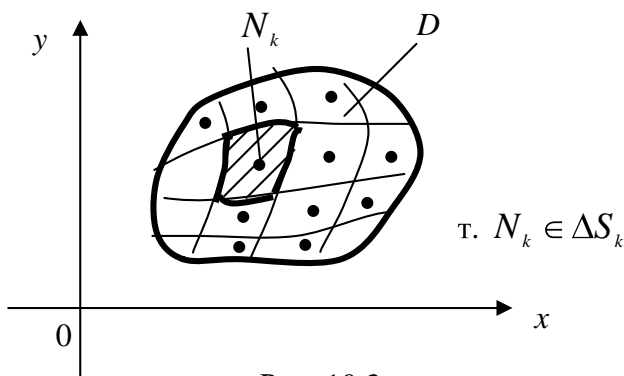


Рис. 10.3

3. Тот же способ применим для вывода формулы массы плоской пластинки с заданной поверхностной плотностью (рис. 10.3)  $\delta = f(N)$ .

Разбивая произвольным образом пластинку на элементарные малые ячейки с площадями  $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$  и выбрав в каждой ячейке произвольную точку, за счет малых размеров площадок плотность каждой ячейки принимаем за постоянную, равную плотности в выбранной точке, составляем приближенную формулу массы плоской неоднородной пластинки:

$$M \approx \sum_{k=1}^n f(N_k) \cdot \Delta S_k,$$

из которой следует точная формула

$$M \approx \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ (n \rightarrow \infty)}} \sum_{k=1}^n f(N_k) \cdot \Delta S_k,$$

где  $\lambda$  – максимальный из диаметров ячеек  $\Delta S_1, \dots, \Delta S_n$ .

4. Для изогнутой неоднородной пластинки с известной формулой поверхностной плотности (рис. 10.4)
- $$\delta = f(N)$$

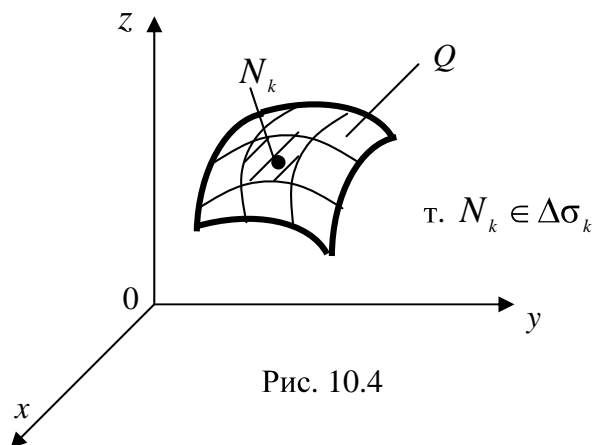


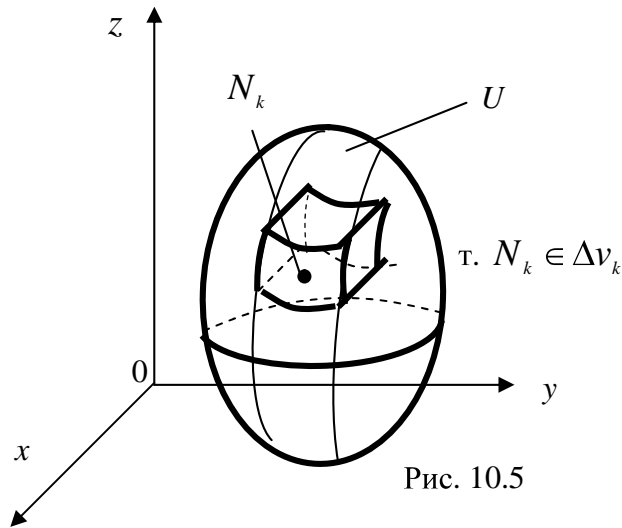
Рис. 10.4

$$M \approx \sum_{k=1}^n f(N_k) \cdot \Delta \sigma_k,$$

$$M \approx \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ (n \rightarrow \infty)}} \sum_{k=1}^n f(N_k) \cdot \Delta \sigma_k, \quad \lambda = \max(\lambda_{\Delta \sigma_1}, \lambda_{\Delta \sigma_2}, \dots, \lambda_{\Delta \sigma_n}).$$



5. Масса неоднородного тела с заданной формулой объемной плотности (рис. 10.5)  $\delta = f(N)$



$$M = \sum_{k=1}^n m_k \approx \sum_{k=1}^n f(N_k) \cdot \Delta v_k;$$

$$M \approx \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ (n \rightarrow \infty)}} \sum_{k=1}^n f(N_k) \cdot \Delta v_k,$$

$$\lambda = \max(\lambda_{\Delta v_1}, \lambda_{\Delta v_2}, \dots, \lambda_{\Delta v_n}).$$

Очевидно, в задаче о массе для разных фигур мы использовали один и тот же алгоритм, поэтому отвлечемся от физического смысла и выделим общее в рассмотренном решении для любой фигуры:

1) фигура, в каждой точке  $N$  которой задана непрерывная скалярная функция  $f(N)$ , произвольным образом разбивается на  $n$  частей (элементарные ячейки);

2) в каждой ячейке выбирается произвольная точка  $N_k$ , в ней вычисляется значение функции  $f(N_k)$ ;

3) составляются произведения найденных значений функции на меру  $\Delta \mu_k$  каждой ячейки;

4) все произведения складывают — полученная сумма называется  $n$ -й интегральной суммой:

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(N_k) \cdot \Delta \mu_k.$$

Очевидно, можно составлять разные суммы (для данных  $f(N)$  и фигуры), величина их будет различной в зависимости от способа разбиения фигуры на

элементарные части и от выбора точек  $N_k$  в ячейках. В задаче о массе фигуры предел таких сумм при условии, что элементарные ячейки стягиваются в точку, должен быть один – масса рассматриваемой фигуры.

**Определение 10.1.** Интегралом по фигуре ( $\Phi$ ) от заданной на ней скалярной функции  $f(N)$  называется предел  $n$ -й интегральной суммы при условии, что наибольший из диаметров элементарных ячеек  $\lambda \rightarrow 0$ , если этот предел не зависит от способа разбиения фигуры на ячейки и от выбора точек  $N_k$  в ячейках:

$$\int_{(\Phi)} f(N) d\mu = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(N_k) \cdot \Delta\mu_k .$$

Соответственно общему определению дадим определения (и обозначения) интегралов по фигурам, приведенным на рис. 10.1 – 10.5.

1. Определенный интеграл по промежутку  $[a, b]$

$$\int_a^b f(N) dx = \int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(N_k) \cdot \Delta x_k .$$

2. Криволинейный интеграл по длине дуги (интеграл I рода)

$$\int_{AB} f(N) dl = \int_{AB} f(x, y, z) dl = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(N_k) \cdot \Delta l_k .$$

3. Двойной интеграл по плоской области  $D$

$$\iint_D f(N) dS = \iint_D f(x, y) dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(N_k) \cdot \Delta S_k .$$

4. Поверхностный интеграл I рода по площади поверхности  $Q$

$$\iint_Q f(N) d\sigma = \iint_Q f(x, y, z) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(N_k) \cdot \Delta\sigma_k .$$

5. Тройной интеграл по пространственной области  $U$

$$\iiint_U f(N) dv = \iiint_U f(x, y, z) dv = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(N_k) \cdot \Delta v_k .$$

*Теорема существования* определенного интеграла по фигуре (без доказательства): функция, непрерывная на фигуре, всегда интегрируема по этой фигуре.

## 10.2. Основные свойства интегралов по фигуре от скалярных функций

1. Интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

3. Теорема о разбиении интеграла: интеграл по фигуре равен сумме интегралов по частям, из которых состоит фигура.

4. Если функция на фигуре тождественно равна единице, то интеграл от  $f(N)=1$  равен мере фигуры:

$$\int_a^b dx = (b - a), \quad \int_{AB} dl = L_{AB}, \quad \iint_D dS = S_D, \quad \iint_Q d\sigma = S_Q, \quad \iiint_U dv = v_U .$$

5. *Теорема о среднем значении.* Если функция  $f(N)$  определена и непрерывна на фигуре, то внутри фигуры существует точка, такая, что интеграл по фигуре равен произведению значения функции в этой точке на меру фигуры:

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi) \cdot (b - a), \quad \xi \in (a, b);$$

$$\int_{AB} f(x, y, z)dl = f(\xi, \eta, \zeta) \cdot L_{AB}, \quad (\xi, \eta, \zeta) \in AB;$$

$$\iint_D f(x, y)dS = f(\xi, \eta) \cdot S_D, \quad (\xi, \eta) \in D;$$

$$\iiint_Q f(x, y, z)d\sigma = f(\xi, \eta, \zeta) \cdot S_Q, \quad (\xi, \eta, \zeta) \in Q;$$

$$\iiint_U f(x, y, z)dv = f(\xi, \eta, \zeta) \cdot v_U, \quad (\xi, \eta, \zeta) \in U.$$

### 10.3. Двойной интеграл. Определение. Свойства

В первом параграфе данного раздела дано, в частности, и определение двойного интеграла, и основные свойства, поэтому кратко сформулируем их.

В каждой точке  $N$  фигуры – плоской области  $D$  (см. рис. 10.3) определена функция  $f(N) = f(x, y)$ . Для составления  $n$ -й интегральной суммы  $\sum_{k=1}^n f(N_k) \cdot \Delta S_k$  область  $D$  произвольным образом разбивают на малые элементарные ячейки с площадями  $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$  и находят значения функции в произвольно выбранных точках ячеек  $f(N_1), f(N_2), \dots, f(N_n)$ .

**Определение 10.2.** Двойным интегралом от функции  $f(x, y)$  по области  $D$  называется предел интегральной суммы, полученный при условии, что наибольший из диаметров элементарных ячеек  $\lambda \rightarrow 0$  (при этом количество ячеек  $n \rightarrow \infty$ ), и этот предел не зависит от способов разбиения области  $D$  на ячейки и от выбора точек  $N_k$  в ячейках:

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ (n \rightarrow \infty)}} \sum_{k=1}^n f(N_k) \cdot \Delta S_k = \iint_D f(x, y) dS.$$

*Теорема существования* двойного интеграла: непрерывная функция  $f(x, y)$  на  $D$ , всегда интегрируема по области  $D$ .

Основные свойства:

$$1. \iint_D (f(x, y) \pm g(x, y)) dS = \iint_D f(x, y) dS \pm \iint_D g(x, y) dS.$$

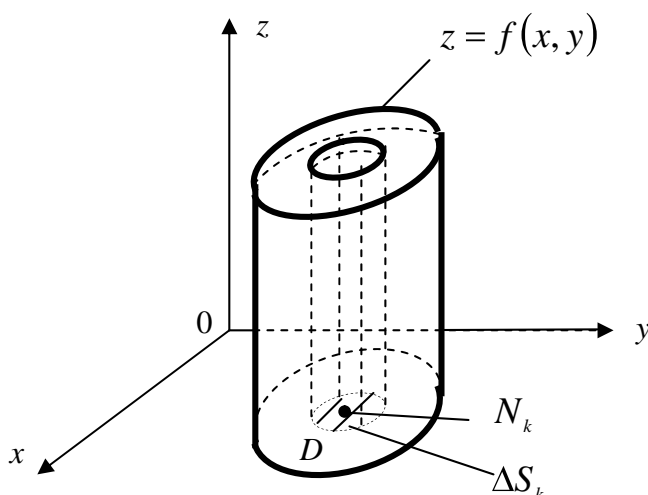
$$2. \iint_D c \cdot f(x, y) dS = c \cdot \iint_D f(x, y) dS.$$

$$3. \text{Теорема о разбиении интеграла: } \iint_{D_1+D_2} f(x, y) dS = \iint_{D_1} f(x, y) dS + \iint_{D_2} f(x, y) dS.$$

$$4. \text{Если } f(x, y) \equiv 1 \text{ на } D, \text{ то } \iint_D 1 \cdot dS = S_D.$$

$$5. \text{Теорема о среднем значении: } \iint_D f(x, y) dS = f(\xi, \eta) \cdot S_D, \text{ где } (\xi, \eta) \in D.$$

### *Геометрический смысл двойного интеграла*



Рассмотрим цилиндрическое тело (рис. 10.6), ограниченное сверху поверхностью  $z = f(x, y) > 0$ , с боков — цилиндрической поверхностью, прямолинейные образующие

Рис. 10.6

которой параллельны оси  $Oz$  и проходят через границу области  $D$ , ограничивающей данное тело снизу (в дальнейшем такое тело будем называть цилиндроидом). Наша задача – найти объем такого цилиндроида. Разобьем основание – область  $D$  – на ячейки с площадями  $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ , при этом тело разобьется на узкие цилиндроида с объемами  $\Delta v_1, \Delta v_2, \dots, \Delta v_n$  соответственно, и искомый объем  $v = \sum_{k=1}^n \Delta v_k$ . Каждый элементарный цилиндроид заменим приближенно цилиндром с основанием  $\Delta S_k$  и высотой  $h_k = f(N_k)$ , где  $N_k$  – произвольная точка основания, тогда

$$\Delta v_k \approx h_k \cdot \Delta S_k = f(N_k) \cdot \Delta S_k.$$

Отсюда приближенная формула для вычисления объема рассматриваемого цилиндрического тела:

$$v \approx \sum_{k=1}^n f(N_k) \cdot \Delta S_k$$

и приближение тем точнее, чем мельче разбиение области  $D$  на ячейки, т. е.

$$v = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(N_k) \cdot \Delta S_k = \iint_D f(x, y) dS.$$

Таким образом, двойной интеграл от положительной функции  $f(x, y)$  выражает объем соответствующего цилиндрического тела.

### 10.4. Вычисление двойного интеграла в декартовых прямоугольных координатах

Используем геометрический смысл двойного интеграла, выражающего объем цилиндриоида (см. рис. 10.6). Пусть область интегрирования – основание цилиндриоида  $D$  – такова, что любая горизонтальная прямая  $y = y_k \in [c, d]$  пересекает ее границу не более чем в двух точках: слева  $D$  ограничивает одна кривая  $x = x_1(y)$ , справа – также одна кривая  $x = x_2(y)$ . Разобьем область  $D$  с помощью горизонтальных прямых  $y = y_k \in [c, d]$  на горизонтальные полосы; проведем через каждую прямую плоскость, параллельную плоскости  $xOz$ , при этом цилиндриоид разобьется на части, его объем можно найти с помощью определенного интеграла:

$$v_U = \iint_D f(x, y) dS = \int_c^d S(y) dy,$$

где  $S(y)$  – площадь соответствующего поперечного сечения (рис. 10.7).

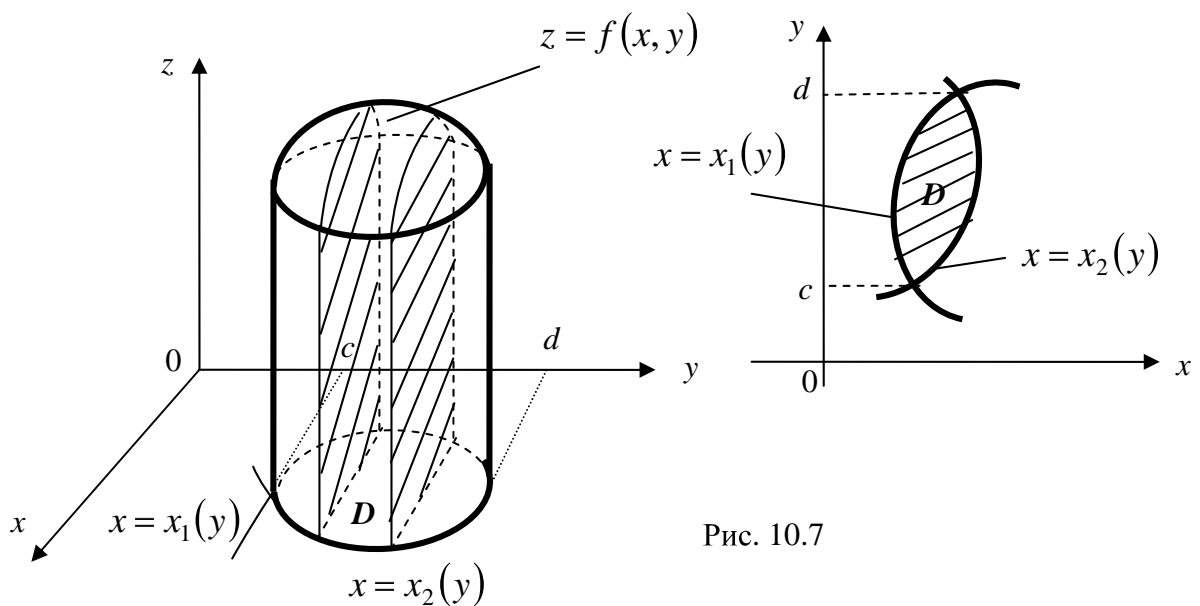


Рис. 10.7

Спроецируем любое из параллельных сечений на плоскость  $xOz$  (рис. 10.8).

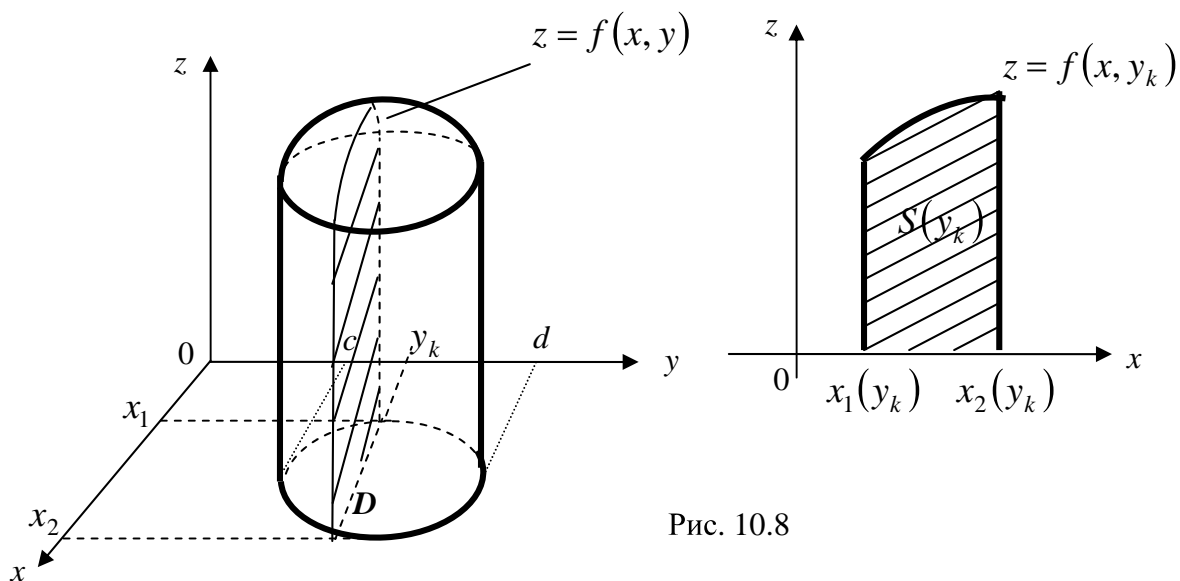


Рис. 10.8

Из геометрического смысла определенного интеграла следует

$$\int_{x_1(y_k)}^{x_2(y_k)} f(x, y) dx = S(y_k).$$

Таким образом, вычисление двойного интеграла сводится к повторному интегрированию:

$$\iint_D f(x, y) dS = \int_c^d dx \left( \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx \right) dy = \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx dy.$$

**Замечание 10.1.** Если область интегрирования  $D$  ограничена сверху одной кривой и снизу одной кривой, т. е. любая вертикальная прямая  $x = x_k \in [a, b]$



пересекает ее границу не более чем в двух точках, то, проведя совершенно аналогичные рассуждения, с помощью разбиения цилиндрида плоскостями, параллельными плоскости  $yOz$ , можно получить правило вычисления двойного интеграла в другом порядке: внутренний интеграл по  $y$ , внешний – по  $x$ :

$$\iint_D f(x, y) dS = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$$

Для областей интегрирования более сложной конфигурации их предварительно разбивают на “правильные” части.

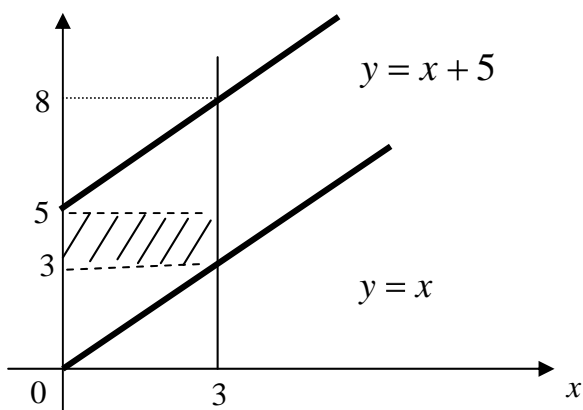


Рис. 10.9

**Пример 10.1.** Расставить пределы в интеграле по области, ограниченной линиями  $x=0$ ,  $y=x$ ,  $y=x+5$ ,  $x=3$  (рис. 10.9) и изменить порядок интегрирования.

**Решение.**

$$\int_0^3 dx \int_x^{x+5} f(x, y) dy =$$

$$= \int_0^3 dy \int_0^y f dx + \int_3^5 dy \int_0^3 f dx + \int_5^8 dy \int_{y-5}^3 f dx.$$

**Пример 10.2.** С помощью двойного интеграла найти объем цилиндрического тела, ограниченного поверхностями

$$z = x^2 + y^2 + 1, \quad y = x^2, \quad z = 0, \quad y = 1.$$

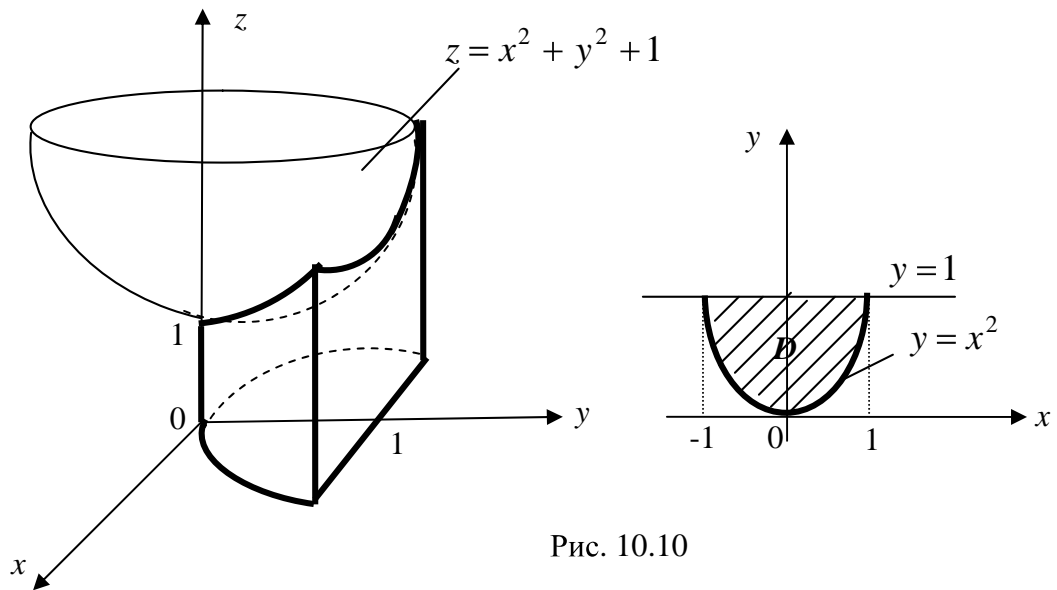


Рис. 10.10

**Решение.** На рис. 10.10 изображено цилиндрическое тело, ограниченное сверху параболоидом вращения  $z = x^2 + y^2 + 1$ , снизу – плоскостью  $xOy$ , слева – параболическим цилиндром  $y = x^2$ , справа – вертикальной плоскостью  $y = 1$ , а также проекция цилиндрического тела на плоскость  $xOy$  – область интегрирования  $D$ .

$$\begin{aligned}
 v &= \iint_D z(x, y) dx dy = \iint_D (x^2 + y^2 + 1) dx dy = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 (x^2 + y^2 + 1) dy = \\
 &= \int_{-1}^1 \left( x^2 y + \frac{y^3}{3} + y \right) \Big|_{x^2}^1 dx = \int_{-1}^1 \left( x^2 + \frac{1}{3} + 1 - x^4 - \frac{x^6}{3} - x^2 \right) dx = \frac{228}{105} \text{ ед}^3.
 \end{aligned}$$

### 10.5. Тройной интеграл. Определение. Вычисление

Напомним определение тройного интеграла, приведенное в пункте 5 раздела 5.1: Тройным интегралом от функции  $f(x, y, z)$  по фигуре  $U$  (см. рис. 10.5) (тело, некоторая пространственная область) называется предел интегральной суммы вида  $\sum f(N_k) \cdot \Delta v_k$ , полученный при условии, что

наибольший из диаметров элементарных ячеек с объемами  $\Delta v_1, \Delta v_2, \dots, \Delta v_n$   $\lambda \rightarrow 0$  и этот предел не зависит от способа разбиения области  $U$  на ячейки и от выбора точек  $N_k$  в ячейках:

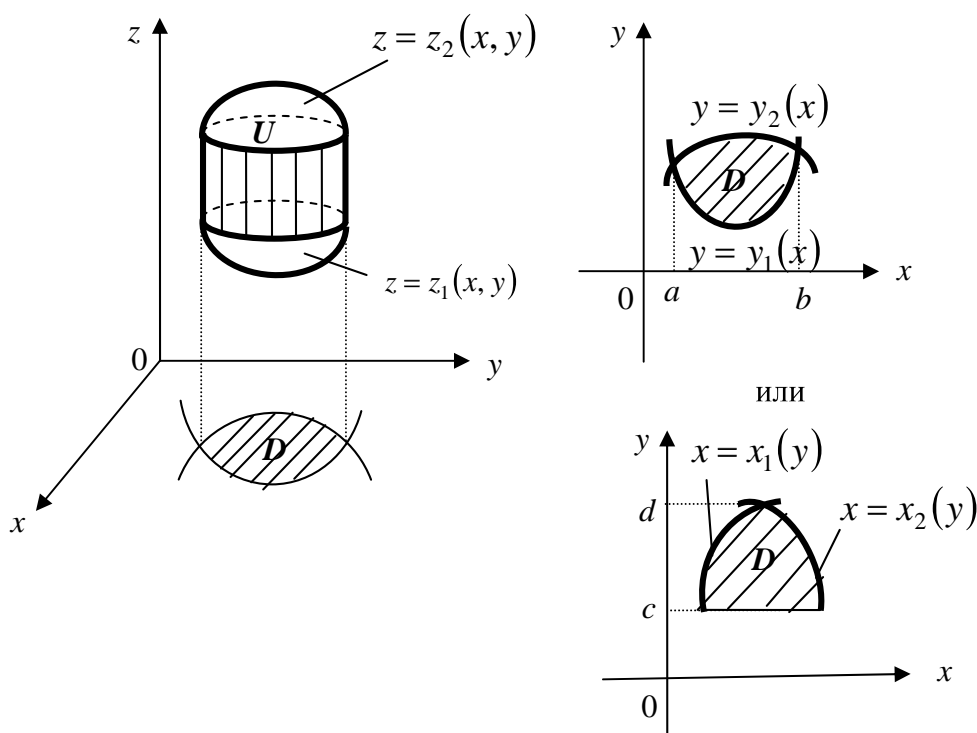
$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ (n \rightarrow \infty)}} \sum_{k=1}^n f(N_k) \cdot \Delta v_k = \iiint_U f(x, y, z) dv.$$

Разумеется, теорема существования и основные свойства тройного интеграла идентичны свойствам двойного интеграла.

Вычисление тройного интеграла аналогично вычислению двойного и сводится к трехкратному интегрированию.

Пусть тело  $U$ , в каждой точке которого определена непрерывная функция  $f(x, y, z)$ , ограничено сверху поверхностью  $z = z_2(x, y)$ , снизу – поверхностью  $z = z_1(x, y)$ , по бокам – цилиндрической поверхностью, параллельной оси  $Oz$ , при этом вертикаль пересекает границу тела не более чем в двух точках (правильная область), и проецируется это тело на плоскость  $xOy$  в область  $D$  (рис. 10.11) тогда

$$\iiint_U f(x, y, z) dv = \iint_D \left( \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$



**Замечание 10.2.** Конкретный вид области может подсказать, на какую координатную плоскость ее удобнее проецировать, т. е. порядок интегрирования можно менять.

**Пример 10.3.** Расставить пределы в тройном интеграле по области, ограниченной конусом  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  и параболоидом  $z = 2 - x^2 - y^2$ .

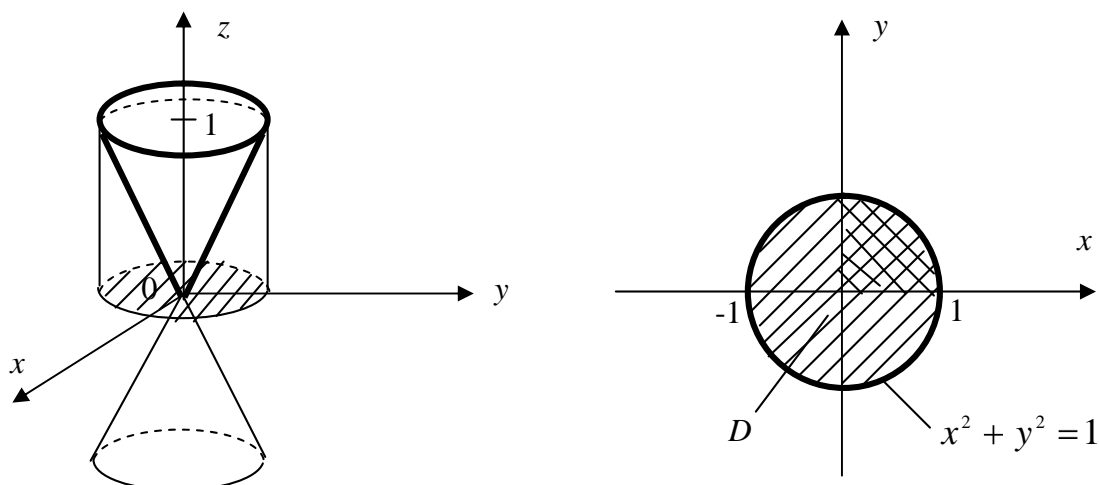


Рис. 10.12

**Решение.** Область  $D$  – проекция области интегрирования  $U$  на плоскость  $xOy$  – круг, граница которого – окружность – есть проекция линии пересечения

конуса и параболоида, поэтому уравнение этой окружности получим из системы уравнений

$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z = 2 - x^2 - y^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow z = 2 - z^2 \Rightarrow z_1 = 1, z_2 = -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \iiint_U f(x, y, z) dv = 4 \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2-x^2-y^2} f(x, y, z) dz.$$

**Пример 10.4.** Вычислить  $\iiint_U (y^2 + z^2) dv$ , где  $U$  – тело, изображенное на

рис. 10.13.

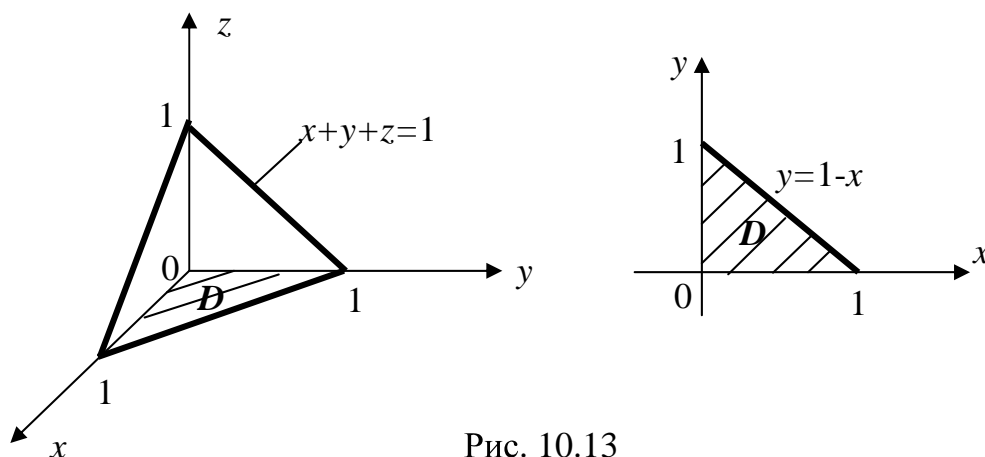


Рис. 10.13

**Решение.**

$$\begin{aligned} \iiint_U (y^2 + z^2) dv &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (y^2 + z^2) dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left( y^2 z + \frac{z^3}{3} \right) \Big|_0^{1-x-y} dy = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left( y^2(1-x-y) + \frac{(1-x-y)^3}{3} \right) dy = \int_0^1 \left( \frac{y^3}{3} (1-x) - \frac{y^4}{4} - \frac{(1-x-y)^4}{12} \Big|_0^{1-x} \right) dx = \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 \left( \frac{(1-x)^4}{3} - \frac{(1-x)^4}{4} + \frac{(1-x)^4}{12} \right) dx = \int_0^1 \frac{(1-x)^4}{6} dx = \frac{1}{30}.$$

## 10.6. Замена переменных в кратных интегралах (по Остроградскому)

### 10.6.1. Замена переменных в двойном интеграле

Пусть в системе координат  $xOy$  задана некоторая область  $D$ , ограниченная линией  $L$ . Заданы функции, однозначные, непрерывные и непрерывно дифференцируемые в некоторой области  $D'$ , выражающие координаты любой точки области  $D$  через новые переменные  $u, v$ , которые называются криволинейными координатами этой точки:

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v). \end{cases}$$

По этим формулам область  $D$ , ограниченная кривой  $L$ , расположенная в координатной плоскости  $xOy$ , отображается в область  $D'$  с границей  $L'$ , расположенную в плоскости  $uOv$ ; при этом, разбивая область  $D'$  с помощью прямых  $u = u_1, u = u_2, \dots, v = v_1, v = v_2, \dots$  на прямоугольные ячейки с площадями  $\Delta S'_1, \Delta S'_2, \dots, \Delta S'_n$ , получим в плоскости  $xOy$  соответствующее разбиение области  $D$  на криволинейные площадки с площадями  $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots$  соответственно (рис. 10.14).

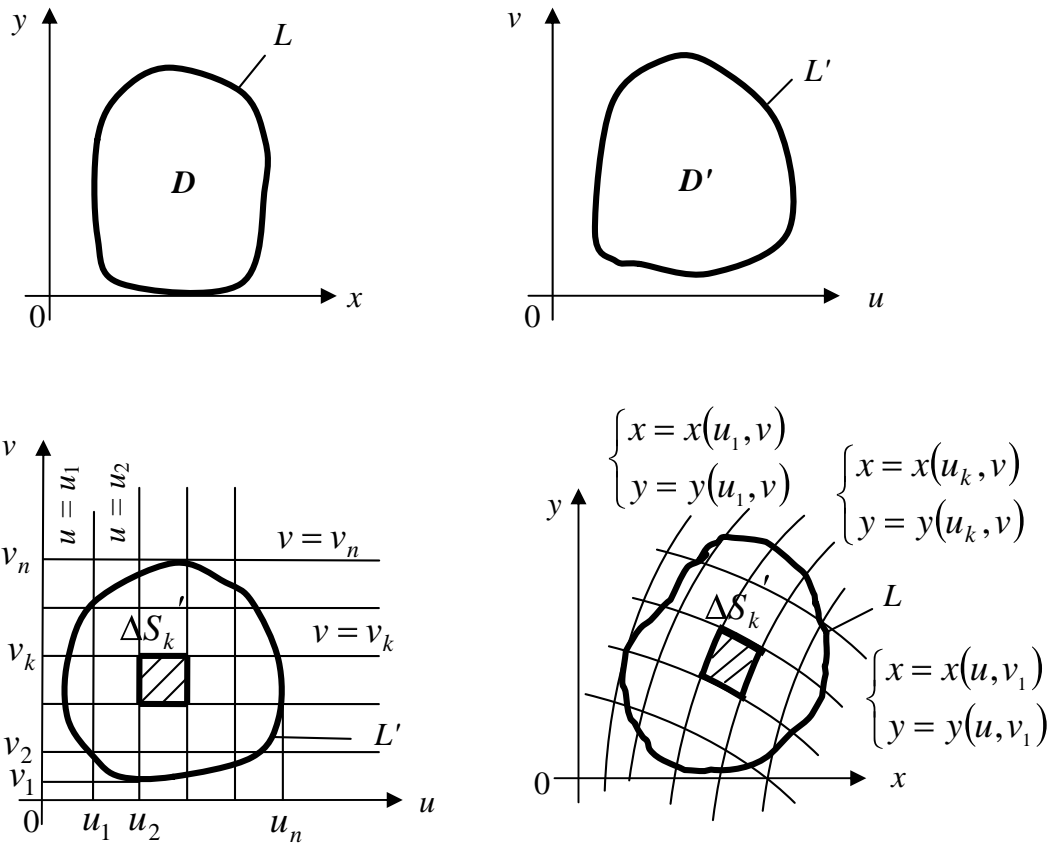


Рис. 10.14

Очевидно,  $\Delta S_k = \Delta u_k \cdot \Delta v_k$ . Если ячейки малы,  $\Delta S_k \approx \Delta S'_k$ .

Остроградский доказал, что

$$\lim_{\lambda(\Delta S) \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta S'} = |J| \neq 0,$$

где  $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$  — якобиан перехода от координат  $x, y$  к координатам  $u, v$ .

Следовательно,  $\Delta S \approx |J| \cdot \Delta S'$ , значит, так как  $\lim \Delta S = dS = dx dy$ ,  
 $\lim \Delta S' = dS' = du dv \Rightarrow dx dy = |J| du dv$ .

Таким образом, получаем формулу преобразования координат в двойном интеграле

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) \cdot |J| du dv = \int_{u_1}^{u_2} du \int_{v_1(u)}^{v_2(u)} f(x(u, v), y(u, v)) \cdot |J| dv.$$

Из этой формулы следует переход в двойном интеграле к полярным координатам (рис. 10.15):

$$u = \varphi, \quad \begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \end{cases} \quad J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \rho} \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \rho} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\rho \sin \varphi & \cos \varphi \\ \rho \cos \varphi & \sin \varphi \end{vmatrix} \Rightarrow |J| = \rho;$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho.$$

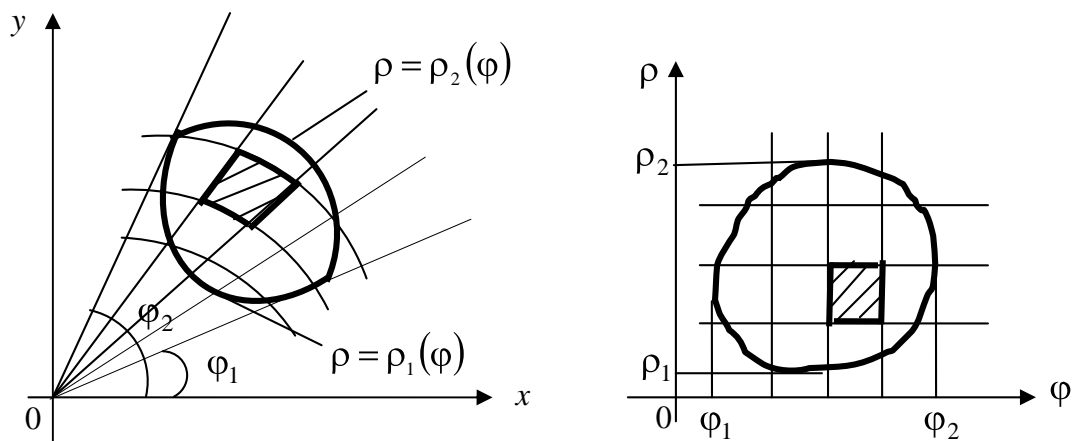


Рис. 10.15

**Пример 10.5.** Вычислить  $\iint_D x \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , где область  $D$  ограничена одним лепестком лемнискаты Бернулли:  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ ,  $x \geq 0$  (рис. 10.16)..

**Решение.** В полярных координатах  $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$

уравнение лемнискаты



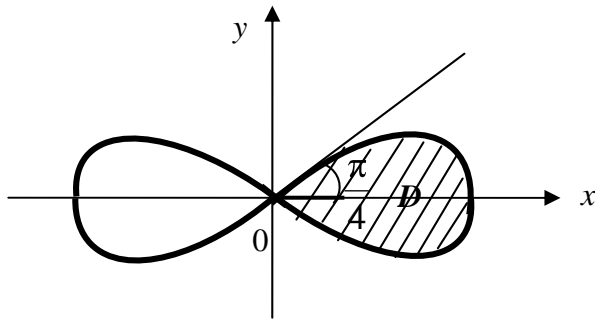


Рис. 10.16

$$\rho^4 = a^2 \rho^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \Rightarrow$$

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi \Leftrightarrow \rho = \pm a \sqrt{\cos 2\varphi},$$

$$x \geq 0 \Rightarrow \rho = a \sqrt{\cos 2\varphi}.$$

$$\iint_D = 2 \iint_{\frac{1}{2}D} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho \cos \varphi \cdot \rho \cdot \underset{|J|}{\rho} d\rho = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \varphi \cdot \left( \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \right) d\varphi =$$

$$= \frac{a^4}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\varphi \cdot \cos \varphi d\varphi = \frac{a^4}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos 4\varphi}{2} \cdot \cos \varphi d\varphi =$$

$$= \frac{a^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \cos \varphi + \frac{1}{2} (\cos 5\varphi + \cos 3\varphi) \right) d\varphi = \frac{2\sqrt{2}}{15} a^4.$$

### 10.6.2. Замена переменных в тройном интеграле

Метод преобразования тройного интеграла при переходе от декартовой системы координат к другим координатам аналогичен методу, рассмотренному для двойного интеграла. Пусть переход от системы  $xuz$  к системе  $uvw$  задан с помощью функций

$$\begin{cases} x = x(u, v, w), \\ y = y(u, v, w), \\ z = z(u, v, w), \end{cases}$$

которые отображают область интегрирования  $U$  в прямоугольных координатах  $x, y, z$  на область  $U'$  в криволинейных координатах  $u, v, w$ . При этом объем элементарной ячейки  $\Delta v_k$  переходит в объем  $\Delta v'_k$  элементарной ячейки области  $U'$  и

$$\lim_{\lambda(\Delta v) \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta v'} = |J| \neq 0,$$

где  $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$  – якобиан перехода, тогда

$$\iiint_U f(x, y, z) = \iiint_{U'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \cdot |J| du dv dw.$$

Рассмотрим частные случаи.

а. Переход от декартовых к цилиндрическим координатам (рис. 10.17).

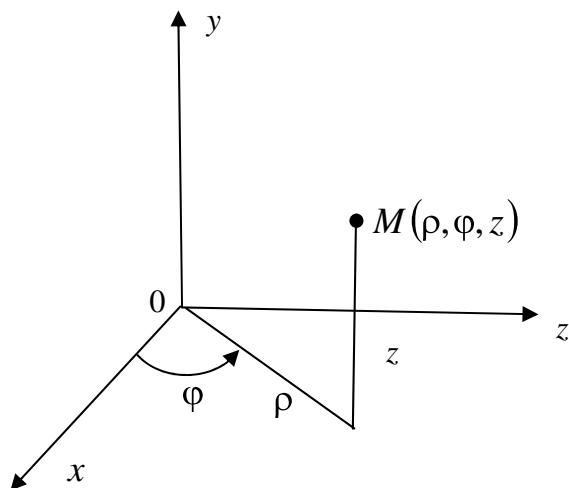


Рис. 10.17

$$\begin{aligned} u &= \varphi, \\ v &= \rho, \\ w &= z, \end{aligned} \quad \begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = z, \end{cases} \quad J = \begin{vmatrix} -\rho \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ \rho \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\rho \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \iiint_U f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} d\rho \int_{z_1(\rho, \varphi)}^{z_2(\rho, \varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \cdot \rho dz.$$

б. Переход от декартовых координат к **сферическим** (рис. 10.18).

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \theta, \\ y = r \sin \varphi \sin \theta, \\ z = r \cos \theta, \end{cases} \quad |J| = r^2 \sin \theta,$$

$$\iiint_U f(x, y, z) dx dy dz =$$

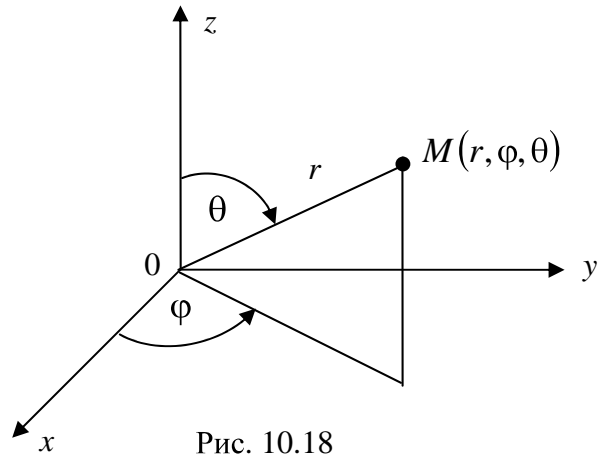


Рис. 10.18

$$= \iiint_U f(r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta) \cdot r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta.$$

**Пример 10.6.** Вычислить, переходя к цилиндрическим координатам,

$$\iiint_U z \cdot \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz, \quad \text{где } U \text{ — тело,}$$

ограниченное поверхностями:  $y = \sqrt{2x - x^2}$ ,  
 $z = 0$ ,  $z = 1$  (рис. 10.19).

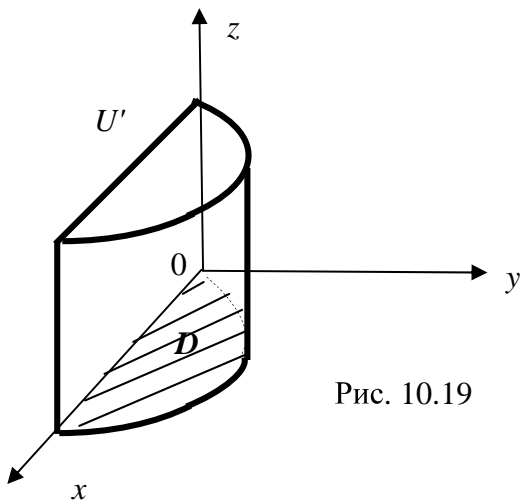


Рис. 10.19

**Решение.**  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ ,

$$z = z \Rightarrow$$

$$y^2 = 2x - x^2 \Rightarrow \rho^2 = 2\rho \cos \varphi,$$

$$y \geq 0 \Rightarrow \rho = 2 \cos \varphi.$$

$$\begin{aligned} \iiint_U z\sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz &= \iiint_{U'} z \cdot \rho \cdot \rho d\rho d\varphi dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \rho^2 d\rho \int_0^1 z dz = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \rho^2 \cdot \left( \frac{z^2}{2} \Big|_0^1 \right) d\rho = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^{2\cos\varphi} \right) d\varphi = \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi d\varphi = \frac{8}{9}. \end{aligned}$$

**Пример 10.7.** Вычислить, переходя к сферическим координатам,

$$\int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \frac{dz}{\sqrt{z}}.$$

**Решение.** По пределам найдем область интегрирования:

$$0 \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \text{ — полусфера, } \varphi \in [0, 2\pi], \quad \theta \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right], \quad r \in [0, R] \text{ (рис. 10.20)}$$

$$x = r \cos \varphi \sin \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta \Rightarrow \sqrt{z} = \sqrt{r \cos \theta}.$$

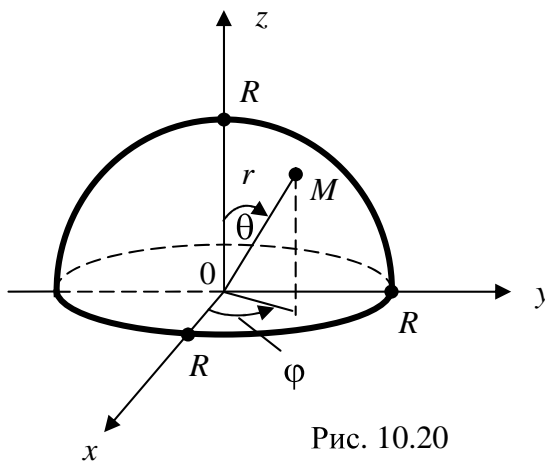


Рис. 10.20

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R \frac{r^2 \sin \theta dr}{\sqrt{r \cos \theta}} = 2\pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \theta}{\sqrt{\cos \theta}} d\theta \cdot \int_0^R \frac{r^2 dr}{\sqrt{r}} =$$

$$= -2\pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{1}{2}} \theta d \cos \theta \cdot \int_0^R r^{\frac{3}{2}} dr = \frac{8}{5} R^{\frac{5}{2}} \pi.$$

### 10.7. Криволинейный интеграл по длине дуги

Пусть фигура – плоская или пространственная кусочно-гладкая линия  $L$  (см. рис. 10.2). Мерой этой линии является ее длина  $l$ . Меру элементарной дуги линии  $L$  обозначим через  $\Delta l_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ . Наибольший из диаметров элементарных дуг обозначим  $\lambda = \max \Delta l_k$ . В каждой точке линии  $L$  определена непрерывная скалярная функция  $f(N)$ ,  $N \in L$ .

Тогда интегральной суммой для функции  $f(N)$  по линии  $L$  будет

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(N_k) \Delta l_k.$$

Предел этой суммы, если он существует, при условии, что  $\lambda \rightarrow 0$ , называется криволинейным интегралом по длине дуги или криволинейным интегралом первого рода от функции  $f(N)$  по линии  $L$  и обозначается

$$\int_{(L)} f(N) dl = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(N_k) \Delta l_k.$$

Если линия интегрирования  $L \subset R^2$ , то  $f(N) = f(x, y)$  и

$$\int_{(L)} f(N) dl = \int_{(L)} f(x, y) dl.$$

Если  $L \subset R^3$ , то  $f(N) = f(x, y, z)$  и

$$\int_{(L)} f(N)dl = \int_{(L)} f(x, y, z)dl,$$

$dl$  – дифференциал длины дуги линии  $L$ .

Вычисление криволинейного интеграла первого рода сводится к вычислению определенного интеграла. При этом используют полученные ранее формулы дифференциала дуги  $dl$  и уравнения линии  $L$ .

1. Пусть  $L \subset R^2$  и уравнение этой линии в декартовых координатах  $y = \varphi(x)$ ,  $x \in [a, b]$ . При этом предполагается, что  $\varphi(x)$  – непрерывно дифференцируемая функция на  $[a, b]$ . Дифференциал дуги в этом случае

$$dl = \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} dx.$$

Криволинейный интеграл по длине дуги вычисляется по формуле

$$\int_{(L)} f(x, y)dl = \int_a^b f(x, \varphi(x))\sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} dx. \quad (10.1)$$

Аналогично, если  $L$  задана уравнением  $x = \varphi(y)$ ,  $y \in [c, d]$ , и при этом  $\varphi(y)$  дифференцируема на  $[c, d]$ , то

$$\int_{(L)} f(x, y)dl = \int_c^d f(\varphi(y), y)\sqrt{1 + (\varphi'(y))^2} dy.$$

2. Линия  $L$  задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [t_1, t_2]$$

и  $x(t)$ ,  $y(t)$  – непрерывно дифференцируемые функции на отрезке  $[t_1, t_2]$ .  
 Дифференциал дуги  $L$  в этом случае

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

и вычисление интеграла по дуге кривой сводится к вычислению определенного интеграла по параметру  $t$ :

$$\int_{(L)} f(x, y) dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (10.2)$$

В случае когда  $L$  – пространственная кривая, заданная параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \quad t \in [t_1, t_2],$$

и  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  – непрерывно дифференцируемые функции на  $[t_1, t_2]$ , тогда

$$\int_{(L)} f(x, y, z) dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

3. Если плоская линия  $L$  задана уравнением в полярных координатах  $\rho = \rho(\varphi)$ , где  $\varphi \in [\alpha, \beta]$ ,  $\rho(\varphi)$  – непрерывно дифференцируемая на  $[\alpha, \beta]$  функция, то дифференциал дуги

$$dl = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi.$$

Вычисление криволинейного интеграла по длине дуги сводится к вычислению определенного интеграла по переменной  $\varphi$ :

$$\int_{(L)} f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi. \quad (10.3)$$

**Пример 10.8.** Вычислить криволинейный интеграл  $\int_{(L)} \frac{dl}{x-y}$ , если  $L$  – отрезок прямой между точками  $A(0;-2)$  и  $B(4;0)$  (рис. 10.21).

**Решение.** Уравнение прямой  $AB$  напишем в виде  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ :

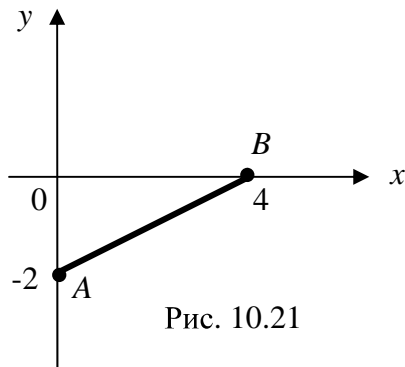


Рис. 10.21

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{-2} = 1 \Rightarrow y = \frac{x}{2} - 2;$$

$$x \in [0, 4]; \quad y' = \frac{1}{2};$$

$$dl = \sqrt{1 + y'^2} dx = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} dx = \frac{\sqrt{5}}{2} dx.$$

По формуле (10.1)

$$\int_{(L)} \frac{dl}{x-y} = \int_0^4 \frac{\sqrt{5}}{2} \frac{dx}{x - \left(\frac{x}{2} - 2\right)} = \sqrt{5} \int_0^4 \frac{dx}{x+4} = \sqrt{5} \ln|x+4| \Big|_0^4 = \sqrt{5}(\ln 8 - \ln 4) = \sqrt{5} \ln 2.$$

**Пример 10.9.** Вычислить  $\int_{(L)} \frac{y dl}{x+3z}$ , если  $L$  – дуга линии

$$x = t, \quad y = \frac{t^2}{\sqrt{2}}, \quad z = \frac{t^3}{3}, \quad t \in [0, \sqrt{2}].$$



**Решение.** Найдем выражение дифференциала дуги  $L$ :

$$dl = \sqrt{1 + \left(\frac{2t}{\sqrt{2}}\right)^2 + (t^2)^2} dt = \sqrt{1 + 2t^2 + t^4} dt = \sqrt{(1+t^2)^2} dt = (1+t^2) dt.$$

Тогда по формуле (10.2) имеем

$$\int_{(L)} \frac{y dl}{x + 3z} = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{t^2(1+t^2)}{\sqrt{2}(t+t^3)} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2}} t dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \left. \frac{t^2}{2} \right|_0^{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

**Пример 10.10.** Вычислить  $\int_{(L)} \sqrt{\rho} dl$ , где  $L$  – кардиоида  $\rho = a(1 + \cos \varphi)$

(рис. 10.22).

**Решение.** Дифференциал дуги

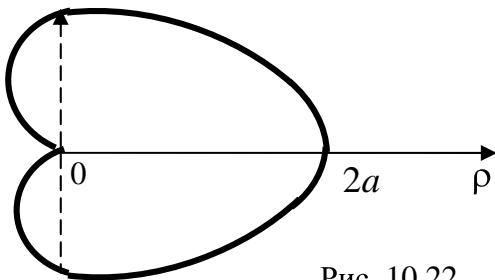


Рис. 10.22

$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{a^2(1 + \cos \varphi)^2 + (-a \sin \varphi)^2} d\varphi = \\ &= a\sqrt{1 + 2\cos \varphi + \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} d\varphi = \\ &= a\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + \cos \varphi} d\varphi. \end{aligned}$$

По формуле (10.3)

$$\begin{aligned} \int_{(L)} \sqrt{\rho} dl &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a(1 + \cos \varphi)} \cdot a\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + \cos \varphi} d\varphi = a\sqrt{2a} \int_0^{2\pi} (1 + \cos \varphi) d\varphi = \\ &= a\sqrt{2a} (\varphi + \sin \varphi) \Big|_0^{2\pi} = 2\pi a\sqrt{2a}. \end{aligned}$$

## 10.8. Поверхностный интеграл по площади поверхности

Пусть фигурой является поверхность  $\sigma \subset R^3$  (см. рис. 10.4). Мерой поверхности является ее площадь  $\sigma$ . Меру элементарной поверхности обозначим  $\Delta\sigma_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , а максимальный диаметр –  $\lambda$ . Интегральная сумма для непрерывной функции  $f(N) = f(x, y, z)$  в этом случае будет иметь вид

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(N_k) \Delta\sigma_k = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta\sigma_k.$$

Перейдем к пределу этой суммы при  $\lambda \rightarrow 0$ . Если предел интегральной суммы существует, то он называется поверхностным интегралом от функции  $f(x, y, z)$  по площади поверхности  $\sigma$  или поверхностным интегралом первого рода и обозначается

$$\iint_{(\sigma)} f(N) d\sigma = \iint_{(\sigma)} f(x, y, z) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta\sigma_k,$$

где  $\sigma$  – поверхность интегрирования,  $d\sigma$  – дифференциал площади поверхности  $\sigma$ .

Для вычисления поверхностного интеграла первого рода предположим, что  $\sigma$  гладкая поверхность, т. е. в каждой ее точке можно провести касательную плоскость, положение которой непрерывно меняется при переходе от точки к точке. При этом поверхность  $\sigma$  однозначно проецируется в плоскость  $Oxy$ , и  $Dxy$  – ее проекция на эту плоскость. Уравнение такой поверхности  $z = \varphi(x, y)$ . Вычисление поверхностного интеграла  $\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma$  в этом случае будет сведено к вычислению двойного интеграла по области  $Dxy$  по формуле

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_{D_{xy}} f(x, y, \varphi(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy. \quad (10.4)$$

При этом учитывается, что  $d\sigma = \frac{dS}{\cos \gamma}$ , где  $\gamma$  – угол между нормалью  $\vec{n}_1$  к касательной плоскости поверхности  $\sigma$  в соответствующей точке и нормалью  $\vec{n}_2$  к плоскости  $Oxy$ . Тогда

$$\vec{n}_1 = \left( -\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1 \right), \quad \vec{n}_2 = (0, 0, 1), \quad \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}},$$

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dS.$$

Если гладкая поверхность  $\sigma$  задана уравнением  $y = \varphi(x, z)$  и  $D_{xz}$  – ее проекция на плоскость  $Oxz$ , то

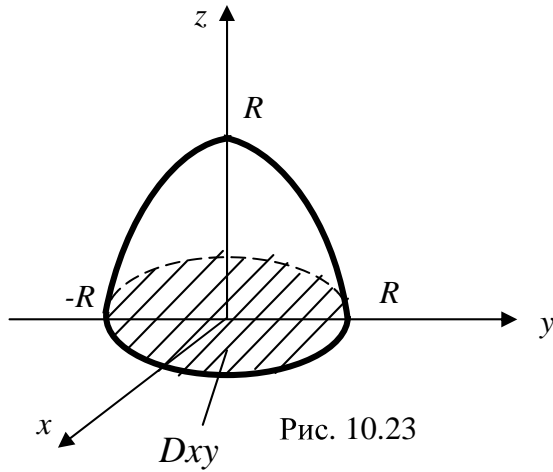
$$\iint_{(\sigma)} f(x, y, z) d\sigma = \iint_{D_{xz}} f(x, \varphi(x, z), z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} dx dz.$$

В случае когда гладкая поверхность  $\sigma$  задана уравнением  $x = \varphi(y, z)$  и  $D_{yz}$  – ее проекция на плоскость  $Oyz$ , поверхностный интеграл по площади поверхности вычисляется по формуле

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y, z) d\sigma = \iint_{D_{yz}} f(\varphi(y, z), y, z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} dy dz.$$

**Пример 10.11.** Вычислить  $\iint_{(\sigma)} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} d\sigma$ , где  $\sigma$  — полусфера

$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$  (рис. 10.23).



**Решение.**

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$

$$\begin{aligned} d\sigma &= \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy = \\ &= \frac{R dx dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}. \end{aligned}$$

По формуле (10.4)

$$\iint_{(\sigma)} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} d\sigma = \iint_{D_{xy}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \frac{R dx dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = R \iint_{D_{xy}} dx dy = R\pi R^2 = \pi R^3.$$

## 11. ИНТЕГРАЛ ПО ОРИЕНТИРОВАННОЙ ФИГУРЕ ОТ ВЕКТОРНОЙ ФУНКЦИИ

### 11.1. Векторная функция трех переменных. Ориентированная фигура

Пусть даны ограниченная, содержащая все граничные точки фигура  $(\Phi)$ , ортонормированный базис  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  и точка  $P(x, y, z) \in (\Phi)$ . Вектор

$$\bar{a}(p) = \bar{a}(x, y, z) = X(x, y, z)\bar{i} + Y(x, y, z)\bar{j} + Z(x, y, z)\bar{k}, \quad (11.1)$$

определенный на  $(\Phi)$ , называется **векторной функцией трех переменных** с областью определения  $(\Phi)$ . Функции  $X(x, y, z)$ ,  $Y(x, y, z)$ ,  $Z(x, y, z)$  называются **координатами**  $\bar{a}(p)$  в выбранном базисе.

Фигура  $(\Phi)$  называется **ориентированной**, если в каждой ее точке задан некоторый вектор  $\bar{b}(p)$ , определенным образом характеризующий  $(\Phi)$ . К числу ориентированных фигур, которые находят широкое применение в приложениях математики, относятся ориентированные линии и поверхности.

Линия  $(L)$  называется **ориентированной**, если на ней выбрано направление перемещения. Для гладкой линии  $(L)$  в качестве ориентирующего вектора  $\bar{b}(p)$  может быть выбран единичный вектор  $\bar{\tau}^\circ(p)$ , направленный в каждой ее точке по касательной к кривой в сторону перемещения (рис. 11.1,а) (кривая называется **гладкой**, если в каждой ее точке существует касательная).

При изменении направления движения по линии  $(L)$  ориентирующий вектор изменит свое направление на противоположное.

Гладкая поверхность  $(Q)$  в трехмерном пространстве называется **двусторонней**, если нормаль к ней при обходе по любому замкнутому контуру, лежащему на поверхности и не имеющему общих точек с ее границей, возвращается в первоначальное положение; в противном случае поверхность

называется **односторонней**. В качестве ориентирующего вектора  $\bar{b}(p)$  гладкой поверхности  $(Q)$  может быть выбран единичный вектор  $\bar{n}^\circ(p)$ , направленный по нормали к одной из сторон двусторонней поверхности, который при перемещении точки  $P$  по поверхности меняется, оставаясь все время по одну ее сторону (рис. 11.1,б) (поверхность  $(Q)$  называется **гладкой**, если в каждой ее точке существует касательная плоскость).

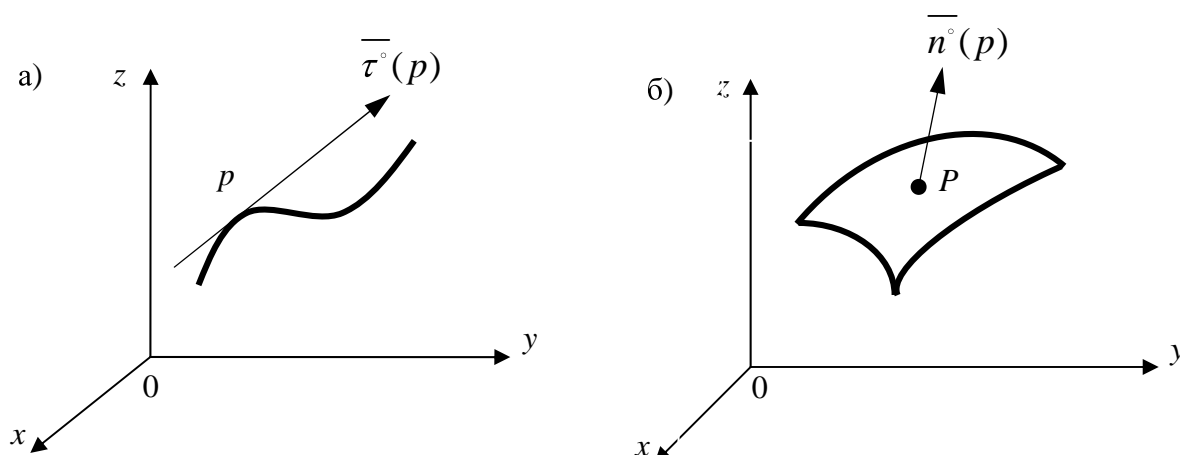


Рис. 11.1

В дальнейшем будем рассматривать только двусторонние поверхности.

## 11.2. Интеграл по ориентированной фигуре от векторной функции.

### Теорема существования

Пусть даны ориентированная фигура  $(\Phi)$  и векторная функция  $\bar{a}(p)$ ,  $p \in (\Phi)$ . Выполним следующие действия.

1. Выберем направление ориентирующего вектора  $\bar{b}(p)$  фигуры (тем самым выбирается направление движения по кривой в случае  $(\Phi) = (L)$  или сторона поверхности в случае  $(\Phi) = (Q)$ ).

2. Разобьем фигуру  $(\Phi)$ , мера которой  $\mu$ , на  $n$  произвольных элементарных фигур  $(\Delta\Phi_i)$ , меры которых  $\Delta\mu_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

3. На каждой из фигур  $(\Delta\Phi_i)$  выберем произвольную точку  $P_i$ .

4. В выбранных точках  $P_i$  найдем векторы  $\overline{a}(P_i)$ ,  $\overline{b}(P_i) \cdot \Delta\mu_i$ .

5. Вычислим скалярные произведения  $(\overline{a}(P_i), \overline{b}(P_i)) \Delta\mu_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

6. Составим сумму  $\sum_{i=1}^n (\overline{a}(P_i), \overline{b}(P_i)) \Delta\mu_i = S_n$ , которую будем называть  $n$ -й интегральной суммой для векторной функции  $\overline{a}(p)$  по ориентированной с помощью вектора  $\overline{b}(p)$  фигуре  $(\Phi)$ .

7. Найдем предел  $S_n$  при условии, что максимальный из диаметров фигур  $(\Delta\Phi_i)$   $\lambda$  стремится к нулю, т. е.  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} S_n = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (\overline{a}(P_i), \overline{b}(P_i)) \Delta\mu_i$ .

**Определение 11.1.** Предел суммы  $S_n$  при условии, что каждая из элементарных фигур стягивается в точку ( $\lambda \rightarrow 0$ ), если он существует, конечен, не зависит от способа разбиения фигуры  $(\Phi)$  на элементарные фигуры  $(\Delta\Phi_i)$  и от выбора точек  $P_i \in (\Delta\Phi_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , называется **интегралом по ориентированной фигуре  $(\Phi)$   $(\overline{u}\Phi)$  от векторной функции  $\overline{a}(p)$**  и обозначается

$$\int_{(\Phi)} (\overline{a}, \overline{b}) d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (\overline{a}(P_i), \overline{b}(P_i)) \Delta\mu_i. \quad (11.2)$$

Справедлива *теорема 11.1 (о существовании интеграла по фигуре от векторной функции)*. Если функции  $X(x, y, z)$ ,  $Y(x, y, z)$ ,  $Z(x, y, z)$  в выражении (11.1) непрерывны на ограниченной, гладкой, содержащей граничные точки, ориентированной фигуре  $(\Phi)$ , то  $(\overline{u}\Phi)$  вида (11.2) существует.

### 11.3. Криволинейный и поверхностный интегралы второго рода.

#### Свойства интеграла по фигуре от векторной функции и его механический смысл

#### 11.3.1. Криволинейный и поверхностный интегралы второго рода

Детализируем понятие  $(\overline{u\Phi})$  применительно к различным фигурам.

1. Пусть  $(\Phi)$  – ориентированная гладкая дуга кривой  $(L)$  (кривая  $(L)$  может быть как плоской, так и пространственной). В этом случае

$$\int_{(\Phi)} (\overline{a, \overline{b}}) \mu = \int_{(L)} (\overline{a, \overline{\tau}^\circ}) dl$$

$(dl$  – дифференциал дуги кривой) называется **криволинейным интегралом второго рода** (КРИ – 2).

2. Пусть  $(\Phi)$  – ориентированная ограниченная гладкая поверхность  $(Q)$ . Тогда

$$\int_{(\Phi)} (\overline{a, \overline{b}}) d\mu = \iint_{(Q)} (\overline{a, \overline{n}^\circ}) dq$$

$(dq$  – дифференциал площади поверхности) называется **поверхностным интегралом второго рода** (ПИ – 2).

В случае замкнутости линии  $(L)$  или поверхности  $(Q)$  соответствующие  $(\overline{u\Phi})$  обозначают

$$\oint_{(L)} (\overline{a, \overline{\tau}^\circ}) dl \text{ и } \oiint_{(Q)} (\overline{a, \overline{n}^\circ}) dq .$$



### 11.3.2. Свойства интеграла по фигуре от векторной функции

Интеграл по фигуре от векторной функции вида (11.2) обладает свойствами:

1. Интеграл по фигуре от алгебраической суммы векторных функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых функций по той же фигуре:

$$\int_{(\Phi)} ((\bar{a}_1 \pm \bar{a}_2), \bar{b}) d\mu = \int_{(\Phi)} (\bar{a}_1, \bar{b}) d\mu \pm \int_{(\Phi)} (\bar{a}_2, \bar{b}) d\mu.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак  $(\overline{u\Phi})$ :

$$\int_{(\Phi)} (c\bar{a}, \bar{b}) d\mu = c \int_{(\Phi)} (\bar{a}, \bar{b}) d\mu, \quad c = \text{const}.$$

3. Если фигура  $(\Phi)$  представима в виде суммы фигур  $(\Phi_1)$  и  $(\Phi_2)$ , то  $(\overline{u\Phi})$  по фигуре  $(\Phi)$  равен сумме интегралов по фигурам  $(\Phi_1)$  и  $(\Phi_2)$ :

$$\int_{(\Phi)=(\Phi_1)+(\Phi_2)} (\bar{a}, \bar{b}) d\mu = \int_{(\Phi_1)} (\bar{a}, \bar{b}) d\mu + \int_{(\Phi_2)} (\bar{a}, \bar{b}) d\mu.$$

4. При изменении направления ориентирующего вектора  $\bar{b}(p)$  на противоположное  $(\overline{u\Phi})$  меняет знак:

$$\int_{(\Phi)} (\bar{a}, (-\bar{b})) d\mu = \int_{(\Phi)} (-1)(\bar{a}, \bar{b}) d\mu = - \int_{(\Phi)} (\bar{a}, \bar{b}) d\mu.$$

Это свойство следует из свойств скалярного произведения векторов и свойства 2.

Доказательства справедливости свойств 1-3 проводятся аналогично доказательствам соответствующих свойств в случае  $(u\Phi)$ .

### 11.3.3. Работа силы

Следует отметить, что  $(\overline{u\Phi})$  не имеет столь простых и наглядных геометрических истолкований, как  $(u\Phi)$ . Что касается механического истолкования, то его можно дать на примере определения работы переменной силы.

Пусть сила  $\overline{a}(p)$  действует вдоль кривой  $(L)$ , меняясь при этом в каждой точке приложения как по модулю, так и по направлению, т. е.  $\overline{a}(p) = \overline{a}(X, Y, Z)$ , где  $X(x, y, z)$ ,  $Y(x, y, z)$ ,  $Z(x, y, z)$  – координаты вектор-силы. Линия действия силы – произвольная ориентированная кривая  $(L)$ . Для вычисления работы  $A$  при перемещении вдоль дуги ориентированной линии  $(L)$  необходимо выполнить следующие действия:

1. Разбить дугу на  $n$  произвольных элементарных дуг длиной  $\Delta l_1, \Delta l_2, \Delta l_3, \dots, \Delta l_n$ .
2. Выбрать точки  $P_i$ , принадлежащие  $i$ -й дуге,  $i = \overline{1, n}$ .
3. Вычислить значения вектор – силы в выбранных точках  $\overline{a}(P_i)$  и произведения  $\overline{\tau}^\circ(P_i)\Delta l_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ .
4. Найти работу  $\Delta A_i$  силы на элементарной дуге  $\Delta l_i$ , считая силу на ней постоянной и равной  $\overline{a}(P_i)$ . Тогда  $\Delta A_i = \left(\overline{a}(P_i), \overline{\tau}^\circ(P_i)\right)\Delta l_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ .
5. Вычислить приближенное значение работы  $A_n$  по всей кривой, просуммировав  $\Delta A_i$  по элементарным дугам. Имеем

$$A_n = \sum_{i=1}^n \Delta A_i = \sum_{i=1}^n \left(\overline{a}(P_i), \overline{\tau}^\circ(P_i)\right)\Delta l_i.$$

Величина  $A_n$  является  $n$ -й интегральной суммой для функции (силы)  $\overline{a}(P)$  по ориентированной с помощью вектора  $\overline{\tau}^\circ(P)$  фигуре  $(L)$  (линии перемещения).

6. Найти точное значение работы  $A$ , вычислив предел  $n$ -й интегральной суммы  $A_n$  при  $\lambda \rightarrow 0$ :

$$A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} A_n = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta A_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \left( \bar{a}(P_i), \bar{\tau}^\circ(P_i) \right) \Delta l_i = \int_{(L)} \left( \bar{a}, \bar{\tau}^\circ \right) dl.$$

Итак, работа  $A$  силы  $\bar{a}(P)$  по дуге  $(L)$  в направлении  $\bar{\tau}^\circ$  выражается как предел  $n$ -й интегральной суммы векторной функции  $\bar{a}(P)$  по ориентированной дуге линии  $(L)$  при  $\lambda \rightarrow 0$ , поэтому

$$A = \int_{(L)} \left( \bar{a}, \bar{\tau}^\circ \right) dl$$

Таким образом, с механической точки зрения **криволинейный интеграл второго рода есть работа переменной силы вдоль некоторой линии перемещения.**

## 11.4. Вычисление криволинейного интеграла второго рода

### 11.4.1. Скалярная форма криволинейного интеграла второго рода

Преобразуем подынтегральное выражение в интеграле  $\int_{(L)} \left( \bar{a}, \bar{\tau}^\circ \right) dl$  с учетом того, что  $\bar{a}(X, Y, Z)$ ,  $\bar{\tau}^\circ(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  – углы между  $\bar{\tau}^\circ$  и положительными направлениями осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  соответственно,  $dl$  – дифференциал дуги  $(L)$ .

Возьмем на  $(L)$  точки  $P(x)$  и  $P'(x + \Delta x)$  (рис. 11. 2). Тогда  $\Delta x / \Delta l = \cos\alpha'$ . При  $\Delta x \rightarrow 0$  имеем  $dx / dl = \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha dl = dx$ .

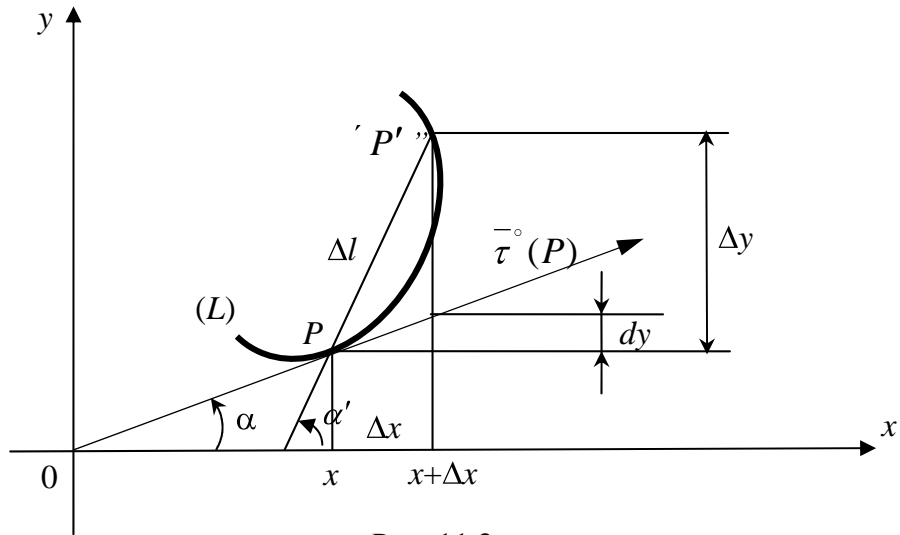


Рис. 11.2

Аналогично в случае пространственной кривой  $(L)$   $\cos\beta dl = dy$ ,  $\cos\gamma dl = dz$ .

Следовательно,

$$\bar{\tau}^\circ dl = (\cos\alpha \bar{i} + \cos\beta \bar{j} + \cos\gamma \bar{k}) dl = \cos\alpha d\bar{l}i + \cos\beta dl \bar{j} + \cos\gamma dl \bar{k} = dx \bar{i} + dy \bar{j} + dz \bar{k}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{(L)} (\bar{a}, \bar{\tau}^\circ) dl &= \int_{(L)} ((X \bar{i} + Y \bar{j} + Z \bar{k}), (\cos\alpha d\bar{l}i + \cos\beta dl \bar{j} + \cos\gamma dl \bar{k})) = \\ &= \int_{(L)} (X \cos\alpha dl + Y \cos\beta dl + Z \cos\gamma dl) = \int_{(L)} X(x, y, z) dx + Y(x, y, z) dy + Z(x, y, z) dz \end{aligned}$$

Итак, КРИ-2 имеет следующую скалярную форму:

$$\int_{(L)} (\bar{a}, \bar{\tau}^\circ) dl = \int_{(L)} X(x, y, z) dx + Y(x, y, z) dy + Z(x, y, z) dz. \quad (11.3)$$

Примем также другие выражения для записи этого интеграла:

$$\int_{(L)} (\bar{a}, \bar{\tau}^\circ) dl = \int_{(L)} n p_{\bar{\tau}^\circ} \bar{a} dl = \int_{(L)} (\bar{a}, d\bar{r}).$$

В последнем выражении  $d\bar{r}$  – дифференциал дуги  $(L)$  в предположении, что она задана векторным уравнением  $\bar{r} = \bar{r}(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ .

Интеграл КРИ–2, с учетом представления (11.3), иногда называют **криволинейным интегралом по координатам** и рассматривают как сумму трех криволинейных интегралов по длине дуги (КРИ–1).

В случае когда  $(L)$  – плоская кривая, скалярная форма КРИ–2 примет вид

$$\int_{(L)} (\bar{a}, \bar{\tau}^\circ) dl = \int X(x, y) dx + Y(x, y) dy.$$

#### 11.4.2. Вычисление криволинейного интеграла второго рода

Пусть линия  $(L)$  задана параметрически или в векторной форме

$$L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad (11.4)$$

или  $\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ .

Если на  $(L)$  выбрана дуга  $AB$ , то говорят, что задано направление перемещения по кривой от точки  $A(t_0)$  к точке  $B(t_1)$  и тем самым указано направление ориентирующего вектора  $\bar{\tau}^\circ (P)$  (рис. 11.3).

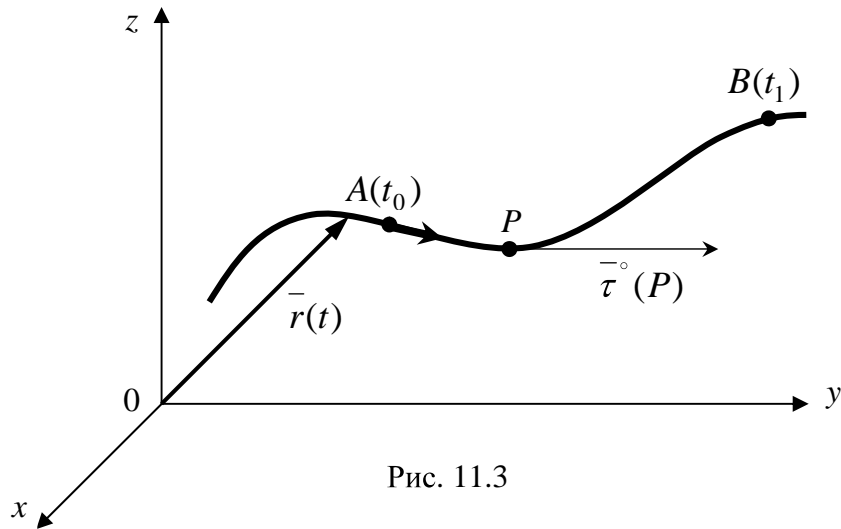


Рис. 11.3

Покажем, что вычисление КРИ–2 вида (11.3) по линии  $(L)$ , заданной уравнениями (11.4), сводится к вычислению однократного определенного интеграла по параметру  $t$  :

$$\int_{(L)} (\vec{a}, \vec{\tau}^{\circ}) dl = \int_{(L)} X(x, y, z) dx + Y(x, y, z) dy + Z(x, y, z) dz = \tag{11.5}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} (X(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Y(x(t), y(t), z(t))y'(t) + Z(x(t), y(t), z(t))z'(t)) dt.$$

В случае плоской кривой  $(L)$  ( $Z(t) = 0$ ) формула (11.5) имеет вид

$$\int_{(L)} (\vec{a}, \vec{\tau}^{\circ}) dl = \int_{t_0}^{t_1} (X(x(t), y(t))x'(t) + Y(x(t), y(t))y'(t)) dt.$$

**Пример 11.1.** Вычислить  $\int_L y dx + z dy + x dz$ , если  $L$  – отрезок  $CO$ , где  $C(a, a, a)$ ,  $O(0, 0, 0)$ .

**Решение.** Запишем каноническое уравнение прямой, которой принадлежит отрезок  $CO$ :

$$\frac{x-a}{-a} = \frac{y-a}{-a} = \frac{z-a}{-a}.$$

Перейдем к параметрическим уравнениям этой прямой:

$$\left. \begin{aligned} x &= -at + a, \\ y &= -at + a, \\ z &= -at + a, \end{aligned} \right\} \begin{aligned} dx &= -adt, \\ dy &= -adt, \\ dz &= -adt. \end{aligned}$$

Из полученных уравнений находим, что точке  $C$  соответствует значение параметра  $t_0 = 0$ , а точке  $0 - t_1 = 1$ .

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{(CO)} ydx + zdy + xdz &= \int_0^1 ((-at + a)(-a) + (-at + a)(-a) + (-at + a)(-a))dt = \\ &= -3a^2 \int_0^1 (-t + 1)dt = -3a^2 \left( -\frac{t^2}{2} + t \right) \Big|_0^1 = -3a^2 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}a^2. \end{aligned}$$

## 11.5. Вычисление поверхностного интеграла второго рода

### 11.5.1. Скалярная форма поверхностного интеграла второго рода

Преобразуем подынтегральное выражение в интеграле  $\iint_{(Q)} (\bar{a}, \bar{n}^\circ) dq$  с учетом того, что  $\bar{a}(X, Y, Z)$ ,  $\bar{n}^\circ(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ ,  $\alpha, \beta, \gamma$  — углы между нормалью  $\bar{n}^\circ$  к одной из выбранных сторон поверхности в данной точке и положительными направлениями осей  $OX, OY, OZ$  соответственно,  $dq$  — дифференциал площади поверхности  $(Q)$ .

Если прямые, параллельные осям координат, пересекают  $(Q)$  не более чем в одной точке, то

$$\vec{n}^\circ dq = (\cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}) dq = \cos \alpha dq \vec{i} + \cos \beta dq \vec{j} + \cos \gamma dq \vec{k}$$

и исходный интеграл принимает вид

$$\begin{aligned} \iint_{(Q)} (\vec{a}, \vec{n}^\circ) dq &= \iint_{(Q)} ((X \vec{i} + Y \vec{j} + Z \vec{k}), (\cos \alpha dq \vec{i} + \cos \beta dq \vec{j} + \cos \gamma dq \vec{k})) = \\ &= \iint_{(Q)} (X \cos \alpha + Y \cos \beta + Z \cos \gamma) dq = \iint_{(Q)} X \cos \alpha dq + Y \cos \beta dq + Z \cos \gamma dq. \end{aligned} \quad (11.6)$$

Выражение (11.6) называют **скалярной формой поверхностного интеграла второго рода**.

### 11.5.2. Вычисление поверхностного интеграла второго рода

Скалярная форма (11.6) может быть использована для вычисления ПИ–2. Отметим, что произведение  $\cos \gamma dq$  представляет собой взятую со знаком (+) или (–) проекцию площади  $dq$  поверхности  $(Q)$  на плоскость  $Oxy$ , т. е.  $\cos \gamma dq = \pm dxdy$ . Знак (+) соответствует острому углу  $\gamma$  между положительным направлением оси  $OZ$  (нормалью к плоскости  $OXY$ ) и вектором  $\vec{n}^\circ$  (нормалью к поверхности  $(Q)$  в данной точке), знак (–) – тупому углу  $\gamma$ . Аналогично предыдущему  $\cos \beta dq = \pm dxdz$ ,  $\cos \alpha dq = \pm dydz$ .

Приведенные результаты позволяют свести вычисление поверхностного интеграла второго рода, заданного формой (11.6), к вычислению трех двойных интегралов по плоским областям, которые являются проекциями поверхности  $(Q)$  на координатные плоскости:



$$\begin{aligned} \iint_{(Q)} (\vec{a}, \vec{n}^\circ) dq &= \iint_{(Q)} X \cos \alpha dq + \iint_{(Q)} Y \cos \beta dq + \iint_{(Q)} Z \cos \gamma dq = \\ &= \pm \iint_{D_{yz}} X(x_1(y, z), y, z) dy dz \pm \iint_{D_{xz}} Y(x, y_1(x, z), z) dx dz \pm \iint_{D_{xy}} Z(x, y, z_1(x, y)) dx dy, \end{aligned} \quad (11.7)$$

где  $(D_{xy})$ ,  $(D_{xz})$ ,  $(D_{yz})$  – проекции поверхности  $Q$  на плоскости  $oxy$ ,  $oxz$ ,  $oyz$  соответственно. Функции  $x = x_1(y, z)$ ,  $y = y_1(x, z)$ ,  $z = z_1(x, y)$  получены с помощью уравнения  $F(x, y, z) = 0$  поверхности  $(Q)$  путем разрешения его относительно  $x$ ,  $y$ ,  $z$  соответственно.

**Пример 11.2.** Вычислить интеграл  $\iint_{(Q)} (y^2 + z^2) \cos \gamma dq$ , где  $(Q)$  – верхняя сторона поверхности  $z = \sqrt{1 - x^2}$ , отсеченная плоскостями  $z = 0$ ,  $y = 0$ ,  $y = 1$  (рис. 11.4).

**Решение.** Проекцией  $(D_{xy})$  поверхности  $(Q)$  на плоскость  $oxy$  является прямоугольник:  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ . По формуле (11.7) имеем

$$\begin{aligned} \iint_{(Q)} (y^2 + z^2) \cos \gamma dq &= \iint_{(D_{xy})} \left( y^2 + (\sqrt{1 - x^2})^2 \right) dx dy = \int_{-1}^1 dx \int_0^1 (y^2 + 1 - x^2) dy = \\ &= \int_{-1}^1 dx \left( \frac{y^3}{3} + y - x^2 y \right) \Big|_0^1 = \int_{-1}^1 dx \left( \frac{1}{3} + 1 - x^2 \right) = \int_{-1}^1 \left( \frac{4}{3} - x^2 \right) dx = \left( \frac{4}{3} x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = \\ &= \frac{4}{3} - \frac{1}{3} - \left( -\frac{4}{3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{8}{3} - \frac{2}{3} = 2. \end{aligned}$$

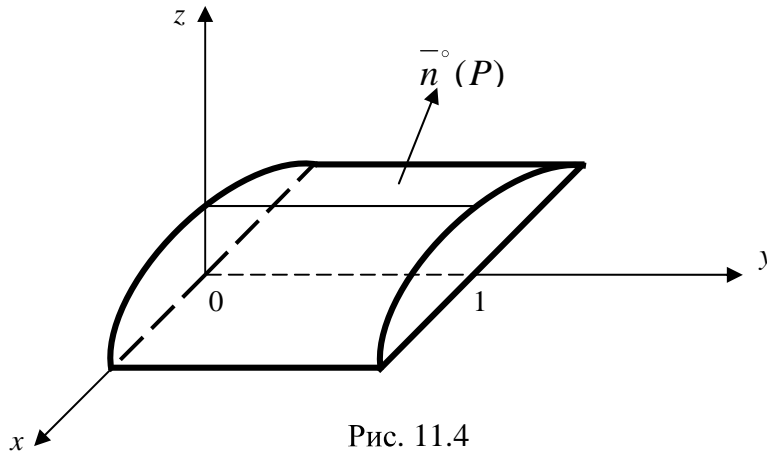


Рис. 11.4

### 11.6. Теорема и формула Остроградского–Грина

Формула Остроградского–Грина устанавливает связь между криволинейным интегралом второго рода по замкнутой плоской ориентированной кривой ( $L$ ) и двойным интегралом по плоской односвязной области ( $D$ ), ограниченной этой кривой. Область называется **односвязной**, если в ней всякий замкнутый контур может быть стянут в точку этой области с помощью непрерывной деформации, при которой не пересекается граница области. Контур ( $L$ ) будем называть **положительно-ориентированным**, если при движении по нему область ( $D$ ) будет видна слева от наблюдателя (рис. 11.5).

*Теорема 11.2. (Остроградского–Грина).* Если ( $L$ ) – кусочно-гладкий положительно-ориентированный контур, ограничивающий на плоскости  $OXY$  односвязную область ( $D$ ), в каждой точке которой и на границе векторная функция  $\vec{a}(P) = X(x, y)\vec{i} + Y(x, y)\vec{j}$  непрерывна вместе со своими частными производными  $\partial X / \partial y$  и  $\partial Y / \partial x$ , то в области ( $D$ ) и на ее границе справедлива формула Остроградского–Грина

$$\oint_{(L)} X(x, y)dx + Y(x, y)dy = \iint_{(D)} \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy. \quad (11.8)$$

Возьмем на координатной плоскости  $OXY$  односвязную область  $(D)$ , ограниченную положительно-ориентированным контуром  $(L)$  (см. рис. 11.5). Предположим, что прямые, параллельные осям координат, пересекают  $(L)$  не более чем в двух точках. Проведя ограничивающие  $(D)$  прямые, параллельные оси  $OY$ , разобьем  $(L)$  на две кривые:  $y = y_1(x)$  – уравнение линии  $AnB$ ,  $y = y_2(x)$  – уравнение линии  $AmB$ , при этом  $x \in [a, b]$ .

Пусть внутри области  $(D)$  и на ее границе заданы две непрерывные скалярные функции  $X(x, y)$  и  $Y(x, y)$ , имеющие непрерывные частные производные. Вычислим КРИ–2:

$$\oint_{(L)} X(x, y)dx + Y(x, y)dy = \oint_{(L)} X(x, y)dx + \oint_{(L)} Y(x, y)dy = J_1 + J_2.$$

Имеем

$$\begin{aligned} J_1 &= \oint_{(L)} X(x, y)dx = \int_a^b X(x, y_1(x))dx + \int_b^a X(x, y_2(x))dx = \int_a^b X(x, y_1(x))dx - \\ &- \int_a^b X(x, y_2(x))dx = \int_a^b (X(x, y_1(x)) - X(x, y_2(x)))dx = - \int_a^b \left( X(x, y) \Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} \right) dx. \end{aligned}$$

Полученный интеграл можно рассматривать как двукратный интеграл от функции  $\partial X(x, y)/\partial y$  по области  $(D)$ , ибо  $X(x, y) \Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial X(x, y)}{\partial y} dy$ .

Следовательно,

$$J_1 = - \int_a^b \left( X(x, y) \Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} \right) dx = - \int_a^b dx \cdot \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial X}{\partial y} dy = - \iint_{(D)} \frac{\partial X(x, y)}{\partial y} dy dx$$

Аналогично

$$J_2 = \iint_{(D)} \frac{\partial Y(x, y)}{\partial x} dx dy .$$

Суммируя выражения для  $J_1$  и  $J_2$ , находим

$$\oint_{(L)} X(x, y) dx + Y(x, y) dy = \iint_{(D)} \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy .$$

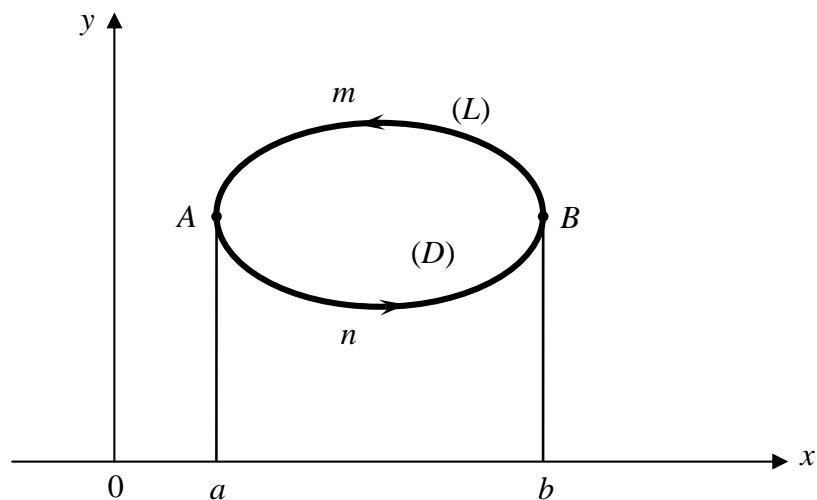


Рис. 11.5

### 11.7. Независимость криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования. Условие независимости в случае плоской кривой.

**Определение функции двух переменных по ее полному дифференциалу**

#### 11.7.1. Независимость криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования

Рассмотрим КРИ–2 по ориентированной дуге  $(MN)C(V)$ , где  $M$  – начальная и  $N$  – конечная точки рассматриваемой кривой;  $(V)$  – некоторая односвязная пространственная область (рис. 11.6), принадлежащая области определения

векторной функции  $\overline{a} = \overline{a}(P)$ . Для наглядности используем следующие обозначения КРИ–2:

$$\int_{(L)} (\overline{a}, \overline{\tau}^\circ) dl = \int_{(MCN)} (\overline{a}, \overline{\tau}^\circ) dl = \int_{(M)}^{(N)} (\overline{a}, \overline{\tau}^\circ) dl.$$

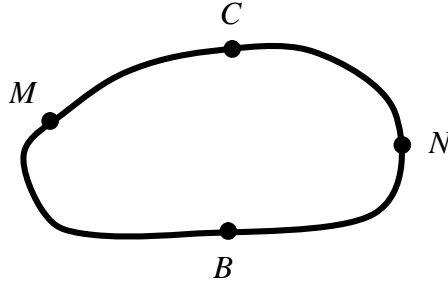


Рис. 11.6

Допустим, что значение интеграла не зависит от кривой  $(MN)$ , а только от начальной и конечной точек, т. е.  $\int_{(MBN)} (\overline{a}, \overline{\tau}^\circ) dl = \int_{(MCN)} (\overline{a}, \overline{\tau}^\circ) dl$ .

С учетом свойств  $\overline{u\Phi}$

$$\int_{(MBN)} (\overline{a}, \overline{\tau}^\circ) dl - \int_{(MCN)} (\overline{a}, \overline{\tau}^\circ) dl = 0 \Rightarrow \int_{(MBN)} (\overline{a}, \overline{\tau}^\circ) dl + \int_{(NCM)} (\overline{a}, \overline{\tau}^\circ) dl = 0.$$

Следовательно,  $\oint_{(L)} (\overline{a}, \overline{\tau}^\circ) dl = 0$ , где  $(L)$  – замкнутая кривая, принадлежащая области  $(V)$ . Полученный результат сформулируем в виде леммы.

**Лемма 11.1.** Если в односвязной области  $(V)$  КРИ–2 не зависит от пути интегрирования, то его значение по любому замкнутому контуру, принадлежащему  $(V)$ , равно нулю.

Нетрудно проверить и обратное: следствием обращения в нуль КРИ–2 по любому замкнутому контуру, принадлежащему  $(V)$ , является независимость КРИ–2 от пути интегрирования в этой области.

### 11.7.2. Условие независимости для плоской кривой

Найдем условие независимости КРИ–2 от пути интегрирования в случае плоской кривой  $(L)$  и векторной функции  $\bar{a} = X(x, y)\bar{i} + Y(x, y)\bar{j}$ .

Итак, пусть  $(L)$  принадлежит плоской области  $(D)$ , в которой функции  $X(x, y)$  и  $Y(x, y)$  и их частные производные  $\partial X/\partial y$  и  $\partial Y/\partial x$  определены и непрерывны.

*Теорема 11.3.* Если  $X(x, y)$ ,  $Y(x, y)$ ,  $\partial X/\partial y$ ,  $\partial Y/\partial x$  непрерывны в односвязной области  $(D)$  и на ее границе, то необходимым и достаточным условием независимости КРИ–2  $\int_{(L)} X(x, y)dx + Y(x, y)dy$  от пути интегрирования

$(L)$  является выполнение равенства

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y} \quad (11.9)$$

внутри  $(D)$  и на ее границе.

*Достаточность.* Следует из формулы Остроградского-Грина.

*Необходимость.* Допустим, что  $\int_{(L)} X(x, y)dx + Y(x, y)dy = 0$ , но

$\partial Y/\partial x \neq \partial X/\partial y$  хотя бы в одной точке  $M_0 \in D$ , при этом, например,  $\partial Y(M_0)/\partial x - \partial X(M_0)/\partial y > 0$  (рис. 11.7). Вследствие непрерывности указанное неравенство будет справедливо в некоторой области  $(D_1)$  с границей  $(L_1)$ ,

являющейся окрестностью точки  $M_0$ :  $\iint_{(D_1)} \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy > 0$ .

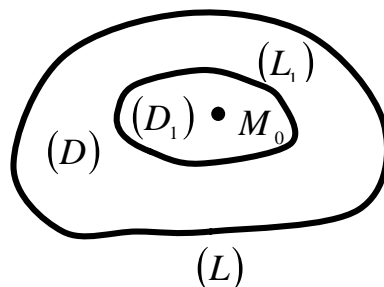


Рис. 11.7

Противоречие следует из формулы (11.8), записанной для области  $(D_1)$  и контура  $(L_1)$ , лежащих в области  $(D)$ .

### 11.7.3. Определение функции двух переменных по ее полному дифференциалу

Как известно, равенство (11.9) – необходимое и достаточное условие того, чтобы выражение  $X(x, y)dx + Y(x, y)dy$  являлось полным дифференциалом функции  $u(x, y)$ :

$$du(x, y) = X(x, y)dx + Y(x, y)dy, \quad (11.10)$$

где  $X(x, y) = \partial u(x, y) / \partial x$ ;  $Y(x, y) = \partial u(x, y) / \partial y$ .

Покажем, что при выполнении условия (11.9) по известным частным производным функции двух переменных  $u(x, y)$  с точностью до постоянного слагаемого может быть найдена сама функция. Для этой цели можно проинтегрировать правую часть равенства (11.10) с учетом того, что при выполнении условия (11.9) значение КРИ–2 не зависит от пути интегрирования, т. е.

$$\int_{(M)}^{(N)} X(x, y)dx + Y(x, y)dy = \int_{(M)}^{(N)} du(x, y) = u(x, y)|_M^N = u(N) - u(M).$$

Следовательно, для  $N(x, y)$

$$u(N) = u(x, y) = \int_{(M)}^{(N)} X(x, y)dx + Y(x, y)dy + c. \quad (11.11)$$

В качестве линии интегрирования  $(L)$  удобно взять ломаную  $(M_0KN)$  со звеньями, параллельными осям координат, где  $M_0(x_0, y_0)$  – фиксированная точка,

принадлежащая области  $(D)$ ;  $N(x,y)$  – любая текущая точка этой области (рис. 11.8).

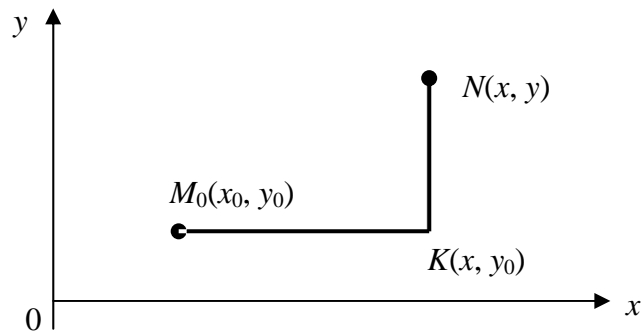


Рис. 11.8

Отметим, что уравнение прямой  $(M_0K)$  имеет вид  $y = y_0$ , откуда  $dy = 0$ . Уравнение прямой  $(KN)$  записывается в виде  $x = \text{const}$ , т. е.  $dx = 0$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{M_0}^N X(x, y)dx + Y(x, y)dy &= \int_{(M_0K)} X(x, y)dx + Y(x, y)dy + \int_{(KN)} X(x, y)dx + Y(x, y)dy = \\ &= \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y_0)} X(x, y)dx + \int_{(x, y_0)}^{(x, y)} Y(x, y)dy = \int_{x_0}^x X(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y Y(x, y)dy. \end{aligned}$$

С учетом формулы (11.11) получаем

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x X(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y Y(x, y)dy + c. \quad (11.12)$$

Отметим, что первый интеграл формулы (11.12) вычисляется при фиксированной переменной  $y$ , а второй – при фиксированной переменной  $x$ .

Если начало координат принадлежит области  $(D)$ , то в качестве  $M_0$  можно взять  $O(0, 0)$ . Тогда формула (11.12) примет вид



$$u(x, y) = \int_0^x X(x, 0) dx + \int_0^y Y(x, y) dy + c. \quad (11.13)$$

**Пример 11.3.** Найти функцию  $u(x, y)$  по ее полному дифференциалу  $du = 4(x^2 - y^2)xdx - 4(x^2 - y^2)ydy$ .

**Решение.** В данном примере условие (11.9) выполнено на всей плоскости  $OXY$ :  $X(x, y) = 4(x^2 - y^2)x$ ;  $Y(x, y) = -4(x^2 - y^2)y$ , тогда  $\partial x / \partial y = -8yx$ ,  $\partial y / \partial x = -8xy$ . Воспользуемся формулой (11.13):

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^x 4x^2 x dx - 4 \int_0^y (x^2 - y^2) y dy = 4 \int_0^x x^3 dx - 4 \int_0^y (x^2 y - y^3) dy = \\ &= 4 \cdot \frac{x^4}{4} - 4 \left( \frac{x^2 y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \right) = x^4 - 2x^2 y^2 + y^4 + c. \end{aligned}$$

## 12. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И МЕХАНИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛА ПО ФИГУРЕ

### 12.1. Общие сведения

Приложения интеграла по фигуре связаны с его истолкованием с точки зрения геометрии, механики и физики. При этом одна и та же величина может быть вычислена с помощью разных интегралов, например, площадь плоской фигуры можно вычислить как с помощью однократного определенного интеграла, так и с помощью двойного интеграла. В зависимости от вида фигуры выбирают соответствующую систему координат, в которой вычисление интеграла упрощается, а также, при необходимости, фигуру представляют в виде суммы нескольких более простых фигур.

### 12.2. Применение в геометрии интеграла по фигуре от скалярной функции

Решение задач геометрии с помощью интеграла по фигуре основано на использовании свойства интеграла, согласно которому основная геометрическая характеристика фигуры – мера  $\mu_\Phi$  фигуры ( $\Phi$ ) ( $l = b - a$  – длина прямолинейного отрезка  $[a, b]$ ,  $l$  – длина линии ( $L$ ),  $s$  – площадь плоской области ( $D$ ),  $q$  – площадь поверхности ( $Q$ ),  $v$  – объем тела ( $V$ )) равна

$$\mu_\Phi = \int_{(\Phi)} d\mu. \quad (12.1)$$

Таким образом, длина прямолинейного отрезка  $[a, b]$  определяется по формуле (12.1) через определенный интеграл

$$l = \int_a^b dx = b - a.$$

Длина дуги кривой  $(L)$  вычисляется в зависимости от формы аналитического представления кривой по одной из следующих формул (с помощью криволинейного интеграла первого рода или определенного интеграла) для плоской кривой:

если  $(L)$  задана уравнением  $y = \varphi(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , то

$$l = \int_{(L)} dl = \int_a^b \sqrt{1 + (\varphi'_x)^2} dx,$$

где  $\varphi(x)$  предполагается дифференцируемой на  $[a, b]$ , (рис. 12.1);

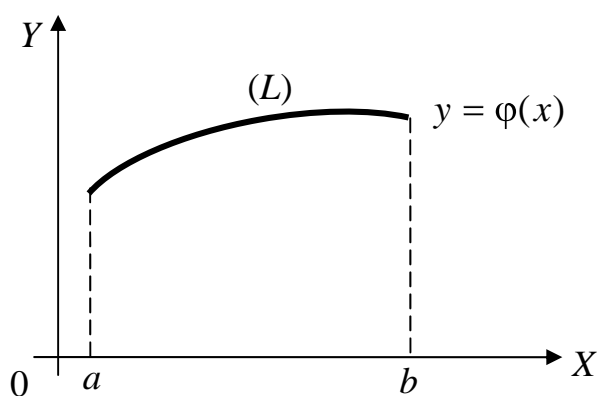


Рис. 12.1

если  $(L)$  задана параметрическими уравнениями  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $t \in [t_1, t_2]$ ,  $x(t)$ ,  $y(t)$  – дифференцируемые на отрезке  $[t_1, t_2]$  функции, то

$$l = \int_{(L)} dl = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt;$$

если  $(L)$  задана в полярной системе координат уравнением  $r = r(\varphi)$ ,  $\varphi \in [\alpha, \beta]$ ,  $r(\varphi)$  – непрерывно дифференцируема на  $[\alpha, \beta]$ , то

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r'_\varphi)^2} d\varphi;$$

для пространственной кривой ( $L$ ), заданной параметрическими уравнениями  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ ,  $t \in [t_1, t_2]$ , где  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$  – дифференцируемые на отрезке  $[t_1, t_2]$  функции:

$$l = \int_{(L)} dl = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(x'_t\right)^2 + \left(y'_t\right)^2 + \left(z'_t\right)^2} dt. \quad (12.2)$$

Площадь плоской фигуры (области) ( $D$ ) в прямоугольной системе координат

$$S = \iint_{(D)} ds = \iint_{(D)} dx dy = \int_a^b [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)] dx, \quad (12.3)$$

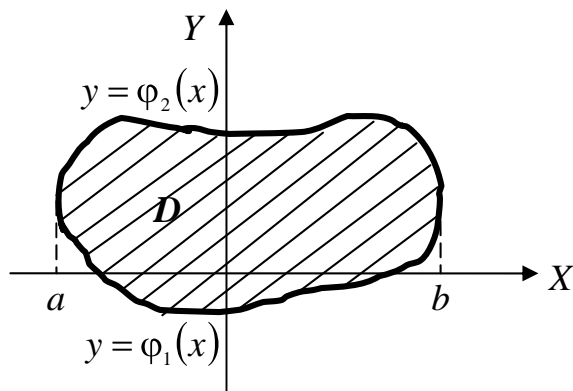


Рис. 12.2

если область ограничена линиями  $y = \varphi_1(x)$ ,  $y = \varphi_2(x)$ ,  $x = a$ ,  $x = b$  (рис. 12.2), вычисляется через двойной или определенный интеграл.

Если область ( $D$ ) ограничена линией, заданной уравнениями в параметрической форме:  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $t \in [t_1, t_2]$ , осью  $OX$ , прямыми  $x = a$ ,  $x = b$ , причем

$x(t_1) = a$ ,  $x(t_2) = b$ , то при  $y(t) \geq 0$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t) dt.$$

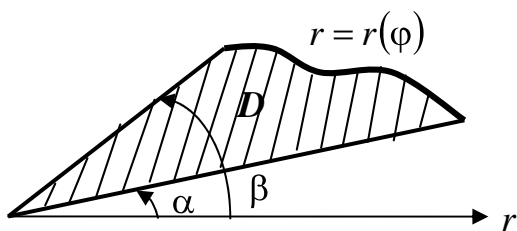


Рис. 12.3

В полярной системе координат площадь плоской фигуры ( $D$ ) (криволинейного сектора (рис. 12.3)) вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi.$$

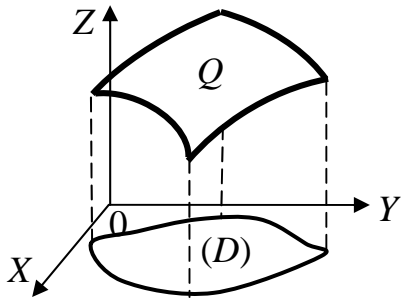


Рис. 12.4

Площадь поверхности ( $Q$ ), заданной уравнением  $z = \varphi(x, y)$ ,  $x, y \in D$ , где  $\varphi(x, y)$  – дифференцируемая в области  $D$  функция (рис. 12.4), вычисляется по формуле

$$q = \iint_{(Q)} dq = \iint_{(D)} \sqrt{1 + (\varphi'_x)^2 + (\varphi'_y)^2} ds$$

с помощью поверхностного интеграла первого рода или двойного интеграла.

Объем тела ( $V$ ) можно вычислить с помощью определенного, двойного или тройного интеграла. Согласно формуле (12.1)

$$V = \iiint_{(V)} dV = \iiint_{(V)} dx dy dz.$$

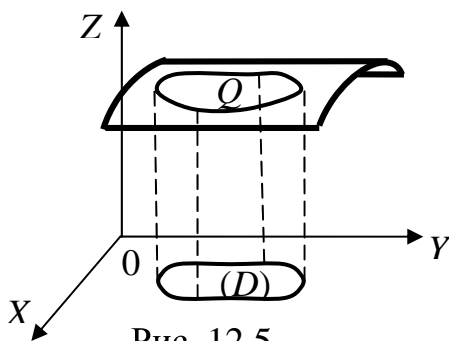


Рис. 12.5

Объем цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью ( $Q$ ),  $z = \varphi(x, y)$ , образующая которого параллельна оси  $OZ$ , а основанием является лежащая в плоскости  $OXY$  область ( $D$ ) (рис. 12.5), вычисляется по формуле

$$V = \iint_{(D)} \varphi(x, y) ds.$$

Если тело ( $V$ ) ограничено замкнутой поверхностью и известна площадь  $S(x)$  любого его сечения плоскостью, перпендикулярной к оси абсцисс (площадь поперечного сечения), то объем можно вычислить с помощью определенного интеграла:

$$V = \int_a^b S(x) dx,$$

где  $x = a$ ,  $x = b$  – плоскости, ограничивающие тело вдоль оси  $OX$ .

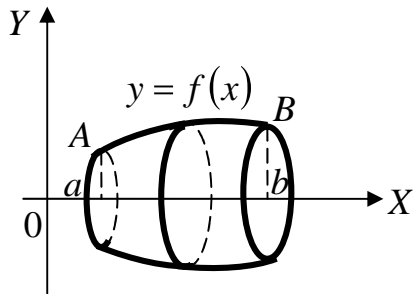


Рис. 12.6

Если тело образовано вращением вокруг оси  $OX$  криволинейной трапеции  $aABb$ , ограниченной кривой  $y = f(x)$ , осью  $OX$  и прямыми  $x = a$ ,  $x = b$  (рис. 12.6), то

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

**Пример 12.1.** Вычислить площадь области, ограниченной линиями  $x = y^2 + 1$ ,  $x = 5$ .

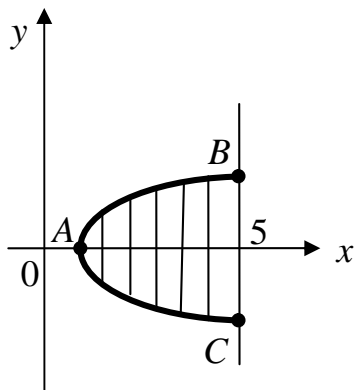


Рис. 12.7

**Решение.** Данная область ограничена параболой  $x = y^2 + 1$  и прямой  $x = 5$  (рис. 12.7). Решая систему уравнений  $x = y^2 + 1$ ,  $y = 0$ , находим точку  $A(1;0)$  пересечения параболы с осью  $Ox$ . Из системы уравнений  $x = y^2 + 1$ ,  $x = 5$  находим две точки пересечения параболы с прямой  $x = 5$ :  $B(5;2)$ ,  $C(5;-2)$ .

Применяя формулу (12.3), находим

$$\begin{aligned} S &= \iint_{(D)} dx dy = \int_1^5 dx \int_{-\sqrt{x-1}}^{\sqrt{x-1}} dy = \int_1^5 y \Big|_{-\sqrt{x-1}}^{\sqrt{x-1}} dx = \int_1^5 (\sqrt{x-1} + \sqrt{x-1}) dx = 2 \int_1^5 \sqrt{x-1} dx = \\ &= 2 \frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_1^5 = \frac{4}{3} [(5-1)^{\frac{3}{2}} - (1-1)^{\frac{3}{2}}] = 10 \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

**Пример 12.2.** Вычислить длину дуги линии  $x=t$ ,  $y=\frac{\sqrt{2}}{2}t^2$ ,  $z=\frac{1}{3}t^3$  ( $0 \leq t \leq 1$ ).

**Решение.** Поскольку  $x'_t=1$ ,  $y'_t=t\sqrt{2}$ ,  $z'_t=t^2$ , то по формуле (12.2) получим

$$l = \int_{(L)} dl = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2} dt = \int_0^1 \sqrt{1 + 2t^2 + t^4} dt = \int_0^1 (1 + t^2) dt = \left( t + \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^1 = 1\frac{1}{3}.$$

### 12.3. Применение в механике интеграла по фигуре от скалярной функции

Фигуру ( $\Phi$ ) будем считать материальной, т. е. обладающей определенной массой. Тогда интеграл по фигуре от скалярной функции  $\int_{(\Phi)} \rho(P) d\mu$  определяет массу  $M$  фигуры ( $\Phi$ ), если подынтегральную функцию  $\rho(P)$  точек  $P \in \Phi$  считать функцией распределения плотности:

$$M = \int_{(\Phi)} \rho(P) d\mu.$$

В частности, если ( $\Phi$ ) – стержень, совпадающий с отрезком  $[a, b]$  оси  $OX$ , то

$$M = \int_a^b \rho(P) dx = \int_a^b \rho(x) dx,$$

если ( $\Phi$ ) – дуга линии ( $L$ ), то

$$M = \int_{(L)} \rho(P) dl,$$

если ( $\Phi$ ) – плоская область ( $D$ ), то

$$M = \iint_{(D)} \rho(P) ds = \iint_{(D)} \rho(x, y) dx dy, \quad (12.4)$$

если  $(\Phi)$  – поверхность  $(Q)$ , то

$$M = \iint_{(Q)} \rho(P) dq,$$

если  $(\Phi)$  – пространственная область (тело)  $V$ , то

$$M = \iiint_{(V)} \rho(P) dv = \iiint_{(V)} \rho(x, y, z) dx dy dz. \quad (12.5)$$

С помощью интеграла по фигуре определяются также статические моменты, координаты центра масс, моменты инерции и ряд других механических величин.

**Статическим моментом материальной точки**, в которой сосредоточена масса  $m$ , относительно точки (прямой, плоскости) называют произведение ее массы на расстояние от этой точки до точки (прямой, плоскости).

**Статическими моментами  $M_x$ ,  $M_y$  плоской материальной фигуры  $(\Phi)$**  относительно осей декартовой прямоугольной системы координат называют выражения

$$M_x = \int_{(\Phi)} y \rho(P) d\mu,$$

$$M_y = \int_{(\Phi)} x \rho(P) d\mu.$$

В пространственной декартовой прямоугольной системе координат статические моменты фигуры  $(\Phi)$  относительно координатных плоскостей  $OXY$ ,  $OXZ$ ,  $OYZ$  определяются соответственно формулами



$$M_{xy} = \int_{(\Phi)} z\rho(P)d\mu,$$

$$M_{xz} = \int_{(\Phi)} y\rho(P)d\mu,$$

$$M_{yz} = \int_{(\Phi)} x\rho(P)d\mu.$$

Координаты центра масс плоской материальной фигуры определяются по формулам

$$x_c = \frac{M_y}{M} = \frac{\int_{(\Phi)} x\rho(P)d\mu}{\int_{(\Phi)} \rho(P)d\mu},$$

$$y_c = \frac{M_x}{M} = \frac{\int_{(\Phi)} y\rho(P)d\mu}{\int_{(\Phi)} \rho(P)d\mu},$$

а пространственной фигуры – по формулам

$$x_c = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{\int_{(\Phi)} x\rho(P)d\mu}{\int_{(\Phi)} \rho(P)d\mu},$$

$$y_c = \frac{M_{xz}}{M} = \frac{\int_{(\Phi)} y\rho(P)d\mu}{\int_{(\Phi)} \rho(P)d\mu},$$

$$z_c = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\int_{(\Phi)} z \rho(P) d\mu}{\int_{(\Phi)} \rho(P) d\mu}.$$

При определении статических моментов и центров масс однородных фигур ( $\rho(P) = \text{const}$ ) полезно иметь в виду, что если фигура имеет ось или плоскость симметрии, то статический момент относительно этой оси или плоскости равен нулю. Если однородная фигура имеет плоскость, ось или центр симметрии, то ее центр масс лежит на этой плоскости, оси или в этом центре.

**Моментом инерции**  $I_0$  материальной точки массой  $m$  относительно точки  $O$  ( $I_x$  – относительно оси  $OX$ ,  $I_{xy}$  – относительно плоскости  $OXY$ ) называют произведение массы точки на квадрат ее расстояния соответственно до точки, оси или плоскости:

$$I_0 = md^2, \quad I_x = m(y^2 + z^2), \quad I_{xy} = mz^2,$$

$d$  – расстояние от материальной точки до точки  $O$ .

Моменты инерции плоской пластины ( $D$ ) относительно координатных осей декартовой прямоугольной системы координат вычисляются по формулам

$$I_x = \int_{(\Phi)} y^2 \rho(P) d\mu = \iint_{(D)} y^2 \rho(x, y) dx dy,$$

$$I_y = \int_{(\Phi)} x^2 \rho(P) d\mu = \iint_{(D)} x^2 \rho(x, y) dx dy.$$

Моменты инерции тела относительно координатных плоскостей вычисляются по формулам

$$I_{xy} = \int_{(\Phi)} z^2 \rho(P) d\mu = \iiint_{(V)} z^2 \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

$$I_{xz} = \int_{(\Phi)} y^2 \rho(P) d\mu = \iiint_{(V)} y^2 \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

$$I_{yz} = \int_{(\Phi)} x^2 \rho(P) d\mu = \iiint_{(V)} x^2 \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

Статические моменты в механике называют **моментами первого порядка**, а моменты инерции – **моментами второго порядка**. Подобным образом определяются моменты порядка  $n$ .

Моменты инерции  $I_o$  относительно начала координат называют **полярными моментами**. Они определяются по формулам:

для плоской фигуры

$$I_o = \int_{(\Phi)} (x^2 + y^2) \rho(x, y) d\mu;$$

для пространственной фигуры

$$I_o = \int_{(\Phi)} (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) d\mu.$$

**Пример 12.3.** Найти массу круглой пластинки радиуса  $R$ , если поверхностная плотность  $\rho(x, y)$  материала пластинки в каждой точке  $P(x, y)$  пропорциональна расстоянию точки  $P$  от центра круга.

**Решение.** Начало прямоугольной декартовой системы координат поместим в центр круга, тогда координаты любой его точки удовлетворяют соотношению  $x^2 + y^2 \leq R^2$ . Расстояние от точки  $P(x, y)$  до начала координат определяется формулой  $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ , поэтому в соответствии с условием будем иметь  $\rho(x, y) = k\sqrt{x^2 + y^2}$ , где  $k$  – коэффициент пропорциональности.

По формуле (12.4) имеем  $m = \iint_S k\sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , где  $S$  – круг  $x^2 + y^2 \leq R^2$ .

Переходя к полярным координатам, находим

$$m = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R k\rho\rho d\rho = k \int_0^{2\pi} \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^R d\varphi = \frac{kR^3}{3} \varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{2}{3} k\pi R^3.$$

**Пример 12.4.** Вычислить моменты инерции однородного шара радиусом  $R$  и весом  $P$  относительно его центра и диаметра.

**Решение.** Так как объем шара  $v = \frac{4}{3}\pi R^3$ , то его постоянная плотность  $\rho = \frac{3P}{4g\pi R^3}$ . Поместим центр шара в начале координат, тогда его поверхность будет определяться уравнением  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ . Момент инерции относительно центра шара удобно вычислять в сферических координатах:

$$\begin{aligned} I_o &= \rho \iiint_v (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \rho \iiint_v r^4 \sin\theta dr d\varphi d\theta = \\ &= \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^R r^4 dr = \rho \cdot 2\pi \cdot 2 \frac{R^5}{5} = \frac{3}{5} \frac{P}{g} R^2. \end{aligned}$$

Так как вследствие однородности и симметрии шара его моменты инерции относительно любого диаметра равны, вычислим момент инерции относительно диаметра, лежащего, например, на оси  $Oz$ :

$$\begin{aligned} I_z &= \rho \iiint_v (x^2 + y^2) dx dy dz = \rho \iiint_v r^4 \sin^2\theta r^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta = \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta \int_0^R r^4 dr = \\ &= -\rho \cdot 2\pi \cdot \frac{R^5}{5} \int_0^\pi (1 - \cos^2\theta) d(\cos\theta) = -\rho \cdot 2\pi \cdot \frac{R^5}{5} (\cos\theta - \frac{1}{3}\cos^3\theta) \Big|_0^\pi = \frac{2}{5} \frac{P}{g} R^2. \end{aligned}$$

**Пример 12.5.** Найти массу части цилиндрической поверхности  $y = \sqrt{9 - z^2}$ , отсеченной плоскостями  $x = 0$ ,  $x = 2$ , если поверхностная плотность  $\rho(x, y, z) = ky(x + z)$ .

**Решение.** По формуле (12.5) находим

$$\begin{aligned}
 m &= \iint_{\sigma} ky(x + z)d\sigma = k \iint_{\sigma} y(x + z) \frac{3}{y} dx dz = 3k \int_{-3}^3 dz \int_0^2 (x + z) dx = \\
 &= 3k \int_{-3}^3 \left( \frac{x^2}{2} + x - z \right) \Big|_{x=0}^{x=2} dz = 3k \int_{-3}^3 (2 + 2z) dz = 3k(2 + z^2) \Big|_{-3}^3 = 36k.
 \end{aligned}$$

#### 12.4. О приложениях интеграла по ориентированной фигуре от векторной функции

Интеграл по ориентированной фигуре от векторной функции (криволинейный и поверхностный интегралы второго порядка) не имеет столь простых и наглядных геометрических истолкований как интеграл по фигуре от скалярной функции. Механическое истолкование интеграла, а тем самым и применение его при решении задач механики, физики, электротехники и т. д. достаточно широкое. Например, в теории поля и векторном анализе поток векторного поля  $\vec{a} = \overline{a(P)}$  через ориентированную поверхность  $(Q)$  определяется поверхностным интегралом второго рода  $\iint_{(Q)} (\vec{a}, \vec{n}^0) dq$ , где  $\vec{n}^0$  – единичный вектор нормали к выбранной стороне поверхности, циркуляция векторного поля вдоль замкнутой ориентированной кривой  $(L)$  определяется криволинейным интегралом второго рода  $\oint_{(L)} (\vec{a}, \vec{\tau}^0) dl$ , где  $\vec{\tau}^0$  – единичный вектор, направленный по касательной к кривой  $(L)$  в сторону перемещения, и т. д.

Работа  $A$  переменной силы  $\overline{a(P)}$  вдоль линии перемещения  $(L)$  в направлении  $\overline{\tau^\circ}$  есть криволинейный интеграл второго рода

$$A = \int_{(L)} (\overline{a}, \overline{\tau^\circ}) dl. \quad (12.6)$$

**Пример 12.6.** Найти работу, производимую силой  $\overline{F} = 4x^6i + xyj$  вдоль дуги кривой  $y = x^3$  от точки  $O(0;0)$  до точки  $B(1;1)$ .

**Решение.** Проекции  $X$  и  $Y$  силы  $\overline{F}$  на координатные оси соответственно равны  $X(x, y) = 4x^6$ ,  $Y(x, y) = xy$ . Чтобы найти работу, необходимо воспользоваться частным случаем формулы (12.6) в виде

$$A = \int_L X(x, y)dx + Y(x, y)dy.$$

По этой формуле получаем

$$A = \int_L 4x^6 dx + xy dy = \int_0^1 (4x^6 + xx^3 \cdot 3x^2) dx = \int_0^1 7x^6 dx = x^7 \Big|_0^1 = 1.$$

## 13. Теория поля

### 13.1. Скалярное поле

#### 13.1.1. Скалярное поле, производная по направлению, градиент

Все физические процессы, проходящие в любой области пространства, характеризуются определенными значениями некоторых величин. Так, нагревание тела описывается изменением температуры в точках этого тела; приход в упадок экономического региона характеризуется количеством остановленных в нем предприятий и т. д. Если каждой точке  $M$  некоторой области  $V$  пространства соответствует значение некоторой скалярной величины  $u(M)$ , то говорят, что в области  $V$  задано скалярное поле  $u(M)$ . Поле называется **стационарным**, если оно не меняется во времени; мы будем изучать только стационарные поля.

Формально определение скалярного поля совпадает с определением функции  $u(M)$ , заданной в области  $V$ ; это верно и по существу, однако при изучении теории поля полезно иметь в виду, что функция  $u(M)$  описывает конкретную физическую реальность. Для изучения функциональной зависимости  $u(M)$  нам придется ввести некоторую систему координат. Вид функции  $u(M)$  (ее аналитическое выражение) меняется в зависимости от того, как введена координатная система (где расположено начало системы координат, куда направлены оси, каков масштаб измерения расстояний и т. д.), однако сущность, которую описывают эти разные выражения, одна и та же. При произвольном задании системы координат приводит к необходимости различать величины, не зависящие от конкретной системы (**инвариантные** относительно системы координат), и величины, принимающие разные значения в разных системах (**неинвариантные** величины). Основной инвариантной величиной является, конечно, само значение  $u(M)$  поля в точке  $M$ . Поле  $u(M)$  называется **гладким**,

если функция  $u(M)$  имеет непрерывные частные производные  $\frac{\partial u}{\partial x}(M), \frac{\partial u}{\partial y}(M), \frac{\partial u}{\partial z}(M)$ . Значения этих производных в точке  $M$  зависят от системы координат, однако составленная с их помощью линейная комбинация базисных ортов системы  $\frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}$  образует градиент поля  $u(M)$  и инвариантна относительно системы координат. Вектор  $\text{grad}u(M)$  направлен в сторону роста значений поля  $u(M)$  по направлению наибольшей скорости роста; длина  $\text{grad}u(M)$  равна скорости роста в этом направлении. Инвариантна относительно системы координат производная поля в точке  $M$  по любому направлению  $\bar{l}$ , выходящему из этой точки, так как она характеризует скорость изменения поля в направлении  $\bar{l}$ . Формально производная

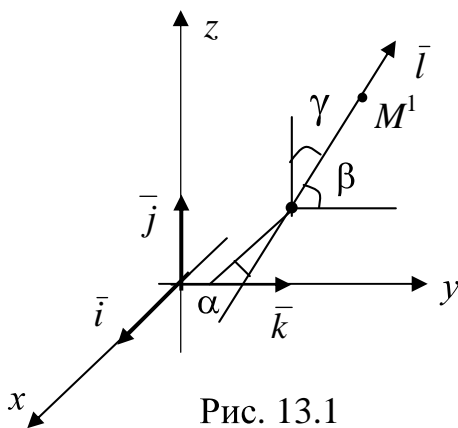


Рис. 13.1

по направлению определяется как

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\substack{M^1 \rightarrow M \\ \text{вдоль } \bar{l}}} \frac{u(M^1) - u(M)}{MM^1}, \text{ где } MM^1 = \pm |\vec{MM}^1|, \text{ в}$$

зависимости от того, имеют ли ось  $\bar{l}$  и вектор  $\vec{MM}^1$  одинаковые или противоположные направления (рис. 13.1). Производная по направлению выражается через градиент формулой

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial l}(M) &= \text{grad}u(M) \cdot \bar{l}_0 = \frac{\partial u}{\partial x}(M) \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M) \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z}(M) \cos \gamma = \\ &= \text{pr}_{\bar{l}}(\text{grad}u(M)), \end{aligned}$$

где  $\bar{l}_0 \{ \cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma \}$  – орт направления  $\bar{l}$ ,  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  – направляющие косинусы этого направления.



В дальнейшем для обозначения градиента мы часто будем применять введенный Гамильтоном оператор  $\nabla$  ("набла"). Этот вектор-оператор определяется как  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k}$ . Если формальное произведение  $\frac{\partial}{\partial x} \cdot u(M)$

понимать как  $\frac{\partial u}{\partial x}(M)$ , то  $\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \bar{k} = \nabla u$ , т. е. произведение

вектора набла на скаляр  $u(M)$  дает значение градиента поля  $u$  в точке  $M$ .

Градиент поля имеет следующие дифференциальные свойства:

$$1. \text{ grad}(C_1 u_1(M) + C_2 u_2(M)) = C_1 \text{ grad } u_1(M) + C_2 \text{ grad } u_2(M) \text{ или}$$

$$\nabla(C_1 u_1 + C_2 u_2) = C_1 \nabla u_1 + C_2 \nabla u_2;$$

$$2. \text{ grad}(u_1(M) \cdot u_2(M)) = u_2(M) \cdot \text{ grad } u_1(M) + u_1(M) \cdot \text{ grad } u_2(M) \text{ или}$$

$$\nabla(u_1 \cdot u_2) = u_2 \cdot \nabla u_1 + u_1 \cdot \nabla u_2;$$

$$3. \text{ grad}\left(\frac{u_1(M)}{u_2(M)}\right) = \frac{u_2(M) \cdot \text{ grad } u_1(M) - u_1(M) \cdot \text{ grad } u_2(M)}{u_2^2(M)} \text{ или}$$

$$\nabla\left(\frac{u_1(M)}{u_2(M)}\right) = \frac{u_2 \cdot \nabla u_1 - u_1 \cdot \nabla u_2}{u_2^2};$$

$$4. \text{ grad}(F(u(M))) = F'(u) \text{ grad } u(M) \text{ или } \nabla F(u) = F'(u) \nabla u,$$

которые легко доказываются применением обычных правил дифференцирования.

Для визуального изображения скалярных полей применяются поверхности и линии (в плоском случае) уровня. **Поверхностью уровня** скалярного поля  $u(M)$ , соответствующей значению поля  $C$ , называется геометрическое место точек  $P \in V$  таких, что  $u(P) = C$ . Поверхности уровня, соответствующие разным значениям постоянной  $C$ , не могут иметь общих точек, поэтому область  $V$ , в которой задано поле, расслаивается на поверхности уровня; совокупность этих поверхностей, построенных для некоторого регулярного набора значений  $C$ , например,  $C = 1, C = 2, C = 3$  и т. д., дает наглядное представление об изменении поля при переходе от одной точки к другой. Поле меняется быстрее там, где эти поверхности расположены гуще. Градиент поля в каждой точке  $P_0$  ортогонален

поверхности уровня, проходящей через эту точку, т. е. поверхности  $\{P \in V \mid u(P) = u(P_0)\}$ .

### 13.1.2. Частные случаи скалярных полей

Скалярное поле называется **плоским**, если существует такая плоскость  $\Pi$ , что поле принимает одинаковые значения во всех точках прямой, перпендикулярной плоскости  $\Pi$ . Другими словами, это поле устроено одинаково во всех плоскостях, параллельных плоскости  $\Pi$ . Удачным выбором координатной системы в этом случае будет ввести ее так, чтобы плоскость  $\Pi$  была плоскостью

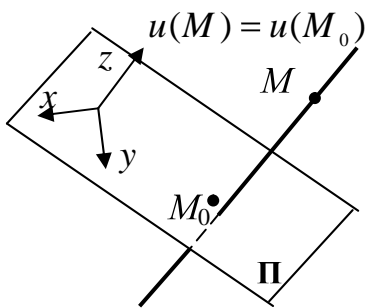


Рис. 13.2

$Oxy$ . Тогда ось  $Oz$  будет перпендикулярна  $\Pi$ , и, по определению плоского поля, функция  $u(M)$  не должна зависеть от  $z$ , т. е.  $u(M) = u(x,y)$ . Поверхности уровня этого поля – цилиндрические поверхности с образующими, перпендикулярными плоскости  $\Pi$ ; след этих поверхностей в плоскости  $\Pi$  даст линии уровня функции  $u(x,y)$  (рис. 13.2).

Скалярное поле называется **цилиндрическим**, если существует такая прямая  $L$ , что значения поля  $u(M)$  зависят только от расстояния  $r$  от точки  $M$  до прямой  $L$ . Если система координат введена так, что эта прямая – ось  $Oz$ , то  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  и  $u(M) = u(r)$ , т. е. цилиндрическое поле – частный случай плоского

поля. Так как  $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ,  $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ , то  $\text{grad } r = \frac{x\bar{i} + y\bar{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\bar{r}}{r}$ ,

$\text{grad } u(r) = u'(r) \frac{\bar{r}}{r}$ . Понятно, что цилиндрическое поле проще всего описывается в цилиндрических координатах, так как функция  $u(M)$  не будет зависеть от координат  $\varphi, z$ .

Скалярное поле называется **сферическим**, если существует такая точка  $O$ , что значения поля  $u(M)$  зависят только от расстояния  $r$  от точки  $M$  до точки  $O$ . Если точка  $O$  взята за начало системы координат, то  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  и

$u(M) = u(r)$ . Поверхности уровня сферического поля – сферы с центром в точке  $O$ .

В этом случае также  $\text{grad } r = \frac{x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\bar{r}}{r}$ ,  $\text{grad } u(r) = u'(r) \frac{\bar{r}}{r}$ . Сферическое

поле проще всего описывается в сферических координатах, так как функция  $u(M)$  не будет зависеть от координат  $\varphi, \theta$ .

## 13.2. Векторное поле

### 13.2.1. Векторное поле

Если каждой точке  $M$  некоторой области  $V$  пространства соответствует значение некоторой векторной величины  $\bar{a}(M)$ , то говорят, что в области  $V$  задано векторное поле  $\bar{a}(M)$ . Примеры векторных полей – поле тяготения, поля электрической и магнитной напряженностей, поле скоростей частиц движущейся жидкости.

Если в некоторой декартовой системе координат вектор  $\bar{a}(M)$  имеет координаты  $P(M), Q(M), R(M)$ , то  $\bar{a}(M) = P(M)\bar{i} + Q(M)\bar{j} + R(M)\bar{k}$ . Таким образом, задание векторного поля  $\bar{a}(M)$  эквивалентно заданию трех скалярных полей  $P(M), Q(M), R(M)$ . Будем называть векторное поле **гладким**, если его координатные функции – гладкие скалярные поля. Кроме того, будем предполагать, что векторное поле не имеет особых точек, т. е.  $\bar{a}(M) \neq \bar{0}$  при  $\forall M \in V$ , т. е. функции  $P, Q, R$  не равны нулю одновременно.

В зависимости от рассматриваемых вопросов для нас будет более предпочтительной какая-либо одна из двух интерпретаций векторного поля – **силовая** или **гидродинамическая**. В силовой интерпретации вектор  $\bar{a}(M)$  трактуется как сила (тяжести, напряженности, например), действующая в точке  $M$ ; в гидродинамической интерпретации  $\bar{a}(M)$  рассматривается как поле скоростей текущей в области  $V$  несжимаемой жидкости. Как и в случае

скалярного поля, мы рассматриваем **стационарные** векторные поля, т. е. поля, постоянные во времени.

### 13.2.2. Дифференциальные характеристики векторного поля

#### *Дивергенция векторного поля*

Пусть в некоторой системе координат  $\bar{a}(M) = P(M)\bar{i} + Q(M)\bar{j} + R(M)\bar{k}$ .

Скалярная величина (скалярное поле)  $\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)(M)$  называется

**дивергенцией поля в точке  $M$**  и обозначается  $\operatorname{div} \bar{a}(M)$ :

$\operatorname{div} \bar{a}(M) = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)(M)$ . С помощью оператора набла дивергенция

определяется как скалярное произведение:

$$\nabla \cdot \bar{a} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k}\right) \cdot (P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

В дальнейшем мы увидим, что дивергенция инвариантна относительно системы координат и обозначает плотность источников поля, а сейчас сформулируем свойства дивергенции:

1. Если  $\bar{a}(M)$  – постоянное векторное поле, то  $\operatorname{div} \bar{a} = 0$ ;

2.  $\operatorname{div}(C_1\bar{a}_1 + C_2\bar{a}_2) = C_1 \operatorname{div} \bar{a}_1 + C_2 \operatorname{div} \bar{a}_2$  (или  $\nabla(C_1\bar{a}_1 + C_2\bar{a}_2) = C_1\nabla\bar{a}_1 + C_2\nabla\bar{a}_2$ );

3. Если  $u$  – скалярное поле, то  $\operatorname{div}(u \cdot \bar{a}) = \bar{a} \cdot \operatorname{grad} u + u \operatorname{div} \bar{a}$  (или  $\nabla(u\bar{a}) = \bar{a}\nabla u + u\nabla\bar{a}$ ). В частности, если  $\bar{a}(M)$  – постоянное векторное поле, то  $\nabla(u\bar{a}) = \bar{a}\nabla u = \bar{a} \cdot \operatorname{grad} u$ .

Докажем, например, третье свойство.

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(u \cdot \bar{a}) &= \operatorname{div}((uP)\bar{i} + (uQ)\bar{j} + (uR)\bar{k}) = \frac{\partial(Pu)}{\partial x} + \frac{\partial(Qu)}{\partial y} + \frac{\partial(Ru)}{\partial z} = \\ &= \left( \frac{u\partial P}{\partial x} + \frac{P\partial u}{\partial x} \right) + \left( \frac{u\partial Q}{\partial y} + \frac{Q\partial u}{\partial y} \right) + \left( \frac{u\partial R}{\partial z} + \frac{R\partial u}{\partial z} \right) = u \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) + \\ &\quad + \frac{P\partial u}{\partial x} + \frac{Q\partial u}{\partial y} + \frac{R\partial u}{\partial z} = u \operatorname{div} \bar{a} + \bar{a} \cdot \operatorname{grad} u. \end{aligned}$$

Пример вычисления дивергенции: если

$$\bar{a} = (x^3 - yz + \cos(xyz))\bar{i} - xy^2z^3\bar{j} + \operatorname{arctg} \frac{xy}{z}\bar{k},$$

то

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \bar{a} &= \frac{\partial(x^3 - yz + \cos(xyz))}{\partial x} - \frac{\partial(xy^2z^3)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\operatorname{arctg} \frac{xy}{z}\right)}{\partial z} = \\ &= 3x^2 - yz \sin(xyz) - 2xyz^3 - \frac{xy}{x^2y^2 + z^2}. \end{aligned}$$

### ***Ротор векторного поля***

**Ротором векторного поля  $\bar{a}(M)$  в точке  $M \in V$**  называется векторная величина (векторное поле)  $\operatorname{rot} \bar{a}(M) = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \bar{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \bar{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \bar{k}$ .

Запомнить эту формулу очень легко, если выразить  $\operatorname{rot} \bar{a}(M)$  через оператор Гамильтона набла:  $\operatorname{rot} \bar{a}(M)$  равен векторному произведению  $\nabla \times \bar{a}$ .

Действительно,  $\operatorname{rot} \bar{a}(M) = \nabla \times \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$ . Если теперь раскрыть этот

определитель по первой строке, получим

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{a}(M) = \nabla \times \bar{a} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \bar{i} \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) - \bar{j} \left( \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) + \bar{k} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \\ &= \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \bar{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \bar{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \bar{k}. \end{aligned}$$

**Пример 13.1.** Если  $\bar{a} = (x^3 - yz + \cos(xyz))\bar{i} - xy^2z^3\bar{j} + \operatorname{arctg} \frac{xy}{z}\bar{k}$ , то

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{a} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^3 - yz + \cos(xyz) & -xy^2z^3 & \operatorname{arctg} \frac{xy}{z} \end{vmatrix} = \bar{i} \left( \frac{\partial \left( \operatorname{arctg} \frac{xy}{z} \right)}{\partial y} - \frac{\partial (-xy^2z^3)}{\partial z} \right) - \\ &\quad - \bar{j} \left( \frac{\partial \left( \operatorname{arctg} \frac{xy}{z} \right)}{\partial x} - \frac{\partial (x^3 - yz + \cos(xyz))}{\partial z} \right) + \\ &\quad + \bar{k} \left( \frac{\partial (-xy^2z^3)}{\partial x} - \frac{\partial (x^3 - yz + \cos(xyz))}{\partial y} \right) = \left( \frac{xz}{x^2y^2 + z^2} + 3xy^2z^2 \right) \bar{i} - \end{aligned}$$

$$-\left(\frac{yz}{x^2y^2+z^2} + y + xy\sin(xyz)\right)\bar{j} - (y^2z^3 - z - xz\sin(xyz))\bar{k}.$$

### Свойства ротора:

1. Если  $\bar{a}(M)$  – постоянное векторное поле, то  $\text{rot } \bar{a} = \bar{0}$ ;
2.  $\text{rot}(C_1\bar{a}_1 + C_2\bar{a}_2) = C_1 \text{rot } \bar{a}_1 + C_2 \text{rot } \bar{a}_2$  (или  $\nabla \times (C_1\bar{a}_1 + C_2\bar{a}_2) = C_1\nabla \times \bar{a}_1 + C_2\nabla \times \bar{a}_2$ );
3. Если  $u$  – скалярное поле, то  $\text{rot}(u \cdot \bar{a}) = \text{grad } u \times \bar{a} + u \text{rot } \bar{a}$  (или  $\nabla \times (\bar{a}u) = \nabla u \times \bar{a} + u(\nabla \times \bar{a})$ ). В частности, если  $\bar{a}(M)$  – постоянное векторное поле, то  $\nabla \times (u\bar{a}) = \nabla u \times \bar{a} = \text{grad } u \times \bar{a}$ .

Докажем третье свойство.

$$\begin{aligned} \text{rot}(u \cdot \bar{a}) &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ uP & uQ & uR \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(uR)}{\partial y} - \frac{\partial(uQ)}{\partial z}\right)\bar{i} - \left(\frac{\partial(uR)}{\partial x} - \frac{\partial(uP)}{\partial z}\right)\bar{j} + \\ &+ \left(\frac{\partial(uQ)}{\partial x} - \frac{\partial(uP)}{\partial y}\right)\bar{k} = \left(R \frac{\partial u}{\partial y} - Q \frac{\partial u}{\partial z} + u \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\right)\bar{i} - \left(R \frac{\partial u}{\partial x} - P \frac{\partial u}{\partial z} + u \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)\right)\bar{j} + \\ &+ \left(Q \frac{\partial u}{\partial x} - P \frac{\partial u}{\partial y} + u \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right)\bar{k} = \left(R \frac{\partial u}{\partial y} - Q \frac{\partial u}{\partial z}\right)\bar{i} - \left(R \frac{\partial u}{\partial x} - P \frac{\partial u}{\partial z}\right)\bar{j} + \\ &+ \left(Q \frac{\partial u}{\partial x} - P \frac{\partial u}{\partial y}\right)\bar{k} + u \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\bar{i} - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\bar{k}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} + u \text{rot } \bar{a} = \\ &= \text{grad } u \times \bar{a} + u \text{rot } \bar{a}. \end{aligned}$$

### 13.2.3. Частные случаи векторных полей

Векторное поле называется **однородным** (или **постоянным**), если  $\vec{a}(M) = \text{const}$ .

Векторное поле называется **плоским**, если все векторы  $\vec{a}(M)$  параллельны некоторой плоскости  $\Pi$  и одинаковы вдоль каждого перпендикуляра к  $\Pi$ . Если система координат введена так, что  $\Pi$  совпадает с плоскостью  $Oxy$ , то, очевидно,  $\vec{a}(M) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ . Плоское поле достаточно рассматривать в пределах плоскости  $Oxy$ , так как во всех плоскостях, параллельных  $Oxy$ , оно одинаково. Для плоского поля

$$\text{div } a = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Пример плоского поля – магнитное поле, создаваемое током  $I$ , текущим по бесконечно длинному проводнику. Если ось  $Oz$  направлена вдоль этого проводника, то вектор напряженности магнитного поля  $\vec{H} = 2I \frac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{x^2 + y^2}$ , это поле определено везде, кроме оси  $Oz$ .

Векторное поле называется **центральной**, если в каждой точке  $M \in V$  вектор  $\vec{a}(M)$  коллинеарен радиусу-вектору этой точки:  $\vec{a}(M) = u(M)\vec{r}$

( $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ). Так как  $\text{div } \vec{r} = 1 + 1 + 1 = 3$ ,  $\text{rot } \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{0}$ , то для

центрального поля

$$\text{div}(u \cdot \vec{r}) = \vec{r} \cdot \text{grad } u + u \text{div } \vec{r} = 3u + \vec{r} \cdot \text{grad } u,$$



$$\operatorname{rot}(u \cdot \bar{r}) = \operatorname{grad} u \times \bar{r} + u \operatorname{rot} \bar{r} = \operatorname{grad} u \times \bar{r}.$$

Векторное поле называется **центрально-симметричным**, если оно центрально, и функция  $u(M)$  зависит только от расстояния  $r$ , т. е. от длины радиуса-вектора точки  $M$ :  $\bar{a}(M) = u(r)\bar{r}$  ( $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ). Так как

$$\operatorname{grad} r = \frac{x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\bar{r}}{r}, \quad \operatorname{grad} u(r) = u'(r) \operatorname{grad} r = u'(r) \cdot \frac{\bar{r}}{r},$$

то для центрально-симметричного поля

$$\operatorname{div}(u(r) \cdot \bar{r}) = \bar{r} \cdot \operatorname{grad} u(r) + u(r) \operatorname{div} \bar{r} = 3u + u'(r) \cdot \bar{r} \cdot \frac{\bar{r}}{r} = 3u + ru'(r),$$

$$\operatorname{rot}(u(r) \cdot \bar{r}) = \operatorname{grad} u(r) \times \bar{r} + u \operatorname{rot} \bar{r} = \frac{u'(r)}{r} (\bar{r} \times \bar{r}) = \bar{0}.$$

Найдем вид центрально-симметричного поля, для которого дивергенция равна нулю (в дальнейшем мы будем называть такие поля **соленоидальными**):

$$3u + ru'(r) = 0 \Rightarrow \frac{du}{u} = -3 \frac{dr}{r} \Rightarrow \ln |u| = -3 \ln |r| + \ln |C| \Rightarrow u = \frac{C}{r^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{a}(M) = \frac{C}{r^3} \bar{r}.$$

Таким образом, соленоидальны только те центрально-симметричные поля, в которых зависимость от  $r$  такая же, как в законах Кулона и всемирного тяготения.

### 13.2.4. Векторные линии

Так как вектор  $\bar{a}(M)$  определяется длиной и направлением в пространстве, задание в области  $V$  поля  $\bar{a}(M)$  равносильно заданию в  $V$  полей длин и направлений. Геометрической характеристикой, определяющей в  $V$  поле направлений, служит совокупность **векторных линий**.

**Определение 13.1.** Векторной линией поля  $\bar{a}(M)$  называется любая линия, которая в каждой своей точке  $M$  касается вектора  $\bar{a}(M)$ .

В силовой интерпретации поля векторными линиями являются силовые линии поля, в гидродинамической – векторные линии есть траектории, по которым движутся частицы жидкости (линии тока).

Получим дифференциальные уравнения векторных линий в декартовой системе координат. Пусть векторная линия определяется векторным уравнением  $\bar{r} = \bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}$ . Тогда касательный вектор к этой линии  $\bar{r}'(t) = x(t)'\bar{i} + y(t)'\bar{j} + z(t)'\bar{k}$  в любой точке должен быть коллинеарен полю, т. е.

$$x(t)'\bar{i} + y(t)'\bar{j} + z(t)'\bar{k} = \lambda(P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \lambda P, \quad \frac{dy}{dt} = \lambda Q, \quad \frac{dz}{dt} = \lambda R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}.$$

Эта записанная в симметричной форме система из трех уравнений первого порядка и определяет векторные линии. Так как функции  $P, Q, R$  одновременно не обращаются в нуль, то в любой точке одна из них отлична от нуля. Пусть, например, в точке  $M_0(x_0, y_0, z_0) \in V$   $P(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ . Тогда систему можно записать

в виде  $\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y, z)}{P(x, y, z)}$ ;  $\frac{dz}{dx} = \frac{R(x, y, z)}{P(x, y, z)}$ . Функции  $P, Q, R$  непрерывно

дифференцируемы, поэтому для последней системы выполняются условия

теоремы существования и единственности задачи Коши с начальными условиями  $y(x_0) = y_0$ ,  $z(x_0) = z_0$ . Следовательно, через точку  $M_0$  проходит, и при том единственная, интегральная кривая системы, которая и будет векторной линией поля.

Пусть, например, поле  $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + 2x^2\vec{k}$ . Тогда векторные линии определяются системой  $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{2x^2}$ . Решая уравнение  $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$ , получим

$y = x + C_1$ , из уравнения  $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{2x^2}$  получаем  $z = x^2 + C_2$ , таким образом, уравнения

векторных линий 
$$\begin{cases} y = x + C_1, \\ z = x^2 + C_2. \end{cases}$$

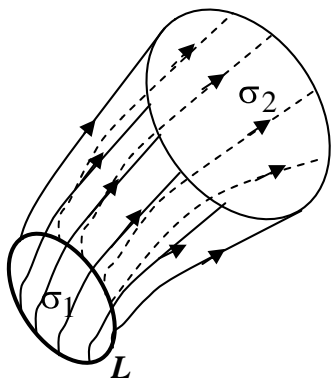


Рис. 13.3

Пусть  $L$  – некоторая кривая в области  $V$ , не являющаяся векторной линией. Проведем через каждую точку  $L$  векторную линию; получившаяся в результате поверхность называется **векторной поверхностью**. Если  $L$  – замкнутая линия, то поверхность называется **векторной трубкой** (рис. 13.3). Основное свойство векторной трубки: векторная линия, вошедшая в трубку через поперечное сечение  $\sigma_1$ , может выйти из нее только

через другое сечение  $\sigma_2$ . Действительно, если бы векторная линия пересекла боковую поверхность векторной трубки, то через точку пересечения проходили бы две векторные линии, что, как мы установили, невозможно.

### 13.3. Поток векторного поля через поверхность

Количество жидкости, протекающей через определенную сторону двусторонней поверхности  $\sigma$  за единицу времени, выражается поверхностным интегралом  $\iint_{\sigma} (\vec{v}(M) \cdot \vec{n}(M)) d\sigma$ . Имеется целый ряд физических процессов,

которые описываются аналогичными поверхностными интегралами, например, магнитная индукция.

Среди других достоинств математики ее ценность заключается, в частности, в способности исследовать процессы в самых разных областях естествознания, абстрагируясь от их физической сущности; приведенные выше примеры показывают естественность введения понятия потока векторного поля через поверхность.

**Определение 13.2.** Пусть  $\sigma$  – двусторонняя гладкая поверхность, расположенная в области  $V$ , в которой задано поле  $\vec{a}(M)$ . Фиксируем выбором нормали  $\vec{n}(M)$  одну из двух сторон поверхности  $\sigma$ . **Потоком векторного поля  $\vec{a}(M)$  через поверхность  $\sigma$**  называется поверхностный интеграл первого рода по  $\sigma$  от скалярного произведения  $\vec{a}(M)$  на единичный вектор нормали  $\vec{n}(M)$  к выбранной стороне поверхности:

$$\Pi = \iint_{\sigma} \vec{a}(M) \vec{n}(M) d\sigma.$$

Существуют различные формы записи этого интеграла. Так как  $\vec{a} \cdot \vec{n} = \text{пр}_{\vec{n}} \vec{a} = a_n$ , поток может обозначаться  $\Pi = \iint_{\sigma} a_n(M) d\sigma$ . Иногда произведение  $\vec{n} d\sigma$  обозначают  $\vec{d\sigma}$  и называют этот вектор **вектором элементарной площадки**, тогда  $\Pi = \iint_{\sigma} \vec{a}(M) \vec{d\sigma}$ . Если связать  $\vec{d\sigma}$  с проекциями  $\sigma$  на координатные плоскости:

$$\begin{aligned} \vec{d\sigma} &= \vec{n} d\sigma = (\cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}) d\sigma = (\cos \alpha d\sigma) \vec{i} + (\cos \beta d\sigma) \vec{j} + (\cos \gamma d\sigma) \vec{k} = \\ &= \pm dydz \cdot \vec{i} \pm dx dz \cdot \vec{j} \pm dx dy \cdot \vec{k} \end{aligned}$$

и использовать координатную запись поля  $\vec{a}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} + R(M)\vec{k}$ , то скалярное произведение в координатной форме даст

$$\Pi = \iint_{\sigma} P(M)dydz + Q(M)dxdz + R(M)dxdy,$$

т. е. поток может быть выражен и через поверхностный интеграл второго рода. Напомним, что в таком интеграле необходимо выбирать знак каждого слагаемого в зависимости от знака соответствующей координаты нормали.

### 13.3.1. Свойства потока векторного поля

Согласно определению, поток – поверхностный интеграл, поэтому он имеет все свойства поверхностного интеграла. Понятно, что некоторые из этих свойств теряют смысл (интеграл от единичной функции, например), поэтому перечислим основные свойства потока.

1. Линейность:

$$\iint_{\sigma} (\alpha \vec{a}_1 + \beta \vec{a}_2) \vec{n} d\sigma = \alpha \iint_{\sigma} \vec{a}_1 \vec{n} d\sigma + \beta \iint_{\sigma} \vec{a}_2 \vec{n} d\sigma.$$

2. Аддитивность:

$$\iint_{\sigma_1 \cup \sigma_2} \vec{a}(M) \vec{n}(M) d\sigma = \iint_{\sigma_1} \vec{a}(M) \vec{n}(M) d\sigma + \iint_{\sigma_2} \vec{a}(M) \vec{n}(M) d\sigma.$$

Здесь  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  – кусочно-гладкие поверхности, которые могут пересекаться только по границам; нормали на этих поверхностях должны быть согласованы так, чтобы определять одну сторону всей составной поверхности  $\sigma_1 \cup \sigma_2$ .

3. Поток меняет знак при изменении стороны поверхности (так как в каждой точке  $M \in \sigma$  вектор  $\bar{n}(M)$  меняется на  $-\bar{n}(M)$ ).

### 13.3.2. Вычисление потока векторного поля

В соответствии с определением

$$\Pi = \iint_{\sigma} \bar{a}(M) \bar{n}(M) d\sigma = \iint_{\sigma} P(M) dydz + Q(M) dx dz + R(M) dx dy,$$

поток может вычисляться и с помощью поверхностного интеграла первого рода, и с помощью поверхностного интеграла второго рода.

**Пример 13.2.** Найти поток векторного поля  $\bar{a} = x\bar{i} + y^2\bar{j} + z^3\bar{k}$  через

полную внешнюю поверхность тела, ограниченного поверхностями  $z = -x^2 - y^2$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = 6$  (рис. 13.4).

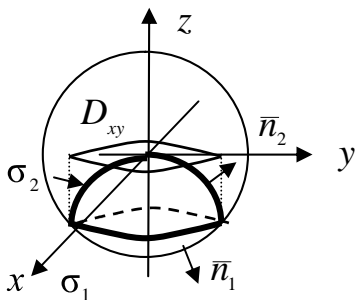


Рис. 13.4

**Решение.** Поверхность состоит из двух частей:  $\sigma_2$

– часть поверхности параболоида  $z = -x^2 - y^2$ , накрытая шапочкой  $\sigma_1$  – частью нижней полусферы

$z = -\sqrt{6 - x^2 - y^2}$ ; уровень пересечения этих

поверхностей по оси  $Oz$  определяется уравнением  $z^2 - z = 6$ , откуда  $z = -2$ ;

проекция линии пересечения на плоскость  $Oxy$  – окружность радиуса  $R = \sqrt{2}$ .

Выпишем нормали:  $\bar{n}_1 = \pm \frac{2x\bar{i} + 2y\bar{j} + 2z\bar{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}}$ ; выбираем знак "+", так как на  $\sigma_1$

нормаль образует тупой угол с осью  $Oz$ , и коэффициент при  $\bar{k}$  должен быть отрицателен (мы находимся в полупространстве  $z < 0$ ). С учетом того, что на  $\sigma_1$

$x^2 + y^2 + z^2 = 6$ ,  $\bar{n}_1 = \frac{x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}}{\sqrt{6}}$ ,  $|\cos \gamma| = \left| \frac{z}{\sqrt{6}} \right| = -\frac{z}{\sqrt{6}}$ . Уравнение  $\sigma_2$  в виде

поверхности уровня:  $x^2 + y^2 + z = 0$ ,  $\bar{n}_2 = \frac{2x\bar{i} + 2y\bar{j} + \bar{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$ , знак "+", так как угол

между  $\bar{n}_2$  и осью  $Oz$  острый,  $|\cos \gamma| = \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$ .

1. Вычисление с помощью поверхностного интеграла первого рода:

$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2$ ,  $\Pi_1 = \iint_{\sigma_1} \bar{a}(M) \bar{n}(M) d\sigma$ ,  $\Pi_2 = \iint_{\sigma_2} \bar{a}(M) \bar{n}(M) d\sigma$ , обе поверхности

однозначно проецируются на плоскость  $Oxy$  в круг радиуса  $R = \sqrt{2}$ , поэтому

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \iint_{\sigma_1} \bar{a}(M) \bar{n}(M) d\sigma = \iint_{D_{xy}} \frac{x^2 + y^3 + z^4}{\sqrt{6}} \cdot \frac{-\sqrt{6}}{z} \Big|_{z=-\sqrt{6-x^2-y^2}} dxdy = \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \frac{r^2}{\sqrt{6-r^2}} r dr + \\ &+ \int_0^{2\pi} \sin^3 \varphi d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \frac{r^3}{\sqrt{6-r^2}} r dr + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{(6-r^2)^3} r dr = \frac{\pi}{2} \int_0^{\sqrt{2}} \frac{(6-r^2) - 6}{\sqrt{6-r^2}} d(6-r^2) - \\ &- \pi \frac{2}{5} (6-r^2)^{5/2} \Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{5} \left( 92\sqrt{6} - \frac{332}{3} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_2 &= \iint_{\sigma_2} \bar{a}(M) \bar{n}(M) d\sigma = \iint_{D_{xy}} \frac{2x^2 + 2y^3 + z^3}{\sqrt{1+4(x^2+y^2)}} \cdot \sqrt{1+4(x^2+y^2)} \Big|_{z=-x^2-y^2} d\sigma = \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r^2 r dr + 2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \varphi d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r^2 r dr - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r^6 r dr = 2\pi \frac{r^4}{4} \Big|_0^{\sqrt{2}} - 2\pi \frac{r^8}{8} \Big|_0^{\sqrt{2}} = -2\pi. \end{aligned}$$

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = \frac{\pi}{5} \left( 92\sqrt{6} - \frac{332}{3} \right) - 2\pi = \frac{\pi}{5} \left( 92\sqrt{6} - \frac{362}{3} \right).$$

2. Посмотрим, к каким вычислениям приводит применение поверхностного

интеграла второго рода.  $\Pi = \iint_{\sigma} x dy dz + y^2 dx dz + z^3 dx dy$ . Для вычисления

$I_1 = \iint_{\sigma} x dy dz$  придется разбить полную поверхность  $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$  на части  $\sigma_3$ , находящуюся в полупространстве  $x \geq 0$ , где  $\cos \alpha \geq 0$ , и  $\sigma_4$ , находящуюся в полупространстве  $x < 0$ , где  $\cos \alpha < 0$ :

$$I_1 = \iint_{\sigma_3} x dy dz - \iint_{\sigma_4} x dy dz = 2 \iint_{\sigma_3} x dy dz = 2 \iint_{D_{1,yz}} x|_{x=\sqrt{-y^2-z^2}} dy dz + 2 \iint_{D_{2,yz}} x|_{x=-\sqrt{6-y^2-z^2}} dy dz =$$

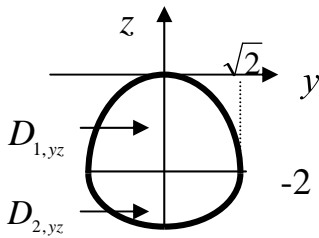


Рис 13.5

(с учетом того, что подынтегральная функция меняет знак при переходе от  $\sigma_3$  к  $\sigma_4$ ) (рис. 13.5)

$$= 2 \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int_{-2}^{-y^2} \sqrt{-y^2-z} dz + 2 \int_{-\sqrt{6}}^{-2} dz \int_{-\sqrt{6-z^2}}^{\sqrt{6-z^2}} \sqrt{6-y^2-z^2} dy =$$

$$= -4 \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2}{3} (-y^2-z)^{3/2} \Big|_{-2}^{-y^2} dy + 4 \int_{-\sqrt{6}}^{-2} dz \cdot \frac{1}{2} \left[ y \sqrt{6-y^2-z^2} + (6-z^2) \arcsin \frac{y}{\sqrt{6-z^2}} \right] \Big|_0^{\sqrt{6-z^2}} =$$

$$= \frac{8}{3} \int_0^{\sqrt{2}} (2-y^2)^{3/2} dy + 2 \int_{-\sqrt{6}}^{-2} (6-z^2) \frac{\pi}{2} dz = \frac{8}{3} \int_0^{\pi/2} 4 \cos^4 t dt + \pi (6z - z^3/3) \Big|_{-\sqrt{6}}^{-2} =$$

$$= 2\pi + \pi(4\sqrt{6} - 28/3) = \pi(4\sqrt{6} - 22/3).$$

Интеграл  $I_2 = \iint_{\sigma} y^2 dx dz$  равен нулю, так как подынтегральная функция четна по  $y$ , а интегралы по частям поверхности, находящихся в полупространствах  $y \geq 0$ , где  $\cos \beta \geq 0$ , и  $y < 0$ , где  $\cos \beta < 0$ , берутся с разными знаками.

$$\text{Интеграл } I_3 = \iint_{\sigma} z^3 dx dy = \iint_{\sigma_2} z^3 dx dy + \iint_{\sigma_1} z^3 dx dy =$$

(в соответствии со знаками  $\cos \gamma$  на  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ )



$$\begin{aligned}
&= \iint_{D_{xy}} (-x^2 - y^2)^3 dx dy - \iint_{D_{xy}} (-\sqrt{6 - x^2 - y^2})^3 dx dy = - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r^7 dr + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} (6 - r^2)^{3/2} r dr = \\
&= -4\pi - \frac{2\pi}{5} (32 - 36\sqrt{6}) = \frac{2\pi}{5} (36\sqrt{6} - 42).
\end{aligned}$$

Поток

$$\Pi = \pi(4\sqrt{6} - 22/3) + \frac{2\pi}{5} (36\sqrt{6} - 42) = \frac{\pi}{5} \left( 92\sqrt{6} - \frac{362}{3} \right).$$

Ответы, как и должно было быть, совпали, однако вычисления с помощью криволинейного интеграла первого рода оказались более простыми.

### 13.3.3. Теорема Остроградского

Пусть  $\sigma$  – кусочно-гладкая замкнутая поверхность, ограничивающая область  $V$ ,  $\vec{a}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} + R(M)\vec{k}$  – гладкое векторное поле. Тогда поток поля  $\vec{a}$  через внешнюю сторону  $\sigma$  равен тройному интегралу от дивергенции поля  $\vec{a}$  по  $V$ :

$$\iint_{\sigma} \vec{a}(M) \cdot \vec{n}(M) d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} a \cdot dv.$$

Приведенную выше формулу обычно называют **формулой Остроградского в векторной форме**. Если записать ее в виде

$$\iint_{\sigma} (P \cdot \cos\alpha + Q \cdot \cos\beta + R \cdot \cos\gamma) d\sigma = \iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz$$

или

$$\iint_{\sigma} P \cdot dy dz + Q \cdot dx dz + R \cdot dx dy = \iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz,$$

то получим **формулу Остроградского в координатной форме**. Естественно, для потока в левой части формулы могут применяться и другие обозначения.

**Доказательство.** Достаточно доказать формулу в случае, когда тело  $V$  – простое, т. е. проекция  $V$  на любую координатную плоскость – простая область  $D$ , и любая прямая, перпендикулярная этой плоскости и проходящая через внутреннюю точку  $V$ , пересекает границу  $V$  в двух точках. Если  $V$  не является простой областью, ее разбивают на простые части; тогда сумма тройных интегралов по этим частям, в силу аддитивности, даст интеграл по всей области  $V$ , а при вычислении поверхностных интегралов интегралы по введенным внутренним перегородкам будут браться дважды с противоположными направлениями нормали и взаимно уничтожатся. Кроме того, достаточно доказать формулу Остроградского для каждого из слагаемых

$$\oiint_{\sigma} P \cdot dydz = \iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz,$$

$$\oiint_{\sigma} Q \cdot dx dz = \iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz,$$

$$\oiint_{\sigma} R \cdot dx dy = \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz,$$

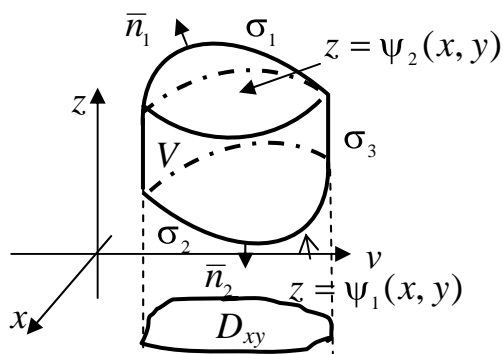


Рис. 13.6

Вычисляем

тогда сумма этих формул даст общую формулу. Докажем, например, что

$$\oiint_{\sigma} R \cdot dx dy = \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz.$$

Простую область  $V$ , как мы знаем, можно описать следующим образом:

$$V = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D_{xy}, \psi_1(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y)\}$$

(рис. 13.6).

$$\begin{aligned}
& \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz : \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \\
& = \iint_{D_{xy}} dx dy R(x, y, z) \Big|_{z=\psi_1(x,y)}^{z=\psi_2(x,y)} = \iint_{D_{xy}} R(x, y, \psi_2(x, y)) dx dy - \\
& - \iint_{D_{xy}} R(x, y, \psi_1(x, y)) dx dy = \iint_{\sigma_1} R(x, y, z) dx dy + \iint_{\sigma_2} R(x, y, z) dx dy .
\end{aligned}$$

Знак последнего слагаемого выбран с учетом того, что на  $\sigma_2$   $\cos \gamma < 0$ . Если в полной границе области  $V$  присутствует цилиндрическая составляющая  $\sigma_3$ , то

$$\iint_{\sigma_3} R(x, y, z) dx dy = 0, \text{ поэтому окончательно}$$

$$\oiint_{\sigma} R dx dy = \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz.$$

Совершенно аналогично доказываются формулы для двух других слагаемых. Формула Остроградского доказана.

Применим формулу Остроградского для решения задачи, рассмотренной в предыдущем разделе: найти поток векторного поля  $\vec{a} = x\vec{i} + y^2\vec{j} + z^3\vec{k}$  через полную внешнюю поверхность тела, ограниченного поверхностями  $z = -x^2 - y^2$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ :

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y^2}{\partial y} + \frac{\partial z^3}{\partial z} = 1 + 2y + 3z^2,$$

$$\Pi = \oiint_{\sigma} \vec{a}(M) \cdot \vec{n}(M) d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} \cdot dv = \iiint_V (1 + 2r \sin \varphi + 3z^2) r dr d\varphi dz =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \left( z + z^3 \right) \Big|_{-\sqrt{6-r^2}}^{-r^2} r dr + 2 \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r^2 dr \int_{-\sqrt{6-r^2}}^{-r^2} dz = \\
&= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \left( \sqrt{6-r^2} - r^2 + (6-r^2)^{3/2} - r^6 \right) r dr = 2\pi \left[ -\frac{1}{3} (6-r^2)^{3/2} - \frac{r^4}{4} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{5} (6-r^2)^{5/2} - \frac{r^8}{8} \right]_0^{\sqrt{2}} = 2\pi \left[ -\frac{1}{3} (8-6\sqrt{6}) - 1 - \frac{1}{5} (32-36\sqrt{6}) - 2 \right] = \frac{\pi}{5} \left( 92\sqrt{6} - \frac{362}{3} \right).
\end{aligned}$$

Естественно, ответ получился тот же, но этот способ вычисления оказался самым простым.

### 13.3.4. Инвариантное определение дивергенции

В разделе 13.2 мы определили дивергенцию как выражение в определенной системе координат:  $\operatorname{div} \bar{a}(M) = \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right)(M)$ . Теорема Остроградского позволяет понять смысл дивергенции поля в точке  $M$  как объективного атрибута векторного поля без использования координатной системы. Пусть  $\sigma$  – замкнутая поверхность, окружающая точку  $M$ ;  $V$  – тело, заключенное внутри  $\sigma$ ,  $\bar{n}$  – вектор единичной внешней нормали к  $\sigma$ . Тогда

$$\Pi = \iint_{\sigma} \bar{a}(M) \cdot \bar{n}(M) d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \bar{a} \cdot dv.$$

По теореме о среднем для тройного интеграла существует точка  $M_1 \in V$  такая, что  $\Pi = \iiint_V \operatorname{div} \bar{a} \cdot dv = \operatorname{div} \bar{a}(M_1) \cdot V$  (рис. 13.7).

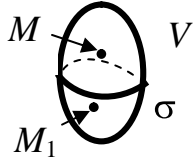


Рис 13.7

Следовательно,  $\operatorname{div} \bar{a}(M_1) = \frac{\Pi}{V}$ . Отношение значения

некоторой физической величины к объему принято называть **средней плотностью** этой величины в объеме; если объем

стягивается к точке  $M$ , предел средней плотности называется **локальным значением плотности** в точке  $M$ . Таким образом, мы можем

трактовать  $\operatorname{div} \bar{a}(M_1) = \frac{\Pi}{V}$  как среднюю плотность потока в объеме  $V$ . Будем

теперь стягивать  $\sigma$  к точке  $M$ , при этом и  $V$  стягивается к точке  $M$ ;  $M_1 \rightarrow M$ , и, вследствие непрерывности  $\operatorname{div} \bar{a}$ ,  $\operatorname{div} \bar{a}(M_1) \rightarrow \operatorname{div} \bar{a}(M)$ . Поэтому

$$\operatorname{div} \bar{a}(M) = \lim_{\sigma \rightarrow M} \frac{\Pi}{V} = \lim_{\sigma \rightarrow M} \frac{\oiint_{\sigma} \bar{a} \cdot \bar{n} d\sigma}{V}$$

будет равна **плотности потока** в точке  $M$ , и так как плотность потока определяется независимо от выбора какой-либо системы координат, то дивергенция векторного поля инвариантна относительно выбора координатной системы.

Используем теперь гидродинамическую интерпретацию поля для выяснения физического смысла дивергенции. Пусть  $\bar{a}(M)$  – стационарное поле скоростей несжимаемой жидкости. В каком случае поток  $\Pi = \oiint_{\sigma} \bar{a}(M) \cdot \bar{n}(M) d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \bar{a} \cdot dv$  через замкнутую поверхность  $\sigma$  может быть отличен от нуля, т. е. в каком случае из  $V$  вытекает больше жидкости, чем втекает (при  $\Pi > 0$ ) или наоборот (при  $\Pi < 0$ )? Ясно, что  $\Pi > 0$  может быть только в том случае, если в  $V$  появляется дополнительная жидкость, т. е. в  $V$  имеются источники поля.  $\Pi < 0$  может быть только в том случае, если в  $V$  исчезает часть жидкости, т. е. в  $V$  имеются стоки поля. Поэтому  $\operatorname{div} \bar{a}(M)$  как плотность потока в точке  $M$  определяет силу источника (при  $\operatorname{div} \bar{a}(M) > 0$ ) или стока (при  $\operatorname{div} \bar{a}(M) < 0$ ) в точке  $M$ .

По аналогии с полем скоростей жидкости считают, что дивергенция определяет силу источников и стоков поля в любом поле  $\vec{a}(M)$ .

### 13.4. Линейный интеграл и циркуляция векторного поля

#### 13.4.1. Определение линейного интеграла

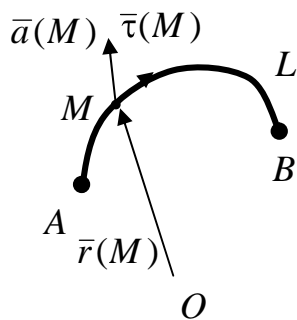


Рис.13.8

Пусть в пространственной области  $V$  определено непрерывное векторное поле  $\vec{a}(M)$ ,  $L$  – гладкая кривая, расположенная в  $V$ . **Линейным интегралом поля  $\vec{a}$  вдоль линии  $L$**  называется криволинейный интеграл по длине дуги от скалярного произведения  $\vec{a}(M)$  на единичный касательный вектор  $\vec{\tau}(M)$  (рис. 13.8):

$$W = \int_L \vec{a}(M) \cdot \vec{\tau}(M) ds.$$

Как и поток, этот интеграл может представляться различным образом. Так, если учесть, что произведение  $\vec{\tau}(M)$  на  $ds$  дает изменение радиуса-вектора точки  $M$ , т. е.  $\vec{\tau} \cdot ds = d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ , то  $W = \int_L \vec{a}(M) d\vec{r}$  и  $W = \int_L Pdx + Qdy + Rdz$ . Следовательно, линейный интеграл может быть выражен и через линейный интеграл по координатам.

**Физический смысл линейного интеграла:** если  $\vec{a}(M)$  – силовое поле, то  $W$  равен работе этого поля при перемещении материальной точки вдоль линии  $L$ .

### 13.4.2. Основные свойства линейного интеграла

#### Линейность

$$\int_L (C_1 \bar{a}_1 + C_2 \bar{a}_2) \bar{\tau} ds = C_1 \int_L \bar{a}_1 \bar{\tau} ds + C_2 \int_L \bar{a}_2 \bar{\tau} ds.$$

#### Аддитивность

$$\int_{L_1 \cup L_2} \bar{a} \cdot \bar{\tau} ds = \int_{L_1} \bar{a} \cdot \bar{\tau} ds + \int_{L_2} \bar{a} \cdot \bar{\tau} ds.$$

Направление на каждой из частей  $L_1$  и  $L_2$  должно быть таким же, как и на всей кривой  $L_1 \cup L_2$ .

**При изменении направления вдоль  $L$  линейный интеграл меняет знак.** Это следует из того, что вектор  $\bar{\tau}(M)$  меняется на  $-\bar{\tau}(M)$ .

**Если  $L$  – векторная линия поля и движение происходит в направлении поля, то  $W > 0$ .** В этом случае вектор  $\bar{\tau}(M)$  коллинеарен  $\bar{a}(M)$ , поэтому  $\bar{a} \cdot \bar{\tau} = \text{пр}_{\bar{\tau}} \bar{a} = |\bar{a}| > 0$ .

### 13.4.3. Вычисление линейного интеграла

Как и любой криволинейный интеграл, линейный интеграл вычисляется сведением к определенному интегралу по параметру на кривой; обычно вычисляют криволинейный интеграл  $W = \int_L Pdx + Qdy + Rdz$ . Если кривая при параметрическом задании имеет вид

$$L: \begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t); \\ z = z(t), \end{cases} \quad t_0 \leq t \leq t_k,$$

где  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  – непрерывно дифференцируемые функции, то

$$W = \int_L P(x, y, z) \cdot dx + Q(x, y, z) \cdot dt + R(x, y, z) \cdot dz =$$

$$= \int_{t_0}^{t_k} [P(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) \cdot y'(t) + R(x(t), y(t), z(t)) \cdot z'(t)] dt.$$

Направление интегрирования определяется направлением движения по кривой.

#### 13.4.4. Циркуляция векторного поля

**Циркуляцией** называется линейный интеграл векторного поля по замкнутой кривой  $C$ :

$$\text{Ц} = \oint_C \vec{a} \cdot d\vec{r}.$$

Обычно говорят, что циркуляция характеризует вращательную способность поля. Имеется в виду следующее. Если векторные линии поля замкнуты, то, как мы видели, циркуляция по ним в направлении поля положительна, при этом в гидродинамической интерпретации частицы жидкости крутятся по этим замкнутым линиям. Пусть теперь линии тока произвольны; вообразим в объеме  $V$  замкнутый контур  $C$ . Если в результате движения жидкости этот контур будет вращаться, то поле обладает вращательной способностью; абсолютная величина циркуляции будет определять угловую скорость вращения (чем больше  $|\text{Ц}|$ , тем выше скорость); знак циркуляции покажет, совпадает ли направление вращения с направлением интегрирования.



### 13.4.5. Теорема Стокса

Пусть в пространственной области  $V$  задано гладкое векторное поле  $\vec{a}(M)$  и

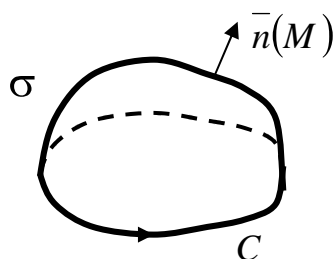


Рис 13.9

$\sigma$  – незамкнутая кусочно-гладкая поверхность, ограниченная контуром  $C$  (рис. 13.9). Единичный вектор нормали  $\vec{n}(M)$  выбирается так, что с его конца направление обхода  $C$  видно совершающимся против часовой стрелки. Тогда циркуляция поля  $\vec{a}$  по контуру  $C$  равна потоку ротора этого поля через поверхность  $\sigma$ :

$$\oint_C \vec{a} \cdot d\vec{r} = \iint_{\sigma} \text{rot } \vec{a} \cdot \vec{n} d\sigma.$$

Приведенную формулу называют **формулой Стокса в векторной форме**. В координатной форме формула Стокса имеет вид

$$\oint_C Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\sigma} \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dx dz + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

или

$$\oint_C Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\sigma} \left[ \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] d\sigma.$$

Примем эту формулу без доказательства.

**13.4.6. Пример непосредственного вычисления циркуляции векторного поля и вычисления по формуле Стокса**

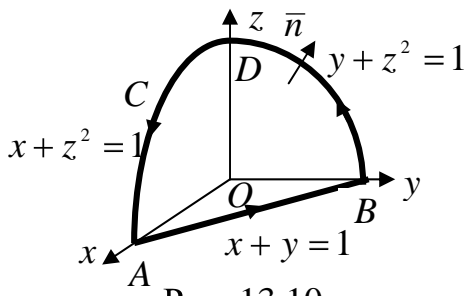


Рис. 13.10

Требуется вычислить циркуляцию поля  $\bar{a} = y\bar{i} - \bar{j} + xz\bar{k}$  по контуру  $C$ , образуемому в результате пересечения поверхности  $x + y + z^2 = 1$  с координатными плоскостями (рис. 13.10).

**Решение. Непосредственное вычисление.**

$$\text{Ц} = \oint_C \bar{a} \cdot d\bar{r} = \oint_C ydx - dy + xzdz = \underbrace{\oint_{AB} \bar{a} \cdot d\bar{r}} + \underbrace{\oint_{BD} \bar{a} \cdot d\bar{r}} + \underbrace{\oint_{DA} \bar{a} \cdot d\bar{r}}.$$

1. На  $AB$   $z = dz = 0$ ,  $y = 1 - x$ ,  $dy = -dx$ , поэтому

$$W_1 = \int_{AB} \bar{a} \cdot d\bar{r} = \int_1^0 [(1-x) - (-1)]dx = \int_1^0 (2-x)dx = -\left. \frac{(2-x)^2}{2} \right|_1^0 = -2 + 1/2 = -3/2.$$

2. На  $BD$   $x = dx = 0$ ,  $y = 1 - z^2$ ,  $dy = -2zdz$ , поэтому

$$W_2 = \int_{BD} \bar{a} \cdot d\bar{r} = -\int_1^0 dy = -y|_1^0 = 1.$$

3. На  $DA$   $y = dy = 0$ ,  $x = 1 - z^2$ ,  $dx = -2zdz$  поэтому

$$W_3 = \int_{DA} \bar{a} \cdot d\bar{r} = \int_1^0 (1 - z^2)zdz = \left( \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4} \right) \Big|_1^0 = -\frac{1}{4}.$$

Итак,  $\text{Ц} = W_1 + W_2 + W_3 = -\frac{3}{2} + 1 - \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}.$

### 13.4.7. Вычисление по формуле Стокса

Находим ротор поля  $\bar{a}$ : 
$$\operatorname{rot} \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -1 & xz \end{vmatrix} = -z\bar{j} - \bar{k}.$$
 Далее требуется

определить, что необходимо взять в качестве поверхности  $\sigma$  (или, как часто говорят, какую поверхность натянуть на контур  $C$ ). В рассматриваемом случае ответ очевиден – единственная поверхность, которая у нас есть, это цилиндрическая поверхность  $x + y + z^2 = 1$ , следы которой в координатных плоскостях и образуют контур  $C$ . Однако возможны случаи, когда удачный выбор



Рис. 13.11

поверхности существенно упрощает вычисления. Пусть, например, контур  $C$  – окружность, образованная пересечением параболоида  $z = x^2 + y^2$  и конуса  $z^2 = x^2 + y^2$ . В качестве  $\sigma$  можно взять и часть параболоида, и часть конуса, опирающиеся на эту окружность, но лучше всего взять часть плоскости  $z = 1$ , ограниченную этой окружностью (рис. 13.11).

Вернемся к задаче. Находим нормаль к  $\sigma$ :  $\bar{n} = \frac{\bar{i} + \bar{j} + 2z\bar{k}}{\sqrt{1+1+4z^2}}$ , знак взят с учетом того, что  $\cos \gamma$  должен быть больше нуля. Теперь

$$\operatorname{rot} \bar{a} \cdot \bar{n} = (-z\bar{j} - \bar{k}) \cdot \frac{\bar{i} + \bar{j} + 2z\bar{k}}{\sqrt{2+4z^2}} = -\frac{3z}{\sqrt{2+4z^2}};$$

спроецируем  $\sigma$  на  $Oxz$ :

$$d\sigma = \frac{dx dz}{|\cos \beta|} = \sqrt{2+4z^2} dx dz; \quad \operatorname{rot} \bar{a} \cdot \bar{n} d\sigma = -\frac{3z}{\sqrt{2+4z^2}} \cdot \sqrt{2+4z^2} dx dz = -3z dx dz.$$

Вычисляем

$$\Pi = \iint_{\delta} \operatorname{rot} \bar{a} \bar{n} d\delta = -3 \iint_{D_{xz}} z dz = -3 \int_0^1 z dz \int_0^{1-z^2} dx = -3 \int_0^1 (1-z^2) z dz = -3 \left( \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4} \right) \Big|_0^1 = -\frac{3}{4}.$$

**Самостоятельно доказать**, что если  $\bar{a}(M)$  – плоское поле и  $\sigma$  лежит в плоскости  $Oxy$ , то формула Стокса сводится к формуле Грина.

### 13.4.8. Инвариантное определение ротора

Пусть  $M \in V$ . Возьмем малую плоскую площадку  $\sigma$ , ограниченную контуром  $C$  (рис. 13.12). По теореме Стокса циркуляция по  $C$

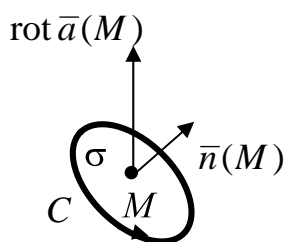


Рис. 13.12

$$\Pi = \oint_C \bar{a} \cdot d\bar{r} = \iint_{\sigma} \operatorname{rot} \bar{a} \cdot \bar{n} d\sigma.$$

Считая, что  $\operatorname{rot} \bar{a}$  мало меняется на  $\sigma$  и что поверхностный интеграл равен

$$\operatorname{rot} \bar{a}(M) \cdot \bar{n}(M) \sigma = |\operatorname{rot} \bar{a}(M)| \cos \varphi \cdot \sigma,$$

получим

$$\Pi = |\operatorname{rot} \bar{a}(M)| \cos \varphi \cdot \sigma.$$

Будем теперь крутить площадку вокруг точки  $M$ , при этом циркуляция меняется вместе с  $\cos \varphi$ . Максимальное значение циркуляция получит при  $\varphi = 0$ , т. е. когда направления  $\operatorname{rot} \bar{a}(M)$  и  $\bar{n}(M)$  совпадут. Следовательно,  $\operatorname{rot} \bar{a}(M)$  указывает направление, вокруг которого циркуляция максимальна и равна

$$\Pi_{\max} = |\operatorname{rot} \bar{a}(M)| \cdot \sigma. \text{ Модуль ротора определяется отношением } |\operatorname{rot} \bar{a}(M)| = \frac{\Pi_{\max}}{\sigma}.$$

## 14. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

### 14.1. Потенциальное векторное поле

#### 14.1.1. Определение потенциального поля

Векторное поле  $\bar{a}(M)$  называется потенциальным в области  $V$ , если существует такое скалярное поле  $\varphi(M)$ , что  $\bar{a}(M) = \text{grad } \varphi(M)$  для  $\forall M \in V$ . Поле  $\varphi(M)$  называется **потенциалом поля**  $\bar{a}(M)$ .

#### 14.1.2. Свойства потенциального поля

1. Потенциал определен с точностью до произвольной постоянной ( $\text{grad } \varphi = \text{grad}(\varphi + C)$ ).

2. Разность потенциалов в двух точках  $M_1 \in V$ ,  $M_2 \in V$  определена однозначно.

3. Если поле  $\bar{a}(M)$  потенциально, то линейный интеграл этого поля по любой кривой  $\overset{\cup}{AB}$ , целиком лежащей в  $V$ , определяется только начальной и конечной точками этой кривой и не зависит от формы кривой:

$$W = \int_{\overset{\cup}{AB}} \bar{a} d\bar{r} = \int_{\overset{\cup}{AB}} P dx + Q dy + R dz = \int_{\overset{\cup}{AB}} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = \int_{\overset{\cup}{AB}} d\varphi = \varphi(P) \Big|_A^B = \varphi(B) - \varphi(A)$$

Эта формула, как и в плоском случае, является обобщением формулы Ньютона–Лейбница для потенциального поля.

4. Циркуляция потенциального в области  $V$  поля по любому контуру, лежащему в  $V$ , равна нулю.

5. Векторная линия потенциального поля в каждой точке  $M$  ортогональна эквипотенциальной поверхности (т. е. поверхности уровня потенциала), проходящей через точку  $M$ .

6. Ротор потенциального векторного поля равен нулю:

$$\operatorname{rotgrad}\varphi = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y} \right) \bar{i} + \left( \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z} \right) \bar{j} + \left( \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} \right) \bar{k} = 0.$$

Введем определение безвихревого поля: поле  $\bar{a}(M)$ , ротор которого в каждой точке равен нулю, называется **безвихревым**.

Мы доказали, что потенциальное поле необходимо безвихрево. Далее займемся достаточными условиями потенциальности.

### 14.1.3. Достаточные условия потенциальности

*Теорема.* Если область  $V$  и поле  $\bar{a}(M)$  удовлетворяют следующим условиям:

1.  $V$  – односвязная область;
2. Поле  $\bar{a}(M)$  – безвихрево (т. е.  $\operatorname{rot}\bar{a}(M) = \bar{0}$ ), то  $\bar{a}(M)$  – потенциальное в  $V$  поле.

**Доказательство.** Напомним определение односвязной области: область (на плоскости, в пространстве) называется **односвязной**, если любой замкнутый

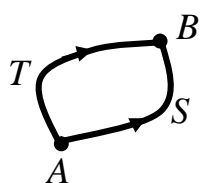


Рис .14.1

контур, лежащий в этой области, можно непрерывной деформацией стянуть в точку, не выходя при этом за пределы области (рис. 14.1). При доказательстве теоремы придется строить поверхности, натянутые на контуры; определение односвязности

как раз гарантирует, что такие поверхности существуют, и ими могут служить поверхности, образующиеся при деформации контура в точку.

1. Докажем, что если выполняются условия теоремы, то линейный интеграл поля  $\bar{a}(M)$  по любой кривой  $\overset{\cup}{AB}$ , целиком лежащей в  $V$ , определяется только начальной и конечной точками этой кривой и не зависит от ее формы. Пусть  $ASB$  и  $ATB$  – два пути, соединяющие точки  $A$  и  $B$ . Вместе они образуют замкнутый контур  $ASBTA$ . Пусть  $\sigma$  – кусочно-гладкая поверхность, натянутая на этот контур. Тогда по формуле Стокса  $\oint_{ASBTA} \bar{a} \cdot d\bar{r} = \iint_{\sigma} \text{rot } \bar{a} \cdot \bar{n} d\sigma = 0$ , так как  $\text{rot } \bar{a}(M) = 0$ . Но

$$\oint_{ASBTA} \bar{a} \cdot d\bar{r} = \int_{ASB} \bar{a} \cdot d\bar{r} + \int_{BTA} \bar{a} \cdot d\bar{r} = \int_{ASB} \bar{a} \cdot d\bar{r} - \int_{ATB} \bar{a} \cdot d\bar{r} = 0 \Rightarrow \int_{ASB} \bar{a} \cdot d\bar{r} = \int_{ATB} \bar{a} \cdot d\bar{r}.$$

2. Докажем, что если мы фиксируем точку  $M_0 \in V$  и возьмем  $\varphi(M) = \int_{M_0M} \bar{a} d\bar{r}$ , то  $\bar{a}(M) = \text{grad } \varphi(M)$ , т. е. определенная таким образом функция  $\varphi(M)$  действительно является потенциалом поля  $\bar{a}(M)$ . Именно требуется доказать, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = P(x, y, z), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q(x, y, z), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = R(x, y, z).$$

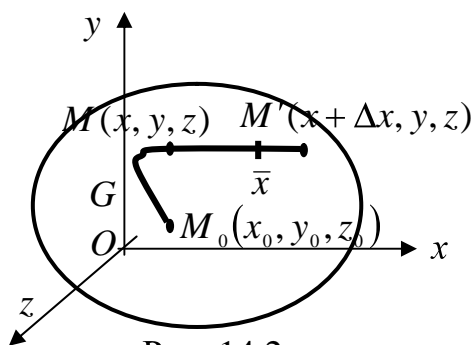


Рис. 14.2

Действительно, пусть  $M(x, y, z) \in G$ ,

$M'(x + \Delta x, y, z) \in G$  (рис. 14.2) Тогда

$$\varphi(M) = \int_{M_0M} Pdx + Qdy + Rdz,$$

$$\varphi(M') = \int_{M_0M'} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{M_0M} Pdx + Qdy + Rdz + \int_{MM'} Pdx + Qdy + Rdz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(x + \Delta x, y, z) = \varphi(x, y, z) + \int_x^{x+\Delta x} P(x, y, z) dx \quad (\text{на } MM' \quad y = \text{const}, z = \text{const}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta_x \varphi(x, y, z) = \varphi(x + \Delta x, y, z) - \varphi(x, y, z) = \int_x^{x+\Delta x} P(x, y, z) dx = P(\bar{x}, y, z) \cdot \Delta x \Rightarrow$$

$$(\text{по теореме о среднем}) \Rightarrow \frac{\Delta_x \varphi}{\Delta x} = P(\bar{x}, y, z).$$

Точка  $\bar{x}$  удовлетворяет условиям  $x < \bar{x} < x + \Delta x$ . Устремим  $\Delta x \rightarrow 0$ , тогда  $\bar{x} \rightarrow x$  и  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x \varphi}{\Delta x} = \lim_{\bar{x} \rightarrow x} P(\bar{x}, y, z) = P(x, y, z)$ .

Аналогично доказывается, что  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q(x, y, z)$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = R(x, y, z)$ .

#### 14.1.4. Нахождение потенциала

В предыдущем разделе мы доказали, что если выполняются условия потенциальности поля  $\vec{a}(M)$ , то  $\varphi(M) = \int_{M_0, M} \vec{a} d\vec{r}$ , где  $M_0 \in V$  - фиксированная

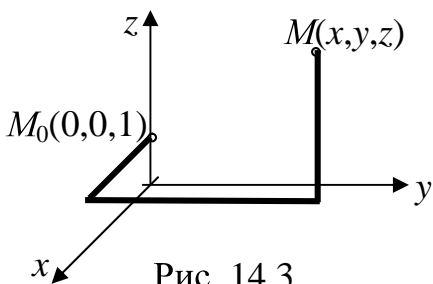


Рис. 14.3

точка. Обычно если в точке  $O(0,0,0)$  поле не имеет особенностей, то в качестве точки  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  берется именно эта точка; если в этой точке поле не определено, берется другая точка. Интегрирование ведут по пути, состоящим из отрезков, параллельных координатным осям (рис. 14.3). В результате получим

$$\varphi(M) = \int_{x_0}^x P(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y, z_0) dy + \int_{z_0}^z R(x, y, z) dz.$$



**Пример 14.1.**

Доказать,

что

поле

$$\bar{a}(x, y, z) = \frac{y \cos(xy)}{z} \bar{i} + \frac{x \cos(xy)}{z} \bar{j} - \frac{\sin(xy)}{z^2} \bar{k}$$

потенциально, и найти потенциал этого поля.

**Решение.** Мы будем доказывать, что это поле потенциально в любой односвязной области  $V$ , не содержащей точку  $O(0,0,0)$ . Условие безвихревости поля  $\bar{a}$

$$\operatorname{rot} \bar{a}(M) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \bar{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \bar{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \bar{k} = 0$$

в координатной форме сводится к равенствам

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

В нашем поле  $P(x, y, z) = \frac{y \cos(xy)}{z}$ ,  $Q(x, y, z) = \frac{x \cos(xy)}{z}$ ,  $R(x, y, z) = -\frac{\sin(xy)}{z^2}$ .

Находим производные:

$$\frac{\partial R}{\partial y} = -\frac{x \cos(xy)}{z^2}; \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = -\frac{x \cos(xy)}{z^2} = \frac{\partial R}{\partial y}; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{y \cos(xy)}{z^2},$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = -\frac{y \cos(xy)}{z^2} = \frac{\partial P}{\partial z}; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\cos(xy) - xy \sin(xy)}{z}; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\cos(xy) - xy \sin(xy)}{z} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Потенциальность поля доказана.

Ищем потенциал. Интеграл  $\varphi(M) = \int_{M_0 M} \bar{a} d\bar{r}$  вычисляем по изображенному на рисунке пути, отправляясь от точки  $M_0(0,0,1)$ .

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= \int_0^x \frac{0 \cdot \cos(x \cdot 0)}{1} dx + \int_0^y \frac{x \cdot \cos(xy)}{1} dy - \int_1^z \frac{\sin(xy)}{z^2} dz = \\ &= \sin(xy) \Big|_0^y + \frac{\sin(xy)}{z} \Big|_1^z = \sin(xy) + \left[ \frac{\sin(xy)}{z} - \sin(xy) \right] = \frac{\sin(xy)}{z}. \end{aligned}$$

Если бы мы взяли в качестве точки  $M_0$  другую точку  $M_1$ , то получили бы выражение, отличающееся на некоторую постоянную (более точно, на

$$C = \int_{M_0 M_1} \bar{a} d\bar{r} \text{) поэтому } \varphi(x, y, z) = \frac{\sin(xy)}{z} + C.$$

## 14.2. Соленоидальное векторное поле

### 14.2.1. Определение соленоидального поля

Векторное поле  $\bar{a}(M)$  называется соленоидальным в области  $V$ , если во всех точках этой области  $\operatorname{div} \bar{a}(M) = 0$ .

Согласно этому определению, поле не может иметь в области  $V$  источников и стоков; таким свойством обладает магнитное поле соленоида, что и объясняет происхождение термина.

Соленоидально поле ротора любого достаточно гладкого поля:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{a}(M) = \nabla \cdot [\nabla \times \bar{a}] = 0.$$

**Самостоятельно доказать это свойство в координатной форме**

### 14.2.2. Свойства соленоидального поля

1. Поток соленоидального векторного поля через поверхность  $\sigma$ , ограничивающую область  $V_\sigma \in V$ , равен нулю. Это прямое следствие формулы Остроградского.

2. Поток соленоидального векторного поля через поверхность  $\sigma$ , ограничивающую область  $V_\sigma \in V$ , равен нулю. Это прямое следствие формулы Остроградского.

3. Верно и обратное утверждение: равенство нулю потока через любую замкнутую поверхность  $\sigma$  достаточно для соленоидальности поля  $\vec{a}(M)$ . Действительно, в разделе “Инвариантное определение дивергенции” было доказано, что

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \lim_{\sigma \rightarrow M} \frac{\Pi}{V} = \lim_{\sigma \rightarrow M} \frac{\oiint_{\sigma} \vec{a} \vec{n} d\sigma}{V},$$

и так как  $\oiint_{\sigma} \vec{a} \vec{n} d\sigma = 0$ , то  $\operatorname{div} \vec{a}(M) = 0$ .

4. Пусть в  $V$  имеется изолированный источник (или сток) поля. Если поле  $\vec{a}(M)$  соленоидально, то его поток через любую замкнутую поверхность  $\sigma$ , содержащую этот источник, имеет одно и то же значение.

Фраза “в  $V$  имеется изолированный источник (или сток) поля” означает, что область  $V$ , в которой поле соленоидально, неодносвязна; из  $V$  выколота точка, в которой находится источник. Так, поле электрической напряженности, создаваемое зарядом  $q$ ,  $\vec{E} = \frac{q}{r^3} \vec{r}$ , соленоидально всюду, кроме точки  $r = 0$ , в которой расположен источник.

5. Поток соленоидального векторного поля через любое поперечное сечение векторной трубки один и тот же. Это следует из того, что поток через боковую поверхность трубки равен нулю.

### 14.3. Гармонические поля

#### 14.3.1. Оператор Лапласа

Пусть функция  $\varphi(x, y, z)$  имеет непрерывные вторые частные производные.

Вычислим  $\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$ . Оператор  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ , с помощью

которого по функции  $\varphi(x, y, z)$  получена функция  $\Delta\varphi$ , называется **оператором Лапласа** или **лапласианом**. Формально его можно получить возведением в скалярный квадрат оператора Гамильтона набла:

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta.$$

Можно дать другое представление оператора Лапласа:

$$\Delta\varphi = \nabla^2\varphi = \nabla \cdot (\nabla\varphi) = \nabla \cdot \text{grad } \varphi = \text{div grad } \varphi,$$

и это будет уже инвариантным определением оператора.

#### 14.3.2. Гармонические поля

Скалярное поле  $\varphi(M)$  называется **гармоническим**, если оно удовлетворяет уравнению Лапласа  $\Delta\varphi = 0$  или  $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0$ . Векторное поле  $\bar{a}(M)$  называется гармоническим, если оно является градиентом некоторой гармонической функции, т. е.  $\bar{a}(M) = \text{grad } \varphi(M)$ , где  $\Delta\varphi = 0$ .

Из этого определения следует, что гармоническое векторное поле одновременно потенциально и соленоидально, так как

$\operatorname{div} \bar{a}(M) = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi(M) = \Delta \varphi = 0$ . Верно и обратное: если  $\bar{a}(M)$  одновременно и потенциально, и соленоидально, то оно является гармоническим. Действительно, из потенциальности  $\Rightarrow \exists \varphi(M) : \bar{a}(M) = \operatorname{grad} \varphi(M)$ , из соленоидальности следует, что  $\Rightarrow \operatorname{div} \bar{a}(M) = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi(M) = 0 \Leftrightarrow \Delta \varphi = 0$ , т. е.  $\varphi(M)$  – гармонический потенциал. Каждая координата гармонического векторного поля является гармонической функцией.