

УДК 517.4

**ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МЕЛЛИНА КАК ЧАСТНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ  
ОБЩЕЙ СХЕМЫ ПОСТРОЕНИЯ  
ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ**

*Канд. физ.-мат. наук ГАХОВИЧ А. С.*

*Белорусский национальный технический университет*

В [1] предложена общая формальная схема построения интегральных преобразований, а в [2] получены преобразования Фурье, Лапласа и Лапласа – Карсона как простейшие реализации указанной схемы. Данная работа посвящена применению общей схемы для построения преобразования Меллина.

Общая идея указанной схемы заключается в следующем. Пусть в множестве функций действительного переменного  $\{f(t)\}$  с произвольной областью определения  $(a, b)$  задан некоторый линейный оператор  $T$ . Ставится задача нахождения на множестве функций  $\{f(t)\}$  линейного обратимого отображения  $L: f(t) \rightarrow F(u)$  с множеством значений, совпадающим с множеством функций  $\{F(u)\}$ , определенных в общем случае на линии  $l$  плоскости комплексного переменного, и удовлетворяющих соотношению

$$L[Tf(t)] = k(u)F(u),$$

где  $k(u)$  – некоторая фиксированная функция. Другими словами, отображение  $L$  находим из условия, чтобы применение оператора  $T$  к «оригиналу»  $f(t)$  было равносильно обычному алгебраическому умножению «изображения»  $F(u)$  на фиксированную функцию  $k(u)$ .

Как показано в [1], в случае оператора  $T$  дифференциального типа искомое отображение и ему обратное представляют собой взаимно обратную пару интегральных преобразований:

$$L[f(t)] \equiv \int_a^b f(t)\psi(u; t)dt = F(u); \quad (1)$$

$$L^{-1}[F(u)] \equiv \int_l F(u)\varphi(u; t)du = f(t) \quad (2)$$

с ядрами  $\varphi(u; t)$  и  $\psi(u; t)$ , являющимися собственными функциями операторов  $T$  и ему сопряженного  $T^*$ , соответствующими собственному значению  $k(u)$ . Собственные функции операторов определяются с точностью до множителей, зависящих в данном случае от  $u$ :

$$\varphi(u; t) = c_1(u)\varphi_u(t); \quad \psi(u; t) = c_2(u)\psi_u(t),$$

где  $\varphi_u(t)$  и  $\psi_u(t)$  – фиксированные собственные функции. Выбирая конкретный вид одного из сомножителей, например  $c_1(u)$ , второй сомножитель  $c_2(u)$  находим непосредственным подсчетом из формул (1), (2) при некоторых  $f(t)$  и  $F(u)$ , удобных для вычислений. При выборе различных  $c_1(u)$  получаем эквивалентные отображения  $L$ , являющиеся различными модификациями одного и того же интегрального преобразования.

Функция  $k(u)$  из соображений удобства практических приложений, простоты и симметрии взаимно обратных преобразований (1) и (2) выбирается, как правило, равной  $\pm u$  либо  $\pm u^2$ .

Для вывода аналогичных выражений интегральных преобразований (1), (2) достаточно сопряженности операторов  $T$  и  $T^*$  на множестве соответствующих собственных функций:

$$(T\varphi_u(t); \psi_u(t)) = (\varphi_u(t); T^*\psi_u(t)).$$

Переходим к конкретной реализации описанной схемы. Рассмотрим множество функций  $\{f(t)\}$ , определенных на  $(0; +\infty)$  и удовлетворяющих условиям, которые будем налагать по мере необходимости. Пусть в качестве  $T$  на указанном множестве функций задан оператор  $T = t \frac{d}{dt}$ . Сопряженный оператор, очевидно,

$$\text{имеет вид } T^* = -\frac{d}{dt}t.$$

Собственные функции операторов  $T$  и  $T^*$ , соответствующие собственному числу  $k(u)$  при фиксированном  $u$ , имеют следующие аналитические выражения:

$$\varphi_u(t) = t^{k(u)}; \quad \psi_u(t) = t^{-k(u)-1}.$$

Тогда искомое интегральное преобразование согласно (1) запишется в виде

$$F(u) = c_2(u) \int_0^{+\infty} f(t)t^{-k(u)-1} dt.$$

Положив для простоты  $k(u) = -u$ , будем иметь:

$$F(u) = c_2(u) \int_0^{+\infty} f(t)t^{u-1} dt \quad (3)$$

и

$$\varphi_u(t) = t^{-u}.$$

Если комплексную переменную  $u$  представить в виде  $u = \delta + i\tau$  и для рассматриваемых функций  $f(t)$  потребовать выполнения условия  $f(t)t^{\delta_0-1} \in L_1(0; +\infty)$  при некотором  $\delta_0$ , то нетрудно заметить, что «изображение»  $F(u)$ , вычисляемое по (3), будет определено в плоскости комплексного переменного  $u$  на вертикальной прямой  $u = \delta_0 + i\tau$ ,  $\tau \in (-\infty; +\infty)$ . Тогда обратное преобразование  $L^{-1}$  согласно (2) принимает вид

$$f(t) = \int_{\delta_0-i\infty}^{\delta_0+i\infty} F(u)c_1(u)t^{-u} du,$$

Таким образом, имеем следующую взаимно обратную пару интегральных преобразований:

$$F(u) = c_2(u) \int_0^{+\infty} f(t)t^{u-1} dt; \quad (4)$$

$$f(t) = \int_{\delta_0-i\infty}^{\delta_0+i\infty} F(u)c_1(u)t^{-u} du, \quad (5)$$

в которых остается уточнить множители  $c_1(u)$  и  $c_2(u)$ .

Мы вправе произвольно распорядиться одним из множителей. Положим, например,  $c_1(u) = \frac{1}{2\pi i}$  и выберем в качестве изображения  $F(u)$  любую функцию, для которой интеграл, стоящий в правой части формулы (5), вычисляется достаточно просто. Пусть  $F(u)$  совпадает с гамма-функцией Эйлера, т. е.  $F(u) = \Gamma(u)$ . Тогда при  $\text{Re} u = \delta_0 > 0$

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta_0-i\infty}^{\delta_0+i\infty} \Gamma(u)t^{-u} du = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \underset{(-n)}{\text{Res}}(\Gamma(u)t^{-u}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^n = e^{-t}, \end{aligned}$$

т. е.  $f(t) = e^{-t}$ , так как  $\Gamma(u)$  имеет простые полюсы в точках  $u = -n$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , с вычетами, соответственно равными  $\frac{(-1)^n}{n!}$ .

Из (4) находим искомое значение  $c_2(u)$

$$c_2(u) = \frac{\Gamma(u)}{\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{u-1} dt} = 1.$$

Итак, окончательно получаем пару взаимнообратных интегральных преобразований Меллина:

$$\begin{aligned} F(u) &= \int_0^{+\infty} f(t)t^{u-1} dt; \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta_0-i\infty}^{\delta_0+i\infty} F(u)t^{-u} du \end{aligned}$$

для функций  $f(t)$ , удовлетворяющих условию:  $f(t)t^{\delta_0-1} \in L_1(0; +\infty)$ .

### ВЫВОД

Полученные результаты могут быть использованы для построения различных интегральных преобразований, широко применяемых во многих областях науки и техники при решении дифференциальных и интегральных уравнений, описывающих тот или иной реальный физический процесс.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Гахович, А. С. К вопросу об интегральных преобразованиях / А. С. Гахович // Вестн АН БССР, сер. физ.-мат. наук. – 1987. – № 6.
2. Гахович, А. С. Простейшая реализация общей схемы построения интегральных преобразований / А. С. Гахович. – ВИНТИ. – № 6245. – В-88. – Деп. 03.09.1988.

Поступила 21.11.2008