Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Высшая математика № 1»

Математика для первокурсника. Повторение курса средней школы

Пособие для подготовки первокурсников к изучению математики в вузе

Электронный учебный материал

Минск
БНТУ
2015

УДК 51 (075.8)
ББК 22.1я7

Авторы:
В.И. Юринок, О.Л. Зубко, И.Н. Катковская

Рецензент:

А.Н. Рудый, кандидат физ.-мат. наук, доцент
кафедры «Высшая математика № 2»

Учебное пособие одержит введение, 5 разделов и список литературы, в которых в краткой и сжатой форме рассмотрены наиболее важные вопросы курса математики средней школы, необходимые студентам младших курсов для освоения математики по программе технического вуза, содержатся дидактические материалы, многочисленные примеры, справочный материал. Учебное пособие будет несомненно полезным для самостоятельной работы студентов 1-х и 2-х курсов.

Белорусский национальный технический университет
пр-т Независимости, 65, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.(017)292-77-52 факс (017)292-91-37
E-mail: emd@bntu.by
http://www.bntu.by/ru/struktura/facult/psf/chairs/im/
Регистрационный №

ОГЛАВЛЕНИЕ

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Учеба в вузе – процесс непростой. С первых же сентябрьских дней на студента обрушивается громадный объем информации, которую необходимо усвоить. Нужный материал содержится не только в лекциях (запомнить его – это только малая часть задачи), но и в учебниках, книгах, статьях. Порой возникает необходимость привлекать информационные ресурсы Интернет.

Система вузовского обучения подразумевает значительно большую самостоятельность студентов в планировании и организации своей деятельности по сравнению с обучением в школе. Вчерашнему школьнику сделать это бывает весьма непросто: если в школе ежедневный контроль со стороны учителя заставлял постоянно и систематически готовиться к занятиям, то в вузе вопрос об уровне знаний вплотную встает перед студентом только в период сессии. Такая ситуация оборачивается для некоторых соблазном весь семестр посвятить свободному времяпрепровождению («когда будет нужно – выучу!»), а когда приходит пора экзаменов, материала, подлежащего усвоению, оказывается так много, что никакая память не способна с ним справиться за оставшийся промежуток времени. Поэтому студенту-первокурснику следует знать о некоторых важных правилах организации своей деятельности, подсказанных наукой психологией. Данное пособие содержит *советы первокурснику*: как учить *Математику – Царицу Наук*. Материл пособия разбит на 6 занятий. В начале каждого занятия кратко изложен основной систематизированный теоретический материал за курс средней школы, предложены алгоритмы (методы) решения основных уравнений и неравенств, содержатся аудиторные и домашние задания с ответами. Пособие поможет студентам-первокурсникам быстрее адаптироваться в новых условиях учебы в вузе и, при необходимости, в короткий срок ликвидировать пробелы в знаниях за курс средней школы.

1. СТУДЕНТ БНТУ – ЭТО ЗВУЧИТ ГОРДО

Вступительные экзамены позади, и теперь Вы можете гордо заявить: ***«Я – студент БНТУ!»***

Казалось бы, можно вздохнуть с облегчением – страхи и волнения позади, а впереди – новая и интересная студенческая жизнь. Но расслабляться еще рано: именно первый курс профессионального обучения в вузе является наиболее трудным.

Будьте готовы к тому, что обучение в профессиональном учебном заведении существенно отличается от обучения в школе: учебная нагрузка больше и предметы сложнее; от студента требуется максимум самостоятельности и ответственности в изучении дисциплин; для успешного обучения необходимы такие качества как организованность и развитый самоконтроль.

Ваша успеваемость, а, следовательно, и уровень Вашей подготовки как будущего специалиста во многом зависит от первых месяцев пребывания в университете. Сумели адаптироваться – успеваете, не сумели – отстаете.

Наиболее общими причинами отставания в успеваемости многих студентов является неорганизованность, неумение распределять рабочее время для самостоятельной подготовки, недостаточная подготовленность в средней школе, неумение быстро приспосабливаться к новым формам и методам вузовского обучения, увлечение другими видами деятельности, отсутствие регулярного контроля над ходом учебы.

2. ПЛАН ДЕЙСТВИЙ СТУДЕНТА НА ПЕРВОЕ ВРЕМЯ

Первокурснику предстоит:

1. Осознать себя в новом качестве ***«Я – студент»***.

Начинается все с того, что молодой человек ощущает, что, поступив, сделал что-то очень важное, поднялся на новую жизненную ступень. Но, попав в студенческое сообщество, понимает, что он ничем не выделяется – все одногруппники в одинаковом положении. Весь авторитет, заработанный в школе, мало кого интересует и предстоит заявлять о себе заново, прежде чем тебя начнут серьезно воспринимать. Но в этой ситуации есть и положительный момент: для учеников, чьи успехи в школе были не блестящи, это прекрасная возможность начать все с чистого листа и проявить себя с лучшей стороны.

2. Влиться в студенческий коллектив.

Со временем каждый займет свою нишу в коллективе, но пока никто никого не знает.

3. Найти общий язык с преподавателями;

Их много и все с разными требованиями. Но в одном точка зрения преподавателей совпадает: успешный студент – самостоятельный и ответственный. Если преподаватель предоставляет возможность получения «автомата», то обязательно приложите максимум усилий, чтобы воспользоваться данным «благом». «Автомат», полученный Вами, поможет в сессии подготовится более основательно к тем предметам, в которых Вы не так хорошо разобрались в течение семестра.

4. Разобраться в новой ситуации обучения и привыкнуть к ней.

План действий на первое время:

До начала учебы:

Узнайте номер группы, в которую Вы зачислены; заведите блокнот для важной информации. Перепишите в него расписание занятий. Принесите с собой ручки разных цветов для удобства ведения конспекта и несколько чистых толстых тетрадей (в зависимости от количества учебных дисциплин в этот день); придите немного заранее, чтобы не спеша определиться с расположением нужных аудиторий в учебных корпусах. Обычно номера кабинетов трехзначные: первая цифра означает этаж, а последующие – порядковый номер аудитории.

Типичные ошибки студентов-первокурсников

1. *Прогулы*

Кажется, пропустишь одну-две-три пары и ничего не потеряешь. Но это опасное ложное ощущение! В один «прекрасный» момент увидишь, что упустил много и догнать остальных будет очень трудно. Помните – успех складывается из ежедневных усилий!

2. *Отчаяние*

Не пасуйте перед трудностями! Как бы трудно не приходилось, не опускайте руки! Не сдал что-то с первого раза – подготовься к пересдаче. А кто сказал, что будет легко?! Тяжело в учении, легко в бою!

И помните, что **первый год обучения – самый важный**, так как именно в это время происходит формирование основных учебных навыков, закладка базовых знаний. От этого зависит успешность обучения в профессиональном учебном заведении вообще.

Таким образом, на первом курсе нужно как можно больше сил и времени отдавать учебе, чтобы в последующем иметь возможность спокойно, безболезненно сочетать учебу с личной жизнью, досугами и другими сферами жизни. **Ваш успех в ваших руках!**

3. МАТЕМАТИКА В ТЕХНИЧЕСКОМ ВУЗЕ. КАК ЕЕ ИЗУЧИТЬ

Одной из ведущих дисциплин естественнонаучного цикла, которую Вам предстоит изучать на первом и втором курсах, является математика. Она создает базу для специальной подготовки, дает возможность творчески решать проблемы современного производства. Кроме того, вооружение навыками самостоятельной творческой работы и самообразования происходит особенно активно в процессе изучения математики. Объясняется это тем, что среди изучаемых Вами на первом курсе дисциплин математика занимает значительную часть времени, причем для овладения ею необходим большой и целеустремленный труд, требуются умственные и волевые усилия, концентрация внимания, активность и систематичность, развитое воображение. Вот почему при обучении математике последовательно и планомерно формируются у студентов рациональные приемы учебной деятельности, умения и навыки умственного труда: планирование своей работы, поиск рациональных путей ее выполнения, критическая оценка результатов.

Основными формами обучения математике в университетах являются лекции, практические занятия, самостоятельная работа над учебным материалом, которая состоит из следующих этапов:

- Изучение теоретического материала по учебникам, учебным пособиям, конспектам лекций и т.д.;
- Решение задач и упражнений на практических занятиях;
- Выполнение домашних заданий, типовых расчетов.

Завершающим этапом изучения отдельных частей курса математики является сдача зачетов и экзаменов в соответствии с учебным планом.

3.1. ЛЕКЦИИ И ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ

1. Содержание лекции запишите. Запись поможет Вам осознать план и логику изложения, осмыслить материал и сосредоточить внимание на основных вопросах. Наличие конспекта лекции позволит Вам лучше разобраться в новом материале, додумать и расширить его с помощью учебной литературы.
2. Записывайте лишь самое главное, не стремитесь зафиксировать всё слово в слово. Практически получается так, что Вы, не успев записывать дословно, делаете пропуски, у Вас появляются пустые места и, таким образом, упускается самое главное. Такая запись лишена логического смысла, а потому негодна для использования.
3. Не стремитесь записывать содержание лекции с сокращениями, часто Вы сокращаете настолько кратко, что упускаете при этом основные положения. Не ограничивайтесь записью заголовка, плана и рекомендуемой литературы. Такие записи не отображают основного содержания лекции, и пользоваться ими невозможно.
4. Мысль преподавателя излагайте своими словами. Такая форма записи позволит Вам не только понять услышанное, но и усвоить его.
5. На практических занятиях старайтесь работать самостоятельно, только сверяясь с решением задач на доске. Избегайте механического списывания решения задач с доски или у соседа.
6. Консультируйтесь с преподавателем по всем возникающим у Вас вопросам в ходе практических занятий.
7. Выполняйте все домашние задания, даже если преподаватель не проверяет их в явном виде. Конечно, можно списать домашнее задание у друга, но тогда при списывании обязательно разберитесь в представленных решениях.

При конспектировании лекций соблюдайте ряд правил:

- Учитесь следить за мыслью преподавателя во время изложения нового материала, разделяйте своё внимание между отдельными положениями лекции.
- Обращайте внимание на тон изложения, интонацию (главные предложения выделяются и произносятся громче).
- Записи по каждому предмету ведите в отдельной тетради, не пишите на разных листках, которые, как правило, теряются.
- Записи в конспекте должны быть сделаны чисто, аккуратно и расположены в определенном порядке. Хорошее внешнее оформление конспекта по изучаемому материалу приучает Вас к необходимому в работе порядку и позволит Вам избежать многочисленных ошибок, которые происходят из-за небрежных, беспорядочных записей.
- Выводы, полученные в виде формул, рекомендуется в конспекте подчеркивать или обводить рамкой (желательно ручкой другого цвета), чтобы при прочитывании конспекта они выделялись и лучше запоминались.
- Полезно составить для себя отдельный «лист-шпаргалку», который будет содержать важные и наиболее употребляемые формулы курса.

3.2. РАБОТА С УЧЕБНИКОМ

1. При изучении материала по учебнику полезно вести конспект, в который рекомендуется выписывать определения, формулировки теорем, формулы, уравнения и т.д. На полях следует отмечать вопросы, выделенные Вами для получения письменной или устной консультации преподавателя.
2. Изучая материал по учебнику, к следующему вопросу следует переходить только после правильного понимания предыдущего, производя самостоятельно на бумаге все вычисления (в том числе и те, которые ради краткости опущены в учебнике) и выполняя имеющиеся в учебнике чертежи.
3. Особое внимание следует обращать на определение основных понятий. Вы должны подробно разбирать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно.
4. Необходимо помнить, что каждая теорема состоит из предположения и утверждения. Все предположения должны обязательно использоваться в доказательстве. Нужно точно представлять то, в каком месте доказательства использовано каждое предположение теоремы. Полезно составлять схему доказательств теорем.

3.3. ИНТЕРНЕТ – ТВОЙ ПОМОЩНИК

С развитием и распространением Интернета у людей появляется все больше возможностей, в том числе и для учебы. С помощью компьютера и Сети можно легко найти практически любой научный материал, книгу, статью или дискуссию на нужную тему. Многие преподаватели склонны считать Интернет злом, а не помощником в учебе. Итак, чем же является Интернет для современных студентов: игрушка и развлечение, место, где можно списать реферат или что-то посерьезнее? На наш взгляд, для Вас студентов-естественников – это достаточно серьезная среда обитания, электронные библиотеки, научный обмен и многое другое. Представляем Вам обзор наиболее полезных сайтов.

1. Сайт http://mathprofi.ru/saity_po_matematike.html. На данной странице представлен небольшой обзор наиболее полезных сайтов по высшей математике. Здесь не будет простого перечисления математических порталов из выдачи Яндекса, все ссылки, которые даны, действительно заслуживают внимания.

2. На сайте mathprofi.ru Вы можете найти многого интересного и самого нужного в изучении курса высшей математики: математические таблицы, обучающие материалы и т.д. Здесь размещены собственные авторские лекции по решению тех заданий, которые наиболее часто встречаются в контрольных работах и на экзаменах у студентов-заочников.

3. Одним из старейших математических порталов Рунета, безусловно заслуживающих внимания, является exponenta.ru. На сайте также есть методические материалы по работе с наиболее известными математическими пакетами (Matlab, MathCAD, Maple и др.), образовательный форум и многое другое. Но понимание примеров с Экспоненты потребует от вас более или менее приличной математической подготовки.

4. algebraic.ru – математическая энциклопедия; fxyz.ru – формулы и справочная информация по математике и физике; mathem.h1.ru – формулы и справочная информация по математике.

5. http://www.math.com. Англоязычный сайт по математическим дисциплинам. Чтобы воспользоваться им необходимо хорошее знание английского языка. Помимо уже известных интерактивных справочников, симуляторов расчетов, симуляторов графиков и т.п., всего, что можно встретить и на российских сайтах, здесь есть увлекательные разделы «Чудеса математики», «Советы исследователям», где в игровой форме можно попытаться решить увлекательные математические загадки, головоломки и попытаться понять «Зачем все же нужна математика?».

6. http://www.algebra.com. На данном сайте Вы найдете разделы по алгебре, математике, геометрии и физике на английском языке. Отличительными особенностями сайта являются бесплатные он-лайн уроки. В интерактивном режиме можно попросить у англоязычных преподавателей понять или вспомнить тему, объяснить домашнее задание, помочь решить трудные задачи. При этом данная услуга бесплатная: то есть Вы можете получить личного репетитора по скайпу в случае возникновения трудностей с математикой. Также на сайте представлен теоретический материал по математическим дисциплинам.

Существуют сайты с сервисом так называемого онлайн решения математики. Вводишь предел, производную, систему уравнений, жмешь кнопочку, получаешь готовое решение и ответ. Удобная услуга? Очень удобная. И даже бесплатно можно кое-что посчитать. Но в действительности услуга эта – «*медвежья*». Представим, что Вы изучаете тему «Производные функции». Легко и быстро, получаем онлайн все производные, ничего не понимая, успешно сдали все типовые расчеты. Более того, (о чудо!) пережили зимнюю сессию: удалось сдать «вышку». Во втором семестре начинаются интегралы, которые без умения находить производные просто не освоить. В ход опять пошел онлайн-калькулятор, все контрольные работы сданы. Сможете ли Вы сдать экзамен по математике на летней сессии? Вероятность гораздо ниже: преподаватель уже прекрасно видит, кто есть кто.

Помните! Сайтов, помогающих изучить математику предостаточно, но знать математику невозможно без аудиторной и самостоятельной работы. В любом случае, Интернет – замечательный инструмент для работы в любой научной сфере и то, как вы используете его – зависит только от вас.

3.4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

1. Чтение учебника или конспекта лекций должно сопровождаться решением задач, для чего рекомендуется завести специальную тетрадь (можно выполнять решения в тетради для практических занятий).

2. При решении задач нужно обосновывать каждый этап решения, исходя из теоретических положений курса. Если Вы видите несколько путей решений решения, то Вы должны сравнить их и выбрать самый рациональный. До начала решения полезно составить краткий план.

3. Решения задач и примеров следует излагать подробно, вычисления располагать в строгом порядке, отделяя вспомогательные вычисления от основных. Чертежи можно выполнять от руки, но аккуратно и в соответствии с данными условиями. Если чертеж требует тщательного выполнения (например, при графической проверке решения, полученного путем вычислений), то следует пользоваться компьютерной графикой.

4. Решение каждой задачи должно доводиться до ответа, требуемого условием, и, по возможности, в общем виде с выводом формулы. Затем в полученную формулу подставляют числовые значения (если они даны). В промежуточных вычислениях не следует вводить приближенные значения корней, числа π и т.д.

5. Полученный ответ при решении задачи следует проверять способами, вытекающими из смысла задачи. Если, например, решалась задача с конкретным физическим или геометрическим содержанием, то полезно прежде всего проверить размерность полученного ответа. Полезно также, если возможно, решить задачу несколькими способами и сравнить полученный результат.

6. **Помните**, что решение задач определенного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

3.5. САМОПРОВЕРКА И КОНСУЛЬТАЦИИ

1. После изучения определенной темы и решения достаточного количества задач воспроизведите по памяти определения, выводы формул, формулировки и доказательства теорем. Лучше всего, если Вы будете объяснять вы-

ученный материал другому человеку (одногруппнику, другу, маме, брату и т.д.).

2. Иногда недостаточность усвоения того или иного раздела выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо изученный раздел.

3. Часто правильное решение задач по той или иной теме воспринимается Вами как признак того, что Вы очень хорошо усвоили тему. Однако это может быть заблуждением, и Ваше хорошее решение задач происходит только в результате механического заучивания формул, без понимания существа дела. **Помните!** Умение решать задачи является необходимым, но не достаточным условием хорошего знания теории.

4. Если в процессе работы над изучением теоретического материала или при решении задач, работы над типовыми расчетами, индивидуальными домашними заданиями у Вас возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удается (неясность терминов, формулировок теорем, условий задач и др.), то Вы всегда можете (или даже должны) обратиться к преподавателю для получения от него консультации.

5. Если Вы испытываете затруднение при решении задачи, то следует, при обращении за консультацией к преподавателю, указать характер этого затруднения, привести предполагаемый план решения.

6. **Не бойтесь задавать преподавателю вопросы по существу изучаемой темы! Помните! Преподаватель тоже был когда-то студентом!**

3.6. СЕССИЯ. ЗАЧЕТЫ И ЭКЗАМЕНЫ

Как готовиться к экзаменам

1. Как ни странно, но лучший способ хорошо сдать экзамен – это регулярно заниматься в течение года. Тогда материал будет постепенно укладываться в голове, перерабатываться и систематизироваться. Новые знания по изучаемому материалу будут поступать уже на подготовленную почву, а уже имеющиеся в голове под их воздействием будут дополняться и переосмысливаться. И перед экзаменом такой учащийся с удивлением поймёт, что, оказывается, учить – то ничего и не надо, он и так уже всё знает.

2. Ваш джентельменский набор для сдачи экзаменов должен состоять из списка вопросов к экзамену, конспектов лекций и нескольких учебников. Если «раскопаете» в интернете чьи-то шпаргалки – тоже очень хорошо. Расписание экзаменов составляется таким образом, чтобы перерыв между двумя экзаменами был не менее 3 дней. Поэтому делите количество свободных дней на количество билетов и начинайте подготовку.

3. Время подготовки к экзамену надо разумно распределить. Не следует заниматься много часов без перерывов. Лучше учить блоками – усвоил тему, закрепил её и отдохнул. Затем кратко повторил, что заучил, и – за новую тему. Не стоит заниматься и по ночам, наоборот, готовясь к экзаменам, надо хорошо выспаться, тогда и голова будет работать лучше. Психологи иногда советуют

устраивать себе в дни подготовки к экзаменам дробный сон – меньше спать ночью (раньше вставать, а не позже ложиться), но зато спать днём, как в детсадовский «тихий час». Перед сном можно повторить особо трудный материал. Как известно, хорошо запоминается то, что было выучено последним. Кроме того, во время сна полученные знания будут перерабатываться мозгом и переходить в долговременную память в спокойной обстановке, не подгоняемые поступающей новой информацией.

4. Выбирайте в первую очередь самые трудные для себя вопросы, т.к. потом у вас не будет времени их подготовить. То, что знаете хорошо, повторите в самом конце подготовки.

5. **Если любите писать шпаргалки – пишите на здоровье.** Готовить шпаргалки полезно, но пользоваться ими рискованно. Главный смысл подготовки шпаргалок – это систематизация и оптимизация знаний по данному предмету, что само по себе прекрасно – это очень сложная и важная для студента работа, более сложная и важная чем «тупое», «методическое» и «спокойное» поглощение массы (точнее – «кучи») учебной информации. Если студент самостоятельно подготовил такие шпаргалки, то, скорее всего, он и экзамены сдавать будет более уверенно, так как у него уже сформирована общая ориентировка в сложном материале. К сожалению, многие студенты даже в собственных конспектах часто ориентируются очень плохо. Например, иногда мы проводили экзамены, разрешая пользоваться своими конспектами (и даже учебниками) во время самого ответа. Нескольких секунд было достаточно, чтобы оценить, заглядывал ли студент в свои конспекты (и тем более в книги) при подготовке к данному ответу.

Что делать, если экзамен не сдан?

Первое и главное – **не впадать в отчаяние**. Не пытайтесь скандалить с преподавателями, обвиняя его в несправедливой оценке вашего ответа, сохраняйте собственное достоинство. Следующие рекомендации помогут вам добиться успеха на переэкзаменовке.

- Смиритесь с ситуацией. Обида – плохой помощник в подготовке.
- Относитесь к ситуации как к благоприятной возможности освоить то, в чём вы оказались недостаточно сильны.
- Определите, что вы конкретно не знали.
- Попытайтесь понять, в чём крылась причина вашего неудачного ответа (плохо подготовились, не уложились в отведённое время или, может быть, неправильно повели себя на экзамене).
- Попросите у уже сдавших товарищей материалы для подготовки (они вряд ли вам откажут).
- Не теряйте время!!! Чем раньше начнёте переподготовку, тем проще вам будет сдавать.
- Ставьте себе задачу не просто пересдать, а получить «хорошую отметку». Чем выше планка, которую вы себе ставите, тем лучше результат.

4. ОСНОВНЫЕ ЗАНЯТИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ СВЕДЕНИЙ ЗА КУРС СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

ЗАНЯТИЕ 1
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ И АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Основные свойства и формулы

1. ***Формулы сокращенного умножения***

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b);$$
$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = (a-b)^2 + 2ab;$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2);$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2);$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b);$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

2. ***Разложение на множители***

Если x_0 – корень многочлена n–ой степени $P_n(x)$, то $P_n(x) = (x - x_0)\cdot P_{n-1}(x)$, где $P_{n-1}(x)$ – некоторый многочлен степени $n - 1$.

В частности, когда $n = 2$, т.е.

$P_2(x) = ax^2 + bx + c$ – ***квадратный трехчлен***, имеем:

а) $\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \text{ при } D = b^2 - 4ac > 0}$,

где $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ – корни этого квадратного трехчлена;

б) $\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2 \text{ при } D = b^2 - 4ac = 0}$,

где $x_1 = \dfrac{-b}{2a}$ – корень этого квадратного трехчлена.

в) $\boxed{ax^2 + bx + c \text{ разложения не имеет при } D = b^2 - 4ac < 0}$.

3. *Арифметические корни и их свойства*

Пусть n– натуральное число, т.е. $n \in N$, $(n \neq 1)$. Тогда **арифметическим корнем** n –ой степени из данного числа $a \geq 0$ называется число $x \geq 0$ такое, что $x^n = a$.

Обозначение $\boxed{x = \sqrt[n]{a}}$. В случае $n = 2$ пишут $\boxed{\sqrt{a}}$.

Например, $\sqrt[3]{8} = 2, \sqrt{25} = 5, \sqrt[4]{16} = 2$.

Свойства арифметического корня:

Для любых натуральных num, больших 1, и любых неотрицательных a и b справедливо

1) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$;

2) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b},\ (b > 0)$; 2[a]) $\sqrt[2n]{a \cdot b} = \sqrt[2n]{|a|} \cdot \sqrt[2n]{|b|}$;

3) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\ (b > 0)$; 3[a]) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{|a|}}{\sqrt[n]{|b|}}\ (b \neq 0)$;

4) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a}$;

5) $\sqrt[nm]{a^m} = \sqrt[n]{a}$;

6) $\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}$;

7) $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a| = \begin{cases} a, & a > 0, \\ -a, & a < 0; \end{cases}$

8) $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$ при $0 \leq a < b$.

9) $c\sqrt[2n]{a} = \begin{cases} \sqrt[2n]{ac^{2n}}, & c > 0, \\ -\sqrt[2n]{ac^{2n}}, & c < 0. \end{cases}$

4. *Степени и их свойства*

Пусть a – положительное ($a > 0$), x – рациональное число ($x \in Q$). Под ***степенью*** a^x (степень числа a с показателем x) понимают положительное число, определённое следующим образом:

а) Если x целое число ($x \in N$), то $\boxed{a^x = \underbrace{a \cdot a \cdot a \times ... \times a}_{x\ \text{раз}}}$.

Причем, в данном случае a любое действительное число ($a \in R$).

б) Если x – целое число ($x \in Z$), то

1. $x = 0 \Rightarrow \boxed{a^0 = 1}$;

2. $x = n, n \in N \Rightarrow \boxed{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \times ... \times a}_{n \text{ раз}}}$;

3. $x = -n,\ n \in N \Rightarrow \boxed{a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}}$.

в) Если $x \in Q \Rightarrow x = \dfrac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N, n \geq 2$, , то

$$\boxed{a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m}.$$

Свойства степеней:

Пусть $x \in R$, $y \in R$ и $a > 0$, $b > 0$.

1. $a^0 = 1, a^1 = 1, 1^x = 1$;
2. $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$;
3. $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$;
4. $(ab)^x = a^x \cdot a^y$;
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{a^y}$;
6. $(a^x)^y = (a^y)^x = a^{xy}$;
7. $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$.

Если *x* и *y* – произвольные числа и *x* < *y*, то

8. $a^x < a^y$ при $a > 1$,
9. $a^x > a^y$ при $0 < a < 1$

Аудиторные задания

1.1. Вычислите:

1.1.1. $\dfrac{4^{-0.5} + \left(\sqrt{8}\right)^{\frac{2}{3}} + 2\frac{1}{3} : 1\frac{5}{9}}{\left(4{,}8 \cdot 6\frac{2}{3} - 31{,}75\right)^{-0.5}}$.

1.1.2. $\dfrac{(\sqrt{3} - 2\sqrt{2})(\sqrt{3} + 2\sqrt{2})}{\frac{7}{8} - 0{,}125 + \frac{1}{20}}$.

1.1.3. $\dfrac{0{,}4+8\left(5-0.8\cdot\frac{5}{8}\right)-5:2\frac{1}{2}}{\left(1\frac{7}{8}\cdot 8-\left(8.9-2.6:\frac{2}{3}\right)\right)\cdot 34\frac{2}{5}}\cdot 90.$

1.1.4. $\left(1\frac{1}{3}-625^{1/4}\right)\left(\frac{15}{17}\right)^{-1}.$

1.1.5. $3^6\cdot 9^{-2}\cdot 5^4-9\cdot 125\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}.$

1.1.6. $(9\cdot 3^{-2}+4\cdot\left(\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}\right):\left(10^0+\frac{1}{12}\right).$

1.1.7. $\dfrac{2^{-2}\cdot 5^3\cdot 10^{-4}}{2^{-3}\cdot 5^2\cdot 10^{-5}}.$

1.1.8. $\left(6-4\cdot\left(\frac{5}{16}\right)^0\right)^{-2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}-81^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^{-1}.$

1.1.9. $1000^{-\frac{2}{3}}+\frac{1}{27}^{-\frac{4}{3}}-625^{-0.75}.$

1.1.10. $(\sqrt[3]{2})-\sqrt[3]{5}\,)(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{25}).$

1.2. Упростите выражения:

1.2.1 $\left(\frac{x^{1.5}-1}{x^{0.5}-1}+x^{0.5}\right):\frac{x-1}{x^{0.5}-1}.$

1.2.2. $\left(\frac{x-1}{x^{\frac{1}{3}}-1}+x^{\frac{1}{3}}\right)\cdot\frac{x^{\frac{1}{3}}-1}{x^{\frac{2}{3}}-1}.$

1.2.3. $\dfrac{(a+2\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(a-b)(\sqrt{a}+1)^2}+2.$

1.2.4. $\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2.$

1.2.5. $\dfrac{\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}{\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}+\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}}\cdot\frac{2\sqrt{xy}}{y-x}.$

1.2.6. $\frac{a}{\sqrt[3]{a}-1}-\frac{\sqrt[3]{a^2}}{1+\sqrt[3]{a}}+\frac{1}{\sqrt[3]{a}+1}+\frac{1}{1-\sqrt[3]{a}}-\sqrt[3]{a^2}.$

1.2.7. $\left(\frac{2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}\cdot\frac{a-\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right):4\sqrt{b}.$

1.3. Упростите выражения и вычислите при данных значениях параметров:

1.3.1. $\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right),\qquad y=5\frac{2}{7};\ x=4\frac{5}{7}$.

1.3.2. $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{(a^2-ab)^{\frac{2}{3}}}:\dfrac{(a-b)^{\frac{1}{3}}\cdot a^{-\frac{2}{3}}}{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}},\quad a=5, b=2$.

1.3.3. $\dfrac{a^4-b^4}{(a+b)^2-2ab}$, $\qquad a = 2{,}71;\ b = 1{,}29$.

1.4. Найдите x, если

1.4.1. $49^{\frac{1}{6}}\cdot 7^{2.5}=7^{\frac{1}{2}}\cdot 7^{-\frac{2}{3}}\cdot 49\cdot x^{0.5}$.

1.4.2. $\dfrac{8^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\sqrt[3]{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot x}=2^7\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^6$.

Домашнее задание

1.5. Вычислите:

1.5.1. $\left(\dfrac{\left(6-4\frac{1}{2}\right):0.03}{\left(3\frac{1}{20}-2.65\right)\cdot 4+\frac{2}{5}}-\dfrac{\left(0.3-\frac{3}{20}\right)\cdot 1\frac{1}{2}}{\left(1.88+2\frac{3}{25}\right)\cdot\frac{1}{80}}\right):2\dfrac{1}{20}$.

1.5.2. $\dfrac{2\frac{1}{7}\cdot\frac{7}{3}-3{,}25}{\left[\left(\frac{25}{16}\right)^{\frac{9}{4}}\right]^{\frac{2}{9}}}$.

1.5.3. $\sqrt[3]{12+4\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{12-4\sqrt{5}}$.

1.6. Упростите выражения:

1.6.1. $\dfrac{4x^2-5x+1}{4x-1}-\dfrac{x^2-1}{1-x}$.

1.6.2. $\left(\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{y}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

1.6.3. $\left(\dfrac{1+n}{n^2-mn}-\dfrac{1-m}{m^2-mn}\right)\cdot\left(\dfrac{m+n}{m^2n-n^2m}\right)^{-1}$.

1.6.4. $\left(\dfrac{a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}}+\dfrac{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}}-\dfrac{2b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{4}}-a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}}}\right)\cdot\left(b^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}\right)$.

Ответы:

1.1.1. 2; 1.1.2. –6,25; 1.1.3. 9; 1.1.4. $-\dfrac{55}{17}$; 1.1.5. 0; 1.1.6. 24; 1.1.7. 100; 1.1.8. 1,25; 1.1.9. 81,002; 1.1.10. –3;

1.2.1. $\sqrt{x}+1$; 1.2.2. $\sqrt[3]{x}+1$; 1.2.3. 3; 1.2.4. 1; 1.2.5. $-2y$; 1.2.6. 2; 1.2.7. $\frac{1}{2(a-b)}$; 1.3.1. 10; 1.3.2. 39; 1.3.3. 5,68; 1.4.1. 49; 1.4.2. $2^{-1/3}$;

1.5.1. 10; 1.5.2. 1.4; 1.5.3. 4; 1.6.1 $2x$; 1.6.2. $\frac{4}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$; 1.6.3. –1; 1.6.4. $-2a^{\frac{1}{4}}$.

ЗАНЯТИЕ 2

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Областью допустимых значений (ОДЗ) уравнения называется множество всех значений переменных, при которых все функции, входящие в уравнение, имеют смысл.

Решением уравнения называются такие значения переменных, которые при их подстановке в уравнение обращают его в тождество.

Уравнения называются ***равносильными***, если множества их решений совпадают.

При решении уравнений рекомендуется делать преобразования, приводящие к равносильным уравнениям; если же это затруднительно, и в процессе преобразований могут появиться лишние корни, то необходимо делать проверку. Полезно, а иногда и необходимо, найти ОДЗ.

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнения вида $\boxed{ax=b}$ где $a\in R, b\in R$ называются ***линейными уравнениями.***

Алгоритм решения линейного уравнения в общем виде.

$$\boxed{ax=b}$$

1. Если $a\neq 0,\ b\in R\Rightarrow x=\dfrac{b}{a}$;
2. Если $a=0,\ b\neq 0\Rightarrow x\in\varnothing$;
3. Если $a=0,\ b=0\Rightarrow x\in R$.

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение вида $\boxed{ax^2+bx+c=0,(a\neq 0)}$ называется **квадратным уравнением.**

Решение квадратного уравнения:

1. Если $\boxed{D=b^2-4ac>0}$, то $\boxed{x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}}$, т.е. уравнение имеет два различных корня;

2. Если $\boxed{D=b^2-4ac=0}$, то $\boxed{x_1=\frac{-b}{2a}}$, т.е. уравнение имеет один корень кратности два;

3. Если $\boxed{D=b^2-4ac<0}$, то уравнение не имеет решений в области действительных чисел R.

4. Если b– четное число, то есть $b = 2k$, то решение квадратного уравнения удобно находить в виде $\boxed{x_{1,2}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}}$.

Теорема Виета:

Если дискриминант $D=b^2-4ac$ квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ больше, либо равен нулю, а x_1,x_2 – его корни, то выполняются равенства:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{b}{a}, \\ x_1x_2=\frac{c}{a}. \end{cases}$$

Верно и обратное утверждение.

Функция вида $\boxed{y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)}$ называется **квадратичной функцией**. Графиком квадратичной функции является ***парабола*** ветви которой направлены вверх при $a>0$ и вниз при $a<0$.

Координаты вершины параболы: $x_в=\frac{-b}{2a}$, $y_в=ax_в^2+bx_в+c$.

Точки пересечения параболы с осями координат:

с осью Ox: $y=0\Rightarrow ax^2+bx+c=0$:

а) если $D>0$, то парабола имеет две точки пересечения: $(x_1;0), (x_2;0)$;

б) если $D=0$, то парабола имеет одну точку касания: $(x_в;0)$;

в) если $D<0$, то парабола не имеет точек пересечения.

с осью Oy: $x = 0 \Rightarrow (0, c)$.

УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩИЕ ЗНАК МОДУЛЯ

Модулем называется выражение: $\boxed{|a| = \begin{cases} a, \ a \geq 0, \\ -a, \ a < 0. \end{cases}}$

Уравнение, содержащее переменную под знаком модуля называется **уравнением с модулем**.

Основные типы уравнений с модулем и методы их решений

I. Уравнение вида $|f(x)| = a$.

1) Если $a \geq 0$, то $\left[\begin{array}{l} f(x) = a, \\ f(x) = -a; \end{array}\right.$

2) Если $a < 0$, то $x \in \emptyset$ ($\emptyset$ – пустое множество).

II. Уравнение вида $|f(x)| = g(x)$. Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x), \end{array}\right. \\ \quad g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Заметим, что фигурная и квадратная скобки имеют разный смысл!

III. Уравнение вида $|f(x)| = |g(x)|$. Уравнение равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right.$$

IV. Уравнения вида:

1) $|f(x)| = f(x) => f(x) \geq 0,$

2) $|f(x)| = -f(x) => f(x) \leq 0,$

3) $|f(x)| + |g(x)| = |f(x) + g(x)| => f(x) \cdot g(x) \geq 0,$

4) $|f(x)| + |g(x)| = |f(x) - g(x)| => f(x) \cdot g(x) \leq 0.$

V. Уравнение вида $|f(x)| \pm |g(x)| = |h(x)|$.

1) Находим нули каждого модуля, т.е. решаем уравнения $|f(x)| = 0, \ |g(x)| = 0, \ |h(x)| = 0.$

2) Наносим нули каждого модуля на числовую ось и раскрываем каждый модуль на каждом из полученных промежутков.

3) Решаем уравнение на каждом из полученных промежутков.

VI. Уравнение вида $A \cdot |f(x)| + Bf(x) + C = 0$ с помощью замены:

$|f(x)| = t, \ t \geq 0$ сводится к квадратному уравнению $A \cdot t^2 + B \cdot t + C = 0$, решая которое и, применяя обратную замену, находим x.

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение, содержащее переменную под знаком корня называется **иррациональным уравнением**.

Основные типы иррациональных уравнений и методы их решений

I. Уравнение вида $\sqrt{f(x)} = a$.

1) если $a \geq 0$, то $f(x) = a^2$,
2) если $a < 0$, то $x \in \emptyset$.

II. Уравнение вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$. Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

III. Уравнение вида $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$. Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0 \ (g(x) \geq 0 \ \text{что проще}). \end{cases}$$

IV. Уравнение вида $f(x) \cdot \sqrt{g(x)} = 0$. Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x) = 0, \\ g(x) = 0, \end{array}\right. \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

V. Уравнение вида $A \cdot f(x) + B\sqrt{f(x)} + C = 0$ с помощью <u>замены</u>:

$\sqrt{f(x)} = t, \ t \geq 0$ сводится к квадратному уравнению

$A \cdot t^2 + B \cdot t + C = 0.$

Решая которое и, применяя обратную замену, находим x.

Замечания

При решении иррациональных уравнений, не относящихся к типам I – V, полезно соблюдать ряд правил:

1.) начинаем решение с записи ОДЗ. Если ОДЗ простое, то решаем его, в противном случае решаем иррациональное уравнение и проверяем корни непосредственной подстановкой в ОДЗ. Если не находить ОДЗ, то следует обязательно сделать проверку найденных корней непосредственной подстановкой в исходное уравнение.

2.) возводить в квадрат правую и левую часть иррационального уравнения возможно только для заведомо положительных выражений, то есть

$$\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)} <=> \sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} + \sqrt{h(x)} <=>$$
$$<=> \left(\sqrt{f(x)}\right)^2 = \left(\sqrt{g(x)} + \sqrt{h(x)}\right)^2.$$

3.) иногда полезно использовать равенство $\sqrt{(f(x))^2} = |f(x)|$ и переходить от решения иррационального уравнения к решению уравнения с модулем.

Аудиторные задания

2.1. Квадратные уравнения

2.1.1. Найти значение коэффициента k, при котором уравнение $3x^2 - 2kx - k + 6 = 0$ не имеет корней.

2.1.2. Найти a, при котором один из корней уравнения $2x^2 - ax + 3a = 0$ равен 3.

2.1.3. Вычислите $\frac{x_1 x_2}{(x_1+x_2)^2}$, где x_1, x_2 -корни уравнения $x^2 - 5x + 4 = 0$.

2.1.4. Найти коэффициент q в уравнении $x^2 - 2x + q = 0$, если корни уравнения x_1, x_2 связаны соотношениями $2x_1 + x_2 = 3$.

2.1.5. Решить уравнение $\frac{x-2}{x+1} + \frac{4(x+1)}{x-2} = 5$.

2.2. Иррациональные уравнения.

2.2.1. $\sqrt{7 - x^2}\sqrt{10 - 3x - x^2} = 0$.

2.2.2 $\sqrt{6 - 4x - x^2} = x + 4$.

2.2.3. $\sqrt{2x - 4} - \sqrt{x + 5} = 1$.

2.2.4. $z+42-11\sqrt{z^2 - z - 42} - z^2 = 0$.

2.3. Уравнения, содержащие знак модуля

2.3.1. $\left|\frac{x-1}{x+3}\right| = 1$.

2.3.2. $|x + 2| = 5$. Решить аналитически и графически.

2.3.3. $|4x - 3| = 4x - 3$. Найти наименьший корень.

2.3.4. $|x + 2| + |x - 3| = 5$.

2.4. Решить системы уравнений

2.4.1. $\begin{cases} 2x + y - 1 = 0, \\ x - 2y + 5 = 0. \end{cases}$ В ответе указать $x + y$.

2.4.2. $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ x + 5y = 7. \end{cases}$ В ответе указать xy.

2.4.3. $\begin{cases} 2x + y = 4, \\ 4x^2 + y^2 = 40. \end{cases}$ В ответе указать xy.

Домашнее задание

2.5.1. Найти значение коэффициента p, при котором уравнение $3x^2-2px-p+6=0$ имеет 2 корня.

2.5.2. При каком наибольшем значении a квадратное уравнение $x^2-(a+3)x+a^2=0$ имеет корни $x=3$.

2.5.3. Найти меньший корень уравнения:

$$\frac{30}{x^2-1}-\frac{13}{x^2+x+1}=\frac{18x+7}{x^3-1}.$$

2.5.4. $\sqrt{2x^2+8x+7}-x=2.$

2.5.5. $\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}=4.$

2.5.6. $|2-x|=5-4x.$

2.5.7. $\frac{2x^2-6}{|x|-1}=|x|+3.$

2.5.8. Решить систему уравнений:

$\begin{cases}2x+3y=165,\\5x+2y=330.\end{cases}$ В ответе указать $x+y$.

Ответы:

2.1.1. $-6<k<3$; 2.1.2. $a=-3$; 2.1.3. 0,16; 2.1.4. $q=1$; 2.1.5. $x=-2$;

2.2.1. $x_1=-\sqrt{7}$, $x_2=2$; 2.2.2. $x=-1$; 2.2.3. $x=20$; 2.2.4. $z_1=-6$, $z_2=7$;

2.3.1. $x=-1$; 2.3.2. $x_1=3$, $x_2=-7$; 2.3.3. $x={}^3/_4$; 2.3.4. $x\in[-2;3]$;

2.4.1. 1,6; 2.4.2. 2; 2.4.3. –6; 2.5.1 $(-\infty,-6)\cup(3,+\infty)$; 2.5.2 3; 2.5.3 $x=-4$;

2.5.4 $x=-1$; 2.5.5 $x=5$; 2.5.6 $x=1$; 2.5.7. $x_1=-3$, $x_2=3$; 2.5.8. 75.

ЗАНЯТИЕ 3

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Основные свойства и формулы

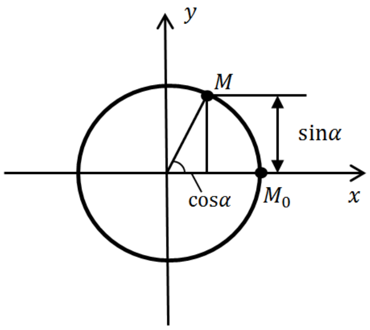


Рис.1

1. Функции синус, косинус, тангенс, котангенс, а также секанс и косеканс называются *основными тригонометрическими функциями*. При этом по определению ***синусом*** (соответственно, ***косинусом***) числа α называется ордината (соответственно, абсцисса) точки M на тригонометрическом круге (см. рис.1), получающейся поворотом точки $M_0(1;\ 0)$ на угол α радиан вокруг начала координат. Кроме того,

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha},\ \text{при }\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z,$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha},\ \text{при }\ \alpha\neq\pi n, n\in Z.$$

2. Полезно запомнить таблицу значений тригонометрических функций основных углов.

$f(\alpha)$ / α° (рад)	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$
30° $\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
45° $\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60° $\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
90° $\left(\frac{\pi}{2}\right)$	1	0	–	0

3. Функции **синус, тангенс, и котангенс** являются **нечетными**, а функция **косинус – четная**, т.е. для всех допустимых значений x выполнены равенства:

$$\cos(-x) = \cos x,\ \sin(-x) = -\sin x,\ \mathrm{tg}\,(-x) = -\mathrm{tg}x,\ \mathrm{ctg}(-x) = -\mathrm{ctg}(x).$$

Функции **синус и косинус – периодические с периодом** $\underline{\mathbf{2\pi}}$, а функции **тангенс и котангенс – периодические с периодом** $\underline{\boldsymbol{\pi}}$. Отсюда следует, что

$$\sin(x + 2\pi n) = \sin x,\ \cos(x + 2\pi n) = \cos x,$$
$$\mathrm{tg}(x + \pi n) = \mathrm{tg}x,\ \mathrm{ctg}(x + \pi n) = \mathrm{ctg}x$$

для всех допустимых значений x и для всех $n \in Z$.

4. ***Знаки тригонометрических функций***

Функция $\mathbf{sin}\boldsymbol{x} > \mathbf{0}$ при $x \in I, II$ координатной четверти, $\mathbf{sin}\boldsymbol{x} < \mathbf{0}$ при $x \in III, IV$ координатной четверти.

Функция $\mathbf{cos}\boldsymbol{x} > \mathbf{0}$ при $x \in I, IV$ координатной четверти, $\mathbf{cos}\boldsymbol{x} < \mathbf{0}$ при $x \in II, III$ координатной четверти.

Функции $\mathbf{tg}\boldsymbol{x} > \mathbf{0}$, $\mathbf{ctg}\boldsymbol{x} > \mathbf{0}$ при $x \in I, III$ координатной четверти, $\mathbf{tg}\boldsymbol{x} < \mathbf{0}$, $\mathbf{ctg}\boldsymbol{x} < \mathbf{0}$ при $x \in II, IV$ координатной четверти.

5. ***Формулы приведения***

$n = 2k$, т.е. n – четное число	$2k+1$, т. е. n – нечетное число
$\sin\left(\frac{\pi}{2}n\pm\alpha\right)=\pm\sin\alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}n\pm\alpha\right)=\pm\cos\alpha$
$\cos\left(\frac{\pi}{2}n\pm\alpha\right)=\pm\cos\alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}n\pm\alpha\right)=\pm\sin\alpha$
$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}n\pm\alpha\right)=\pm\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}n\pm\alpha\right)=\pm\mathrm{ctg}\alpha$
$\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}n\pm\alpha\right)=\pm\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}n\pm\alpha\right)=\pm\mathrm{ctg}\alpha$

Знак «$\pm$» после знака равенства зависит от того в какой четверти лежит угол $\frac{\pi}{2}n\pm\alpha$. Для применения формул приведения достаточно ответить на два вопроса:

1. Сколько раз «взяли» угол $\frac{\pi}{2}$?

2. В какой четверти лежит угол $\frac{\pi}{2}n\pm\alpha$?

Например, $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha$, так $\frac{\pi}{2}$ «взяли» 3 раза – нечетное число раз и угол $\frac{3\pi}{2}+\alpha$ лежит в IV координатной четверти, где функция $\sin x<0$.

6. Равенство

$$\boxed{\sin^2 x+\cos^2 x=1},$$

справедливое для всех значений x, называется ***основным тригонометрическим тождеством***.

Из этой формулы следуют еще две формулы:

$$1+\mathrm{tg}^2 x=\frac{1}{\cos^2 x},\ x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z;$$

$$1+\mathrm{ctg}^2 x=\frac{1}{\sin^2 x},\ x\neq\pi n, n\in Z.$$

7. Формулы суммы (разности) аргументов

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y;$$
$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y;$$
$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y;$$
$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y;$$

$$\mathrm{tg}(x+y)=\frac{\mathrm{tg}x+\mathrm{tg}y}{1-tgxtgy},\ \text{при}\ \ x,y,x+y\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z;$$
$$\mathrm{tg}(x-y)=\frac{\mathrm{tg}x-\mathrm{tg}y}{1+tgxtgy},\ \text{при}\ \ x,y,x-y\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z.$$

8. ***Формулы двойного аргумента***

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x;$$
$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x;$$
$$\mathrm{tg}2x=\frac{2\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}^2 x},\ \text{при}\ \ x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\ \ \text{и}\ \ x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z.$$

Полезно также иметь в виду следующие две формулы, непосредственно вытекающие из пункта 8:

$$\sin^3 x=\frac{3\sin x-\sin 3x}{4};\qquad \cos^3 x=\frac{3\cos x+\cos 3x}{4}.$$

9. ***Формулы тройного аргумента***

$$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x=\sin x\,(3-4\sin^2 x);$$
$$\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x=\cos x\,(4\cos^2 x-3).$$

10. ***Формулы понижения степени***

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2};\quad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}.$$

11. ***Формулы преобразования симметрических сумм в произведения***

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};$$
$$\sin x-\sin y=2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2};$$
$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};$$
$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2};$$
$$\mathrm{tg}x+\mathrm{tg}y=\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}\ \ \text{при}\ x,y\ \neq\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z;$$
$$\mathrm{tg}x-\mathrm{tg}y=\frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}\ \ \text{при}\ x,y\ \neq\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z.$$

12. ***Формулы преобразования произведений в суммы***

$$\sin x\cos x=\frac{1}{2}[\sin(x-y)+\sin(x+y)];$$
$$\cos x\cos y=\frac{1}{2}[\cos(x-y)+\cos(x+y)];$$
$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)].$$

13. ***Формулы, использующие тангенс половинного аргумента***

$$\sin x=\frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}\ ;\cos x=\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}\ \text{при}\ x\neq\pi+2\pi n, n\in Z.$$
$$\mathrm{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{1-\cos x}{\sin x};\ \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\ \text{при}\ x\neq\pi+2\pi n, n\in Z.$$

Аудиторные задания

3.1. *Упростите тригонометрические выражения*:

3.1.1. $(3\sin x + 2\cos x)^2 + (2\sin x - 3\cos x)^2$.

3.1.2. $\cos^2(\pi - \alpha) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$.

3.1.3. $\frac{1 - \sin^4 2\alpha - \cos^4 2\alpha}{2\sin^4 2\alpha} + 1$ и вычислить при $\alpha = \frac{\pi}{12}$.

3.1.4. $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) - \cos(\pi - \alpha)\cos(2\pi - \beta)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha + \beta\right)}$.

3.1.5. $\frac{\mathrm{tg}(180^\circ - \alpha)\cos(180^\circ - \alpha)\,\mathrm{tg}(90^\circ - \alpha)}{\sin(90^\circ + \alpha)\,\mathrm{ctg}(90^\circ - \alpha)\,\mathrm{tg}(90^\circ + \alpha)}$.

3.2. *Вычислите значения тригонометрических функций*:

3.2.1 $\mathrm{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = -0{,}8$ и $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

3.2.2. $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

3.2.3. $\cos\alpha$, если $\mathrm{tg}\,\alpha = \sqrt{15}$ и $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

3.2.4. $\sin(\alpha + \beta)$ $\sin\alpha = -\frac{1}{3}$, $\cos\beta = -\frac{2}{3}$, $\pi < \alpha, \beta < \frac{3\pi}{2}$.

3.2.5. $\mathrm{arctg}(-\sqrt{3}) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin 1 - \mathrm{arctg}0$.

3.2.6. $\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, если $\sin(\pi - x) = \alpha$ и $x \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

3.2.7. $\frac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}$, если $\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}3$.

3.2.8. $\frac{\sin\alpha - 2\sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha - 2\cos 2\alpha + \cos 3\alpha}$, если $\mathrm{tg}\,\alpha = 3$.

3.2.9. $\left(\frac{\sin 80^\circ + \sin 40^\circ}{\sin 70^\circ}\right)^2$.

Домашнее задание

3.3. *Упростите тригонометрические выражения*:

3.3.1 $\frac{\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}{1 + \sin\alpha}$.

3.3.2. $\frac{\sqrt{3}\cos 3\alpha}{10(\cos 9\alpha + \cos 3\alpha)}$ и вычислить при $\alpha = \frac{\pi}{36}$.

3.3.3. $\dfrac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}$ и вычислить при $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$.

3.3.4. $2\sin\alpha\cos\alpha-\dfrac{\sin\alpha-\sin(\pi+3\alpha)+\sin 2\alpha}{2\cos\alpha+1}$.

3.4. *Вычислите значения тригонометрических функций*:

3.4.1. $3\operatorname{tg}2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=0{,}5$.

3.4.2. $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{2}$.

3.4.3. $\arcsin\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)-\operatorname{arctg}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)+\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)+\operatorname{arctg}1$.

3.4.4. $\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{12}{5}$ и $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$.

3.4.5. $\dfrac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=2$.

Ответы:

3.1.1. 13; 3.1.2. 1; 3.1.3. 4; 3.1.4. 1; 3.1.5. –1;

3.2.1. 0,75; 3.2.2. – 0,5; 3.2.3. 0,25; 3.2.4. $\frac{2(\sqrt{10}+1)}{9}$; 3.2.5. π; 3.2.6. $-\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}$;

3.2.7. 0,3; 3.2.8. -0,75; 3.2.9. 3;

3.3.1. 1; 3.3.2. $\frac{1}{10}$; 3.3.3. 1; 3.3.4. 0;

3.4.1. 4; 3.4.2. 0,6; 3.4.3. $\frac{5\pi}{6}$; 3.4.4. $-\frac{12}{13}$; 3.4.5. 4.

ЗАНЯТИЕ 4

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

1. ***Показательная функция*** $y=a^x$ определена при любом $a>0$, $a\neq 1$. ***Область определения этой функции*** – множество всех действительных чисел ($x\in R$).

2. ***Область значений функции*** $y=a^x$ – множество всех действительных положительных чисел, т.е. $a^x>0$ для всех $x\in R$.

3. При $a>1$ функция $y=a^x$ (см. рис.2) ***возрастает*** на всей числовой прямой т.е. $x_1<x_2\Rightarrow a^{x_1}<a^{x_2}$.

При $0<a<1$ функция $y=a^x$ (см. рис.3) ***убывает*** на всей числовой прямой т.е. $x_1<x_2\Rightarrow a^{x_1}>a^{x_2}$.

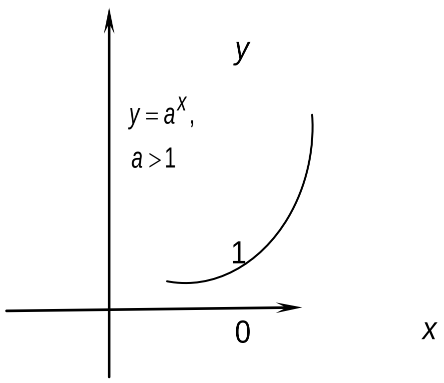


Рис.2

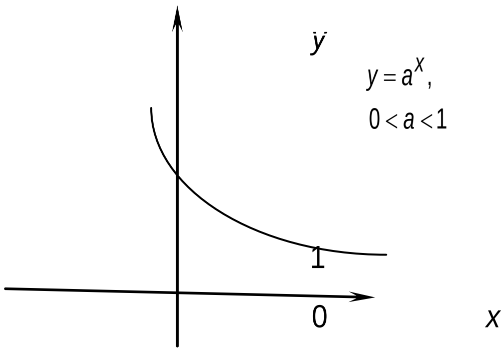


Рис.3

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение, содержащее переменную в показателе степени, называется ***показательным уравнением***.

Основные типы показательных уравнений и методы их решений

I. Уравнение вида $a^{f(x)}=a^{g(x)}, a>0, a\neq 1$ равносильно уравнению

$$f(x)=g(x).$$

II. Для уравнения вида $h(x)^{f(x)}=h(x)^{g(x)}$ рассматриваются следующие случаи:

1) $\begin{cases} f(x)=g(x), \\ h(x)\neq 1, \\ h(x)>0; \end{cases}$

2) $h(x)=1$, x_0 – корень, если $f(x_0)$ и $g(x_0)$ – существуют;

3) $h(x)=0$, x_1 – корень, если $f(x_1)\in N$ и $g(x_1)\in N$;

4) $h(x)=-1$, x_2 – корень, если $f(x_2)$ и $g(x_2)$ – целые числа одинаковой четности (оба числа либо четные, либо нечетные одновременно);

5) $\begin{cases} f(x)=g(x), \\ h(x)\neq -1, \\ h(x)<0; \end{cases}$ x – корень, если $f(x)$ и $g(x)$ – целые.

III. Уравнение вида $a^{f(x)}=b^{f(x)}, a\neq b$ равносильно уравнению $f(x)=0$.

IV. Уравнение вида $A\cdot a^{2f(x)}+B\cdot a^{f(x)}+C=0$ с помощью *замены*: $a^{f(x)}=t, t>0$ сводится к квадратному уравнению $A\cdot t^2+B\cdot t+C=0$, решая которое и, применяя обратную замену, находим *x*.

V. Уравнение вида $A\cdot a^{2f(x)}+B\cdot a^{f(x)}\cdot b^{g(x)}+C\cdot b^{2g(x)}=0$ равносильно уравнению $A\cdot\dfrac{a^{2f(x)}}{b^{2f(x)}}+B\cdot\dfrac{a^{f(x)}}{b^{f(x)}}+C=0$ которое с помощью *замены:* $\dfrac{a^{f(x)}}{b^{f(x)}}=t,\ t>0$ сводится к квадратному уравнению $A\cdot t^2+B\cdot t+C=0$.

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

1. ***Логарифмическая функция*** $y=\log_a x$ определена при любых $a>0,\ a\neq 1$. ***Область определения этой функции*** – множество всех положительных действительных чисел $x>0$.

2. ***Область значений функции*** $y=\log_a x$ – множество всех действительных чисел $y\in R$.

3. При $a>1$ функция $y=\log_a x$ – ***возрастает*** (см. рис.4), т.е.

$$x_1<x_2\Rightarrow \log_a x_1<\log_a x_2$$

При $0<a<1$ функция $y=\log_a x$ ***убывает*** (см. рис.5), т.е.

$$x_1<x_2\Rightarrow \log_a x_1>\log_a x_2$$

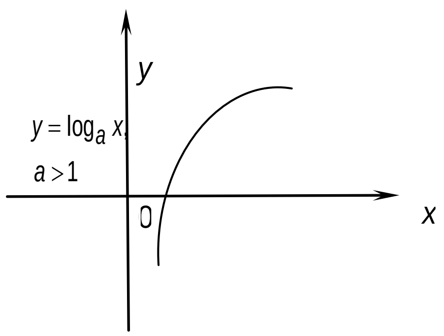


Рис.4

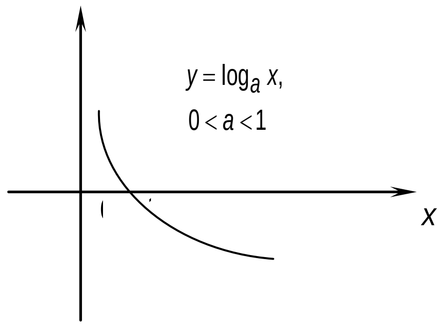


Рис.5

Свойства логарифмов

При любых $a>0,\ a\neq 1$ и $b>0,\ b\neq 1$ справедливы следующие равенства:

1) $\boxed{a^{\log_a x}=x,\ (x>0)}$ (основное логарифмическое тождество).

2) $\log_a 1=0,\ \log_a a=1$.

3) $\log_a xy=\log_a|x|+\log_a|y|\ (x\neq 0,\ y\neq 0,\ xy>0)$ (формула для логарифма произведения).

4) $\log_a\dfrac{x}{y}=\log_a|x|-\log_a|y|\ (x\neq 0,\ y\neq 0,\ xy>0)$ (формула для логарифма частного).

5) $\log_{a^\alpha} x^\beta=\dfrac{\alpha}{\beta}\log_a x$ для любых α и β, $\beta\neq 0$ и $x>0$ (формула для логарифма степени).

В частности, $\log_a x^{2n}=2n\log_a|x|,\ x\neq 0, n\in N$.

6) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ $(c>0, c\neq 1)$ (формула перехода к новому основанию).

В частности, $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$.

7) $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ $(c>0,\ c\neq 1)$.

8) $a^{\sqrt{\log_a b}} = b^{\sqrt{\log_b a}}$.

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение, содержащее переменную под знаком логарифма, называется ***логарифмическим уравнением***.

Основные типы логарифмических уравнений и методы их решений

I. Уравнение вида $\log_a f(x) = b$ равносильно уравнению $f(x) = a^b$.

II. Уравнение $\log_a f(x) = g(x)$ равносильно уравнению $f(x) = a^{g(x)}$.

III. Уравнение вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ равносильно системе:

$$\begin{cases} g(x) = f(x), \\ f(x) > 0 \end{cases} \left(\text{или, что то же самое, системе} \begin{cases} g(x) = f(x), \\ g(x) > 0 \end{cases}\right).$$

IV. Уравнение вида $\log_{h(x)} f(x) = g(x)$ равносильно системе:

$$\begin{cases} (h(x))^{g(x)} = f(x), \\ h(x) > 0, \\ h(x) \neq 1, \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

Если при решении логарифмического уравнения встретились выражения $\log_a f(x)g(x)$, $\log_a \frac{f(x)}{q(x)}$ и $\log_a [f(x)]^n$, где n – четное число, то они преобразовываются соответственно по формулам для логарифма произведения, частного и степени. Во многих случаях при этом сужается ОДЗ исходного уравнения, поэтому, существует возможность потерять некоторые из его корней. Следовательно, указанные формулы целесообразно применять в следующем виде:

$$\log_a f(x)g(x) = \log_a |f(x)| + \log_a |g(x)|,$$

$$\log_a \frac{f(x)}{g(x)} = \log_a |f(x)| - \log_a |g(x)|,$$

$$\log_a [f(x)]^n = n \log_a |f(x)|, n \text{ – чётное число.}$$

Обратно, если при решении логарифмического уравнения встретились выражения $\log_a f(x) + \log_a g(x)$, $\log_a f(x) - \log_a g(x)$, и $n\log_a f(x)$ где n – чётное число, то они преобразовываются соответственно в выражения $\log_a f(x)g(x)$, $\log_a \frac{f(x)}{g(x)}$ и $\log_a [f(x)]^n$, тогда ОДЗ исходного уравнения может расшириться, в силу чего возможно приобретение посторонних корней. Помня об этом, в подобной ситуации необходимо следить за равносильностью преобразований и, если ОДЗ расширяется, делать проверку получаемых корней.

Аудиторные задания

4.1. Решите уравнения:

4.1.1. $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$.

4.1.2. $\left(\frac{5}{6}\right)^{1-2x} = \left(\frac{6}{5}\right)^{2+x}$.

4.1.3. $25^{3-2x} = \frac{1}{125}\cdot\left(25\sqrt{5}\right)^{-x}$.

4.1.4. $2\cdot 3^{x+1} - 6\cdot 3^{x-1} - 3^x = 9$.

4.1.5. $3^{x+1} + 3^x = 108$.

4.1.6. $4^x - 5\cdot 2^{x-\frac{1}{2}} + 2 = 0$.

4.1.7. $25^x + 24\cdot 5^{x-1} - 1 = 0$.

4.1.8. $25^{\frac{1}{x}} + 1 = 6\cdot 5^{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}$. В ответе указать меньший корень.

4.1.9. $3^x + 3^{3-x} - 12 = 0$. В ответе указать меньший корень.

4.1.10. $2^{2+x} - 2^{2-x} = 15$. В ответе указать меньший корень.

4.1.11. $\log_3\frac{x-2}{x+3} = 1$.

4.1.12. $25^{\frac{\log_3\log_3 25}{\log_3 25}} = 2\log_3 x$.

4.1.13. $(\lg x)^2 - 3\lg x + 2 = 0$. В ответе указать больший корень.

4.1.14. $\lg^2 x = \lg 10x$. В ответе указать произведение корней.

4.1.15. $\lg^2 x + \lg\frac{2}{x} + \lg\frac{5}{x} = 4$.

4.1.16. $\log_5\log_2 x = 1$.

4.1.17. $5\log_4 x + 3\log_x 4 = 8$. В ответе указать целые корни.

4.1.18. $\log_2(x+14) + \log_2(x+2) = 6$.

4.1.19. $\log_9(2x^2 + 9x + 5) + \log_{\frac{1}{3}}(x+3) = 0$.

4.1.20. $\log_{49}(2x^2 + x - 5) + \log_{\frac{1}{7}}(1+x) = 0$.

Домашнее задание

4.2. Решить уравнения:

4.2.1. $3^{3x} + 9\cdot 5^{2x} = 5^{2x} + 9\cdot 3^{3x}$.

4.2.2. $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{4-x^2}{2}} = 8^x$.

4.2.3. $\left(\frac{4}{9}\right)^x\cdot\left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{\lg 4}{\lg 8}$.

4.2.4. $2-3^{x-2}=3^{x-1}$.

4.2.5. $3^{2x-1}+3^{2x-2}-3^{2x-4}=315$.

4.2.6. $5^{\lg x}=50\left(10^{\lg 5}\right)^{\lg x}$.

4.2.7. $4^{x-1}-3\cdot 2^{x-2}=1$.

4.2.8. $16^{\frac{1}{x}}-20\cdot 2^{\frac{2}{x}-2}+4=0$.

4.2.9. $7^{x}-14\cdot 7^{-x}=3^{\log_3 2}+3$.

4.2.10. $\log_{\frac{1}{3}}(x+2)=\log_2\frac{1}{16}$.

4.2.11. $\lg^2 x+\lg x^2=3$.

4.2.12. $\log_5(\log_2 x)=1$.

4.2.13. $\log_3 x+\log_x 9=3$.

4.2.14. $\lg\left(x+\frac{4}{3}\right)-\lg\left(x-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\lg(x+6)-\frac{1}{2}\lg x$.

Ответы:

4.1.1 x = 1,5; 4.1.2 x = 3; 4.1.3 x = 6; 4.1.4 x = 1; 4.1.5 x = 3;
4.1.6 x_1 = – 0,5, x_2 = 1,5; 4.1.7 x = –1; 4.1.8 x = -2; 4.1.9 x = 1; 4.1.10 x = 2;
4.1.11 x = –5,5; 4.1.12 x = 5; 4.1.13 100; 4.1.14 10; 4.1.15 x_1 = 1000, x_2 = 0,1;
4.1.16 x = 32; 4.1.17 4; 4.1.18 x = 2; 4.1.19 x = 1; 4.1.20 x = 3;
4.2.1 x = 0; 4.2.2 x_1 = –1; x_2 = 4; 4.2.3 x = 2; 4.2.4 $\log_3\frac{9}{2}$; 4.2.5 x = 3;
4.2.6 x = 100; 4.2.7 x = 2; 4.2.8 x = 1; 4.2.9 x = 1; 4.2.10 x = 79;
4.2.11 $x_1=\frac{1}{1000}$, x_2 = 10; 4.2.12 x = 32; 4.2.13 x_1 = 3, x_2 = 9; 4.2.14 x = 2;

ЗАНЯТИЕ 5

НЕРАВЕНСТВА

Решением неравенства с одной переменной называется значение переменной, которое обращает его в верное числовое неравенство.

Решить неравенство – значит найти все его решения или доказать, что решений нет.

Неравенства, имеющие одно и то же множество решений, называются ***равносильными***. Неравенства, имеющие пустое множество решений также являются равносильными.

При решении неравенства пользуются следующими ***свойствами равносильности***:

1. если из одной части неравенства перенести в другую слагаемое с противоположным знаком, то получится неравенство равносильное ему;
2. если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится равносильное ему неравенство;

3. если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получится равносильное ему неравенство.

ЛИНЕЙНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Неравенства вида $\boxed{ax > b \; (ax < b, ax \leq b, ax \geq b)}$, где $a \in R, b \in R$ называются ***линейными неравенствами***.

Алгоритм решения линейного неравенства в общем виде

$$\boxed{ax > b}$$

1. если $a > 0$, $b \in R => x > \frac{b}{a}$;
2. если $a < 0$, $b \in R => x < \frac{b}{a}$;
3. если $a = 0$, $b \geq 0 => x \in \emptyset$;
4. если $a = 0$, $b \leq 0 => x \in R$.

ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Неравенства вида $\boxed{\frac{f(x)}{g(x)} > 0, \frac{f(x)}{g(x)} < 0, \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0, \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0}$, где $f(x), g(x)$ – многочлены переменной x, называются ***дробно-рациональными неравенствами***.

Решение дробно-рациональных неравенств методом интервалов

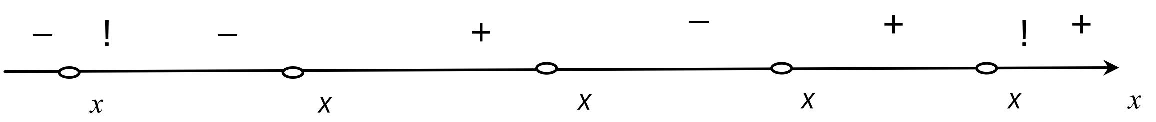
Пусть задано неравенство $\boxed{\frac{f(x)}{g(x)} > 0}$.

1. Раскладываем числитель и знаменатель дроби на линейные множители, т. е. например, представляем дробь в виде:

$$\frac{(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}(x-x_3)^{k_3}}{(x-x_4)^{k_4}(x-x_5)^{k_5}} > 0.$$

2. Наносим нули числителя и знаменателя на числовую ось и расставляем знаки. Причем, если нуль вошел в четной степени, то при переходе через него знак сохраняется, а если нуль вошел в нечетной степени, то при переходе через него знак меняется на противоположный.

Пусть в нашем примере k_1 и k_5 – четные числа, k_2, k_3, k_4 – нечетные и выполняются неравенства: $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$, тогда числовая прямая выглядит следующим образом:



3. Если мы решаем неравенство большее нуля, то выбираем промежутки со знаком «+», если мы решаем неравенство меньшее нуля, то выбираем промежутки со знаком «–».

В нашем случае решением является объединение промежутков:
$x \in (x_2, x_3) \cup (x_4, x_5) \cup (x_5, +\infty)$.

Восклицательный знак (!) означает, что при переходе через данный корень необходимо сохранить знак.

Замечания

1) Если неравенство нестрогое (≥,≤), то нули числителя всегда входят в ответ;

2) Нули знаменателя никогда не входят в ответ;

3) При решении неравенства коэффициенты при переменной *x* всегда делаем положительными с помощью свойства 3 равносильности неравенств.

КВАДРАТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Неравенства вида $\boxed{ax^2 + bx + c > 0}$ $(ax^2 + bx + c < 0, ax^2 + bx + c \leq 0,$ $ax^2 + bx + c \geq 0)$, где $a \in R, b \in R, c \in R, a \neq 0$ называются ***квадратными неравенствами***.

Алгоритм решения квадратного неравенства в общем виде

$$\boxed{ax^2 + bx + c > 0}$$

Рассматриваем случай $\boxed{a > 0}$, если $a < 0$, то применяем третье свойство равносильности и опять получаем случай $a > 0$.

1. Если $D = b^2 - 4ac > 0$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) > 0$, где $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ – корни квадратного трехчлена. Тогда, применяя метод интервалов, получаем решение неравенства $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$.

2. Если $D = b^2 - 4ac = 0$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2 > 0$, где $x_1 = \frac{-b}{2a}$ – корень этого квадратного трехчлена. Очевидно, что решением неравенства является объединение интервалов $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_1, +\infty)$.

Замечание

Если $ax^2 + bx + c \geq 0 => a(x - x_1)^2 \geq 0 => x \in R$.

3. Если $D = b^2 - 4ac < 0$ и $a > 0$, то парабола $y = ax^2 + bx + c$ расположена выше оси *Ox*, значит, решением неравенства является множество $x \in R$.

Замечание

Если $ax^2 + bx + c \geq 0$ и $D < 0, a > 0 => x \in R$.

$$\boxed{ax^2 + bx + c < 0}$$

Рассматриваем случай $\boxed{a > 0}$, если $a < 0$, то применяем третье свойство равносильности и опять получаем случай $a > 0$.

1. Если $D = b^2 - 4ac > 0$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) < 0$, где $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ – корни квадратного трехчлена. Тогда, применяя метод интервалов, получаем решение неравенства $x \in (x_1, x_2)$.

2. Если $D = b^2 - 4ac = 0$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2 < 0$, где $x_1 = \frac{-b}{2a}$ – корень этого квадратного трехчлена. Очевидно, что решением неравенства является пустое множество, т.е. $x \in \emptyset$.

Замечание

Если $ax^2 + bx + c \leq 0 => a(x - x_1)^2 \leq 0 => x = x_1$.

3. если $D = b^2 - 4ac < 0$ и $a > 0$, то парабола $y = ax^2 + bx + c$ расположена выше оси Ox, значит, решением неравенства является пустое множество, т.е. $x \in \emptyset$.

Замечание

Если $ax^2 + bx + c \leq 0$ и $D < 0, a > 0 => x \in \emptyset$.

НЕРАВЕНСТВА, СОДЕРЖАЩИЕ ЗНАК МОДУЛЯ

Неравенство, содержащее переменную под знаком модуля называется ***неравенством с модулем***.

Основные типы неравенств с модулем и методы их решений

I. Неравенство вида $|f(x)| < a$.

Решение:

1) Если $a \geq 0$, то $\begin{cases} f(x) < a, \\ f(x) > -a; \end{cases}$

2) Если $a < 0$, то $x \in \emptyset$.

II. Неравенство вида $|f(x)| > a$.

Решение:

1) Если $a \geq 0$, то $\left[\begin{array}{l} f(x) < a, \\ f(x) > -a; \end{array}\right.$

2) Если $a < 0$, то x принадлежит ОДЗ неравенсва.

III. Неравенство вида $|f(x)| < g(x)$. Неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

IV. Неравенство вида $|f(x)| > g(x)$. Неравенство равносильно совокупности системы и неравенства:

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x), \end{array}\right. \\ g(x) > 0. \end{array}\right. \qquad \text{или} \qquad g(x) < 0.$$

V. Неравенство вида $|f(x)| < |g(x)|$.

Решение:

$$|f(x)| < |g(x)| => |f(x)|^2 < |g(x)|^2 => \left(f(x)\right)^2 < \left(g(x)\right)^2 =>$$
$$=> (f(x))^2 - \left(g(x)\right)^2 < 0 => (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) < 0.$$

Дальше решаем неравенство, используя метод интервалов.

VI. Неравенства вида:

1) $|f(x)| \le f(x) => f(x) \ge 0,$
2) $|f(x)| \ge -f(x) => f(x) \le 0,$
3) $|f(x)| > -f(x) => f(x) > 0,$
4) $|f(x)| > f(x) => f(x) < 0,$
3) $|f(x) + g(x)| \ge |f(x)| + |g(x)| => f(x) \cdot g(x) \ge 0,$
4) $|f(x) - g(x)| \ge |f(x)| + |g(x)| => f(x) \cdot g(x) \le 0.$

VII. Неравенство вида $|f(x)| \pm |g(x)| > \ |h(x)|$.

Решение:

1) Находим нули каждого модуля, т.е. решаем уравнения $|f(x)| = 0,\ |g(x)| = 0,\ |h(x)| = 0.$

2) Наносим нули каждого модуля на числовую ось и раскрываем каждый модуль на каждом из полученных промежутков.

3) Решаем неравенство на каждом из полученных промежутков.

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Неравенство, содержащее переменную под знаком корня называется ***иррациональным неравенством***.

Основные типы иррациональных неравенств и методы их решений

I. Неравенство вида $\sqrt{f(x)} < a$.

Решение:

1) Если $a \ge 0$, то неравенство равносильно системе $\begin{cases} f(x) \le a^2, \\ f(x) \ge 0; \end{cases}$

2) Если $a < 0$, то $x \in \emptyset$.

II. Неравенство вида $\sqrt{f(x)} > a$.

Решение:

1) Если $a \ge 0$, то неравенство равносильно неравенству $f(x) \ge a^2$;
2) Если $a < 0$, то неравенство равносильно неравенству $f(x) \ge 0$.

III.Неравенство вида $\sqrt{f(x)} < g(x)$. Неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} f(x) < g^2(x), \\ g(x) \ge 0. \end{cases}$$

IV.Неравенство вида $\sqrt{f(x)} > g(x)$. Неравенство равносильно совокупности систем:

$$\begin{cases} f(x) \ge g^2(x), \\ g(x) \ge 0. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$$

V. Неравенство вида $\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)}$. Неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) \ge 0\,. \end{cases}$$

VI. Неравенства вида:

1) $f(x) \cdot \sqrt{g(x)} > 0$. Неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

2) $f(x) \cdot \sqrt{g(x)} < 0$. Неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

3) $f(x) \cdot \sqrt{g(x)} \ge 0$. Неравенство равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) \ge 0, \end{cases} \\ g(x) = 0. \end{array}\right.$$

4) $f(x) \cdot \sqrt{g(x)} \le 0$. Неравенство равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \le 0, \\ g(x) \ge 0, \end{cases} \\ g(x) = 0. \end{array}\right.$$

VII. Неравенство вида $A \cdot f(x) + B\sqrt{f(x)} + C < 0$ $(>, \ge, \le)$ с помощью *замены*: $\sqrt{f(x)} = t$ сводится к квадратному неравенству

$$A \cdot t^2 + B \cdot t + C < 0,$$

решая которое и применяя обратную замену приходим к неравенствам типа I или II.

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Неравенство, содержащее переменную в показателе степени, называется ***показательным неравенством***.

Основные типы показательных неравенств и методы их решений

I. Неравенство вида $a^{f(x)} > a^{g(x)}$. Решение неравенства основано на свойстве возрастания (убывания) показательной функции $y = a^{f(x)}$.

1) Если $a > 1$, то знак неравенства сохраняется, т.е. исходное неравенство равносильно неравенству $f(x) > g(x)$.

2) Если $0 < a < 1$, то знак неравенства меняется, т.е. исходное неравенство равносильно неравенству $f(x) < g(x)$.

II. Неравенство вида $A \cdot a^{2f(x)} + B \cdot a^{f(x)} + C > 0$ с помощью <u>замены:</u> $a^{f(x)} = t$ сводится к квадратному неравенству $A \cdot t^2 + B \cdot t + C > 0$, решая которое и, применяя обратную замену, приходим к неравенствам типа I.

III. Неравенство вида $A \cdot a^{2f(x)} + B \cdot a^{f(x)} \cdot b^{g(x)} + C \cdot b^{2g(x)} < 0$ равносильно неравенству $A \cdot \dfrac{a^{2f(x)}}{b^{2f(x)}} + B \cdot \dfrac{a^{f(x)}}{b^{f(x)}} + C < 0$ которое с помощью <u>замены</u>: $\dfrac{a^{f(x)}}{b^{f(x)}} = t$, сводится к квадратному неравенству $A \cdot t^2 + B \cdot t + C < 0$, решая которое и, применяя обратную замену, приходим к неравенствам типа I.

IV. Неравенство вида $h(x)^{f(x)} < h(x)^{g(x)}$ равносильно совокупности систем:

$$\begin{cases} h(x) > 1, \\ f(x) < g(x), \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 0 < h(x) < 1, \\ f(x) > g(x). \end{cases}$$

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Неравенство, содержащее переменную под знаком логарифма, называется ***логарифмическим неравенством***.

Основные типы логарифмических неравенств и методы их решений

I. Неравенство вида $\log_a f(x) > b$. Решение неравенства основано на свойстве возрастания (убывания) логарифмической функции $y = \log_a f(x)$.

1) Если $a > 1$, то знак неравенства сохраняется, т.е. исходное неравенство равносильно неравенству $f(x) > a^b$.

2) Если $0 < a < 1$, то знак неравенства меняется, т.е. исходное неравенство равносильно системе неравенств: $\begin{cases} f(x) < a^b \\ f(x) > 0. \end{cases}$

II. Неравенство вида $\log_a f(x) < \log_a g(x)$:

1) Если $a > 1$, то знак неравенства сохраняется, т.е. исходное неравенство равносильно системе неравенств: $\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$

2) Если $0 < a < 1$, то знак неравенства меняется, т.е. исходное неравенство равносильно системе неравенств: $\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$

Аудиторные занятия

5.1. Решить неравенства:

5.1.1. $x^2 - 9x + 14 \le 0$. В ответе указать наибольшее целое решение.

5.1.2. $(x^2+1)(x^2+x+1)^3(x+5)^5 > 0$. В ответе указать наименьшее целое решение.

5.1.3. $\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{5}$.

5.1.4. $\dfrac{x^2-5x+4}{(x^2+2)(x+2)} \le 0$. В ответе указать наименьшее положительное решение.

5.1.5. $\dfrac{x}{x-1} + \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{8}{x^2-1} < 0$. В ответе указать наибольшее целое решение.

5.1.6. $|x+3{,}5| > 6$. В ответе указать наибольшее целое отрицательное решение.

5.1.7. $|x^2-2x-3| < 3x-3$. В ответе указать наибольшее целое решение.

5.1.8. $x^2 + x - 10 < 2|x-2|$. В ответе указать наибольшее целое решение.

5.1.9. $\sqrt{x+5} < 2$. В ответе указать наибольшее целое решение.

5.1.10. $\dfrac{6-x}{\sqrt{x^2-8x+7}} \ge 0$. В ответе указать наибольшее целое решение.

5.1.11. $\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x(2-x)} > 8\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3x}$.

5.1.12. $\sqrt{0{,}8^{x(x-3)}} > 0{,}64$.

5.1.13. $5^{\log_5(x^2-x)} \le 3^{\log_3(3x-3)}$.

5.1.14. $5^{2x+1} > 5^x + 4$.

5.1.15. $\log_2(x^2+3x) \le 2$.

5.1.16. $\log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{2-3x}{x}\right) \ge -1$. В ответе указать середину промежутка решений.

5.1.17. $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 + \dfrac{x}{2} - 1\right) < 1 + \log_{\frac{1}{2}} x$.

5.1.18. $\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2 + \log_{\frac{1}{2}} x - 2 \geq 0$.

5.1.19. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{9}}(2x^2-3x+1)} < 1$.

5.1.20. $\dfrac{x^2(x-2)^2}{\log_{0,5}(x^2+1)} \geq 0$.

Домашнее задание

5.2. Решить неравенства:

5.2.1. $\dfrac{1}{x-1} \geq -2$.

5.2.2. $\dfrac{2x^2+x+2}{x^2-2} < 0$.

5.2.3. $\dfrac{4x-1}{3x+1} \geq 1$.

5.2.4 $|x^2-8x+15| < x-3$.

5.2.5 $|x+3| + |x-4| \leq 11$. В ответе указать наименьшее решение.

5.2.6 $\sqrt{24-10x+x^2} > x-4$.

5.2.7. $\left(\frac{3}{4}\right)^{6x+10-x^2} < \dfrac{27}{64}$.

5.2.8. $\left(\left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{1}{x^2}}\right)^{x^2-2x} \geq 1$.

5.2.9. $\log_{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right) - \log_2(x-1) \geq 1$.

5.2.10. $\log_3^2 x - 6\log_3 x + 5 \geq 0$.

Ответы:

5.1.1 $\{7\}$; 5.1.2 $\{-4\}$; 5.1.3 $(0;5)$; 5.1.4 $\{1\}$; 5.1.5 {2}; 5.1.6{-10}; 5.1.7 {4}; 5.1.8 {2}; 5.1.9 {–2}; 5.1.10 {0}; 5.1.11 $x \in (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$; 5.1.12$(-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$; 5.1.13 (1; 3]; 5.1.14 [–4; –3)∪(0; 1]; 5.1.15 {2}; 5.1.16 {0,5}; 5.1.17 (1; +∞); 5.1.18 (0; $\frac{1}{2}$]∪[4; +∞); 5.1.19 (0; $\frac{1}{2}$) ∪ (1; $\frac{3}{2}$); 5.1.20 {2}; 5.2.1 (–∞; $\frac{1}{2}$] ∪ (1; +∞); 5.2.2 {0}; 5.2.3 (–∞; $-\frac{1}{3}$) ∪ [2; +∞); 5.2.4 (4; 6); 5.2.5 {–5}; 5.2.6 (–∞; 4); 5.2.7 (–1; 7); 5.2.8 (0; 2]; 5.2.9 (1; $\frac{3}{2}$]; 5.2.10 (0; 3)∪(243; +∞).

ЗАНЯТИЕ 6

ПЕРЕМЕННЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ФУНКЦИИ

1. *Интервалы*

Множество чисел x, удовлетворяющих неравенству $a<x<b$, называется ***интервалом*** и обозначает (a,b). Множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a\le x\le b$ называется ***отрезком*** и обозначается $[a,b]$.

Интервал и отрезок носят общее название ***промежуток***.

Эквивалентные неравенства (при $a>0$):

$$\boxed{x^2<a^2 \Leftrightarrow |x|<a \Leftrightarrow -a<x<a}$$

определяют промежуток, симметричный относительно нуля.

2. *Переменные величины и функции*

Если каждому значению переменной x поставлено в соответствии одно число, то переменная y, определяемая совокупностью этих чисел, называется ***однозначной функцией***. Переменная x называется при этом ***аргументом***, а данная совокупность значений аргумента – ***областью определения функции***.

То, что y есть функция от x, символически записывают в виде $y=f(x)$ или $y=F(x)$ или $y=\varphi(x)$. Символы $F(x)$, $f(x)$, $\varphi(x)$ обозначают законы соответствия между переменными x и y, в частности, они могут означать совокупность действий или операций, которые нужно выполнить над x, чтобы получить соответствующие значения y.

Аудиторные задания

6.1.1. Построить интервалы переменного x, удовлетворяющего неравенствам:
1) $|x|<4$; 2) $x^2\le 9$; 3) $|x-4|<1$;
4) $-1<x-3\le 2$; 5) $x^2>9$; 6) $(x-2)^2\le 4$.

6.1.2. Записать неравенствами и построить интервалы изменения переменных:
1) $[-1, 3]$; 2) $(0, 4)$; 3) $[-2, 1]$.

6.1.3. Определить интервал изменения переменного $x=1-\frac{1}{t}$, где t принимает любое значение большее либо равное 1.

В задачах 6.2.1 – 6.2.3 построить по точкам на отрезке $|x|\le 3$ графики указанных функций.

6.2.1.
1) $y=2x$; 2) $y=2x+2$; 3) $y=2x-2$.

6.2.2.
1) $y=x^2$; 2) $y=x^2+1$; 3) $y=(x-1)^2$.

6.2.3.
1) $y=\frac{x^3}{3}$; 2) $y=\frac{x^3}{3}+1$; 3) $y=\frac{x^3}{3}-1$.

6.3.1. Построить графики функций: 1) $y=\frac{6}{x}$; 2) $y=2x$; 3) $y=\log_2 x$.

Какую особенность в расположении этих кривых относительно осей координат можно заметить?

6.3.2. Построить на одном чертеже графики функций:

1)$y=\sin x$;

2) $y=\cos x$

3) $y=\sin x+\cos x$.

6.3.3. Найти нули x_1 и x_2 функции $y=4x-x^2$ и построить ее график на отрезке $[x_1-1, x_2+1]$.

6.3.4. Построить графики функций:

1) $y=|x|$; 2) $y=-|x-2|$; 3) $y=|x|-x$.

В задачах 6.4.1-6.4.4 найти области определения вещественных значений функций и построить их графики.

6.4.1.

1) $y=\sqrt{x+2}$; 2) $y=\sqrt{9-x^2}$; 3) $y=\sqrt{4x-x^2}$.

6.4.2.

1) $y=\sqrt{-x}+\sqrt{4+x}$; 2) $y=\arcsin\frac{x-1}{2}$.

6.4.3.

1) $y=\frac{x(2\pm\sqrt{x})}{4}$; 2) $y=\pm x\sqrt{4-x}$.

6.4.4.

1) $y=-\sqrt{2\sin x}$; 2) $y=-\frac{x\sqrt{16-x^2}}{2}$.

6.5.1. 1) $f(x)=x^2-x+1$. Вычислить: $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$, $f(2)$, $f(a+1)$;

2) $\varphi(x)=\frac{2x-3}{x^2+1}$. Вычислить: $\varphi(0), \varphi(-1), \varphi(\frac{2}{3})$, $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$, $\frac{1}{\varphi(x)}$.

6.5.2. $F(x)=x^2$. Вычислить: 1)$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}$; 2) $F\left(\frac{a+h}{2}\right)-F\left(\frac{a-h}{2}\right)$.

6.5.3. $f(x)=x^2$; $\varphi(x)=x^3$. Вычислить: $\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}$.

6.5.4. $F(x,y)=x^3-3xy-y^2$. Вычислить $F(4,3)$ и $F(3,4)$.

6.5.5. Функция $f(x)$ называется ***четной***, если $f(-x)=f(x)$ и область определения симметрична относительно оси Oy и ***нечетной***, если $f(-x)=-f(x)$ и область определения симметрична относительно начала координат. График четной функции симметричен относительно оси Oy , график нечетной функции симметричен относительно начала координат. Указать, какие из следующих функций четные и какие нечетные:

1)$f(x)=\frac{\sin x}{x}$; 2) $\varphi(x)=\frac{a^x-1}{a^x+1}$; 3) $F(x)=a^x+\frac{1}{a^x}$; 4) $\Phi(x)=a^x-\frac{1}{a^x}$;
5)$\psi(x)=x(\sin x)^2-x^3$; 6) $f_1(x)=x+x^2$.

Домашнее задание

6.6.1. Построить интервалы изменения переменного x, удовлетворяющего неравенствам:

1) $|x| < 3$; 2) $x^2 \leq 4$; 3) $|x-2| < 2$; 4) $(x-1)^2 \leq 4$.

6.6.2. Определить интервал изменения переменного $x = 2 + \frac{1}{t}$, где t принимает любое значение ≥ 1.

6.6.3. Построить графики функций:

1) $y = 4 - \frac{x^3}{2}$ на отрезке $|x| \leq 2$;

2) $y = 3{,}5 + 3x - \frac{x^2}{2}$ между точками пересечения с осью абсцисс.

6.6.4. Построить графики функций:

1) $y = x - 4 + |x-2|$ на отрезке $[-2;5]$.

2) $y = 1 - \cos x$ на отрезке $|x| \leq 2$.

6.6.5. Построить графики функций:

1) $y = -\frac{4}{x}$; 2) $y = 2^{-x}$.

6.6.6. Найти область определения функций:

1) $y = \sqrt{4-x^2}$; 2) $y = \sqrt{x+1} - \sqrt{3-x}$;

3) $y = 1 - \sqrt{2\cos 2x}$; 4) $y = \frac{4}{1+\sqrt{x^2-4}}$.

6.6.7. 1) $f(x) = \frac{2x+2}{x^2+1}$; вычислить $f(0), f(-2), f\left(-\frac{1}{2}\right), f(x-1), f(\frac{1}{2})$;

2) $\varphi(x) = x^3$; вычислить $\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x-h)}{h}$;

3) $f(x) = 4x - x^2$; вычислить $f(a+2) - f(a-1)$.

5. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Вариант 1

1. Вычислите: $\dfrac{39\cdot\left(-\frac{1}{32}\right)^{-1}}{(-2)^{15}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-6}\cdot 64^{-2}+3-4\cdot(0{,}125)^{-1}}$;

2. Упростить выражение: $\left(\dfrac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{a+\sqrt{a^2-b^2}}-\dfrac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right)-\dfrac{4\cdot\sqrt{a^4-a^2b^2}}{5b^2}$;

3. Упростите выражение: $\dfrac{a^3+a^2-2a}{a|a+2|-a^2+4}$;

4. Вычислите: $\sin(4\pi-\frac{\pi}{6})-\cos(-\frac{\pi}{3})-\mathrm{tg}^2\left(3\pi-\frac{\pi}{4}\right)x|\cos\pi|+\mathrm{ctg}\frac{\pi}{2}$;

5. Докажите тождество: $\dfrac{1+\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)-\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)-\sin\frac{\alpha}{2}}=-\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{4}$;

6. Решите уравнение: $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=24$;

7. Решите неравенство: $5^{\frac{x+2}{x-1}}>25$;

8. Найдите область определения функции: $y=-\dfrac{\sqrt{16-x}}{x\lg(2x-4)}$;

9. Постройте графики функций:

9.1. $y=\dfrac{x+1}{|x|}$;

9.2. $\begin{cases}x=2\cos^3 t\\ y=2\sin^3 t\end{cases}$;

9.3 $r=\dfrac{4}{1+\cos\varphi}$.

Вариант 2

1. Вычислите: $\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{6}\cdot 4^{5}+(-0{,}25)^{-4}\cdot 16^{2}(2^{-6})^{2}}{\left(\frac{1}{16}\right)^{-1}\cdot 3}$;

2. Упростите выражение: $\dfrac{|x-1|+|x|+x}{3x^{2}-4x+1}$;

3. Упростите выражение: $\dfrac{x-1}{x+x^{1/2}+1}+\dfrac{x^{0,5}+1}{x^{0,6}-1}+\dfrac{2}{x^{-5,8}}$;

4. Вычислите: $\sin^{2}99^{\circ}+\cos^{2}81^{\circ}+\mathrm{ctg}^{2}315^{\circ}$;

5. Найдите $\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, зная что $\mathrm{tg}\alpha=3\dfrac{3}{7}$ и $180^{\circ}<\alpha<270^{\circ}$

6. Решите уравнение: $5x^{2}+35x+32=\sqrt{x^{2}+7x+10}$;

7. Решите неравенство $3\log_{3}\frac{3x-1}{x}<1$;

8. Найдите область определения функции $y=\sqrt{-x}+\dfrac{1}{\sqrt{2+x}}$;

9. Постройте графики функций:

9.1 $y=3^{\log_{3}|x|}$;

9.2 $\begin{cases} x=\sin t \\ y=\cos t \end{cases}$;

9.3 $r=2(1+cos\varphi)$.

Вариант 3

1. Вычислите: $\left(\left(3^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}} - \left(\sqrt{5}\right)^{0} + 4(0{,}125)^{-1}\right) \cdot 29^{-1}$;

2. Упростите выражение: $\dfrac{2}{a} - \left(\dfrac{a+1}{a^3-1} - \dfrac{1}{a^2+a+1} - \dfrac{2}{1-a}\right) : \dfrac{a^3+a^2+2a}{a^2-1}$;

3. Упростите выражение: $\dfrac{a^{4/3} - 8a^{1/3}b}{a^{2/3} + 2\sqrt[3]{ab} + 4b^{2/3}} \cdot \left(1 - 2 \cdot \sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}\right)^{-1}$;

4. Вычислите: $1/3\,\mathrm{tg}^2(\pi/3) - \left|\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right| + \cos\left(4\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) - 3\mathrm{tg}\,7\pi 4 + 4\cos 2\pi$;

5. Найдите $\mathrm{tg}\dfrac{\beta}{2}$, зная что $\sin\beta = -\dfrac{11}{61}$ и $180^\circ < \beta < 270^\circ$

6. Решите уравнение: $|3x^2 + 5x - 9| = |6x + 15|$;

7. Решите неравенство: $2^x \log_{1/3} x < 0$;

8. Найдите область определения функции: $y = \dfrac{\sqrt{3-x}}{x\lg(2x-1)}$;

9. Постройте графики функций:

9.1. $y = \dfrac{x^3 - x^2}{2|x-1|}$;

9.2 $\begin{cases} x = t^4 - 4, \\ y = t; \end{cases}$

9.3 $r = 4\cos\varphi$.

Вариант 4

1. Вычислите: $\dfrac{\left(0{,}5:1{,}25+\frac{7}{5}:1\frac{4}{7}-\frac{3}{11}\right)\cdot 3}{\left(1{,}5+\frac{1}{4}\right):18\frac{1}{3}}$;

2. Упростите выражение: $\dfrac{b^{1/2}}{1+a^{1/2}}:\left(\dfrac{\sqrt{b}-\dfrac{a}{\left(\sqrt{ab}\right)^{-1}}}{1-a}-\sqrt{ab}\right)+\dfrac{a}{b}\cdot\left(-3\frac{3}{8}\right)^{-1/3}$;

3. Упростите выражение: $\dfrac{\sqrt{(3x+2)^2-24x}}{3\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}}$;

4. Вычислите: $\sin\left(\dfrac{17\pi}{6}\right)+\cos\left(-\dfrac{11\pi}{3}\right)-\arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right)$;

5. Найдите $\dfrac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha}$, зная что $\sin\alpha=0{,}6$ и $0<\alpha<90^\circ$

6. Решите уравнение: $|x^2-5x+6|=x^2-5x+6$;

7. Решите неравенство: $0{,}4^{x^2-x-20}>1$;

8. Найдите область определения функции:

$$y=\frac{x^4-\sin^2 x-2^x+\sqrt{x^2+x+1}}{\lg(4-x)};$$

9. Постройте графики функций:

9.1. $y=\dfrac{\cos^2 x}{\sqrt{\cos^2 x}}$;

9.2 $\begin{cases} x=\sin t, \\ y=2^t; \end{cases}$

9.3 $r=2\cos 2\varphi$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Куланин Е.Д. 3000 конкурсных задач по математике/ Е.Д. Куланин, В.П. Норин и др. М.: Айрис-пресс, 2003. – 624 с.

2. Азаров А.И. Математика. Пособие для подготовки к экзамену и централизованному тестированию/ А.И. Азаров, В.И. Булатов, А.И. Жук и др. Мн.: «Аверсэв», 2003. – 396 с.

3. Веременюк В.В. Математика. Пособие для подготовки к централизованному тестированию и вступительному экзамену/ В.В. Веременюк, В.В. Кожушко. Мн.: ТетраСистемс, 2004. – 128 с.

4. Ананченко К.О. Алгебра. Учебник для 8 класса общеобразовательных школ с углубленным изучением математики/ К.О. Ананченко, Н.Т. Воробьев, Г.Н. Петровский. Мн.: «Народная асвета», 1994. – 542 с.

5. Ананченко К.О. Алгебра и начала анализа. Учебное пособие для 10 класса общеобразовательных школ с углубленным изучением математики/ К.О. Ананченко, В.С. Коваленко и др. Мн.: «Народная асвета», 1996. – 575 с.

6. Ананченко К.О. Алгебра и начала анализа. Учебное пособие для 11 класса общеобразовательных школ с углубленным изучением математики/ К.О. Ананченко, Г.Н. Петровский. Мн.: «Народная асвета», 1997. – 375 с.