МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Технология машиностроения»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

«Разработка математической модели и нахождение оптимального опорного плана при решении задачи выбора варианта технологического процесса с использование алгоритма метода потенциалов»

по курсу «Дискретная математика и математическое моделирование технологических задач в машиностроении»

для студентов специальностей 1-36 01 01 «Технология машиностроения», 1-36 01 04 «Оборудование и технологии высокоэффективных процессов обработки материалов», направления специальности 1-53 01 01-01 «Автоматизация технологических процессов и производств (машиностроение и приборостроение)»

Учебное электронное пособие

Минск 2009

УДК 621.01

Составители:
С.Г. Бохан, С.И. Пармон

Рецензенты:
В.И. Туромша, заведующий кафедрой «Металлорежущие станки и инструменты» БНТУ, кандидат технических наук, доцент;
В.И. Клевзович, декан факультета повышения квалификации и переподготовки специалистов Учреждения образования «Государственный институт повышения квалификации и переподготовки кадров в области газоснабжения «ГАЗ-ИНСТИТУТ», кандидат технических наук, доцент

В работе приведены основные положения, методические указания и пример решения технологической задачи с использованием алгоритма метода потенциалов.

Работа предназначена для студентов специальностей 1-36 01 01 «Технология машиностроения», 1-36 01 04 «Оборудование и технологии высокоэффективных процессов обработки материалов» и направления специальности 1-53 01 01-01 «Автоматизация технологических процессов и производств (машиностроение и приборостроение)», а также для других специальностей машиностроительного профиля.

Белорусский национальный технический университет
пр-т Независимости, 65, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.(017) 293-91-97 факс (017) 292-91-37
Регистрационный № БНТУ/МСФ23 – 3.2009

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЦЕЛЬ РАБОТЫ. 4

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.. 4

1. ПОТЕНЦИАЛЫ ПОСТАВЩИКОВ И ПОТРЕБИТЕЛЕЙ 5

Пример 1. 7

2. АЛГОРИТМ МЕТОДА ПОТЕНЦИАЛОВ 8

Пример 2. 9

3. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ 15

4. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ 15

5. ЛИТЕРАТУРА 15

6. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ 16

ВВЕДЕНИЕ

ЦЕЛЬ РАБОТЫ.

Овладение навыками решения задачи оптимизации выбора варианта технологического процесса с помощью алгоритма метода потенциалов.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

На технологических линиях производится соответственно некоторое количество изделий с использованием различных видов заготовок, выпуск которых имеет ограничения. Известна технологическая себестоимость изготовления изделий из различных видов заготовок по различным вариантам технологических процессов на технологических линиях. Требуется решить задачу на основании математической модели с помощью алгоритма метода потенциалов, пользуясь которой, можно найти вариант изготовления изделий из различных видов заготовок, таким образом, чтобы общие технологические затраты были бы минимальны.

1. ПОТЕНЦИАЛЫ ПОСТАВЩИКОВ И ПОТРЕБИТЕЛЕЙ

Потенциалами u_i и v_i соответственно *поставщиков* A_i и *потребителей* B_j являются компоненты оптимального плана задачи, двойственной к задаче в классической постановке.

Прямая задача:

$$f = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{mn}x_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \quad (\min) \tag{1}$$

$$x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = \overline{1,m}) \tag{2}$$

$$x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{mj} = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1,n}) \tag{3}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}). \tag{4}$$

Двойственная задача:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \quad (\max), \tag{5}$$

$$u_i + v_j \leq c_{ij} \quad (i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,n}) \tag{6}$$

u_i и v_j – произвольного знака. (7)

В модели (5) – (7) переменные u_i отвечают ограничениям по запасам, а v_j – ограничениям по потребностям.

Если (x^*_{ij}) — оптимальный план задачи (1) – (4), а $(u^*_i\ ;\ v^*_j\ )$ — соответствующий оптимальный план задачи (5) – (7), то, как следует из теории двойственности, каждому $x^*_{ij} > 0$ соответствует равенство

$$u_i{}^* + v_j{}^* = c_{ij}\ , \qquad (8)$$

а каждому $x^*_{ij} = 0$ отвечает неравенство

$$u_i{}^* + v_j{}^* \le c_{ij}, \qquad (9)$$

т. е. если в распределительной таблице содержится оптимальный план, то для каждой загруженной клетки выполняется равенство (8), а для каждой свободной клети — неравенство (9). Пользуясь этим утверждением, можно определить потенциалы: достаточно по загруженным клеткам составить систему уравнений типа (8) и решить ее. Правда, эта система является неопределенной, поскольку содержит $(m + n - 1)$ уравнений с $(m + n)$ неизвестными. Для ее решения одну из неизвестных (любую) фиксируют, придавая ей определенное числовое значение (любое). Доказывается, что на результат исследования опорного плана на оптимальность это никак не влияет.

Из теории двойственности известно, что для канонической формы задачи линейного программирования компоненты оптимального плана двойственной задачи являются оценками влияния свободных членов ограничительных уравнений задачи на оптимум f_{max} целевой функции.

Применительно к паре двойственных задач (1) — (4) и (5) — (7) имеем: $u^*_i = \partial f_{min}/\partial a_i;\ v^*_j = \partial f_{min}/\partial b_j$, т. е. потенциалы представляют собой оценки, определяющие влияние объемов a_i запаса и уровней спроса на оптимальную величину f_{min} транспортных расходов.

Оценки Δ_{ks} свободных клеток связаны с потенциалами u_k и v_s зависимостью:

$$\Delta_{ks} = c_{ks} - (u_k + v_s). \qquad (10)$$

Пользуясь формулой (10), вычисляют оценки свободных клеток.

Пример 1.

С использованием потенциалов исследовать на оптимальность опорный план, содержащийся в табл. 1.

Таблица 1

	$B_1(75)$	$B_2(80)$	$B_3(60)$	$B_4(85)$	
$A_1(100)$	6	7 5	3 60	5 35	u_1
$A_2(150)$	1 75	2 75	5	6	u_2
$A_3(50)$	3	10	20	1 50	u_3
	v_1	v_2	v_3	v_4	

Решение:

По загруженным клеткам составляем систему уравнений типа (8):

$$\left.\begin{aligned} u_1 + v_2 &= 7 \\ u_1 + v_3 &= 3 \\ u_1 + v_4 &= 5 \\ u_2 + v_1 &= 1 \\ u_2 + v_2 &= 2 \\ u_3 + v_4 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Получили систему шести уравнений с семью неизвестными. Полагая, например, $u_1 = 0$, приходим к системе с шестью неизвестными, решая которую, находим: $v_2 = 7$; $v_3 = 3$; $v_4 = 5$; $u_2 = -5$; $v_1 = 6$; $u_3 = -4$.

По формуле (10) вычисляем оценки Δ_{ks} свободных клеток:

$$\Delta_{11} = c_{11} - (u_1 + v_1) = 6 - (0+6) = 0$$

$$\Delta_{23} = c_{23} - (u_2 + v_3) = 5 - (-5 + 3) = 7$$

$$\Delta_{24} = 6 - (-5 + 5) = 6$$

$$\Delta_{31} = 3 - (-4 + 6) = 1$$

$$\Delta_{32} = 10 - (-4 + 7) = 7$$

$$\Delta_{33} = 20 - (-4 + 3) = 21$$

Все оценки неотрицательны, следовательно, содержащийся в табл. 1 опорный план является оптимальным.

2. АЛГОРИТМ МЕТОДА ПОТЕНЦИАЛОВ

Ниже приведен алгоритм метода потенциалов.

1. Условия задачи записывают в форме распределительной таблицы.
2. Сравнивают общий запас груза с суммарным спросом и в случае нарушения равенства вводят в рассмотрение фиктивного поставщика (потребителя).
3. Строят начальный опорный план.
4. Вычисляют потенциалы u_i и v_i поставщиков и потребителей посредством решения системы уравнений типа (8).
5. Вычисляют оценки Δ_{KS} свободных клеток по формуле (10). Если оценки всех свободных клеток неотрицательны, то исследуемый план является оптимальным и остается подсчитать транспортные расходы. Если же среди оценок есть отрицательные, то выбирают клетку с наибольшей по абсолютной величине отрицательной оценкой и переходят к следующему пункту алгоритма.

6. Загружают выделенную в предыдущем пункте свободную клетку, получают новый опорный план и возвращаются к п. 4 алгоритма.

Замечание. Если в п. 5 все оценки положительны, то существует единственный оптимальный план. Если же среди неотрицательных оценок имеется хотя бы одна нулевая, то задача имеет множество оптимальных планов.

Пример 2.

Детали изготавливаются по трем вариантам техпроцессов в количестве 300, 1200 и 720 т, всего 2200 т. Предполагается их поставить на три участка: на 1-й – 1100 т, на 2-й – 420 т, на 3-й – 800 т. Затраты на переналадку и технологические нужды приведены в табл. 2. Спланировать производство деталей так, чтобы по возможности выполнить план поставок при минимальных затратах.

Решение:

Изготовлено будет 300, 1200 и 720 т, всего 2200 т деталей. Поставить же потребителям надо 2300 т. Таким образом, возникает задача открытого типа. Придется ввести в рассмотрение фиктивного поставщика (ФП) с "запасом" деталей в 2300 – 2200 = 100 т и нулевыми "тарифами".

Таблица 2

Техпроцесс	Затраты		
	Уч.1	Уч.2	Уч.3
№ 1	80	20	40
№ 2	100	30	20
№ 3	70	10	30

Предлагается составить математическую модель, обозначив через x_{ij} объем поставки деталей (в т) по i-му техпроцессу j-му участку ($i = \overline{1,4}$; $j = \overline{1,3}$); "тарифами" здесь являются затраты на переналадку и технологические нужды. Целевую функцию f, выражающую суммарный затраты на переналадку и технологические нужды, надо минимизировать. После этого все данные задачи можно будет записать в виде табл. 3.

Таблица 3

Техпроцесс	Уч.1 (1100)	Уч.2 (420)	Уч.3 (800)	
№ 1 (300)	80 300	20	40	u_1
№ 2 (1200)	100 700 -	30	20 + 500	u_2
№ 3 (720)	70 +*	10 420	30 - 300	u_3
ФП (100)	0 100	0	0	u_4
	v_1	v_2	v_3	

В табл. 3 содержится опорный план, построенный способом «минимального элемента». Загружено $m + n - 1 = 4 + 3 - 1 = 6$ клеток, так что план невырожденный.

Для исследования его на оптимальность составляем систему уравнений (8) для определения потенциалов:

$$u_1 + v_1 = 80$$

$$u_2 + v_1 = 100$$

$$u_2 + v_3 = 20$$

$$u_3 + v_2 = 10$$

$$u_3 + v_3 = 30$$

$$u_4 + v_1 = 0$$

Полагая, например, $u_2 = 0$, находим:

$$u_1 = -20;\ u_3 = 10;\ u_4 = -100;\ v_1 = 100;\ v_2 = 0;\ v_3 = 20.$$

Теперь по формуле (10) определяем оценки свободных клеток:

$$\Delta_{12} = 20 - (-20 + 0) = 40; \quad \Delta_{13} = 40 - (-20 + 20) = 40;$$

$$\Delta_{22} = 30; \quad \Delta_{31} = -40; \quad \Delta_{42} = 100; \quad \Delta_{43} = 80.$$

Среди оценок имеется отрицательная, поэтому план в табл. 3 неоптимальный и его следует преобразовать в новый план, загрузив клетку (3; 1). Контур для нее в табл. 3 построен. По этому контуру для клетки (3; 1) находим поставку $\lambda = \min_{\text{четн.}} x_{ij} = \min_{\text{четн}}(700;\ 300) = 300$. После сдвига $\lambda = 300$ получаем новый опорный план, содержащийся в табл. 4.

Таблица 4

80 300	20	40	80
100 400 -	30 *+	20 800	100
70 300 +	10 420 -	30	70
0 100	0	0	0
0	-60	-80	

Исследуя этот план аналогично предыдущему, находим потенциалы (они записаны рядом с таблицей), а по ним — оценки свободных клеток:

$$\Delta_{12} = 0;\ \Delta_{13} = 40;\ \Delta_{22} = -10;\ \Delta_{33} = 40;\ \Delta_{42} = 60;\ \Delta_{43} = 80.$$

Среди оценок одна отрицательная (Δ_{22}), поэтому план неоптимальный и его следует улучшить, загружая клетку (2;2) поставкой λ = 400. Новый опорный план приведен в табл. 5.

Таблица 5

80 300 -	20 *+	40	80
100	30 400	20 800	90
70 700 +	10 - 20	30	70
0 100	0	0	0
0	-60	-70	

Исследуя его на оптимальность, находим потенциалы (они записаны рядом с таблицей) и оценки свободных клеток:

$$\Delta_{12} = 0;\ \Delta_{13} = 30;\ \Delta_{21} = 10;\ \Delta_{33} = 30;\ \Delta_{42} = 60;\ \Delta_{43} = 70.$$

Отрицательных оценок нет, следовательно, в табл. 5 содержится оптимальный план:

$$\boldsymbol{X}^*_1 = \begin{pmatrix} 300 & 0 & 0 \\ 0 & 400 & 800 \\ 700 & 20 & 0 \end{pmatrix}.$$

Итак, по оптимальному плану X^*_1 по техпроцессу № 1 все детали следует направить на участок 1; по техпроцессу № 2 будет изготовлено 400 т для участка 2 и 800 т для участка 3; по техпроцессу № 3 будет изготовлено 700 т для участка 1 и 20 т для участка 2. Судя по последней строке табл. 5, 100 т деталей для участка 1 недополучит. Технологические затраты минимизируются и составят 101200 ден. ед.

В табл. 5 оценка $\Delta_{12} = 0$. Это свидетельствует о том, что задача имеет и другие оптимальные планы. Загружая клетку (1;2) поставкой $\lambda = \min_{\text{четн}}(300;\ 20) = 20$, получим еще один оптимальный опорный план:

$$X^*_1 = \begin{pmatrix} 280 & 20 & 0 \\ 0 & 400 & 800 \\ 720 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Нередко целесообразно минимизировать суммарные затраты на производство и транспортировку продукции. С подобной задачей можно столкнуться при решении вопросов связанных с оптимальным размещением производственных объектов. Здесь может оказаться экономически более выгодным доставлять сырье из отдаленного источника, но зато при меньшей его себестоимости. В таких задачах критерием оптимальности служит сумма затрат на производство единицу продукции и на ее перевозку.

Часто необходимо вводить ограничения, согласно которым, отдельные поставки от определенного поставщика определенному потребителю должны быть исключены (из-за отсутствия достаточного количества или необходимых условий, чрезмерной перегрузки оборудования и т.п.). Значит, в матрице перевозок, содержащей оптимальный план, определенные клетки должны остаться свободными. Это достигается искусственным завышением показателей Cij в клетках, перевозки через которые следует запретить, до значений, заведомо больших всех, с которыми их придется сравнивать в процессе решения задачи.

Иногда приходится учитывать ограничения по пропускной способности некоторых маршрутов. Если, например, по маршруту A_kB_s можно провезти не более d единиц груза, то B_s-й столбец матрицы перевозок разбивается на два: B'_s и B''_s. В первом спрос принимается равным разности между действительным спросом b_s и ограничением d, во втором — равным ограничению d. Тарифы c_{ij} в обоих столбцах одинаковы и равны данным, но в первом в клетке, соответствующей ограничению, вместо истинного тарифа c_{ks} ставится искусственно завышенный тариф M (клетка блокируется). Затем задача решается обычным способом.

Может случиться, что некоторые поставки по определенным маршрутам обязательны и должны войти в оптимальный план независимо от того, выгодно это или нет в условиях всей задачи. Тогда соответственно уменьшают запасы груза у поставщиков и спрос у потребителей и решают задачу относительно тех поставок, которые не обязательны.

Многие задачи, по физическому смыслу не являющиеся транспортными, в математическом отношении подобны транспортной, так как описываются аналогичной моделью (об оптимальном распределении производства изделий между предприятиями, о наиболее рациональном закреплении механизмов за определенными видами работ, об оптимальном использовании транспорта за счет сокращения порожнего пробега, об оптимальных назначениях и др.). Следовательно, для их решения можно использовать, например, метод потенциалов и применять указанные в начале параграфа приемы.

Во многих задачах транспортного типа целевая функция **максимизируется**. Поэтому при составлении начального опорного плана в первую очередь стараются заполнять клетки с наиболее высокими значениями показателя критерия оптимальности. Выбор клетки, подлежащей заполнению при переходе от одного опорного плана к другому, должен производиться не по отрицательной, а по положительной оценке. Оптимальным будет опорный план, которому в распределительной таблице сопутствуют свободные клетки с неположительными оценками.

3. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

Отчет включает следующие разделы:

1. Задание.
2. Найти начальный опорный план методом «северо-западного угла» или методом минимального элемента.
3. Найти потенциалы.
4. Определить оценки свободных клеток.
5. Найти оптимальный опорный план на основе начального опорного плана с помощью алгоритма метода потенциалов.
6. Выводы.

4. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое потенциалы поставщиков и потребителей?
2. Как определяются потенциалы?
3. Что такое оценка свободной клетки?
4. В чем состоит алгоритм метода потенциалов?
5. Каким образом можно ввести ограничения в распределительную таблицу?
6. Как решить задачу максимизации с помощью алгоритма метода потенциалов?
7. Как определить существует один или несколько оптимальных планов?

5. ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов, А.В. Руководство к решению задач по математическому программированию / А.В. Кузнецов, Н.И. Холод, Л.С. Костевич. – Мн.: Выш. шк., 2001. – 448 с.
2. Акулич, И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах / И.Л. Акулич. – М.: Высшая школа, 1986. – 387 с.

6. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Варианты заданий выдаются преподавателем заданием номеров строк и столбцов в виде матрицы размерностью 4х5 из матрицы технологических затрат.

Распределение потоков:

Количество производимых заготовок по типам:

А = 140, 150, 60, 80.

Возможности производства по различным вариантам техпроцессов:

В = 100, 80, 40, 140, 70.

Матрицы технологических затрат

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	6	7	3	5	1	2	5	6	3	10	20	1	4	1	3	5	7	6	8	9
2	2	5	4	1	3	5	7	6	7	3	5	1	3	5	7	6	3	6	3	10
3	7	6	8	9	3	5	1	2	5	6	3	10	20	1	6	3	10	20	1	6
4	5	1	3	5	7	6	3	6	11	10	5	6	3	10	20	1	4	1	3	5
5	3	11	6	7	5	9	12	20	1	6	7	6	7	3	5	1	3	5	7	7
6	5	1	3	10	7	2	3	6	3	10	1	2	5	6	3	10	20	1	6	1
7	3	10	20	1	6	3	10	20	1	6	12	6	7	11	13	15	2	7	4	5
8	5	6	3	10	20	1	4	1	3	5	25	18	11	6	7	12	19	16	7	3
9	8	3	5	1	2	5	6	3	10	20	1	6	3	10	4	1	3	5	5	7
10	7	9	3	5	1	2	5	6	3	10	20	4	6	11	13	15	2	7	4	5
11	155	8	2	3	9	11	9	25	14	3	10	20	1	6	3	10	20	1	6	8
12	4	1	3	5	25	18	11	6	7	5	6	3	10	20	2	4	1	3	5	12
13	3	10	20	1	6	3	10	20	8	6	1	6	3	10	20	1	6	7	6	1
14	5	6	3	10	20	1	4	1	3	5	5	7	6	3	6	3	10	7	2	5
15	21	14	9	6	3	10	20	1	6	7	6	4	1	3	5	25	18	11	6	7