

Инверсия при решении алгебраических и геометрических задач

Ревтович В.Н., Чернявская С.В.

Белорусский национальный технический университет

Преобразование инверсии, при котором прямая может перейти как в прямую, так и в окружность, является эффективным средством решения задач.

Рассмотрим сначала инверсию относительно прямой как средство построения графиков функций.

Определение 1. Точка $B(x; y_1)$ называется *инвертной* точке $A(x; y_2)$ относительно оси Ox , если они лежат по одну сторону относительно оси Ox , отрезок перпендикулярен оси Ox и произведение ординат этих точек равно единице: $y_1 \cdot y_2 = 1$

При инверсии относительно оси Ox точка $(x; 0)$ переходит в точку $(x; \infty)$ и наоборот. Точка $(x; 1)$ переходит в саму себя.

Пример 1. Построить график функции $y = 1/|x-1|$.

Решение. Построим вспомогательный график $y = |x-1|$. Затем проведем преобразование инверсии относительно оси Ox и определим, куда переходят характерные точки. Например, точки, инвертные точкам $(1; 0)$, $(0; 1)$, $(3/2; 1/2)$; $(-3; 4)$ будут $(1, \infty)$, $(0; 1)$, $(3/2; 2)$, $(-3; 1/4)$. Графики обеих функций представлены на рис. 1.

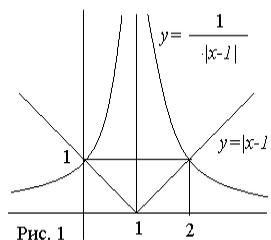


Рис. 1

Рассмотрим инверсию как метод решения геометрических задач.

Определение 2. *Инверсией относительно окружности* с центром O и радиусом R называется преобразование, переводящее точку A , отличную от O , в точку B , лежащую на луче OA на расстоянии R^2 / OA от точки O .

Пример 2. В сегменте вписываются всевозможные пары касающихся окружностей. Найти множество их точек касания.

Решение. При инверсии с центром в вершине A сегмента конфигурация, представленная на рис. 2, перейдет в пару касающихся окружностей, вписанных в угол с вершиной C (C -образ точки B). Множество точек касания таких окружностей есть биссектриса угла. Искомое множество является ее образом при инверсии, а именно, дугой окружности с концами AB , делящей пополам угол между дугой сегмента и хордой AB .

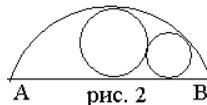


рис. 2