УДК 51 (07.07)

Изменение области определения при решении тригонометрических уравнений

Кленовская И.С., Юрковец Л.В.
Белорусский национальный технический университет

При решении некоторых тригонометрических уравнений может произойти изменение области определения. Это связано с использованием формул, у которых левая и правая части имеют разные области определения, причем правая часть имеет более узкую область по сравнению с левой.

Пример.

Решить уравнение: $tg\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+ctgx=-\sqrt{3}$

Решение.

Область определения для данного уравнения:.

$x \neq \pi n, n \in Z; x \neq \frac{\pi}{3}+\pi k, k \in Z.$

Применим формулы

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta} \quad \text{и} \quad ctg\alpha=\frac{1}{tg\alpha}.$$

Тогда получим

$$\frac{tgx+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}+\frac{1}{tgx}=-\sqrt{3}, \quad \frac{\sqrt{3}tgx+1}{\sqrt{3}-tgx}+\frac{1}{tgx}=-\sqrt{3} \qquad (1)$$

Область определения полученного уравнения не содержит числа вида $x=\frac{\pi}{2}+\pi l, l \in Z$, но данные числа содержатся в области определения исходного уравнения. Поэтому проверяем, не являются ли числа $x=\frac{\pi}{2}+\pi l, l \in Z$ корнями данного уравнения.

$$tg\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}+\pi l\right)+ctg\left(\frac{\pi}{2}+\pi l\right)=-\sqrt{3}, l \in Z.$$

Равенство верно, следовательно, $x=\frac{\pi}{2}+\pi l, l \in Z$ являются решениями данного уравнения. Решаем уравнение (1)

$$\frac{\sqrt{3}tgx+1}{\sqrt{3}-tgx}+\frac{1+\sqrt{3}tgx}{tgx}=0 \quad , \quad \mathrm{tgx}=-\frac{1}{\sqrt{3}}, .x=-\frac{\pi}{6}+\pi p, p \in Z.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}+\pi l, l \in Z; -\frac{\pi}{6}+\pi p, p \in Z.$