УДК 51. (07.07)

Нестандартные логарифмические уравнения

Ковалёнок Н.В, Пинчукова С.П.
Белорусский национальный технический университет

Одни из самых сложных уравнений считаются те, которые содержат в своем условии параметр, так как решение может содержать достаточно большое количество различных вариаций, при которых ответы абсолютно различны.

Пример 1. Для всех действительных значений параметра a решите уравнение: $\log_2(3x^2 - 14x) = \log_3 5/\log_3 2 + \log_2(ax - 5a + 1)$

Решение: $\log_3 5/\log_3 2 + \log_2(ax - 5a + 1) = \log_2(5(ax - 5a + 1))$.

Значит исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 3x^2 - 14x = 5(ax - 5a + 1) \\ 3x^2 - 14x > 0 \end{cases}$$

Решая первое уравнение относительно переменной x, находим корни $x_1 = 5, x_2 = \frac{5a-1}{3}$. x_1 удовлетворяет условию $3x^2 - 14x > 0$. Для корня x_2 получаем неравенство: $3\left(\frac{5a-1}{3}\right)^2 - 14\left(\frac{5a-1}{3}\right) > 0$, из него получаем $a \in (-\infty;\ 1/5) \cup (3;\ +\infty)$.

Ответ: если $a \in (-\infty;\ 1/5) \cup (3;\ +\infty)$, то $x_1 = 5; x_2 = \frac{5a-1}{3}$;

если $a \in [1/5\,;3)$, то $x = 5$.

Пример 2. Для всех действительных значений a решить уравнение

$$(3a-2)^2 \log_3(-4x - 4x^2) = -(a+1)^2 \log_7(1 - 2x^2).$$

Решение: определим область допустимых значений

$$\begin{cases} 1 - 2x^2 > 0 \\ -4x - 4x^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}};0\right).\ 1 - 2x^2 < 1, -4x - 4x^2 = 1 - (2x+1)^2 \le 1\ .$$

Значит, $\log_7(1-2x^2) < 0, \log_3(-4x-4x^2) \le 0$. $(3x-2)^2 \log_3(-4x-4x^2) \le 0$ $(3x-2)^2 \log_3(-4x-4x^2) = -(a+1)^2 \log_7(1-2x^2) \ge 0$.

$$\begin{cases} (3x-2)^2 \log_3(-4x-4x^2) = 0 \\ (a+1)^2 \log_7(1-2x^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1/2 \\ a = -1 \end{cases}$$

Ответ: если $a \in (-\infty;-1)$, то решений нет; если $a = -1$, то $x = -1/2$; если $a \in (-1;+\infty)$, то решений нет.