УДК 51. (07.07)

Уравнение в целых числах

Ковалёнок Н.В., Кленовская И.С.
Белорусский национальный технический университет

Диафантовым уравнением для целочисленных переменных $x, y, ...z$ называется уравнение, которое может быть приведено к виду $P(x, y, ...z) = 0,$ где P - некоторый многочлен от указанных переменных с целыми коэффициентами.

Пример 1. Решить в целых числах $x^4 - y^4 - 20x^2 + 28y^2 = 107$

Решение. Введем замену $x^2 = u; y^2 = v,$ тогда $u^2 - v^2 - 20u + 28v = 107$ $(*)$
Рассмотрим как квадратное относительно u. Найденные корни левой части уравнения $u^2 - 20u + 28v - v^2 = 0$ $u_{1,2} = -10 \pm \sqrt{100 + v^2 - 28v}$. Для того, чтобы корни (*) были рациональными, подкоренное выражение должно быть полным квадратом, следовательно, уравнение (*) запишем в виде

$u^2 - 20u + 28v - v^2 - 96 = 11$ (**)

$$u_{1,2} = 10 \pm \sqrt{100 - 28v + v^2 + 96} = 10 \pm \sqrt{v^2 - 28v + 196} = 10 \pm (v - 14)$$

$$u_1 = v - 4, u_2 = 24 - v$$

Иногда уравнение (**) имеет вид $(u - v + 4)(u + v - 24) = 11$

1) $\begin{cases} x^2 - y^2 + 4 = 1 \\ x^2 + y^2 - 24 = 11 \end{cases}$ цел. реш.нет или $\begin{cases} x^2 - y^2 + 4 = 11 \\ x^2 + y^2 - 24 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} (4;3)(-4;-3) \\ (-4;3)(4;-3) \end{matrix}$

2) $\begin{cases} x^2 - y^2 + 4 = -1 \\ x^2 + y^2 - 24 = -11 \end{cases},$ $\begin{matrix} (2;3)(-2;-3) \\ (-2;3)(2;-3) \end{matrix}$ $\begin{cases} x^2 - y^2 + 4 = -11 \\ x^2 + y^2 - 24 = -1 \end{cases}$ цел.реш. нет

Ответ: (4;3); (-4;-3); (-4;3); (4;-3); (2;3); (-2;-3); (-2;3); (2;-3).

Пример 2. Решить в целых числах $3x^2 + 7y^2 = 103$

Решение. Пусть $y = x + h$,где x, y, h целые числа.

Тогда $3x^2 + 7(x + h)^2 = 103$.

Решаем уравнение относительно переменной x, где h – параметр. $10x^2 + 14xh + 7h^2 - 103 = 0$, $D = 4(-21h^2 + 1030).$ Необходимо чтобы $D \geq 0$, т.е. $-21h^2 + 1030 \geq 0 \Rightarrow -7 \leq h \leq 7$.

Далее находим h. Затем находим x при каждом найденном h и отбираем целые значения. Ответ: (-5;2); (-5;-2); (5;2); (5;-2).