УДК 517.983

Решение интегрального уравнения с функцией Бесселя-Клиффорда в ядре

Скоромник О.В., Александрович Т.А.
Полоцкий государственный университет

Рассматривается интегральное уравнение:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \left(x^\sigma - t^\sigma\right)^{\alpha-1} \bar{J}_{\frac{\alpha-1}{2}}\left[\lambda(x^\sigma - t^\sigma)\right] f(t)dt = g(x), \quad x > a \qquad (1)$$

($\sigma > 0$, $0 < \alpha < 1$, $\lambda \in R$ – некоторый параметр), содержащее в ядре функцию Бесселя-Клиффорда $\bar{J}_\nu(z)$, определяемую по формуле [1, §37.1]: $\bar{J}_\nu(z) = \Gamma(\nu+1)\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} J_\nu(z)$ ($|z| < \infty$); где $J_\nu(z)$ – функция Бесселя первого рода [1, §1.3], [2, гл. 9].

Получено решение уравнения (1):

$$f(x) = \sigma \frac{2\Gamma(\alpha)\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} \frac{d}{dx}\int_a^x \left(x^\sigma - t^\sigma\right)^{-\alpha} \bar{J}_{-\frac{\alpha}{2}}\left[\lambda(x^\sigma - t^\sigma)\right] t^{\sigma-1} g(t)dt \quad (2).$$

Теорема. Для того чтобы уравнение (1), $0 < \alpha < 1$, $\sigma > 0$, было разрешимо в пространстве $L_1(a,b)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$f^{\lambda,\alpha}(x) = \frac{2\Gamma(\alpha)\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} \times$$

$$\times \int_a^x \left(x^\sigma - t^\sigma\right)^{-\alpha} \bar{J}_{-\frac{\alpha}{2}}\left[\lambda(x^\sigma - t^\sigma)\right] \sigma t^{\sigma-1} g(t)dt \in AC([a,b]),$$

$f^{\lambda,\alpha}(a) = 0$. При выполнении этих условий уравнение (1) имеет единственное решение, определяемое формулой (2).

Литература:

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Мн.: Наука и техника, 1987. – 688 с.
2. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. – Москва: Наука, 1979. – 831с.