УДК 517.929.7

Моделирование температурных полей многослойной пластины методом разделения переменных

Сороговец И.Б., Макаренко М.В.,
Полоцкий государственный университет

Рассматривается одномерное нестационарное температурное поле k-слойной пластины с различными теплофизическими характеристиками слоев. Между слоями установлен идеальный тепловой контакт. Ось $0x$ проходит перпендикулярно плоскостям, ограничивающим пластину. Математическая модель задачи определения температуры такого тела представляет собой систему из k уравнений теплопроводности, k–1 условий сопряжения, начального и граничных условий. Для температуры i-го слоя $i=1,2,\ldots,k$ при однородных граничных условиях получены решения

$$T_{i,n}(x_i,t)=e^{-\nu_n^2 t}\left(A_i\cos\left(\frac{\nu_n x_i}{\sqrt{a_i}}\right)+B_i\sin\left(\frac{\nu_n x_i}{\sqrt{a_i}}\right)\right)(x_i\in[b_{i-1},b_i],b_0=0) \quad (1),$$

где A_i, B_i удовлетворяют системе $2k-2$ линейных уравнений с коэффициентами, зависящими от решаемой краевой задачи, ν_n – корни характеристического уравнения, a_i – коэффициент температуропроводности i–го слоя.

При $k=2$ и $k=3$ найдены на ЭВМ корни ν_n и построены в явном виде решения (1) для всевозможных краевых задач. Введем функции $Y_n(x)$, «склеенные» из

$$A_i\cos\left(\frac{\nu_n x_i}{\sqrt{a_i}}\right)+B_i\sin\left(\frac{\nu_n x_i}{\sqrt{a_i}}\right) \text{ при } x=x_i\,.$$

Показано, что $Y_n(x)$ являются собственными функциями линейного интегрального оператора Фредгольма 2-го рода с вещественным симметричным ядром. Этим доказана ортогональность системы $Y_n(x)$ и разложимость по этой системе дважды непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих граничным условиям рассматриваемых задач.

Решения соответствующих неоднородных краевых задач представлены в виде рядов Фурье по ортогональным системам функций $T_n(x,t)=\exp(-\nu_n^2 t)\cdot Y_n(x)$ ($n=1,2,\ldots$).