УДК 51(07.07)

Построение уравнений и неравенств на основе свойств функций

Мелешко А.Н., Кондратьева Н.А.
Белорусский национальный технический университет

Задачи, решение которых опирается на исследование свойств составляющих их выражений, способствуют развитию у обучающихся аналитических способностей, навыков, умения применять сведения из различных разделов математики в одном алгоритме решения. Такие задачи включают в экзаменационные и тестовые задания для оценивания указанных и иных качеств экзаменуемых.

При построении задания и его решения используются графики, методы подбора, стандартные отношения, различные свойства функций: монотонность, ограниченность и т.п. Например, подбираем две-три функции различного вида. Определяем те их свойства, характеристики, на основе которых строится решение. Составляем отношение и проводим решение в общем виде с параметрами, определяющими условия поведения функций, границы изменения аргумента. В случае большого числа вариантов задачи (в тестах) требуется, чтобы все варианты решались по единому алгоритму, имели одинаковый объем операций и одинаковый уровень сложности вычислений, а вычисления должны быть простыми, негромоздкими. Тогда в общей задаче вместо параметров подбираем такие их числовые значения, чтобы решение задачи отвечало указанным требованиям.

Построим неравенство пятого уровня сложности. Для его решения сформулируем задание:

«Найдите сумму наименьшего и наибольшего целых решений неравенства

$$((\sin\alpha)^{\rho} + (\cos\alpha)^{q})^{\log_c \frac{n}{m-x}} \le \sqrt{x+k} - l,$$

где параметры $\rho>2$, $q>2$, $\alpha \neq \frac{\pi h}{2}$, $h \in Z$, $m \in Z$, $c > 1$, $n > 0$, $l > 0$ (все целые числа, p и q – четные)».

Схема решения задачи, основанная на монотонности функций, следующая. В области определения неравенства $-k \le x < m$, при указанных значениях параметров величина $a = (\sin\alpha)^{\rho} + (\cos\alpha)^{q} < 1$. Функция $a^{f(x)}$, где $f(x) = \log_c \frac{n}{m-x}$ будет монотонно убывающей, $a^{f(x)} > 0$, а правая часть $\varphi(x) = \sqrt{x+k} - l$ – монотонно возрастает.

В результате анализа поведения функций определяем, что множество решений неравенства $x \in [x_0, m)$, где x_0 – целое решение уравнений $a^{f(x)} = 1$, $\varphi(x) = 1$ (находим методом подбора). Тогда $x_0 + (m-1)$ есть искомая сумма.