УДК 539.3

Моделирование решения уравнения $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}=0$ в полиномах

Акимов В.А., Гончарова С.В.
Белорусский национальный технический университет

Решение этого уравнения, как и ранее решение других, строилось разрабатываемым автором операторным методом. В данном случае оно имеет следующий вид:

$$u(x,y)=e^{\frac{\sqrt{2}}{2}d_y x}(A(d_y)\cos\tfrac{\sqrt{2}}{2}d_y x+B(d_y)\sin\tfrac{\sqrt{2}}{2}d_y x)\,f(y)$$

здесь $d_y=\frac{\partial}{\partial y}$; $A(d_y),B(d_y)$ - произвольные операторные коэффициенты; $f(y)$ - произвольная аналитическая функция. Можно непосредственно убедиться в том, что построенное таким образом решение тождественно удовлетворяет исходному уравнению.

Разлагая дальше тригонометрические и показательную функции в ряды Маклорена по переменной x, а функцию $f(y)$ в степенной ряд по переменной y, после громоздких преобразований получим набор решений исходного уравнения. Выпишем их ниже по возрастанию степеней с четвертой по седьмую

$$\varphi_4=a_4(x^4-y^4)+b_4x^3y+c_4x^2y^2+d_4xy^3$$

$$\varphi_5=a_5(x^5-5xy^4)+b_5(5x^4y-y^5)+c_5x^2y^3+d_5x^3y^2$$

$$\varphi_6=a_6(x^6-15x^2y^4)+b_6(x^5y-xy^5)+c_6(15x^4-y^6)+$$
$$+d_6x^3y^3$$

$$\varphi_7=a_7(x^7-35x^3y^4)+b_7(x^6y-3x^2y^5)+c_7(3x^5y^2-xy^6)+$$
$$+d_7(28x^4y^3-y^7)$$

Отметим, что полиномы ниже четвертой степени удовлетворяют исходному уравнению тождественно. Можно также непосредственно убедиться в том, что полученные полиномы удовлетворяют исходному уравнению тождественно. Специфика полученных результатов наводит на мысль получить их же при помощи более простого алгоритма. А именно, зная, например, что после взятия производных от полинома шестой степени останутся функции второй степени, то подбирая при них коэффициенты, легко найти искомый вид полиномов.