

---

---

# МЕТАЛЛУРГИЯ. МЕТАЛЛООБРАЗОВАНИЕ. МАШИНОСТРОЕНИЕ

---

---

УДК 621.792

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ НАПЛАВКИ ПОКРЫТИЙ МЕТОДОМ ЭЛЕКТРОКОНТАКТНОГО ОПЛАВЛЕНИЯ

*Докт. техн. наук БЕЛЯВИН К. Е., СОСНОВСКИЙ А. В.*

*Белорусский национальный технический университет,  
Объединенный институт машиностроения НАН Беларусь*

Среди современных способов нагрева металлов электроконтактный нагрев, заключающийся в нагреве путем пропускания электрического тока, является наиболее совершенным и экономически эффективным в тех случаях, когда он может быть применен наряду с другими способами нагрева – печным и индукционным. Это объясняется специфическими особенностями данного способа, такими как выделение тепловой энергии электрического тока практически в каждом элементарном объеме нагреваемого тела (заготовки или детали), через которое пропускается электрический ток промышленной частоты; подвод тока с помощью токоподводящих контактов; скорость нагрева [1].

Указанные особенности электроконтактного нагрева позволили использовать его для осуществления технологии нанесения износостойких покрытий. Суть данной технологии заключается в том, что деталь, помещенная в порошкообразную шихту, разогревается электрическим током выше температуры ее плавления, но ниже температуры плавления детали, в результате чего на поверхности детали образуется износостойкий слой присадочного материала [2]. Основными технологическими параметрами процесса электроконтактного оплавления являются время пропускания электрического тока, а также сила тока и напряжение.

Для реализации данной технологии можно использовать стандартные электроконтактные установки для точечной, шовной или рельефной сварки, обеспечивающие высокий КПД при быстром разогреве наплавляемой детали [3].

Помимо этого, использование электроконтактного нагрева позволяет осуществить нагрев заготовки, погруженной в присадочный материал. В то же время при использовании специальной технологической оснастки можно осуществлять разогрев только наплавляемой части заготовки, что снижает энергозатраты, а также исключает разупрочнение ненаплавляемой части детали.

Основной сложностью в процессе наплавки методом электроконтактного оплавления является расчет технологических режимов, особенно времени пропускания электрического тока через наплавляемую заготовку, необходимого для получения покрытия заданной толщины. В связи с этим возникает необходимость разработки математической модели процесса наплавки, основанного на анализе тепловыделения и теплообмена в системе «заготовка – порошковый материал».

**Расчет технологических режимов наплавки методом электроконтактного оплавления.** Для выбора подхода к разработке математической модели оплавления порошковых слоев за счет теплообмена с деталью, нагреваемой электрическим током, рассмотрим систему, состоящую из монолитного металлического стержня, на внешней поверхности которого сформирован слой металлического порошка.

Тепловыделение при электроконтактном нагреве представляет собой сложный процесс. Примем следующие допущения:

- стержень, на который происходит наплавка покрытия, является бесконечно длинным;
- тепловыделение в теле стержня происходит равномерно по всей его длине.

В данной работе решение поставленной задачи решается в два этапа: нагрев порошка и его плавление.

Уравнения теплопроводности для стержня и порошка имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial T_1}{\partial t} = a_1 \left( \frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) + \frac{q_{v1}}{c_{\gamma_1}}, \\ \frac{\partial T_2}{\partial t} = a_2 \left( \frac{\partial^2 T_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_2}{\partial r} \right), \end{cases} \quad (1)$$

где  $q_{v1}$  – объемная плотность внутренних источников теплоты;  $c_{\gamma_1}$  – удельная теплоемкость материала стержня, Дж/(кг·К);  $a_1$  – температуропроводность стержня, м<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>;  $a_2$  – то же порошка, м<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>;  $T_0$  – начальная температура, К;  $T_1$  – температура стержня, К;  $T_2$  – то же порошка, К;  $t$  – то же в любой точке стержня и порошка, К;

$r$  – текущий радиус нагреваемой среды, м.

Границные условия при  $r = r_a$  на границе стержня с порошком – условие сопряжения (условие 4-го рода) [4, 5]:

$$T_1(r_a) = T_2(r_a); \quad (2)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} \Big|_{r=r_a} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} \Big|_{r=r_a}, \quad (3)$$

где  $\lambda_1$  – теплопроводность материала стержня, Вт/(м·К);  $\lambda_2$  – то же порошка, Вт/(м·К);  $r_a$  – радиус наплавляемого стержня, м.

Так как на границе  $r = r_b$  находится стенка емкости с порошковой шихтой, при исследовании теплопроводности необходимо рассматривать три области. Однако в начале решения для упрощения расчетов будем считать, что стенка является достаточно тонкой и не влияет на процесс теплообмена с окружающей средой. В дальнейшем введем поправочный коэффициент в условие на границе  $r = r_b$ , соответствующий параметрам теплопроводности стенок емкости. Таким образом, на границе  $r = r_b$  задаются условия 3-го рода

$$-\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} \Big|_{r=r_b} = \lambda(T_2 - T_0) \Big|_{r=r_b}, \quad (4)$$

где  $\alpha$  – средний на интервале теплоотдача с поверхности заготовки излучением и конвекцией,  $\alpha = \alpha_{\text{изл}} + \alpha_{\text{конв}}$ ;  $\alpha_{\text{изл}}$  – средний на интервале коэффициент теплоотдачи излучением, Вт/(м<sup>2</sup>·с·К), который рассчитывается по формуле [4, 6]:

$$\alpha_{\text{изл}} = \frac{C_{\text{пр}} \left[ \left( \frac{T}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_0}{100} \right)^4 \right]}{T - T_0}, \quad (5)$$

где  $C_{\text{пр}}$  – приведенный коэффициент лучеиспускания;  $\alpha_{\text{конв}}$  – средний на интервале коэффициент теплоотдачи конвекцией, Вт/(м<sup>2</sup>·с·К).

Пусть  $\Theta_i = T_i - T_0$ , где  $i = 1, 2$ . Тогда вид уравнений (1)–(3) сохранится с заменой  $T_i \rightarrow \Theta_i$ , а (4) будет выглядеть следующим образом:

$$-\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} \Big|_{r=r_a} = \lambda_2 \Theta_2 \Big|_{r=r_a}. \quad (6)$$

Таким образом, нам необходимо решить задачу (1)–(6) при  $T_i \rightarrow \Theta_i$ . Объемная плотность внутренних источников теплоты  $q_v$  при пропускании тока через цилиндрическую заготовку распределяется вдоль радиуса заготовки по закону

$$q_v = \frac{kAI^2 \omega \mu_{\text{пов}} \mu_0 \alpha_\phi^2}{4\pi^2 r_0^2 \left| J_1(\xi_{\text{пов}} \alpha_\phi r) \right|^2} \left| J_0(\xi_{\text{пов}} \alpha_\phi r) \right|^2, \quad (7)$$

где

$$\omega = 2\pi f, \quad (8)$$

$$\xi_{\text{пов}} = \sqrt{-j\omega \mu_{\text{пов}} \mu_0 \sigma}, \quad (9)$$

$k$  – поправочный коэффициент;  $f$  – частота тока, с<sup>-1</sup>;  $\mu_{\text{пов}}$  – значение относительной магнитной проницаемости на поверхности заготовки;  $\mu_0$  – магнитная проницаемость вакуума, В·с/(А·м);  $r_0$  – радиус заготовки, м;  $j = -1$ ;  $J_1$  – функция Бесселя первого порядка;  $\sigma$  – удельная электропроводность материала, 1/(Ом·м);  $\alpha_\phi$  – коэффициент, учитывающий гистерезис и нелинейность магнитных свойств ферромагнитных материалов [4].

Решение найдем следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Theta_1 = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{(1)}(t) J_1(\mu_k r); \\ \Theta_2 = \sum_{k=0}^{\infty} C_{k_1}^{(2)}(t) J_1(\mu_k r) + C_{k_2}^{(2)}(t) N_0(\mu_k r), \end{array} \right. \quad (10)$$

где  $N_0(r)$  – функция Неймана 0-го порядка [7, 8].

Так как

$$\frac{\partial^2 z(\mu_k r)}{\partial r^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial z(\mu_k r)}{\partial r} = \mu_k z(\mu_k r),$$

где  $z = J_0$  или  $N_0$ , с учетом соотношения  $\int J_0(\mu_j r) J_0(\mu_i r) dr = 0$  при  $j \neq i$ , подставляя (10) и (11) в (1) и затем интегрируя с весом  $J_0(\mu_k r)$  или  $N_0(\mu_k r)$  по  $r$  от 0 до  $r_b$ , получим уравнение

$$\frac{dC_k^{(1)}}{dt} = a_1 \mu_k C_k^{(1)} + Q_{Vlk}, \quad (12)$$

где

$$Q_{Vlk} = \int_0^{r_a} \frac{q_{v1}}{C_\gamma} J_0(\mu_k r) dr, \quad (13)$$

и аналогично для второй области:

$$\frac{dC_{k_1}^{(2)}}{dt} = a_2 \mu_k C_{k_1}^{(2)} + a_2 \mu_k b_k C_{k_2}^{(2)}; \quad (14)$$

$$\frac{dC_{k_2}^{(2)}}{dt} = a_2 \mu_k C_{k_2}^{(2)} + a_2 \mu_k b_k C_{k_1}^{(2)}, \quad (15)$$

где

$$b_k = \int_{r_a}^{r_b} N_0(\mu_k r) J_0(\mu_k r) dr. \quad (16)$$

Коэффициенты  $\mu_k$  (где  $k = 0, 1, \dots, \infty$ ) определяются из граничных условий. Уравнение для них получается, если значение выражений (14), (15) вставить в (10), (11) из которых находим коэффициент, соответствующий  $k$ -му слагаемому. Затем (14), (15) подставим в (2)–(4). Из (2) тогда получим

$$C_1 J_0(\mu_k r_a) + C_{21} J_0(\mu_k r_a) + C_{22} N_1(\mu_k r_a) = 0, \quad (17)$$

где

$$C_k^{(1)} \rightarrow C_1; \quad C_{k_1}^{(2)} \rightarrow C_{21}; \quad C_{k_2}^{(2)} \rightarrow C_{22}.$$

Далее, учитывая, что  $N'_0 = -N_1$ ;  $J'_0 = -J_1$ , где «'» означает производную, получим из (3)

$$-C_1 J_0(\mu_k r_a) + C_{21} J_0(\mu_k r_a) + C_{22} N_1(\mu_k r_a) = 0. \quad (18)$$

Затем из (6) имеем

$$\begin{aligned} & C_{21} [\lambda_2 J_1(\mu_k r_b) \mu_k - \lambda_2 J_0(\mu_k r_b) \mu_k] + \\ & + C_{22} [\lambda_2 N_1(\mu_k r_b) \mu_k - \lambda_2 N_0(\mu_k r_b)] = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Система уравнений (17)–(19) имеет нулевое решение, если только ее детерминант равен нулю

$$\det A = 0, \quad (20)$$

где матрица  $A$  записывается следующим образом:

$$A = \begin{bmatrix} -J_0(\mu_k r_a) & J_0(\mu_k r_a) & N_0(\mu_k r_a) \\ -J_0(\mu_k r_a) & J_1(\mu_k r_a) & N_1(\mu_k r_a) \\ 0 & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (21)$$

с коэффициентами  $a_{23} = \mu_k \lambda_2 J_1(\mu_k r_b) - \lambda_2 J_0(\mu_k r_b)$ ;  $a_{33} = \mu_k \lambda_2 N_1(\mu_k r_b) - \lambda_2 N_0(\mu_k r_b)$ .

Уравнение (20) является трансцендентным, его корни ( $\mu_k$ ) можно найти только численно.

Запишем начальные условия для  $C_{k_1}^{(2)}$ ,  $C_{k_2}^{(2)}$ ,  $C_k^{(2)}$  при  $t = 0$

$$C_k^{(1)}|_{t=0} = C_{k_1}^{(2)}|_{t=0} = C_{k_2}^{(2)}|_{t=0} = 0. \quad (22)$$

Таким образом, мы получаем алгоритм решения задачи:

1) рассчитаем  $\mu_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , по формулам (19), (20) численными методами;

2) для каждого  $k$  вычисляем интегрально (13) и (16);

3) решаем систему уравнений (12), (14), (15).

Существуют несколько способов реализации алгоритма решения данной задачи. Пункт 1 может быть вычислен только численно, пункты 2, 3 – аналитически, но только при условии, что все параметры системы не зависят от температуры. Однако в [4, 9] это предположение не реализуется при электроконтактном нагреве. Более того, зависимость некоторых параметров от температуры не задается аналитическими формулами и обычно определяется из эксперимен-

та. Один из способов численного решения пунктов 2, 3 представлен в [4]. Весь температурный интервал разбивается на несколько подинтервалов, на каждом из которых коэффициенты теплопроводности, температуропроводности, теплоотдачи считаются не зависящими от температуры. Он применим только в том случае, если коэффициенты зависят от температуры незначительно. Кроме того, на каждом интервале необходимо проводить большое количество вычислений для согласования двух соседних интервалов. Более экономичным способом при современном развитии компьютерной техники представляется прямое решение уравнений (12), (14), (15). Результаты решения представлены на рис. 1.

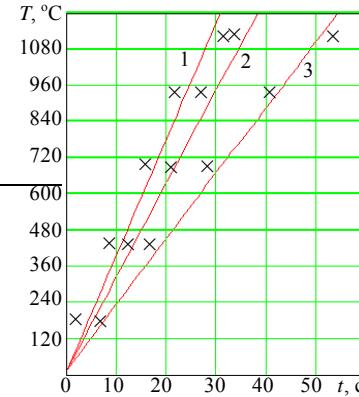
*Рис. 1.* Зависимость температуры  $T$  порошковой шихты от времени  $t$  нагрева при наплавке порошка ПР-Х4Г2Р4С2Ф на центральную часть стального стержня диаметром 20 мм и длиной 100 мм на расстоянии 3 мм от поверхности заготовки при: 1 –  $I \leq 20$  кА; 2 – 15; 3 – 10 кА; — – теоретический расчет;  $\times \times \times$  – экспериментальные данные

Как показано [8], распределение температурного поля при расплавлении порошка сложно по своей природе, особенно, если источник теплоты – деталь, разогреваемая электроконтактным способом. В связи с этим невозможно учесть все факторы, влияющие на данный процесс, описывая их аналитическими формулами. Однако эти особенности можно учитывать, вводя поправочные коэффициенты в уравнение, описывающее распределение температурного поля.

В данной работе рассмотрим движение «фрона плавления» в зависимости от времени (задача Стефана) [8].

В общем случае скорость фронта определяется из условий задачи. Однако соответствующие уравнения получаются сложными [9] и их решения могут быть приближенными. Кроме того, расчеты показывают, что скорость движения фронта расплава описывается близкими законами для разных граничных условий и геометрий системы [5, 10].

В связи с этим будем считать, что закон движения фронта расплава определяется по формуле



$$2R^2 \ln\left(\frac{R}{r}\right) - R^2 + r^2 = \frac{4\lambda_p T_1 \beta}{g\rho}, \quad (23)$$

где  $R$  – толщина наплавляемого покрытия, мм;  $r$  – радиус наплавляемого стержня, мм;  $\lambda_p$  – коэффициент теплопроводности порошка, Вт/(м·К);  $T_1$  – температура плавления порошка, К;  $t$  – время плавления порошка, с;  $\rho$  – плотность материала порошковой шихты, кг/м<sup>3</sup>;  $g$  – удельная теплота плавления порошка, Дж/кг,  $\beta$  – поправочный коэффициент.

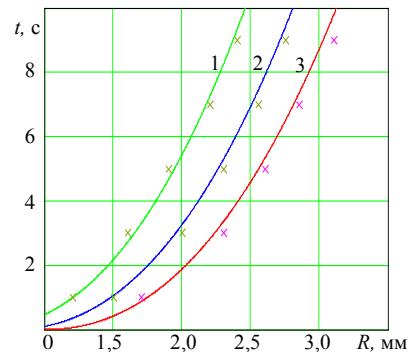
В качестве граничных условий принимаем следующее:

$$T_1|_{r_a} = \text{const}; \quad (24)$$

$$T_1|_{r_a} = T_n, \quad (25)$$

где  $T_n$  – температура плавления порошковой шихты.

Расчет представленной модели производился на ЭВМ в среде MathCad. На основании ре-



зультатов расчета были построены зависимости, показывающие характер распределения температуры по толщине порошкового слоя (рис. 2). С помощью (1)–(23) можно выбрать технологические режимы, необходимые для получения покрытия заданной толщины.

*Рис. 2.* Зависимость времени выдержки  $t$  от толщины  $R$  наплавляемого покрытия: 1 –  $r_a = 5$  мм; 2 – 7,5; 3 – 10 мм; — – теоретический расчет;  $\times \times \times$  – экспериментальные данные

Данная модель позволяет определить зависимость между временем пропускания электрического тока, необходимого для получения покрытия заданной толщины, теплофизическими свойствами заготовки и порошковой шихты, а также параметрами работы электроконтактной установки. Основными технологическими параметрами, определяющими толщину получаемого покрытия при наплавке, являются напряжение на вторичном контуре электроконтактной установки и время нагрева заготовки. Однако данные параметры независимы друг от друга при расчете технологических режимов и могут выбираться произвольно. В то же время соотношение этих параметров может повлиять на неравномерность разогрева наплавляемой заготовки по длине, что приводит к формированию покрытия, имеющего значительный перепад толщины по длине детали. Исходя из сказанного выше необходимо определить оптимальное соотношение напряжения на вторичном контуре электроконтактной установки и времени нагрева заготовки.

**Расчет оптимальных параметров наплавки покрытий электроконтактным оплавлением.** Для расчета оптимальных параметров технологического процесса наплавки методом электроконтактного оплавления проведен ряд экспериментов по наплавке покрытий. На основании экспериментальных данных, проведенных для заготовки диаметром 10 мм, были получены уравнения регрессии по модели полного факторного эксперимента [11, 12] с планом  $2^2$  для толщины наплавляемого слоя  $Y_a$  и отклонения профиля покрытия  $Y_z$ . В результате расчетов получены уравнения регрессии:

$$Y_a(X_1, X_2) = 1,9 + 0,25X_1 + 0,6X_2; \quad (26)$$

$$Y_z(X_1, X_2) = 0,31 + 0,043X_1 + 0,058X_2 + 0,02X_1X_2. \quad (27)$$

Исходные данные для расчета приведены в табл. 1. Анализ уравнений регрессии показывает, что наибольшее влияние на величину отклонения профиля покрытия и толщину покрытия оказывает время нагрева заготовки  $X_2$ . При этом установлено, что с увеличением времени нагрева снижается отклонение профиля покры-

тия, а с ростом напряжения, наоборот, отклонение профиля покрытия увеличивается и покрытие становится более неровным. Исходя из этого необходимо найти режимы наплавки, обеспечивающие получение заданной толщины покрытия при минимальном отклонении его профиля. Расчет режимов проводили для различной толщины покрытий:  $Y_a = 1; 2; 3; 4; 5$  мм. Оптимальные значения режимов наплавки определяли в результате нахождения условного минимума функции  $Y_z$  при ограничениях, налагаемых функцией  $Y_a$ . Этую задачу решали с помощью метода неопределенных множителей Лагранжа [13], для чего составляли вспомогательную функцию  $F(X_1, X_2, \lambda)$ , где  $\lambda$  – вспомогательный множитель.

$$F(X_1, X_2, \lambda) = Y_z(X_1, X_2) + \lambda(Y_a(X_1, X_2) - Y_a). \quad (28)$$

Таблица 1  
Исходные данные для расчета уравнения регрессии, определяющего толщину наплавляемого слоя

Параметр	$U, В$	$\tau, с$
Код	$X_1$	$X_2$
$X_{\max}$	5,56	32
$X_{\min}$	3,92	16
$X_{\text{осн}}$	4,74	24
$\Delta X$	0,82	8,0

№ опыта	$X_0$	$X_1$	$X_2$	$X_1X_2$	Результат эксперимента	
					$h_{z1i}$	$h_{z2i}$
1	+1	-1	-1	+1	0,15	0,31
2	+1	+1	-1	-1	0,20	0,35
3	+1	-1	+1	-1	0,21	0,40
4	+1	+1	+1	+1	0,30	0,50

Вспомогательная функция  $F(X_1, X_2, \lambda)$  будет иметь вид

$$F(X_1, X_2, \lambda) = 0,31 + 0,043X_1 + 0,058X_2 + 0,02X_1X_2 + \lambda(1,9 + 0,25X_1 + 0,6X_2 - Y_a). \quad (29)$$

Дифференцируя  $F(X_1, X_2, \lambda)$  по  $X_1, X_2, \lambda$  и приравнивая частные производные к нулю, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 0,043 + 0,25\lambda + 0,02X_2 = 0; \\ 0,058 + 0,6\lambda + 0,02X_1 = 0; \\ 1,9 + 0,25X_1 + 0,6X_2 - Y_a = 0. \end{cases} \quad (30)$$

Решая систему (30) при заданном значении  $Y_a$ , находим точки условных экстремумов (табл. 2).

Таблица 2

## Экстремумы вспомогательной функции

$Y_a$	$X_1$	$X_2$	$\lambda$
1	-0,67	-1,221	-0,074
2	1,33	-0,387	-0,141
3	3,33	0,446	-0,208
4	5,33	1,279	-0,274
5	7,33	2,113	-0,341

Переходя от кодированных значений к натуральным, определяем искомые режимы наплавки

ки для различных толщин покрытий (табл. 3).

Таблица 3

## Режимы наплавки покрытий методом электроконтактного оплавления

$Y_a$	$U, В$	$\tau, с$
1	3,3	6,20
2	3,9	12,9
3	4,5	19,5
4	5,2	26,2
5	5,7	32,9

Значения, представленные в табл. 3, использовались для изготовления экспериментальных образцов. После наплавки покрытий было установлено, что оптимизация технологических параметров позволяет снизить в два раза величину перепада толщины покрытия по длине заготовки (рис. 3).

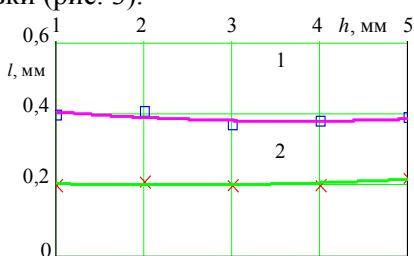


Рис. 3. Перепад толщины покрытия по длине заготовки  $l$  для покрытий разной толщины  $h$  до оптимизации (1) и после оптимизации (2) технологических параметров процесса электроконтактного оплавления

## ВЫВОДЫ

В результате исследований получена модель, позволяющая определить зависимость между временем пропускания электрического тока, необходимого для получения покрытия заданной толщины, теплофизическими свой-

ствами заготовки и порошковой шихты, а также параметрами работы электроконтактной установки. Данная модель позволяет рассчитывать время, необходимое для наплавки покрытия методом электроконтактного оплавления.

Приведенные расчеты по оптимизации технологических параметров позволяют определять оптимальные соотношения напряжения на вторичном контуре электроконтактной установки и времени нагрева заготовки для получения покрытия методом электроконтактного оплавления с минимальным перепадом толщины по длине детали.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Охрименко, Я. М. Прогрессивные способы нагрева в кузнечно-штамповом производстве: учеб. пособие / Я. М. Охрименко, А. А. Скворцов. – М.: Машиностроение, 1980. – 56 с.
2. Оплавление порошкового материала при теплообмене с деталью, нагреваемой электрическим током / Ю. Н. Гафо [и др.] // Вес. Нац. акад. наук Беларусь. Сер. физ.-техн. науки. – 2002. – № 1. – С. 48–50.
3. Скворцов, А. А. Нагревательные устройства / А. А. Скворцов, А. Д. Акименко, М. Я. Кузелев. – М.: Высш. шк., 1965. – 425 с.
4. Валеев, А. Х. Электроконтактный нагрев стальных заготовок / А. Х. Валеев, А. М. Беляев. – М., 1968. – 36 с.
5. Карташов, Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел / Э. М. Карташов. – М., 1985. – 487 с.
6. Боли, Б. Теория температурных напряжений / Б. Боли, Д. Уэйнер. – М., 1964. – 267 с.
7. Дорожкин, Н. Н. Импульсные методы нанесения порошковых покрытий / Н. Н. Дорожкин, Т. М. Абрамович, В. К. Ярошевич. – Минск: Наука и техника, 1985. – 279 с.
8. Самойлович, Ю. А. Формирование слитка / Ю. А. Самойлович. – М.: Металлургия, 1978. – 248 с.
9. Капусткин, В. К. Математическая модель электроконтактного нагрева / В. К. Капусткин // Инженерно-технический журнал. – 1982. – Т. 43, № 4. – С. 32–34.
10. Гринберг, Г. А. Об одном возможном методе подхода к рассмотрению задач теории теплопроводности, диффузии, волновых и им подобных при наличии движущихся границ и о некоторых иных его приложениях / Г. А. Гринберг // Прикладная математика и механика. – 1967. – Т. 31. – С. 193–203.
11. Новик, Ф. С. Оптимизация процессов технологии металлов методами планирования экспериментов / Ф. С. Новик, Я. Б. Арсов – М.: Машиностроение; София: Техника, 1980. – 304 с.
12. Адлер, Ю. П. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий / Ю. П. Адлер, Е. В. Маркова, Ю. В. Грановский. – М.: Наука, 1976. – 270 с.
13. Спиридонов, А. А. Планирование эксперимента при исследовании и оптимизации технологических процессов: учеб. пособие / А. А. Спиридонов, А. Г. Васильев