УДК 681.51.033.01

ВЕРОЯТНОСТНАЯ ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ВИБРАЦИЙ НА ЧУВСТВИТЕЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ СИСТЕМЫ

Докт. техн. наук, проф. ЛОБАТЫЙ А. А., асп. ИКУАС Ю. Ф.

Белорусский национальный технический университет

В процессе эксплуатации оборудование, системы управления и аппаратура энергетических систем часто подвергаются воздействию вибраций в виде случайных ускорений конструкции изделий, что может являться причиной их отказов. Источниками вибраций могут быть работающие силовые установки или внешние кинематические воздействия, например со стороны соответствующих транспортных агрегатов. Экспериментально установлено [1], что вибрации являются случайным процессом $X(t)$, корреляционная функция которого, как правило, аппроксимируется выражением

$$R_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\omega_0\tau + \gamma\sin\omega_0|\tau|\right), \quad (1)$$

где D_x – дисперсия процесса $X(t)$; γ – параметр, показывающий, что преобладает в корреляционной функции (1): убывание по экспоненциальному закону или периодические колебания с частотой ω_0. В общем случае $|\gamma| \le \dfrac{\alpha}{\omega_0}$. При $\gamma = \dfrac{\alpha}{\omega_0}$ стационарный случайный процесс $X(t)$ с корреляционной функцией (1) дифференцируем, дисперсия его производной конечна, а спектральная плотность определяется выражением

$$S_x(\omega) = \frac{2D_x\alpha}{\pi}\frac{\beta^2}{\beta^4 + 2(\alpha^2 - \omega_0^2)\omega^2 + \omega^4}, \quad (2)$$

где $\beta^2 = \alpha^2 + \omega_0^2$.

Случайный процесс с корреляционной функцией вида (1) описывается линейной моделью (формирующим фильтром) второго порядка с аддитивным шумом [2]

$$\ddot{X} + 2\xi\omega_0\dot{X} + \omega_0^2 X = N \quad (3)$$

или в форме Коши с обозначениями $X = X_1$, $\dot{X} = X_2$:

$$\dot{X}_1 = X_2; \quad (4)$$

$$\dot{X}_2 = -2\xi\omega_0 X_2 - \omega_0^2 X_1 + N, \quad (5)$$

где ξ – коэффициент затухания, $\xi = \dfrac{1}{\alpha}$; N – белый шум с интенсивностью G.

Отрицательное влияние процесса $X(t)$ (вибраций) проявляется в превышении им некоторого допустимого уровня C, определенного для конкретного элемента системы (электронного или механического устройства). Превышение реализацией процесса $X(t)$ уровня C называют выбросом случайного процесса [3].

Среднее число положительных выбросов $X(t)$ за уровень C на интервале $[0, T]$ является случайной величиной и определяется следующим образом:

$$N_c(T) = \int_0^T \dot{X}(t)\delta[X(t) - C]1[\dot{X}(t)]dt. \quad (6)$$

Подынтегральная функция в (6) вследствие свойств дельта-функции $\delta[X(t) - C]$ и единичной ступенчатой функции $1[\dot{X}(t)]$ равна нулю всюду, кроме тех точек, где случайный процесс $X(t)$ пересекает уровень C. В точках пересечения процессом $X(t)$ уровня C интеграл скачком возрастает на единицу. Следовательно, интеграл (6) равен числу положительных пересечений случайным процессом $X(t)$ уровня C на интервале $[0, T]$.

Математическое ожидание случайной величины $N_c(T)$ вычисляется по формуле

$$M\left[N_c(T)\right] = \int_0^\infty\int_0^\infty N_c[T, X(t), \dot{X}(t)] \times \\ \times f(X, \dot{X}, t)dXd\dot{X}, \quad (7)$$

где $f(X, \dot{X}, t)$ – двумерная плотность вероятности случайного процесса $X(t)$ и его производной $\dot{X}(t)$.

Подставляя формулу (6) в (7) и пользуясь известным правилом интегрирования произведения произвольной функции на дельта-функцию, проинтегрируем (7) по переменной X

$$M\left[N_c(T)\right] = \int_0^T dt\int_0^\infty \dot{X}(t) f(C, \dot{X}, t)d\dot{X}. \quad (8)$$

Для случайного процесса, стационарного в узком смысле, внутренний интеграл не зависит от времени, поэтому выражение (8) можно записать в следующем виде:

$$M\left[N_c(T)\right] = T\int_0^{\infty} \dot{X}(t)\, f(C, \dot{X})\, d\dot{X}. \qquad (9)$$

Разделив среднее число выбросов на интервале [0, T] (9) на длину интервала, получим интенсивность числа выбросов

$$\lambda_c(T) = \frac{1}{T} M[N_c(T)] = \int_0^{\infty} \dot{X} f(C, \dot{X})\, d\dot{X}. \quad (10)$$

Для гауссова процесса, обозначив $f(X, \dot{X}) = f(X, \dot{X}, t)$, имеем

$$f(X, \dot{X}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{D_x D_{\dot{x}}(1-r^2)}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-r^2)} \times \right.$$
$$\left. \times \left[\frac{(X-m_x)^2}{D_x} - \frac{2r(X-m_x)(\dot{X}-m_{\dot{x}})}{\sqrt{D_x D_{\dot{x}}}} + \frac{(\dot{X}-m_{\dot{x}})^2}{D_{\dot{x}}}\right]\right), \quad (11)$$

m_x, $m_{\dot{x}}$ – математические ожидания; D_x, $D_{\dot{x}}$ – дисперсии процессов $X(t)$ и $\dot{X}(t)$; r – коэффициент корреляции $X(t)$ и $\dot{X}(t)$ соответственно;

$$r = r_{x\dot{x}} = \frac{R_{x\dot{x}}}{\sqrt{D_x D_{\dot{x}}}}, \qquad (12)$$

$R_{x\dot{x}}$ – корреляционный момент (момент связи) $X(t)$ и $\dot{X}(t)$.

Подставляя в (10) выражение для плотности вероятности $f(X, \dot{X})$ (11), в котором параметр X заменен на C, получим

$$\lambda_c(T) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{\dot{X}}{\sqrt{D_x D_{\dot{x}}(1-r^2)}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-r^2)} \times \right.$$
$$\left. \times \left[\frac{(C-m_x)^2}{D_x} - \frac{2r(C-m_x)(\dot{X}-m_{\dot{x}})}{\sqrt{D_x D_{\dot{x}}}} + \frac{(\dot{X}-m_{\dot{x}})^2}{D_{\dot{x}}}\right]\right) d\dot{X}. \quad (13)$$

Для процесса, описываемого уравнениями (4), (5), дифференциальные уравнения для математических ожиданий и корреляционных моментов, входящих в выражение (13), имеют вид:

$$\dot{m}_x(t) = \dot{m}_1 = m_2; \quad m_x(0) = m_{x0}; \qquad (14)$$

$$\dot{m}_{\dot{x}}(t) = \dot{m}_2 = -2\xi\omega_0 m_2 - \omega_0{}^2 m_1; \ \dot{m}_{\dot{x}}(0) = \dot{m}_{\dot{x}0}; \ (15)$$

$$\dot{D}_x(t) = \dot{\theta}_{11} = 2\theta_{12}; \quad D_x(0) = D_{x0}; \qquad (16)$$

$$\dot{R}_{x\dot{x}}(t) = \dot{\theta}_{12} = \theta_{22} - 2\xi\omega_0\theta_{12} - \omega_0{}^2\theta_{11};$$
$$R_{x\dot{x}}(0) = R_{x\dot{x}0}; \qquad (17)$$

$$\dot{D}_{\dot{x}}(t) = \dot{\theta}_{22} = -4\xi\omega_0\theta_{22} - 2\omega_0{}^2\theta_{12} + G;$$
$$D_{\dot{x}}(0) = D_{\dot{x}0}. \qquad (18)$$

В установившемся режиме при $m_x = m_{\dot{x}} = R_{x\dot{x}} = 0$:

$$D_x = \theta_{11} = \frac{G}{4\xi\omega_0{}^3}; \quad D_{\dot{x}} = \theta_{22} = \frac{G}{4\xi\omega_0}. \qquad (19)$$

Тогда (при $m_x = m_{\dot{x}} = r = 0$) интеграл (13) легко вычисляется и интенсивность выбросов определяется по формуле

$$\lambda_c(T) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D_{\dot{x}}}{D_x}} \exp\left(-\frac{C^2}{2D_x}\right). \qquad (20)$$

При достаточно большом значении C ($C \geq 3\sigma_x$; $\sigma_x = \sqrt{D_x}$) выбросы стационарного процесса $X(t)$ становятся редкими явлениями, а интервалы между выбросами будут настолько велики по сравнению с длительностью выбросов, что сечения случайного процесса, разделенные такими интервалами, будут практически независимыми. При таких предположениях закон распределения числа выбросов будет близок к пуассоновскому закону, для которого

$$P_m = P\{N_c(t) = m\} = \frac{(\lambda_c t)^m}{m} \exp\left(-\lambda_c t\right), \ (21)$$

где P_m – вероятность того, что число положительных выбросов за уровень C случайного процесса $X(t)$ на интервале $[0, t] \subset T$ равно числу m.

Вероятность отсутствия выбросов P_0 и вероятность хотя бы одного выброса P_1 на интервале $[0,\ t] \subset T$ на основании (21) определяются по формулам:

$$P_0 = \exp\left(-\lambda_c t\right); \quad P_1 = 1 - \exp\left(-\lambda_c t\right). \quad (22)$$

Выражения (19)–(22) позволяют оценить вероятностные характеристики случайного процесса с корреляционной функцией вида (1), описывающей воздействие вибраций на элементы системы в установившемся режиме. Например, при параметрах вибраций α = 150 1/с; ω_0 = 200 1/с и времени работы системы t = 20 с при значениях $C = 3\sigma_x$; $4\sigma_x$; $5\sigma_x$ согласно (20) интенсивности выбросов соответственно равны $\lambda_c(T)$ = 0,44400; 0,01360; 0,00016. Вероятность хотя бы одного выброса (выхода из строя чувствительного элемента системы), вычисленная по формуле (21), для трех уровней составит: $P_1(C = 3\sigma_x) = 0{,}9998$; $P_1(C = 4\sigma_x) = 0{,}2381$; $P_1(C = 5\sigma_x) = 0{,}0032$.

Таким образом, очевидно, что уровень $5\sigma_x$ в данном случае является вполне подходящим, так как при нем вероятность нежелательного положительного выброса является допустимо малой.

Если условием работоспособности элемента системы является нахождение $X(t)$ в диапазоне $[h,\ C]$, где h – допустимый уровень отрицательных выбросов $X(t)$, то, кроме вычисления $\lambda_c(T)$, необходимо определять интенсивность отрицательных выбросов $\lambda_h(T)$. При этом для вычисления среднего числа отрицательных выбросов $M\left[N_h(T)\right]$ по формуле (9) следует интервал интегрирования брать $(\infty,\ 0]$.

При исследовании переходных режимов работы системы необходимо рассматривать нестационарный процесс (4), (5). Некоторую трудность при этом представляет вычисление интеграла (13) (при $r \neq 0$). В данном случае необходимо решать уравнения для моментов (14)–(18) и численно интегрировать (13) при верхнем пределе интеграла, равном теоретически максимально возможному значению $\dot{X}_{\max}$.

На рис. 1 представлена зависимость интенсивности выбросов λ_c от текущего времени $t = t_c$. Моделирование проводилось в среде MathCad при следующих значениях параметров, характеризующих систему: α = 1,4; ω_0 = 10; G = 1; C = 0,01; m_{x0} = 0,01; $m_{\dot{x}0}$ = 0,01; D_{x0} = = 0,01; $D_{\dot{x}0}$ = 0,1; $\dot{X}_{\max} = 7\ \sigma_x$.

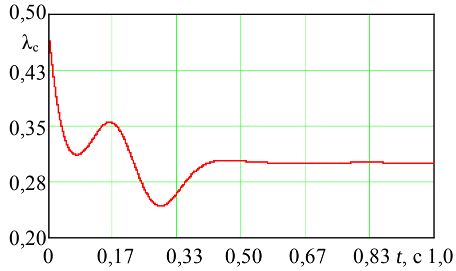

Рис. 1. Изменение интенсивности выбросов в переходном режиме

ВЫВОД

Предлагаемый подход позволяет на основе экспериментально определенных статистических характеристик вибраций и заданных эксплуатационных параметров элементов системы, подверженных воздействию вибраций, определить диапазон работоспособности и вероятностные характеристики безотказной работы системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Пупков, К. А.** Методы классической и современной теории автоматического управления. – Т. 2: Статистическая динамика и идентификация систем автоматического управления / К. А. Пупков, Н. В. Егупов. – М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2004. – 640 с.
2. **Казаков, И. Е.** Анализ стохастических систем в пространстве состояний / И. Е. Казаков, С. В. Мальчиков. – М.: Наука, 1983. – 384 с.
3. **Тихонов, В. И.** Выбросы случайных процессов / В. И. Тихонов. – М.: Наука, 1970. – 186 с.

Поступила 23.03.2009

УДК 534-16:534-8