

РАСЧЕТ УПРУГИХ ПОСТОЯННЫХ МАТЕРИАЛА ПО СОБСТВЕННЫМ ЧАСТОТАМ КОЛЕБАНИЙ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ

Канд. техн. наук, доц. МИНЧЕНЯ В. Т., канд. техн. наук СТЕПАНЕНКО Д. А., студ. ЮРЧИК Е. Н.

Белорусский национальный технический университет

Одна из важнейших задач при создании новых материалов и контроле качества изделий – определение упругих свойств материала. Эта задача особенно актуальна при создании многофазных материалов, например композитов и сплавов, так как в этом случае упругие свойства зависят от механических характеристик отдельно взятых фаз материала и теоретическое предсказание этой зависимости может быть затруднительным. Упругие свойства также являются важным показателем качества изделий микроэлектроники и микросистемной техники, в частности тонкопленочных структур и микроэлектромеханических систем (МЭМС). Все существующие методы определения упругих свойств материалов можно подразделить на статические и динамические. Статические методы основаны на экспериментальном определении зависимости между нагрузкой и деформацией образца, например путем растяжения на разрывной машине. Также существуют методы определения упругих свойств, основанные на наноиндентировании. Динамические методы можно подразделить на трансмиссионно-волновые и резонансные. Трансмиссионно-волновые методы основаны на измерении скорости распространения упругих волн в образце, которая является функцией упругих свойств и плотности материала, а в общем случае также частоты волны (дисперсия) и геометрических параметров образца (геометрическая дисперсия). Различают импульсные резонансные методы и резонансные методы с непрерывным возбуждением. Резонансные импульсные методы основаны на возбуждении колебаний образца с помощью кратковременного (импульсного) воздействия, имеющего широкополосный амплитудно-частотный спектр, и регистрации отклика образца. Вычисление спектра отклика образца позволяет идентифицировать резонансные частоты его колебаний. Эти частоты зависят от геометрических размеров и формы об-

разца, граничных условий, а также плотности и упругих свойств материала. Как правило, используются граничные условия, близкие к свободным, и в связи с этим оптимальными являются бесконтактное возбуждение и регистрация колебаний, позволяющие исключить влияние возбудителя и приемника на колебания образца. Резонансные методы с непрерывным возбуждением основаны на возбуждении колебаний образца с помощью непрерывного воздействия с плавно изменяющейся частотой и регистрации распределения амплитуды колебаний по поверхности образца. В качестве одной из разновидностей динамических методов можно рассматривать атомно-силовую акустическую микроскопию, основанную на изменении резонансной частоты кантилевера атомно-силового микроскопа при его взаимодействии с поверхностью исследуемого образца [1]. В качестве образцов в резонансных методах определения упругости широко используются тонкие пластины различной формы. В частности, известен метод определения упругих свойств материала по собственным частотам колебаний прямоугольных пластин, основанный на факте, что отношение двух резонансных частот для таких пластин при заданных размерах и плотности зависит лишь от коэффициента Пуассона [2]. График этой зависимости может быть построен по результатам моделирования с использованием метода конечных элементов (МКЭ), после чего по экспериментально определенному отношению частот можно найти из графика коэффициент Пуассона. При известном коэффициенте Пуассона модуль Юнга может быть найден из зависимости, связывающей резонансные частоты с упругими свойствами материала. К сожалению, подобные зависимости известны лишь для пластин простейшей геометрической формы (круглых и прямоугольных) и даже для этих простейших случаев они включают в себя коэффициенты, зависи-

мость которых от коэффициента Пуассона необходимо исследовать численно или экспериментально. В случае образцов более сложной формы следует прибегать к решению обратной задачи теории колебаний, т. е. задачи определения упругих свойств материала по известным собственным частотам колебаний образца [3]. Данная задача решается итеративными методами и сводится к решению последовательности прямых задач. На каждом шаге итерации задается приближение упругих свойств, по которому рассчитываются резонансные частоты, а также величина невязки между расчетными и экспериментальными частотами. Последовательность приближений строится таким образом, чтобы минимизировать функцию невязки, для чего могут использоваться стандартные методы оптимизации, например метод градиентного спуска. Решение последовательности прямых задач может производиться вариационным методом, например методом Рэлея – Ритца, или с помощью МКЭ. Важным достоинством резонансных методов по сравнению со статическими является возможность неразрушающего контроля *in situ*. Кроме того, существует ряд методик, позволяющих производить контроль бесконтактным методом, что особенно важно при контроле миниатюрных компонентов МЭМС. В частности, известны способы бесконтактного возбуждения колебаний, основанные на использовании явления термического расширения образца под действием импульсного лазерного излучения [4, 5], а также на воздействии на образец акустической радиационной силой [6, 7]. Бесконтактная регистрация отклика образца может производиться с помощью сканирующей лазерной доплеровской виброметрии [5, 8], путем измерения параметров звукового поля (акустической эмиссии), создаваемого колеблющимся образцом [7, 9], и с помощью лазерного интерферометра [4]. Особенно интенсивное развитие резонансные методы получили в связи с разработкой и широким внедрением коммерческого программного обеспечения для расчетов с применением МКЭ. Использование МКЭ позволяет исключить трудоемкие расчеты с помощью вариационных методов, результаты применения которых существенно зависят от выбора базис-

ных функций. Несмотря на то, что вариационные методы могут быть эффективно применены для расчета собственных частот колебаний образцов достаточно сложной формы [10], в настоящее время доступно лишь программное обеспечение для стандартных образцов, используемых в методе резонансной ультразвуковой спектроскопии и имеющих форму параллелепипеда [11]. В то же время расчеты с использованием широко применяемых в инженерной практике программ ANSYS и NASTRAN успешно использовались многими авторами для определения собственных частот колебаний сложных колебательных систем, например ком-понентов МЭМС, содержащих мембраны из нитрида кремния [12], и пластин произвольной формы [3].

Постановка задачи. В статье рассматривается задача расчета упругих постоянных материала по собственным частотам колебаний образца в виде круглой пластины. Образцы такой формы могут быть легко изготовлены. Кроме того, прямая задача о расчете собственных частот колебаний круглой пластины допускает аналитическое решение. В качестве исходных данных для решения обратной задачи о расчете упругих постоянных материала используются значения собственных частот колебаний, найденные в результате решения прямой задачи. Значения упругих постоянных, использованные в качестве исходных данных при решении прямой задачи, применяются для оценки точности решения обратной задачи.

Решение прямой задачи. При расчете собственных частот колебаний были приняты следующие значения параметров:

- 1) радиус пластины $R = 0,05$ м;
- 2) толщина пластины $h = 0,005$ м;
- 3) модуль Юнга материала пластины $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па;
- 4) коэффициент Пуассона материала пластины $\mu = 0,3$;
- 5) плотность материала пластины $\rho = 7800$ кг/м³.

Как известно [13, 14], собственные формы колебаний круглой пластины характеризуются наличием узловых окружностей и узловых диаметров. Если обозначить число узловых диаметров через n , а число узловых окружностей – через m , то собственная частота, соот-

ветствующая такой форме колебаний, будет определяться по формуле

$$f_{nm} = \frac{k_{nm}^2 h}{4\pi} \sqrt{\frac{E}{3\rho(1-\mu^2)}}, \quad (1)$$

где $k_{nm} = \lambda_{nm}/R$ – волновое число; λ_{nm} – m -й корень уравнения $\det a(n, \lambda) = 0$.

Элементы матрицы a для пластины со свободным контуром определяются следующим образом:

$$a_{11}(n, \lambda) = \lambda^2 J_n(\lambda) + (1-\mu)(\lambda J_n'(\lambda) - n^2 J_n(\lambda));$$

$$a_{12}(n, \lambda) = \lambda^2 I_n(\lambda) - (1-\mu)(\lambda I_n'(\lambda) - n^2 I_n(\lambda));$$

$$a_{21}(n, \lambda) = \lambda^3 J_n'(\lambda) + (1-\mu)n^2(\lambda J_n'(\lambda) - J_n(\lambda));$$

$$a_{22}(n, \lambda) = \lambda^3 I_n'(\lambda) - (1-\mu)n^2(\lambda I_n'(\lambda) - I_n(\lambda)).$$

Здесь $J_n(\cdot)$ – функция Бесселя первого рода n -го порядка; $I_n(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода n -го порядка.

Собственные формы колебаний описываются уравнением

$$\xi_{nm}(r, \varphi) = \left(J_n(k_{nm}r) - \frac{a_{11}(n, \lambda_{nm})}{a_{12}(n, \lambda_{nm})} I_n(k_{nm}r) \right) \cos n\varphi.$$

В качестве исходных данных для решения обратной задачи были использованы следующие значения собственных частот колебаний, рассчитанные по приведенным формулам с помощью программы MathCad:

$$f_{21} = 17620 \text{ Гц}; \quad f_{40} = 10910 \text{ Гц}.$$

Собственные формы колебаний, соответствующие этим частотам, изображены на рис. 1.

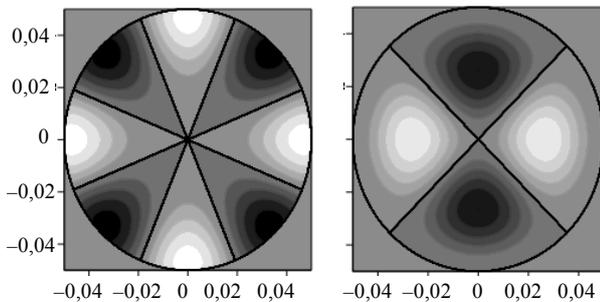


Рис. 1. Собственные формы колебаний пластины

Решение обратной задачи. Для решения обратной задачи использовался метод градиентного спуска. Для этого задавалось начальное приближение упругих постоянных ($E_0 = 3 \cdot 10^{11}$ Па; $\mu_0 = 0,5$), для которого определялись расчетные значения собственных частот колебаний f_{21p} и f_{40p} . Далее составляли функцию невязки между заданными и расчетными значениями частот

$$F(E, \mu) = (f_{21p}(E, \mu) - f_{21})^2 + (f_{40p}(E, \mu) - f_{40})^2. \quad (2)$$

Решение обратной задачи сводилось к построению последовательности приближений (E_i, μ_i) , минимизирующей функцию невязки. Последовательность приближений строили по правилу

$$\begin{pmatrix} E_i \\ \mu_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{i-1} \\ \mu_{i-1} \end{pmatrix} - s_i \text{grad } F(E_{i-1}, \mu_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots$$

Градиент функции невязки определяли по формуле

$$\text{grad } F = 2(f_{21p}(E, \mu) - f_{21}) \text{grad } f_{21p} + 2(f_{40p}(E, \mu) - f_{40}) \text{grad } f_{40p},$$

где градиенты расчетных собственных частот колебаний находились численным методом по формуле

$$\text{grad } f_{nmp} \approx \begin{pmatrix} (f_{nmp}(E + \Delta E, \mu) - f_{nmp}(E, \mu)) / \Delta E \\ (f_{nmp}(E, \mu + \Delta \mu) - f_{nmp}(E, \mu)) / \Delta \mu \end{pmatrix}.$$

Расчет градиентов для начального приближения упругих постоянных показал, что составляющая градиента по координате E пренебрежимо мала по сравнению с составляющей по координате μ , что может быть объяснено значительно более широким диапазоном изменения значений модуля Юнга. Существенная разница между составляющими градиента отрицательно влияла на сходимость последовательности приближений, в связи с чем функция невязки была представлена в виде функции безразмерной переменной $E_r = E / E_{\min}$, где E_{\min} – нижняя граница предполагаемого диапазона возможных значений модуля Юнга ($E_{\min} = 1,5 \cdot 10^{11}$ Па). Ширина диапазона изменения этой переменной сопоставима с шириной диа-

пазона изменения коэффициента Пуассона, что дает сопоставимые по величине составляющие градиента по обеим координатам. С учетом изложенного минимизацию функции невязки производили в пространстве переменных (E_r, μ) . Величину шага s_i принимали обратно пропорциональной модулю градиента

$$s_i = \frac{\lambda}{|\text{grad } F(E_{r(i-1)}, \mu_{i-1})|}.$$

Коэффициент пропорциональности λ выбирался из диапазона от 0 до 0,5 из условия минимальности функции невязки, зависимость которой от параметра λ может быть описана выражением

$$F_i(\lambda) = \left(\frac{k_{21}^2(\mu_i(\lambda))h}{4\pi} \sqrt{\frac{E_{ri}(\lambda)E_{\min}}{3\rho(1-\mu_i(\lambda)^2)}} - f_{21} \right)^2 + \left(\frac{k_{40}^2(\mu_i(\lambda))h}{4\pi} \sqrt{\frac{E_{ri}(\lambda)E_{\min}}{3\rho(1-\mu_i(\lambda)^2)}} - f_{40} \right)^2.$$

Зависимости $k_{21}(\mu)$ и $k_{40}(\mu)$ аппроксимировались квадратичными функциями на основе результатов расчета величины волнового числа для значений коэффициента Пуассона от 0 до 0,5 с шагом 0,1.

Сходимость метода градиентного спуска контролировали по величине относительной погрешности

$$\Delta_i = \sqrt{\left(\frac{f_{21p}(E_{ri}, \mu_i)}{f_{21}} - 1 \right)^2 + \left(\frac{f_{40p}(E_{ri}, \mu_i)}{f_{40}} - 1 \right)^2}.$$

Итерационный процесс заканчивался при условии $\Delta_i \leq 0,015$.

Сходимость метода градиентного спуска наглядно иллюстрирует рис. 2, на котором представлены логарифм функции невязки в виде поверхности в пространстве упругих постоянных и контурный график линий уровня этой поверхности.

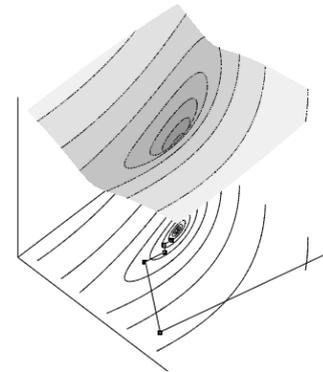


Рис. 2. Схема, иллюстрирующая сходимость метода градиентного спуска

Использование логарифма позволяет получить на контурном графике отчетливо идентифицируемый минимум. Поверхность построена на основе зависимостей (1) и (2) с использованием квадратичной аппроксимации функций $k_{21}(\mu)$ и $k_{40}(\mu)$. На контурном графике изображены в виде точек, соединенных ломаной линией, последовательные приближения упругих постоянных. Как видно из графика, последовательность приближений сходится к глобальному минимуму функции невязки, соответствующему реальным значениям упругих постоянных.

В результате расчета были получены следующие значения упругих постоянных:

1) модуль Юнга $E = 2,139 \cdot 10^{11}$ Па (относительная погрешность 1,9 %);

2) коэффициент Пуассона $\mu = 0,268$ (относительная погрешность 10,7 %).

Таким образом, за пять шагов итерационного процесса удалось определить упругие постоянные с достаточно высокой точностью.

Рассмотренная задача наглядно иллюстрирует физические и математические принципы, положенные в основу резонансных методов определения упругих свойств, и может быть использована в учебном процессе при изучении дисциплин «Физические основы измерений» и «Приборы, аппараты и комплексы клинической диагностики» (раздел «Электроакустическое оборудование»). В случае образцов сложной геометрической формы вместо аналитического решения прямых задач может применяться МКЭ. В частности, авторы успешно использовали для этой цели программу ANSYS.

ВЫВОДЫ

1. На основе анализа существующих методов определения упругих свойств материалов показана перспективность применения резонансных методов, позволяющих производить бесконтактный неразрушающий контроль.

2. В качестве примера использования резонансных методов рассмотрена задача об определении упругих свойств материала по собственным частотам колебаний образца в виде круглой пластины.

3. Показана эффективность решения исследуемой задачи с помощью метода градиентного спуска.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Quantitative** elastic-property measurements at the nanoscale with atomic force acoustic microscopy / D. C. Hurley [et al.] // *Advanced Engineering Materials*. – 2005. – Vol. 7. – P. 713–718.
2. **Alfano, M.** A non-destructive technique for the elastic characterization of thin isotropic plates / M. Alfano, L. Pagnotta // *NDT&E International*. – 2007. – Vol. 40. – P. 112–120.
3. **Pagnotta, L.** Elastic characterization of isotropic plates of any shape via dynamic tests: Theoretical aspects and numerical simulations / L. Pagnotta, G. Stigliano // *Mechanics Research Communications*. – 2008. – Vol. 35. – P. 351–360.
4. **França, D. R.** All-optical measurement of in-plane and out-of-plane Young's modulus and Poisson's ratio in silicon wafers by means of vibration modes / D. R. França, A. Blouin // *Measurement Science and Technology*. – 2004. – Vol. 15. – P. 859–868.
5. **Non-contact** resonant ultrasound spectroscopy for elastic constants measurement / P. Sedláč [et al.] // *1st International Symposium on Laser Ultrasonics: Science, Technology and Applications*. Montreal, 2008. Online: <http://www.ndt.net/article/laser-ut2008/papers/Sedlak%20LU2008.pdf>
6. **Noncontact** modal excitation of small structures using ultrasound radiation force / T. M. Huber [et al.]. Online: http://physics.gac.edu/~Huber/Presentations/sem_2007_june/400_hub.pdf
7. **Pagnotta, L.** Elastic characterization of isotropic plates of any shape via dynamic tests: Practical aspects and experimental applications / L. Pagnotta, G. Stigliano // *Mechanics Research Communications*. – 2009. – Vol. 36. – P. 154–161.
8. **Resonance** ultrasound spectroscopy with laser-Doppler interferometry for studying elastic properties of thin films / N. Nakamura [et al.] // *Ultrasonics*. – 2004. – Vol. 42. – P. 491–494.
9. **Determination** of object resonances by vibro-acoustography and their associated modes / F. G. Mitri [et al.] // *Ultrasonics*. – 2004. – Vol. 42. – P. 537–543.
10. **On the normal** modes of free vibration of inhomogeneous and anisotropic elastic objects / W. M. Visscher [et al.] // *Journal of the Acoustical Society of America*. – 1991. – Vol. 90. – P. 2154–2162.
11. <http://www.mathworks.co.uk/matlabcentral/fileexchange/11399>
12. **Guo, H.** Die-level characterization of silicon-nitride membrane/silicon structures using resonant ultrasonic spectroscopy / H. Guo, A. Lal // *Journal of Microelectromechanical Systems*. – 2003. – Vol. 12. – P. 53–63.
13. **Kitahara, M.** Boundary integral equation methods in eigenvalue problems of elastodynamics and thin plates / M. Kitahara. – Amsterdam, Oxford, New York, Tokyo, 1985. – 281 p.
14. **Бабаков, И. М.** Теория колебаний / И. М. Бабаков. – М., 1968. – 560 с.

Поступила 23.03.2009

УДК 621.396:621.391.82

ВЛИЯНИЕ ДЕКОРАТИВНЫХ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ПОКРЫТИЙ ЗДАНИЙ НА ЭЛЕКТРОМАГНИТНУЮ ОБСТАНОВКУ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНУЮ СОВМЕСТИМОСТЬ РАДИОСИСТЕМ

Канд. техн. наук МОРДАЧЕВ В. И., докт. техн. наук, проф. ЮРЦЕВ О. А., ЛИТВИНКО П. А.

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

Использование декоративных металлических покрытий, в частности алюминиевого листового покрытия, для улучшения внешнего вида зданий и их защиты от воздействий значи-

тельно изменяет их электродинамические характеристики и способно существенно влиять на электромагнитную обстановку (ЭМО) в окрестности этих зданий, а также на электро-