



Message 1.

There are given the theoretical bases and methods of solution of the physicomathematical model of radiation heat transmission in furnaces taking into account the geometry of steel slugs.

В. И. ТИМОШПОЛЬСКИЙ, М. Л. ГЕРМАН, ИТМО им. А.В. Лыкова,  
Д. Н. АНДРИАНОВ, И. А. ТРУСОВА, С. М. КАБИШОВ, П. Н. САВАНЬ, БНТУ

УДК 669.04:536.244

## РАЗРАБОТКА ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАДИАЦИОННОГО ТЕПЛОПЕРЕНОСА В ПЕЧАХ С УЧЕТОМ ГЕОМЕТРИИ СТАЛЬНЫХ ЗАГОТОВОК. СООБЩЕНИЕ 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

### Введение

Перенос тепла излучением является основным в большинстве природных и технических процессов энергообмена. Это относится прежде всего к области высоких температур (сжигание органических топлив, термообработка металла и других материалов и т.п.), где доля радиационного переноса энергии в суммарном энергообмене составляет 90% и более [1–4].

Известно, что точный расчет тепло- и массопереноса в технологических процессах приводит к повышению качества продукции, уменьшению стоимости и увеличению функциональных возможностей изделий, а также к улучшению экологической обстановки и сбережению материальных, энергетических и трудовых ресурсов. Учитывая значительную роль радиационной составляющей в суммарном теплообмене, можно сделать вывод о необходимости корректного расчета характеристик переноса излучения, особенно при нагреве стальных заготовок цилиндрического и прямоугольного сечения в кольцевой печи с подвижным подом до температур порядка 1200°C.

**Математическая модель переноса излучения в рабочем пространстве кольцевой печи с подвижным подом**

Сложность расчета характеристик переноса излучения в селективно излучающих, поглощающих и рассеивающих средах связана с необходимостью учета многократных процессов переизлучения, рассеяния излучения на частицах твердой фазы, селективности излучения газовых компонент, неоднородности температуры и сложной конфигурации излучающего объема. Успешное определение характеристик лучистого теплообмена в значительной мере зависит от корректности решения уравнения переноса излучения [5–7], на котором базируются практически все теоретические исследования. При условии локального термодинамического равновесия названное уравнение выражает закон сохранения лучистой энергии при ее распространении в поглощающей, излучающей и рассеивающей среде и имеет следующий вид:

$$\bar{\nabla} I_{\lambda}(\bar{r}, \bar{l}) + (\chi_{\lambda}(\bar{r}) + \sigma_{\lambda}(\bar{r})) I_{\lambda}(\bar{r}, \bar{l}) = \chi_{\lambda}(\bar{r}) B_{\lambda}(T(\bar{r})) + \frac{\sigma_{\lambda}(\bar{r})}{4\pi} \int_{4\pi} p_{\lambda}(\bar{r}, \bar{l}, \bar{l}') I_{\lambda}(\bar{r}, \bar{l}') d\Omega', \quad (1)$$

где  $I_{\lambda}(\bar{r}, \bar{l})$  – спектральная интенсивность излучения в точке  $\bar{r}$  в направлении  $\bar{l}$ ;  $\chi_{\lambda}(\bar{r})$ ,  $\sigma_{\lambda}(\bar{r})$  – соответственно спектральные коэффициенты поглощения и рассеяния;  $B_{\lambda}(T)$  – спектральная интенсивность излучения черного тела при температуре  $T$ ;  $p_{\lambda}(\bar{r}, \bar{l}, \bar{l}')$  – индикатриса рассеяния излучения при его взаимодействии с элементарным объемом среды.

Граничные условия к уравнению (1) определяются процессами излучения и отражения на граничных поверхностях и в общем виде могут быть записаны в форме [7]:

$$I_{\lambda}(P, \bar{l}) \Big|_{(\bar{l}\bar{n}) < 0} = I_{0\lambda}(P, \bar{l}) + \frac{1}{\pi} \int_{2\pi} p_{\lambda}(P, \bar{l}, \bar{l}') I_{\lambda}(P, \bar{l}') (\bar{l}'\bar{n}) d\Omega', \quad (2)$$

где  $\rho_\lambda(P, \bar{l}, \bar{l}')$  – спектральный коэффициент отражения границы;  $I_{0\lambda}(P, \bar{l})$  – спектральная интенсивность собственного или пропущенного извне излучения в точке  $P$  границы;  $\bar{n}$  – внешняя нормаль к границе.

На основе рассчитанного из уравнений (1), (2) поля интенсивностей излучения определяются еще две энергетические величины, необходимые для последующего вычисления температуры печной среды, футеровки печи и динамики нагрева стальных заготовок: объемная плотность радиационных

источников/стоков тепла в каждой точке печной среды  $\text{div} \bar{Q}_r = \int_0^\infty \chi_\lambda(\bar{r}) \left( 4\pi B_\lambda(T(\bar{r})) - \int_{4\pi} I_\lambda(\bar{r}, \bar{l}) d\Omega \right) d\lambda$  и

локальные плотности результирующего радиационного потока на тепловоспринимающие поверхности

печи (футеровка и поверхности стальных заготовок)  $q_w^*(P) = \int_0^\infty \varepsilon_\lambda \left( \int_{2\pi} I_\lambda(P, \bar{l})(\bar{l} \cdot \bar{n}) d\Omega - \pi B_\lambda(T_w(P)) \right) d\lambda$ .

В настоящее время известно достаточно большое количество различных методов решения уравнения (1) с граничными условиями (2): Монте-Карло [8], приближение сферических гармоник [9], радиационных элементов [10], характеристик [7, 11], зональные [6] и другие методы. Одним из последних направлений в методике решения уравнения переноса излучения являются комбинации метода дискретных ординат [5] с методами конечных разностей [12, 13] или конечных элементов [3, 14]. Популярность такого подхода для решения уравнения переноса объясняется относительной простотой вычислительного алгоритма и его совместимостью с расчетными схемами для других механизмов переноса энергии. Каждый из существующих методов имеет свои недостатки и ограниченную область применения. Например, использование метода конечных элементов или конечных объемов при решении обыкновенных дифференциальных уравнений (первого порядка, гиперболического типа) для описания горящих неоднородных потоков может приводить к существенным ограничениям вплоть до получения физически неверных результатов.

Таким образом, создание алгоритмов и методов решения уравнения переноса излучения в неоднородных трехмерных (3D) объемах в настоящее время является крайне актуальным.

#### Численный метод решения уравнения переноса излучения

В настоящей работе для расчета характеристик радиационного теплообмена в рабочем пространстве кольцевой печи с подвижным подом предлагается несколько иной подход к решению задачи переноса излучения, предполагающий при численном решении уравнения переноса (1), (2) использовать его кусочно-аналитические решения. Как показали результаты применения этого подхода для решения ряда практических задач [4, 5, 16, 17], он свободен от многих недостатков, присущих другим методам, и обладает рядом достоинств, позволяющих существенно расширить круг решаемых задач, связанных с переносом энергии излучением. Данный метод, обеспечивая более высокую точность и скорость решения, требует для своей реализации значительно меньше вычислительных ресурсов.

Основой предлагаемого метода [15] является комбинация метода дискретных ординат [3, 11–14] и метода трассировки луча [11, 17] – интенсивность излучения определяется вдоль траектории луча с учетом оптических и геометрических свойств среды и граничной поверхности путем использования кусочно-аналитических решений уравнения (1). Для пространственной дискретизации расчетной области используется идеология метода конечных элементов [14, 18], что позволяет описывать сложные конфигурации и сохранять совместимость с расчетными схемами для других механизмов переноса энергии. В результате дискретизации получается некоторое число элементов разбиения ( $N_e$ ) и узлов ( $N_p$ ), в которых рассчитываются интенсивности излучения.

Далее, согласно методу дискретных ординат, выделяются  $N_d = 2 + N_\phi N_\theta$  направлений распространения излучения. Здесь  $N_\phi$  и  $N_\theta$  – количество рассматриваемых направлений в горизонтальной ( $0 = \phi = 2\pi$ ) и вертикальной ( $0 = \theta = \pi$ ) плоскости соответственно. Для каждого выбранного направления ( $k=1, \dots, N_d$ ) уравнение (1) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial \bar{l}_k} I(\bar{r}, \bar{l}_k) + \alpha(\bar{r}) I(\bar{r}, \bar{l}_k) = Y^k, \quad Y^k = \chi B + \frac{\sigma}{4\pi} S^k(\bar{r}), \quad (3)$$

где  $\alpha = \chi + \sigma$  – коэффициент полного ослабления среды;  $\bar{l}_k = \sin\theta_k \cos\phi_k \bar{i} + \sin\theta_k \sin\phi_k \bar{j} + \cos\theta_k \bar{k}$ ;  $S^k$  – интегральный член уравнения (1), который аппроксимируется квадратурной формулой Гаусса [19] в каждом узле расчетной области ( $i=1, \dots, N_p$ );

$$Q_p^i \equiv \sum_{m=1}^{N_0} A_m \sum_{j=1}^{N_0} (I_i^p \vartheta(\bar{l}_p, \bar{n}_i) + I_i^{p+1} \vartheta(\bar{l}_{p+1}, \bar{n}_i)) |\Delta\varphi|, \quad Q_p^i \equiv \sum_{k=1}^{N_d} A_k I_i^k \vartheta(\bar{l}_k, \bar{n}_i), \quad (4)$$

где  $A_m$  – веса квадратурной формулы Гаусса. Функция  $\vartheta(\bar{l}_p, \bar{n}_i)$  определяется по выражению:

$$\vartheta(\bar{l}, \bar{n}) = \begin{cases} \bar{l}\bar{n}, & \bar{l}\bar{n} \geq 0, \\ 0, & \bar{l}\bar{n} < 0. \end{cases} \quad (5)$$

Индикатриса рассеяния  $p(\bar{r}_i, \bar{l}_k, \bar{l}_m)$  обычно выражается через полиномы Лежандра [7, 11]

$$p(\bar{r}, \bar{l}, \bar{l}') = \sum_{n=0}^N (2n+1) \alpha_n P_n(\bar{r}, \bar{l}, \bar{l}'). \quad (6)$$

Заметим, что для многих случаев переноса излучения ее можно использовать в приближении [7]:

$$p(\bar{r}, \bar{l}, \bar{l}') = a(\bar{r}) [1 - 4\pi\delta(\bar{l} \rightarrow \bar{l}')],$$

где  $a$  – удвоенная доля рассеяния излучения назад при его взаимодействии с элементарным объемом среды.

После разбиения расчетной области на конечные элементы и выбора направлений распространения излучения рассматривается задача трассировки луча. Трасса луча схематично показана на рис. 1. Интенсивность излучения в точке  $P_i$  определяется вкладом всех элементов объема на пути луча от граничной точки  $P_0$ , в которой интенсивность излучения известна, до этой точки. Формально выражение для искомой интенсивности излучения с учетом (3) можно представить в виде [7]:

$$I(P_i) = I(P_0)T(P_0, P_i) + \int_{P_0}^{P_i} Y(s)T(S, P_i)ds, \quad (7)$$

где  $T(A, B) = \exp\left(-\int_A^B \alpha(s)ds\right)$  – пропускание вдоль пути луча.

Как видно из рисунка, трасса луча пересекает элементы разбиения. Тогда решение (7) является суперпозицией решений для участков трассы внутри каждого элемента. Расчетные формулы для вычисления выражения (7) внутри элементов строятся исходя из особенностей конкретной задачи. Точность интерполяции коэффициента ослабления  $\alpha(s)$  и функции источников  $Y(s)$  выбирается в зависимости от степени неоднородности среды. Так, например, в случае линейной интерполяции выражение для  $I(P_{k+1})$  можно записать следующим образом (см. рисунок):

$$I(P_{k+1}) = \begin{cases} \left( I(P_k) - \frac{Y_k}{\tilde{\alpha}} + \frac{Y_{k+1} - Y_k}{\tilde{\alpha}^2 \Delta_k} \right) e^{-\tilde{\alpha}\Delta_k} + \frac{Y_{k+1}}{\tilde{\alpha}} - \frac{Y_{k+1} - Y_k}{\tilde{\alpha}^2 \Delta_k}, & \tilde{\alpha}\Delta_k \geq 10^{-5}, \\ I(P_k) + \frac{\Delta_k}{2} (Y_{k+1} + Y_k), & \tilde{\alpha}\Delta_k < 10^{-5}, \end{cases} \quad (8)$$

где  $\Delta_k = |P_k, P_{k+1}|$  – длина участка трассы внутри элемента;  $\tilde{\alpha} = (\alpha_{k+1} + \alpha_k)/2$ .

Таким образом, процедура нахождения интенсивности излучения в точке  $P_i$  с учетом (7) и (8) выглядит следующим образом.

1. Находится трасса луча от точки  $P_i$  до пересечения с границей (точка  $P_0$ ) с учетом направления распространения и преломления лучей

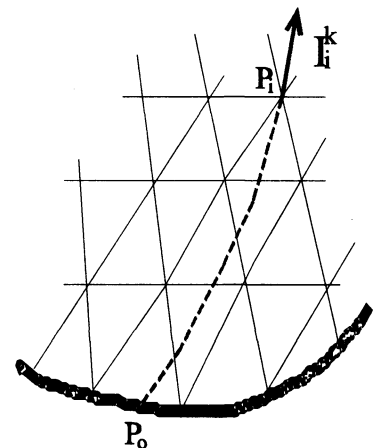


Рис. 1. Схема трассировки луча

в объеме среды. При этом определяются вспомогательные узлы  $P_k$ , являющиеся точками пересечения трассы луча с гранями элементов расчетной сетки. Следует заметить, что возможность учета изменения показателя преломления среды является важным достоинством метода, позволяющим использовать его для расчета интенсивности излучения в существенно неоднородных средах.

2. Рассчитывается интенсивность излучения в граничной точке  $P_0$  согласно заданным граничным условиям (2).

3. По рекуррентной формуле (8) рассчитывается интенсивность излучения вдоль трассы луча до точки  $P_r$ .

Поскольку правая часть уравнения переноса (1) и граничные условия (2) зависят от искомым значений интенсивности излучения, то для уточнения интегральных членов в выражениях (1), (2) необходима организация итерационного процесса. В целом вычислительный алгоритм для определения характеристик переноса излучения выглядит следующим образом.

1. Задаются исходные значения интенсивности излучения. В частности, можно положить  $I_i^k = 0$  для всех узлов сетки и направлений распространения излучения.

2. В соответствии с формулами (4), (5) вычисляется плотность потока излучения  $Q_p(\vec{r})$ , падающего на границу среды.

3. Для каждого из выбранных направлений распространения излучения  $k=1, \dots, N_d$  по формуле (4) вычисляется интегральный член уравнения переноса  $S^k(\vec{r})$ . После этого, согласно описанной выше процедуры трассировки луча и построения кусочно-аналитического решения (7), (8), вычисляются интенсивности излучения в каждом узле расчетной области ( $i=1, \dots, N_p$ ). Одновременно рассчитывается величина относительной погрешности совпадения соседних итераций ( $s$  и  $s+1$ ):

$$\delta = \max_{i,k} \left| 1 - I_i^{k,s} / I_i^{k,s+1} \right|. \quad (9)$$

4. Если заданная точность не достигается ( $\delta > \delta_0$ ,  $\delta_0$  – наперед заданная точность), то расчет повторяется начиная с пункта 2.

5. После выполнения условий (9) получаем базовый набор интенсивностей излучения  $I_i^k$  для определения интегральных членов в уравнении (1) и граничных условиях (2) и можно с помощью описанной выше процедуры трассировки луча непосредственно вычислять интенсивность излучения в любой точке расчетной области и в любом направлении распространения, не прибегая к интерполяции между базовыми узлами и базовыми направлениями. Это является еще одним преимуществом предлагаемого метода по сравнению с известными и повышает точность расчетов.

Описанный выше вычислительный алгоритм позволяет рассчитать характеристики переноса излучения в поглощающих, излучающих, рассеивающих и преломляющих средах сложной геометрии. В качестве иллюстрации возможностей метода на рис. 2 приводятся результаты расчета плотности потока излучения, падающего на граничную поверхность излучающего объема.

Алгоритм устойчиво работает при малых и больших оптических плотностях среды, при которых другие методы могут приводить к получению физически неверных результатов.

Вследствие того что пункты 3 и 4 вычислительного алгоритма представляют собой отдельную задачу для каждого заданного направления распространения излучения, то существует возможность параллельного расчета задачи.

Одним из наиболее важных достоинств предложенного метода является то, что результат вычисления в явном виде и не требует решения системы разностных алгебраических уравнений как в методах конечных разностей и конечных элементов [3, 12–14]. Благодаря этому существенно ускоряется вычислительный процесс и сокращается необходимый объем оперативной памяти.

Предложенный алгоритм высокоэффективен с точки зрения скорости счета. Этот выигрыш получается за счет того, что отпадает необходимость решения систем алгебраических уравнений и за счет специального алгоритма поиска трассы луча в области, покрытой нерегулярной сеткой. Суть данного алгоритма состоит в предварительной подготовке расчетной, конечно-элементной сетки, при которой заранее определяются и запоминаются

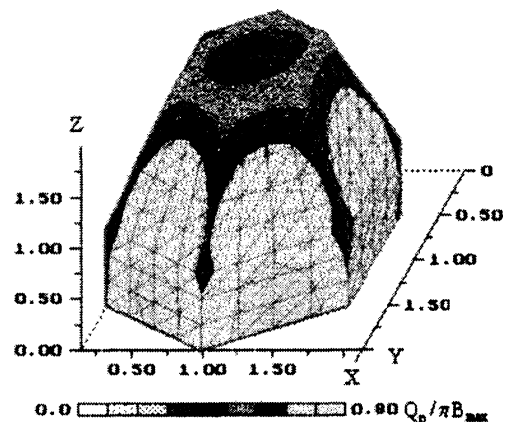


Рис. 2. Распределение плотности потока излучения, падающего на граничную поверхность поглощающей и излучающей среды ( $\chi=1 \text{ м}^{-1}$ ; границы прозрачные, нижняя – зеркальная)

соседние элементы, имеющие общие грани. После этого поиск трассы становится тривиальным и быстрым.

Предложенный метод в некотором смысле подобен методу прямого физического моделирования Монте-Карло, но в отличие от него для определения искомых величин используется не статистический, а детерминистский подход. Причем он позволяет решать все задачи, которые реализуются методом Монте-Карло при существенном сокращении времени счета, особенно для оптически толстых сред.

**Определение устойчивости и величины ошибок при расчете переноса излучения**

Как уже отмечалось выше, необходимость применения кусочно-аналитического метода решения уравнения переноса излучения в пространстве кольцевой печи, имеющем сложную геометрию, вызвана тем, что обычно используемые методы конечных разностей и конечных элементов приводят к получению «нефизических» значений интенсивности излучения.

Рассмотрим уравнение переноса излучения в одномерной постановке с изотропным рассеянием:

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} I(x, \mu) + (\chi(x) + \sigma(x))I(x, \mu) = \chi(x)B(T(x)) + \frac{\sigma(x)}{2} \int_{-1}^1 I(x, \mu') d\mu', \quad (10)$$

где  $\mu = \cos\theta$  ( $\theta$  – угол между направлением распространения излучения и внешним перпендикуляром к граничной поверхности слоя). Уравнение (10) для целей предстоящего исследования удобно переписать в виде

$$\mu \frac{\partial I}{\partial x} + \alpha I(x, \mu) = S, \quad (11)$$

где  $\alpha$  – коэффициент ослабления среды;  $S$  – функция источников. Рассмотрим конечно-разностное представление решения уравнения (11) в явной и неявной конечно-разностных схемах, а также аналитическое решение названного уравнения на отрезке  $[1 \rightarrow 2]$  длиной  $\Delta$  (стрелка указывает направление распространения излучения) с однородными оптико-физическими свойствами.

Аналитическое решение

$$I_2^A = I_1 e^{-\tau} + (1 - e^{-\tau}) \frac{S}{\alpha}; \quad (12)$$

неявная схема

$$I_2^H = I_1 \frac{2 - \tau}{2 + \tau} + \frac{2S\Delta/\mu}{2 + \tau}; \quad (13)$$

явная схема

$$I_2^Я = I_1 \frac{1}{1 + \tau} + \frac{S\Delta/\mu}{1 + \tau}. \quad (14)$$

Здесь  $\tau = \alpha\Delta/\mu$  – оптическая толщина слоя по ослаблению вдоль направления  $\mu$  распространения луча. Для удобства дальнейшего рассмотрения введем понятие оптической толщины слоя по усилению:  $\gamma = \beta\Delta/\mu$ , где  $\beta = S/I_1$  – коэффициент усиления среды. Тогда уравнения (12)–(14) можно записать в виде.

Аналитическое решение

$$I_2^A = I_1 \left( e^{-\tau} + (1 - e^{-\tau}) \frac{\gamma}{\tau} \right); \quad (15)$$

неявная схема

$$I_2^H = I_1 \frac{2(1 + \gamma) - \tau}{2 + \tau}; \quad (16)$$

явная схема

$$I_2^Я = I_1 \frac{1 + \gamma}{1 + \tau}. \quad (17)$$

Из уравнения (16) видно, что при определенных соотношениях параметров  $\tau$  и  $\gamma$  возможно получение осциллирующих с затуханием или даже отрицательных значений интенсивности излучения, которые можно просто обнулять [20]. В качестве примера приведем распределение интенсивности излучения в плоском слое ( $S=10$ ,  $\alpha\Delta x=1$ ,  $I_1=2$ ) для различных направлений распространения

излучения (рис. 3), вычисленного аналитически и с применением неявной численной схемы. Результаты показывают возникновение и затухающий характер осцилляций. При использовании явной разностной схемы подобных неустойчивостей не возникает, но точность решения существенно ниже по сравнению с неявной схемой (см. таблицу). Можно показать, что похожая ситуация имеет место и при использовании конечно-элементной аппроксимации уравнения переноса.

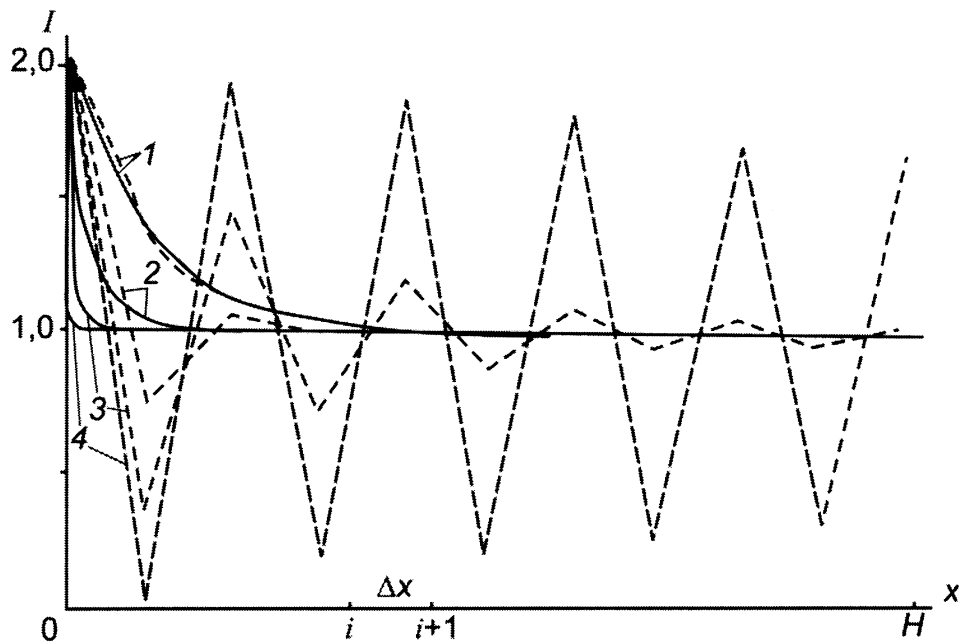


Рис. 3. К вопросу об устойчивости численного решения уравнения переноса излучения: 1 -  $\mu=1$ ; 2 - 0,3; 3 - 0,1; 4 - 0,01; — — — — точное решение; — — — — численное решение

**Сравнение точности решения при использовании явной и неявной разностных схем ( $\tau=1$ )**

$\gamma$	$\epsilon_{я} = 1 - \frac{I_2^я}{I_2^A}$	$\epsilon_{н} = 1 - \frac{I_2^н}{I_2^A}$
0,1	0,072	-0,276
0,5	0,025	-0,097
1,0	0	0
10	-0,046	0,178

Таким образом, для избежания ошибок при численном решении уравнения переноса излучения численными методами необходимо пользоваться достаточно мелким шагом расчетной сетки, что, несомненно, отражается на скорости счета особенно для оптически толстых сред, каковой является печная среда в полосах поглощения молекулярных газов. Применение кусочно-аналитического метода решения уравнения переноса в большей степени свободно от недостатков, связанных с устойчивостью и скоростью решения. Проведенная оценка точности решения при сопоставлении результатов с результатами других авторов и известными аналитическими решениями показала высокую точность предложенного метода. При сравнении с известными аналитическими решениями результаты совпадали с машинной точностью.

Одним из наиболее важных достоинств предложенного метода является то, что решение получается в явном виде и не требует решения системы разностных алгебраических уравнений как в методах конечных разностей и конечных элементов [15, 20]. Благодаря этому существенно ускоряется вычислительный процесс и сокращается необходимый объем оперативной памяти.

Расчет потоков излучения на выделенное направление в пространстве во многих практических задачах, как правило, всегда трехмерных, является весьма актуальным и сопряжен с определенными вычислительными и техническими трудностями. В первую очередь это связано со сложностью программной реализации численного алгоритма решения многомерного уравнения переноса. Во-вторых, расчет характеристик излучения в этом случае, как правило, требует значительного количества машинного времени. Поэтому на практике обычно используют упрощенные модели меньшей размерности. При этом, конечно, необходимо иметь обоснованные мотивы такого подхода и предварительную оценку погрешности конечного результата. В научной литературе имеется недостаточно информации по этому вопросу. Чтобы восполнить этот пробел и были проведены настоящие исследования.

Вначале проанализируем погрешности, которые возникают при использовании одномерных моделей для расчета двумерных задач переноса излучения. Найдем погрешности расчета основных энергетических величин, которые входят в уравнение баланса энергии и являются наиболее важными при определении температурного состояния среды:

1) плотности потока результирующего излучения на границе излучающей среды

$$Q_p(r) = \int_{4\pi} I(\vec{r}, \vec{l}) \chi(\vec{l}) d\Omega, \quad (18)$$

2) среднеугловой интенсивности излучения, выходящего из среды:

$$J = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} I(\vec{r}, \vec{l}) d\Omega. \quad (19)$$

Изучение влияния оптических свойств селективно излучающей и поглощающей среды и геометрической формы области (размерности задачи), в которую она заключена, на величину погрешности расчетов, обусловленной использованием одномерной модели, проводится на примере задачи о распространении излучения в прямоугольной области со сторонами  $X$  и  $Y$  и оптическими толщинами, равными соответственно  $\tau_y$  и  $\tau_x$ . Здесь и далее оптическая толщина среды определяется следующей формулой:  $\tau = \bar{\chi}d$ , где  $\bar{\chi}$  – среднеобъемный коэффициент поглощения печной среды;  $d$  – геометрический размер вдоль рассматриваемой оси. Погрешность расчетов потока и средней интенсивности излучения вдоль средней линии прямоугольника на основе сопоставления результатов, полученных при решении этой задачи на базе одно- и двумерной модели, определяется при различном соотношении сторон прямоугольника  $\delta = \tau_y/\tau_x$ . Анализ погрешности производится на основе оценки величин

$$\varepsilon(Q_p) = \left| \frac{Q_p(D) - Q_p(D-1)}{Q_p(D-1)} \right| \quad \text{и} \quad \varepsilon(J) = \left| \frac{J(D) - J(D-1)}{J(D-1)} \right|, \quad (20)$$

где  $D$  – размерность задачи ( $D=2,3$ ). Для расчета значений  $Q$  и  $J$  использовали метод, описанный выше. Исследования проводили для диапазона оптических толщин  $\tau \in [0,01-10]$ . Количество разбиений по углам задавалось равным 101. Погрешность решения уравнения переноса излучения не превышала 0,1%. Для каждого значения  $\tau_x$  величина  $\tau_y$  варьировалась таким образом, чтобы параметр  $\delta = \tau_y/\tau_x$  пробегал весь диапазон (1–40).

Анализ полученных результатов показывает, что при малых оптических толщинах, типичных для газов  $\text{NO}$ ,  $\text{CO}$  и слабых полос  $\text{H}_2\text{O}$  и  $\text{CO}_2$ , замена двумерной модели на одномерную приводит к значительным ошибкам даже для сильно вытянутых прямоугольников. Так, при  $\tau_x \leq 0,1$  погрешность расчета средней интенсивности излучения составляет  $\approx 13\%$  даже при  $\delta=40$ . Для потока излучения величина ошибки значительно меньше, что связано с определением потока. Вклад излучения на выделенное направление зависит от конуса угла падения и быстро уменьшается при  $\cos\Omega \rightarrow 0$ . При оптических толщинах  $\tau_x \geq 1$  величина относительной ошибки  $\varepsilon(Q)$  и  $\varepsilon(J)$  быстро уменьшается (несколько процентов уже при  $\delta > 2$ ) с ростом  $\tau$  и  $\delta$ . При  $\tau_x > 3$ , типичных для полос поглощения  $\text{CO}_2$ , для вычисления потока излучения можно пользоваться приближением плоского слоя даже при  $\delta \sim 1$ .

Наличие отражающих границ с собственным излучением способствует уменьшению погрешности расчета плотности потока излучения, падающего на граничную поверхность, при замене двумерной модели на одномерную. Причем наиболее заметно это при малых оптических толщинах. Так, например, при  $\tau_x < 0,1$  величина относительной ошибки  $\varepsilon(Q)$  уменьшается примерно в 2 раза. В то же время при  $\tau > 1$  наблюдается снижение погрешности решения всего на нескольких процентах. Для величины средней интенсивности излучения, падающего на граничную поверхность, наличие излучающих и отражающих границ и увеличение оптической высоты прямоугольника не приводит к заметному уменьшению ошибки как для потока, поскольку для наклонных лучей необходимо учитывать влияние границы. Например, при  $\tau_x = 0,4$  и  $\delta = 1$  наличие отражающих границ с собственным излучением уменьшает ошибку всего на несколько процентов ( $\approx 5-7\%$ ).

Исследование зависимости погрешности расчета средней интенсивности и потока излучения при замене трехмерной модели на двумерную от оптических параметров среды и ее геометрии проводили на примере задачи о переносе излучения в прямоугольном параллелепипеде, заполненном селективно излучающей, поглощающей и рассеивающей средой. Рассчитывали среднюю интенсивность и плотность потока излучения в его среднем сечении, имеющем форму квадрата, и оптическую толщину  $\tau_x$ . Варьировали оптическую толщину по высоте параллелепипеда  $\tau_z$ . Исследовали влияние отношения  $\delta = \tau_z/\tau_x$  на величину погрешности расчета значений потока и средней интенсивности излучения в точке, расположенной на средней линии среднего поперечного сечения параллелепипеда.

Анализ полученных данных показывает, что характер зависимости величины погрешности расчетов при замене трехмерной модели на двумерную сохраняется таким же, как и при переходе от двумерной модели к одномерной. Однако в этом случае при одинаковых значениях параметра  $\delta$  величина погрешности решения значительно больше, чем при замене двумерной задачи на одномерную.

Особенно это заметно при малых оптических толщинах ( $\tau_x < 0,1$ ), при которых погрешность решения может достигать 100%. Причем при увеличении  $\delta$  ошибки уменьшаются гораздо медленнее, чем при замене двумерной модели на одномерную. Необходимо также отметить, что в этом случае учет процессов рассеяния почти не влияет на величину погрешности расчетов.

Наличие диффузно-отражающих и излучающих границ способствует уменьшению погрешности решения при замене трехмерной модели на двумерную. Так, например, при небольших оптических толщинах относительная ошибка расчета потока и средней интенсивности излучения, падающего на граничные поверхности, уменьшается примерно в 4 и 2 раза соответственно.

Таким образом, при ошибке в 10%, что является вполне допустимым при решении большинства практических задач, замена трехмерной модели на двумерную целесообразна при  $\tau_x \geq 0,5$  и  $\delta \geq 2$ .

### Литература

1. Bergman T.L., Viskanta R. Radiation heat transfer in manufacturing and material processing. - Proc. of the First International Symposium on Radiation Transfer, August 13–18, 1995. P. 13–39.
2. Anderson R.L. Review of temperature measurements in the semiconductor industry. SPIE. 1990. Vol. 1392. P. 437–451.
3. Герман М.Л. Влияние оптических свойств двухфазной среды и граничной поверхности на радиационный теплообмен в топочных камерах: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Мн., 1993.
4. Герман М.Л., Бородуля В.А., Ноготов Е.Ф. Тепловой расчет топочной камеры жаротрубного котла с тупиковой топкой // Инж.-физ. журн. 2000. Т. 73. №6. С. 1191–1201.
5. Chandrasekhar S. Radiative Transfer. Dover. New York, 1960.
6. Hottel N.C., Sarofim A.F., Radiative Transfer. New York, 1967.
7. Адзерихо К.С., Ноготов Е.Ф., Трофимов В.П. Радиационный теплообмен в двухфазных средах. Мн.: Наука и техника, 1987.
8. Siegel R., Howell J.R. Thermal Radiation Heat Transfer, 3rd Ed., Hemisphere, Washington DC., P. 795–804.
9. Menguc M., Viskanta R. Radiative Transfer in Three-Dimensional Rectangular Enclosures. JQSRT. 1985, Vol.35, P. 533–549.
10. Maruyama S., Aihara T. Radiative Heat Transfer of Arbitrary 3-D Participating Media and Surfaces with Non-Participating Media by a Generalized Numerical Method REM. Proceeding of the First International Symposium on Radiation Transfer, Kusadasi, Turkey, 1995. P. 153–167.
11. Menguc M., Manickavasagam S. Inverse Radiation Problem in Axisymmetric Cylindrical Media // Journal of Thermophysics and Heat Transfer, 1993.
12. Fiveland W.A. Discrete-Ordinate Solutions of the Radiative Transport Equation for Rectangular Enclosures // Journal of heat transfer. 1984. Vol.106. P. 699–706.
13. Truelove J.S. Three-Dimensional Radiation in Absorbing-Emitting-Scattering Media Using the Discrete-Ordinates Approximation. JQSRT. 1988. Vol.39. N 1. P. 27–31.
14. Герман М.Л., Некрасов В.П., Ноготов Е.Ф. Численный метод расчета переноса излучения в двухфазных средах сложной геометрии // Докл. АН Беларуси. 1996. Т. 40. № 3. С. 122–126.
15. Герман М.Л., Некрасов В.П., Ноготов Е.Ф. Аналитико-численный метод решения интегродифференциального уравнения переноса излучения в объемах произвольной геометрии // Докл. АН Беларуси. 1998. Т. 42. №1. С. 67–73.
16. Герман М.Л., Колесников П.М., Ноготов Е.Ф. Эффективный численный метод расчета переноса нейтронов // Тр. Междунар. конф. «Теплофизика-98». 1998. С. 301–308.
17. Герман М.Л., Некрасов В.П., Ноготов Е.Ф., Беляев Ю.В. Влияние оптических свойств отделочных материалов на освещенность помещения / Тр. науч.-техн. конф. "Нетрадиционные энергоэффективные системы освещения в жилых, общественных и производственных зданиях". Мн.: НИПТИС, 1997. С. 23–26.
18. Zienkiewicz O.C. The Finite Element Method in Engineering Science. London, 1971.
19. Lowan A.N., Davids N., Levenson A. Table of the Zeros of the Legendre Polynomials of Order 1–16 and the Weight Coefficients for Gauss Mechanical Quadrature Formula, Bull. Of Amer. Math. Soc., 1942. Vol.48. P. 739–742.
20. Файвлэнд В.А. Решение трехмерного уравнения радиационного теплопереноса методом дискретных ординат // Аэрокосмическая техника. 1989. №9. С. 79–88.