



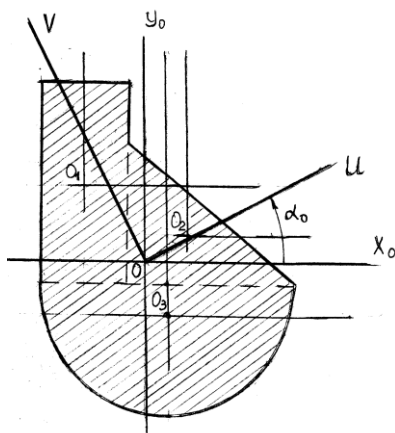
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Белорусский национальный
технический университет

Кафедра «Сопроотивление материалов и теория упругости»

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

ЧАСТЬ I



Минск
БНТУ
2015

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Сопротивление материалов и теория упругости»

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Учебно-методическое пособие
для студентов строительных специальностей

В 2 частях

Часть 1

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ. ПРИМЕРЫ

*Рекомендовано учебно-методическим объединением
высших учебных заведений Республики Беларусь по образованию
в области строительства и архитектуры*

Минск
БНТУ
2016

УДК 620.1 (076.1)

ББК 30.121я7

С64

Авторы:

*С. И. Зиневич, В. А. Пенькевич, М. В. Югова, Л. И. Шевчук,
О. Л. Вербицкая, Е. А. Евсеева, В. Н. Рябцев*

Рецензенты:

М. Т. Насковец, В. Н. Основин

С64 **Сопротивление** материалов : учебно-методическое пособие для студентов строительных специальностей : в 2 ч. / С. И. Зиневич [и др.]. – Минск : БНТУ, 2016. – Ч. 1 : Краткая теория. Примеры. – 346 с.

ISBN 978-985-550-373-7 (Ч. 1).

Содержатся сведения о простых и сложных видах сопротивлений, напряженном состоянии в точке элемента конструкции, продольном изгибе и динамическом действии нагрузки.

Приведены теоретический материал и примеры решения характерных задач.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов строительных специальностей дневного и заочного отделений.

УДК 620.1 (076.1)

ББК 30.121я7

ISBN 978-985-550-373-7 (Ч. 1)

ISBN 978-985-550-778-0

© Белорусский национальный
технический университет, 2016

ПРЕДИСЛОВИЕ

При изучении дисциплины «Сопротивление материалов» важное значение имеет практическое применение выводов теории. Чтобы помочь студентам овладеть методикой и приобрести навыки в решении задач, коллектив кафедры «Сопротивление материалов и теория упругости» БНТУ, исходя из многолетнего опыта работы, считает целесообразным создание краткого теоретического курса по сопротивлению материалов с решением задач.

Пособие предназначено для студентов строительных специальностей как дневной, так и заочной формы обучения. В нем рассматриваются простые и сложные виды сопротивлений, напряженное состояние в точке, вопросы устойчивости отдельных элементов конструкции, а также расчеты при динамическом действии нагрузок. По каждой теме приведены подробные решения трех-четырёх характерных задач.

При написании данного учебно-методического пособия авторский коллектив использовал материалы ранее издаваемых кафедрой пособий и в этой связи выражает глубокую благодарность Алявдину П. В., Балыкину М. К., Винокурову Е. Ф., Голубеву И. А., Зайцу В. Н., Кончицу А. Е., Петровичу А. Г., Рудицину М. Н., Суходоеву В. Н. и многим другим преподавателям, работавшим на кафедре «Сопротивление материалов и теория упругости».

ВВЕДЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Назначение дисциплины

«Сопротивление материалов» рассматривает расчет отдельных элементов конструкций.

Элементы конструкций рассчитываются на прочность, жесткость и устойчивость.

Прочность – способность элемента конструкции воспринимать нагрузку не разрушаясь.

Жесткость – способность элемента конструкции оказывать сопротивление деформации, допуская ее в определенных пределах.

Устойчивость – способность элемента конструкции сохранять под нагрузкой первоначальную форму равновесия.

Гипотезы и допущения

В теории дисциплины при выводе расчетных формул применяется ряд гипотез и допущений.

Основные из них:

– материал принимается сплошным, однородным и изотропным (свойства в любой точке и направлении считаются одинаковыми);

– материал до определенной степени нагружения деформируется линейно;

– деформации элемента конструкции весьма малы по сравнению с размерами самого элемента;

– до приложения внешних сил в материале отсутствуют напряжения.

Геометрическая схематизация элементов строительных конструкций. Расчетная схема

Расчет строительной конструкции начинается с геометрической схематизации ее элементов. Все формы элементов строительных конструкций с достаточной степенью точности можно отнести к четырем основным формам: брус, пластина, массив и оболочка.

Расчет пластин, массивов и оболочек осуществляется с использованием теории упругости, а расчет бруса – с использованием сопротивления материалов.

После схематизации геометрических форм производят выбор расчетной схемы. Расчетная схема представляет собой упрощенную схему элемента, которая отражает наиболее существенные его особенности под действием нагрузки. При составлении расчетной схемы брус не вычерчивают полностью, а только его продольную ось, поскольку она является геометрическим местом центров тяжести поперечных сечений. Все действующие на элемент внешние силы приводятся к этой оси по правилу механики.

На расчетной схеме намечается система трех взаимно перпендикулярных осей координат: Z – вдоль продольной оси, X, Y – поперек продольной оси (рис. 1, а, б). Начало координатных осей обычно располагается в крайней левой точке расчетной схемы.

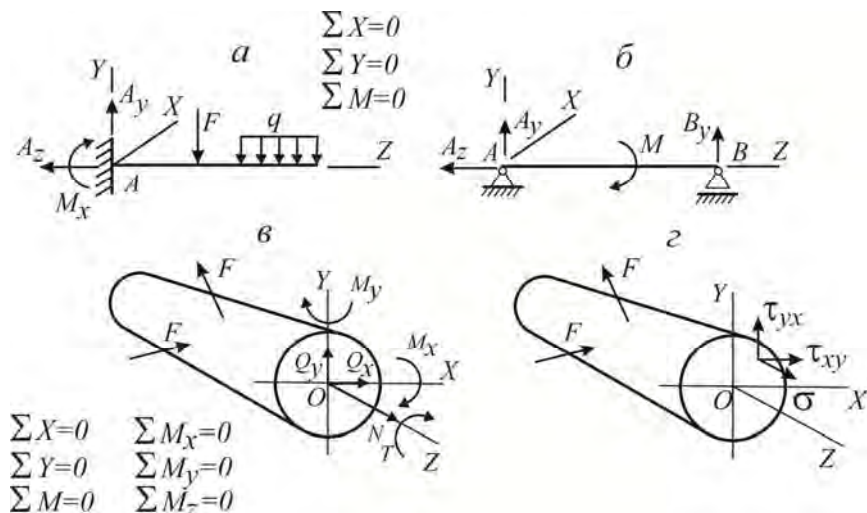


Рис. 1

Каждый элемент конструкции соединяется с другим элементом или основанием при помощи опорных устройств. Опоры подразделяются на шарнирно-подвижные, шарнирно-неподвижные, защемления (заделки), см. рис. 1, а, б.

В зависимости от конструктивного назначения брус могут называть стержнем, балкой, колонной или валом.

Стержень – это брус, работающий на растяжение (сжатие).

Балка – брус, работающий на изгиб.

К о л о н н а – вертикально стоящий брус, предназначенный для восприятия сжимающей нагрузки.

В а л – брус, работающий на кручение.

Внешние силы

Элементы конструкций испытывают воздействие внешних сил, которые делятся на активные (нагрузки) и реактивные (реакции опор). Среди нагрузок различают сосредоточенные F , M , T (считаются приложенными в точке элемента или конкретном сечении) и распределенные q (по длине или площади элемента), см. рис. 1, *a*, *б*.

Опорные реакции плоской системы определяются из трех условий равновесия (статики): $\sum X = 0$, $\sum Y = 0$, $\sum M = 0$, см. рис. 1, *a*, *б*.

Внутренние силы

В результате действия внешних сил в элементе конструкции возникают внутренние силы (усилия), которые сопротивляются действию внешних сил и обусловлены упругим взаимодействием частиц материала.

Внутренние силы (рис. 1, *в*) привязываются к системе координатных осей стержня и подразделяются:

- на продольные силы N , действующие по продольной оси Z ;
- поперечные силы Q_x и Q_y , действующие в плоскости поперечного сечения и направленные по координатным осям X и Y ;
- изгибающие моменты M_x и M_y , действующие относительно координатных осей X и Y ;
- крутящие моменты T , действующие относительно продольной оси Z .

Для определения внутренних сил используется метод сечений. Стержень в исследуемом сечении мысленно рассекается на две части. Одна часть стержня отбрасывается, а действие отброшенной части на оставленную (рассматриваемую) заменяется неизвестными внутренними силами. Для оставшейся части составляются уравнения равновесия, из которых и определяются неизвестные внутренние силы.

Напряжения

Различают нормальные σ и касательные τ напряжения. Нормальные напряжения действуют перпендикулярно поперечному сечению и являются функцией

$$\sigma = f(N, M),$$

а касательные – в плоскости поперечного сечения и являются функцией

$$\tau = f(Q, T) \text{ (рис. 1, з).}$$

Виды напряженного состояния материала

В общем случае действия внешних сил на тело (элемент конструкции) по граням элементарно малого прямоугольного параллелепипеда, выделенного в любой точке, действует совокупность нормальных σ и касательных τ напряжений, определяющих напряженное состояние в этой точке (рис. 2, а). На невидимых гранях элемента возникают соответственно такие же напряжения, но противоположно направленные.

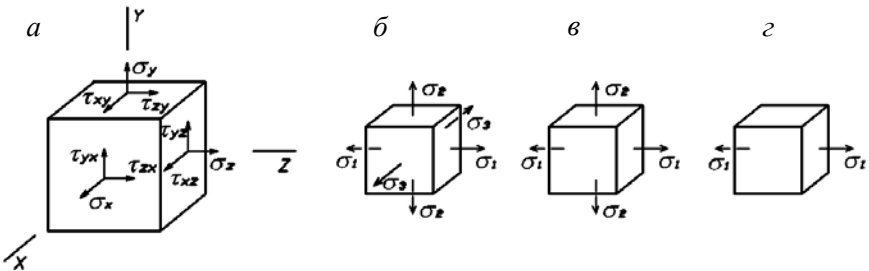


Рис. 2

Нормальным напряжениям присваивают индекс, указывающий ось, параллельно которой они направлены. Для обозначения касательных напряжений используется двойной индекс. Первый указывает ось, параллельно которой направлено касательное напряжение, вто-

рой – ось, параллельно которой направлена нормаль к площадке, где действует касательное напряжение.

С поворотом параллелепипеда вокруг точки значение напряжений будет изменяться, и можно найти такое его положение, при котором касательные напряжения по его граням исчезнут, а нормальные сохранятся (рис. 2, б). Площадки, на которых отсутствуют касательные напряжения, называются главными, а действующие на них нормальные напряжения – главными нормальными напряжениями. Они обозначаются $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, причем $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

По совокупности главных напряжений различают три вида напряженного состояния материала:

объемное, когда все три главных напряжения отличны от нуля (см. рис. 2, б);

плоское, когда два главных напряжения отличны от нуля (рис. 2, в);

линейное, когда отлично от нуля лишь одно главное напряжение (рис. 2, г).

Деформации и перемещения

Под воздействием внешних нагрузок элементы конструкции деформируются, т. е. изменяют свои размеры и форму. Деформации могут быть упругими и пластическими. Упругие деформации исчезают после снятия нагрузки, а пластические сохраняются.

В зависимости от условий загрузки внешними силами брус может испытывать такие виды деформаций, как растяжение (сжатие), сдвиг, кручение и изгиб. Эти четыре вида деформаций относят к простым. На практике брус часто подвергается одновременно нескольким простым деформациям, например, изгиб с растяжением, изгиб с кручением и растяжением и т. д. Такую деформацию называют сложной.

В случае когда длина бруса намного больше его поперечных размеров (например, чертежная линейка), сжимающие силы могут изогнуть его. Произойдет особый вид деформации – продольный изгиб.

При деформациях точки элемента конструкции перемещаются в пространстве. Различают линейные перемещения δ_y, δ_z – для точек – и угловые δ_{xy} – для линий (рис. 3, а).

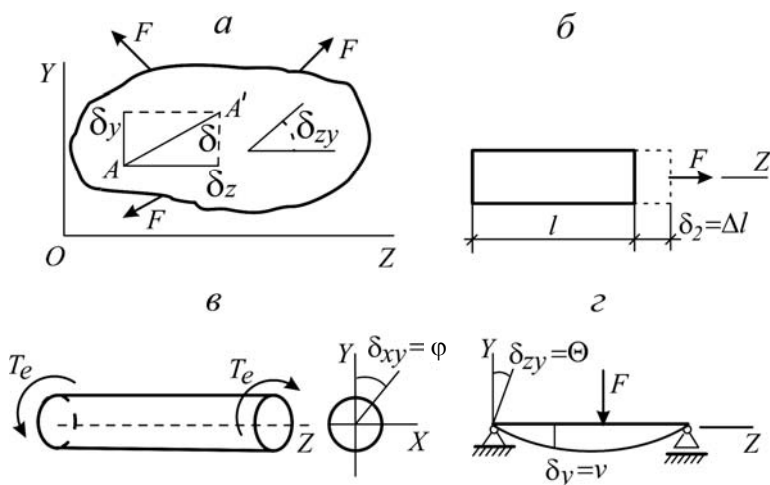


Рис. 3

В конкретных видах деформаций перемещения приобретают определенные обозначения и названия. При растяжении-сжатии $\delta_z = \Delta l$ – продольная деформация (рис. 3, б); при кручении $\delta_{xy} = \varphi$ – угол закручивания (рис. 3, в); при изгибе $\delta_y = v$ – прогиб, а $\delta_{zy} = \theta$ – угол поворота сечения (рис. 3, г).

Методы расчета на прочность и жесткость

В расчетной практике используется несколько методов расчета на прочность. Наиболее распространены два из них.

Расчет деталей машин и механизмов ведется по методу допускаемых напряжений, а расчет элементов строительных конструкций – по методу предельных состояний.

По методу допускаемых напряжений условие прочности при линейном напряженном состоянии имеет вид

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{adm}} \quad \text{ИЛИ} \quad \tau_{\max} \leq \tau_{\text{adm}},$$

где σ_{\max} (τ_{\max}) – максимальные напряжения в элементе конструкции;
 σ_{adm} (τ_{adm}) – допускаемые напряжения для материала элемента.

Максимальные напряжения определяются от нормативной нагрузки, т. е. нагрузки, установленной нормами проектирования.

Допускаемые напряжения устанавливаются по результатам испытания материала с учетом общего коэффициента запаса прочности.

По методу предельных состояний условие прочности имеет вид

$$\sigma_{\max} \leq R \quad \text{или} \quad \tau_{\max} \leq R_s,$$

где R (R_s) – расчетные сопротивления для материала элемента.

Максимальные напряжения определяются от расчетной нагрузки, учитывающей возможность ее отклонения от нормативной.

Расчетные сопротивления также устанавливаются по результатам испытания материала, но с использованием ряда частных коэффициентов, каждый из которых учитывает какой-либо один фактор, влияющий на его прочность.

Расчет по методу предельных состояний позволяет спроектировать элемент конструкций более рационально, т. е. с меньшими затратами материала.

Из условия прочности можно решить три типа задач:

1. Проверить прочность стержня, когда известны нагрузка, форма и размеры поперечного сечения и род материала.
2. Определить размеры поперечного сечения стержня, если известны нагрузка, форма поперечного сечения и род материала.
3. Определить наибольшую допустимую нагрузку на стержень, если известны форма и размеры поперечного сечения и род материала.

Для случаев сложной деформации, т. е. сложного напряженного состояния (плоского и объемного), задача составления условия прочности решается с помощью теорией прочности, каждая из которых основана на определенной гипотезе, объясняющей причину разрушения материала.

При оценке прочности материала при сложном напряженном состоянии вводится понятие расчетного напряжения σ_{des} , которое определяется по принятой теории прочности и сравнивается с тем же расчетным сопротивлением материала R , полученным испытанием материала на растяжение-сжатие:

$$\sigma_{\text{des}} \leq R.$$

В частном случае плоского напряженного состояния – чистом сдвиге, когда в поперечном сечении стержня возникают только касательные напряжения, условие прочности используется в виде

$$\tau_{\max} \leq R_s,$$

где R_s – расчетное сопротивление материала сдвигу.

Расчет на жесткость элементов конструкции сводится к определению максимальных перемещений (линейных или угловых) δ_{\max} под действием нормативной нагрузки и сравнении ее с допустимым значением δ_{adm} , установленным нормами проектирования.

Условие жесткости имеет вид

$$\delta_{\max} \leq \delta_{\text{adm}}.$$

Необходимо отметить, что в дисциплине «Сопротивление материалов» рассматриваются принципы расчета на прочность и жесткость, а не конкретные конструкции, поэтому в настоящем издании для упрощения все нагрузки указываются в расчетных значениях, а расчеты выполняются по методу предельных состояний. Исключение составляют расчеты на изгиб с кручением, которые выполнены по методу допускаемых напряжений.

1. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

Элемент конструкции подвергается деформации растяжения или сжатия, когда равнодействующая внешних сил действует на него по центральной оси Z (рис. 1.1, a). Такое растяжение-сжатие называется центральным (осевым).

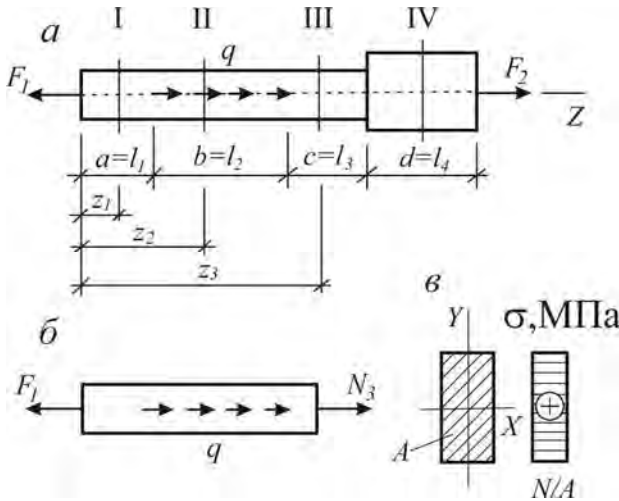


Рис. 1.1

Действующая на элемент конструкции система сил должна находиться в равновесии: $\sum Z = 0$.

При растяжении длина стержня (участка) в продольном направлении увеличивается (деформация обозначается знаком «плюс»), а при сжатии – уменьшается (знак «минус»).

1.1. Внутренние силы

При центральном растяжении-сжатии в поперечном сечении стержня возникает только один внутренний силовой фактор – продольная сила N . Для ее определения на стержне, исходя из вида нагрузки и ее расположения, выделяются расчетные участки: между точками приложения сосредоточенных сил F и в пределах распределенной нагрузки q .

В пределах каждого участка намечаются сечения (I, II, ..., i) и отмечаются их положения в системе координатных осей (Z_1, Z_2, \dots, Z_i).

Для определения продольной силы N используется метод сечений. Стержень в исследуемом сечении мысленно рассекается на две части. Одна из частей его «отбрасывается». Поскольку весь стержень находится в равновесии, то и его рассматриваемая часть под действием известных внешних сил (F, q) и неизвестной внутренней N также должна находиться в равновесии, т. е. удовлетворять условию $\Sigma Z = 0$.

Составить выражения для определения продольной силы N можно двумя способами.

Первый способ. На схеме для каждого участка показывается отсеченная часть стержня и составляется уравнение равновесия этой части с использованием правила знаков для сил, принятое в курсе теоретической механики.

Так, для сечения III (рис. 1.1, б) уравнение равновесия имеет вид

$$\Sigma Z = N_3 + ql_2 - F_1 = 0,$$

откуда

$$N_3 = -ql_2 + F_1.$$

Второй способ. На рисунке для всех участков отсеченная часть стержня не показывается.

Выражения для определения продольной силы составляются по следующему правилу: продольная сила N в сечении стержня численно равна алгебраической сумме всех внешних сил, расположенных по одну сторону от рассматриваемого сечения:

$$N = \Sigma F_i.$$

При определении N можно рассматривать любую часть «рассеченного» стержня.

Правило знаков для сил связано с учетом характера вызываемой ими деформации стержня (растяжение или сжатие).

Если внешняя сила (F, q) направлена от рассматриваемого сечения стержня (стремится растянуть его рассматриваемую часть), то в этом сечении возникает положительная продольная сила ($+N$),

и если направлена к сечению (стремится сжать), то в сечении возникает отрицательная продольная сила ($-N$).

Изложенное правило знаков иллюстрируется на рис. 1.2.

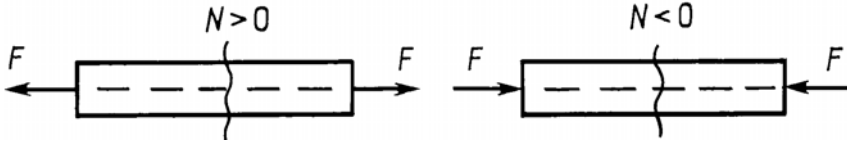


Рис. 1.2

Полученный в результате вычислений знак при N укажет на характер деформации участка стержня от суммарного действия сил: «плюс» означает, что участок стержня растянут, «минус» – что участок сжат. Так, для сечения III (см. рис. 1.2, б) выражение для продольной силы будет

$$N_3 = -ql_2 + F_1 \text{ (сила } q \text{ направлена к сечению, сила } F_1 \text{ – от сечения).}$$

Второй прием составления выражений для N сокращает объем вычислений и является общим для всех видов сопротивлений.

По вычисленным на участках стержня значениям N строится эпюра продольных сил (см. примеры).

1.2. Напряжения. Условие прочности

При деформации растяжения или сжатия в сечениях стержня возникают нормальные напряжения σ .

Продольная сила N связана с нормальным напряжением σ зависимостью

$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad (1.1)$$

где N – продольная сила в сечении стержня;

A – площадь поперечного сечения стержня.

При вычислении нормальных напряжений по длине стержня также выделяются расчетные участки. К указанным выше границам этих участков добавляются точки, где изменяются размеры поперечных сечений (см. рис. 1.1, *a*). По вычисленным значениям строится эпюра (см. примеры).

Нормальное напряжение σ распределяется по поперечному сечению равномерно. График, показывающий изменение напряжения по высоте сечения стержня, называется *эпюрой напряжений* (эп. σ), рис. 1.1, *в*.

При растяжении-сжатии стержня его материал в любой точке находится в условии линейного напряженного состояния, поэтому проверка прочности ведется по максимальному нормальному напряжению (σ_{\max}) и условие прочности имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq R, \quad (1.2)$$

где N_{\max} – продольная сила на наиболее нагруженном участке стержня;

R – расчетное сопротивление материала стержня растяжению-сжатию.

Для пластичных материалов (сталь) расчетные сопротивления при растяжении и сжатии одинаковы, для хрупких (чугун, бетон) – разные.

1.3. Деформации. Условие жесткости

Возникновение продольной силы N в сечении стержня сопровождается его продольной деформацией : удлинением при растяжении и укорочением при сжатии.

Абсолютная продольная деформация Δl от сосредоточенных сил F определяется по формуле Гука

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}, \quad (1.3)$$

где N – продольная сила в стержне (на участке);

l – длина стержня (участка);

E – модуль продольной упругости (модуль Юнга) материала стержня;

A – площадь поперечного сечения стержня (участка).

Абсолютная продольная деформация Δl от равномерно распределенной нагрузки q (действующей на данном участке стержня) определяется по формуле

$$\Delta l = \frac{ql^2}{2EA}. \quad (1.4)$$

Абсолютная продольная деформация Δl от собственного веса стержня определяется по формуле

$$\Delta l = \frac{\gamma l^2}{2E},$$

где γ – вес единицы объема материала стержня.

Вычислив деформации на участках стержня, можно найти перемещения его характерных сечений и построить эпюру перемещений (см. примеры).

Относительная продольная деформация ε стержня (или его участка) определяется по формуле

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}, \quad (1.5)$$

где Δl – абсолютная продольная деформация стержня (участка);

l – длина стержня (участка).

Условие жесткости при растяжении-сжатии имеет вид

$$\varepsilon_{\max} = \frac{\Delta l}{l} \leq \varepsilon_{\text{adm}},$$

где ε_{adm} – предельно допустимая относительная продольная деформация.

Закон Гука при растяжении-сжатии (из формулы (1.3)), выражающий зависимость между напряжением и деформацией, имеет вид

$$\sigma = E\varepsilon.$$

Модуль продольной упругости E характеризует способность материала сопротивляться деформациям растяжения-сжатия в зависимости от его свойств.

1.4. Статически определимые системы

Статически определимыми являются системы, усилия в элементах которых можно определить при помощи одних лишь уравнений равновесия (статики).

Для плоской системы сил их три:

$$\Sigma X = 0; \quad \Sigma Y = 0; \quad \Sigma M = 0.$$

Пример 1.1

Стальная полоса прямоугольного поперечного сечения нагружена системой расчетных сил F (рис. 1.3, *a*).

Проверить прочность и жесткость полосы.

Для стали: расчетное сопротивление $R = 210$ МПа, модуль продольной упругости $E = 200$ ГПа, допустимая относительная продольная деформация $\varepsilon_{adm} = 1,05 \cdot 10^{-3}$.

Решение

Нагрузка F , действующая по продольной оси полосы, вызывает в ней деформацию растяжения-сжатия.

Проверим, выполняется ли условие равновесия элемента конструкции:

$$\Sigma Z = F_1 - F_2 + F_3 = 50 - 215 + 165 = 0 - \text{выполняется.}$$

На рассматриваемой полосе выделяются три расчетных участка, в пределах которых намечаются сечения I–III. Длинам участков l придается индекс номера участка.

Для определения продольных сил N на участках элемента воспользуемся первым приемом. Для этого нужно составить расчетные схемы для всех «отсеченных» участков элемента, начиная, например, с левого конца (рис. 1.3, *б*), и записать для них условия равновесия.

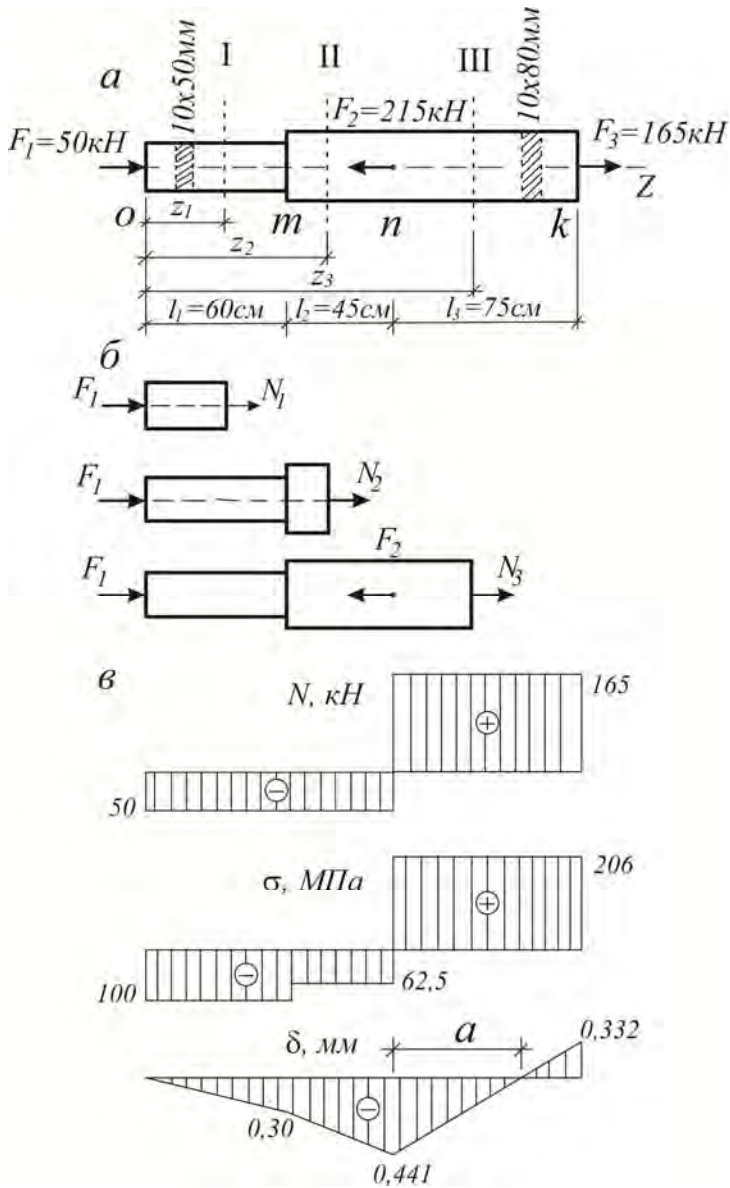


Рис. 1.3

Рекомендуется искомые продольные силы N направлять от рас-
сматриваемого сечения, т. е. считать положительными.

Участок I:

$$0 \leq z_1 \leq 0,6 \text{ м}, \quad \Sigma Z = N_1 + F_1 = 0,$$

откуда

$$N_1 = -F_1 = -50 \text{ кН (сжатие)}.$$

Участок II:

$$0,6 \leq z_2 \leq 1,05 \text{ м}, \quad \Sigma Z = N_2 + F_1 = 0,$$

откуда

$$N_2 = -F_1 = -50 \text{ кН (сжатие)}.$$

Участок III:

$$1,05 \leq z_3 \leq 1,8 \text{ м}, \quad \Sigma Z = N_3 + F_1 - F_2 = 0,$$

откуда

$$N_3 = -F_1 + F_2 = -50 + 215 = 165 \text{ кН (растяжение)}.$$

По полученным значениям N в выбранном масштабе строится эпюра продольных сил – эпюра N (рис. 1.3, в). Положительные значения N откладываются вверх от линии эпюры, а отрицательные – вниз.

Заметим, что в пределах расчетных участков $N = \text{const}$. В сечении, где приложена сосредоточенная сила F , на эпюре N имеется «скачок» на величину этой силы ($165 + 50 = 215$ кН). Из эпюры N следует, что наиболее нагруженным является третий участок: $N_3 = N_{\text{max}}$.

Нормальные напряжения, возникающие в поперечных сечениях на расчетных участках элемента, определяются по формуле (1.1).

Сечение I:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{-50 \cdot 10^3}{10 \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = -0,1 \cdot 10^9 \text{ Па} = -100 \text{ МПа}.$$

Сечение II:

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{-50 \cdot 10^3}{10 \cdot 80 \cdot 10^{-6}} = -0,0625 \cdot 10^9 \text{ Па} = -62,5 \text{ МПа}.$$

Сечение III:

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{165 \cdot 10^3}{10 \cdot 80 \cdot 10^{-6}} = 0,206 \cdot 10^9 \text{ Па} = 206 \text{ МПа}.$$

Значения нагрузки и геометрические размеры элемента конструкции могут быть заданы в любых соответствующих единицах (Н, кН, МН, мм, см, м). В формулы напряжений и деформаций они должны подставляться в ньютонах и метрах.

По полученным значениям σ строится эпюра нормальных напряжений (рис. 1.3, з). Правило построения такое же, как и для эпюры N . В пределах расчетных участков $\sigma = \text{const}$, так как $N = \text{const}$ и $A = \text{const}$. В сечении, где приложены сосредоточенные силы F , а также где изменяются размеры поперечного сечения, на эпюре σ наблюдается «скачок». Из эпюры σ следует, что наиболее напряженным является третий участок: $\sigma_3 = \sigma_{\max}$.

Проверка прочности выполняется по условию прочности (1.2). Наибольшее нормальное напряжение возникает на третьем расчетном участке.

Так как $\sigma_{\max} = 206 \text{ МПа} < R = 210 \text{ МПа}$, прочность элемента по нормальным напряжениям обеспечена.

Для проверки жесткости вначале по формуле (1.3) определим значения абсолютной продольной деформации на участках элемента.

Участок I:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = -\frac{50 \cdot 10^3 \cdot 60 \cdot 10^{-2}}{200 \cdot 10^9 \cdot 10 \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = -0,03 \cdot 10^{-2} \text{ м} = -0,3 \text{ мм.}$$

Участок II:

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2} = -\frac{50 \cdot 10^3 \cdot 45 \cdot 10^{-2}}{200 \cdot 10^9 \cdot 10 \cdot 80 \cdot 10^{-6}} = -0,0141 \cdot 10^{-2} \text{ м} = -0,141 \text{ мм.}$$

Участок III:

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{EA_3} = \frac{165 \cdot 10^3 \cdot 75 \cdot 10^{-2}}{200 \cdot 10^9 \cdot 10 \cdot 80 \cdot 10^{-6}} = 0,0773 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 0,773 \text{ мм.}$$

Значения относительной продольной деформации на участках элемента вычислим по формуле (1.5):

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta l_1}{l_1} = \frac{-0,3}{600} = -0,50 \cdot 10^{-3};$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta l_2}{l_2} = \frac{-0,141}{450} = -0,313 \cdot 10^{-3};$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\Delta l_3}{l_3} = \frac{0,773}{750} = -1,031 \cdot 10^{-3}.$$

Условие жесткости элемента конструкции выполняется, так как

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_3 = 1,031 \cdot 10^{-3} < \varepsilon_{\text{adm}} = 1,05 \cdot 10^{-3}.$$

Перемещения характерных сечений ($o-k$, где изменяются A или N) вычисляются исходя из значений деформаций отдельных участков элемента. Крайнее левое сечение примем за относительно неподвижное: $\delta_0 = 0$. Перемещения других сечений находятся последовательным добавлением к предыдущему перемещению деформаций последующих участков:

$$\delta_0 = 0,$$

$$\delta_m = \delta_0 + \Delta l_1 = -0,30 \text{ мм},$$

$$\delta_n = \delta_m + \Delta l_2 = -0,30 - 0,141 = -0,441 \text{ мм},$$

$$\delta_k = \delta_n + \Delta l_3 = -0,441 + 0,773 = 0,332 \text{ мм}.$$

Эпюра перемещений δ показана на рис. 1.3, d .

На третьем участке эпюра δ пересекает ось. Определим положение сечения u , в котором перемещение равно нулю:

$$\delta_u = \delta_n + \frac{N_3 a}{EA_3} = -0,441 \cdot 10^{-3} + \frac{165 \cdot 10^3 \cdot a}{200 \cdot 10^9 \cdot 10 \cdot 80 \cdot 10^{-6}} = 0,$$

откуда $a = 0,428 \text{ м} = 42,8 \text{ см}$.

Из эпюры δ следует, что наибольшее перемещение претерпевает сечение n ($\delta_n = 0,441$ мм) в сторону крайнего левого (о). Перемещение правого конечного сечения (k) по отношению к крайнему левому (о) составляет $\delta_k = 0,332$ мм и направлено в положительном направлении оси Z .

Пример 1.2

Бетонная колонна квадратного поперечного сечения нагружена расчетной системой сил: сосредоточенных F и равномерно распределенных q (рис. 1.4).

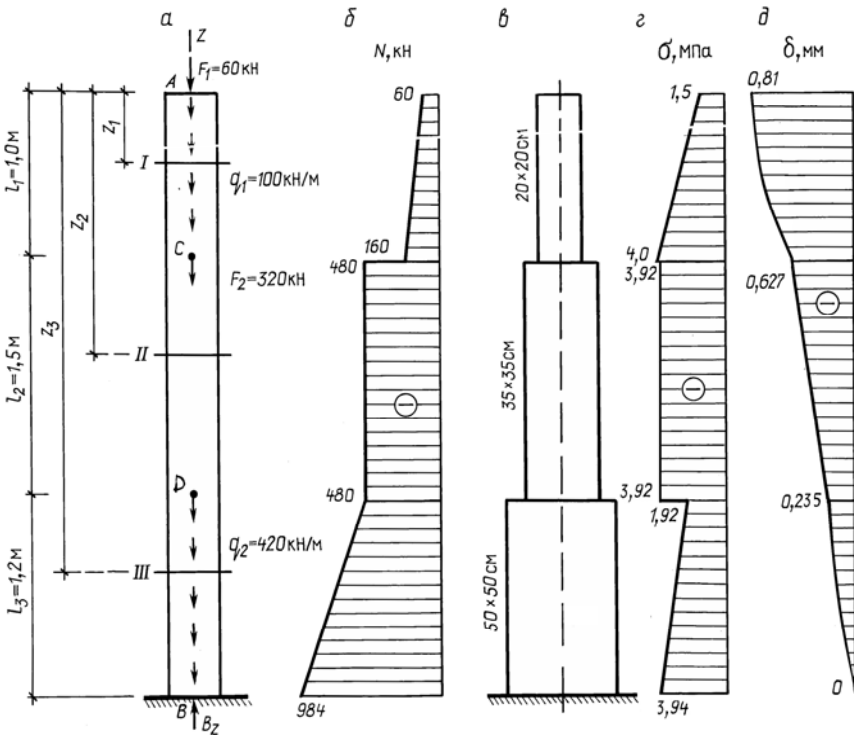


Рис. 1.4

Определить размеры поперечных сечений, постоянных для каждого расчетного участка колонны, и перемещение ее свободного сечения.

Для материала колонны: расчетное сопротивление на сжатие $R_c = 4$ МПа, модуль продольной упругости $E = 15$ ГПа.

Решение

Поскольку нагрузка действует по продольной оси Z колонны, последняя подвергается деформации сжатия.

На рассматриваемой колонне исходя из характера нагрузки выделяются три расчетных участка, в пределах которых намечаются сечения I–III.

Длинам участков l придается индекс номера участка.

Колонна в своем основании имеет опору, в которой возникает только одна реакция B_z . Уравнение равновесия можно составить также одно: $\Sigma Z = 0$, из которого определится реакция B_z :

$$\begin{aligned}\Sigma Z &= B_z - F_1 - q_1 l_1 - F_2 - q_2 l_3 = \\ &= B_z - 60 - 100 \cdot 1 - 320 - 420 \cdot 1,2 = 0,\end{aligned}$$

откуда $B_z = 984$ кН.

Рассматриваемая система является статически определимой.

Для определения продольной силы на участках колонны воспользуемся вторым приемом, без показа «отсеченных» частей, используя правило $N = \Sigma F_i$.

Участок I: $0 \leq z_1 \leq 1,0$ м.

$$N_1 = -F_1 - q_1 z_1,$$

$$\begin{array}{ll}\text{при } z_1 = 0 & N_1 = -60 \text{ кН,} \\ z_1 = 1,0 \text{ м} & N_1 = -160 \text{ кН.}\end{array}$$

Участок II: $1 \leq z_2 \leq 2,5$ м.

$$N_2 = -F_1 - q_1 l_1 - F_2 = -60 - 100 \cdot 1 - 320 = -480 \text{ кН.}$$

Участок III: $2,5 \leq z_3 \leq 3,7$ м.

$$N_3 = -F_1 - q_1 l_1 - F_2 - q_2 (z_3 - (l_1 + l_2)),$$

$$\begin{array}{ll} \text{при } z_3 = 2,5 \text{ м} & N_3 = -480 \text{ кН,} \\ z_3 = 3,7 \text{ м} & N_3 = -984 \text{ кН.} \end{array}$$

Контроль правильности вычислений N таков: при $z = 3,7$ м по модулю $N_3 = B_z = 984$ кН.

Для вычисления N сечения можно было назначать со стороны опоры.

По полученным значениям N строится эпюра продольных сил – эп. N (рис. 1.4, б). Отрицательные значения N обычно откладываются влево от оси эпюры.

На участке колонны, где распределенная нагрузка $q = 0$, $N = \text{const}$, а на участке, где $q \neq 0$, $N \neq \text{const}$ (прямая наклонная).

В сечениях, где приложена сосредоточенная сила F , на эпюре N имеется «скачок» на величину этой силы ($480 - 160 = 320$ кН).

Размеры поперечных сечений на каждом участке колонны определим из условия прочности по нормальным напряжениям (1.2):

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq R_c.$$

На участке I

$$A_1 = \frac{N_{1,\max}}{R_c} = \frac{160 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^6} = 40 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 400 \text{ см}^2,$$

сторона сечения $a_1 = \sqrt{A_1} = \sqrt{400} = 20$ см.

На участке II

$$A_2 = \frac{N_{2,\max}}{R_c} = \frac{480 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^6} = 120 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 1200 \text{ см}^2,$$

сторона сечения $a_2 = \sqrt{A_2} = \sqrt{1200} = 34,6$ см. Принимаем $a_2 = 35$ см.

На участке III

$$A_3 = \frac{N_{3,\max}}{R_c} = \frac{984 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^6} = 246 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 2460 \text{ см}^2,$$

сторона сечения $a_3 = \sqrt{A_3} = \sqrt{2460} = 49,6$ см. Принимаем $a_3 = 50$ см.

На рис. 1.4, в показана схема спроектированной колонны.

Для построения эпюры напряжений необходимо вычислить значения σ в характерных сечениях колонны.

В сечении *A*

$$\sigma_A = \frac{N_A}{A_1} = -\frac{60 \cdot 10^3}{20 \cdot 20 \cdot 10^{-4}} = -0,15 \cdot 10^7 \text{ Па} = -1,5 \text{ МПа.}$$

В сечении *C*

$$\sigma_C = \frac{N_C}{A_1} = -\frac{160 \cdot 10^3}{20 \cdot 20 \cdot 10^{-4}} = -0,4 \cdot 10^7 \text{ Па} = -4,0 \text{ МПа.}$$

$$\sigma'_C = \frac{N'_C}{A_2} = -\frac{480 \cdot 10^3}{35 \cdot 35 \cdot 10^{-4}} = -0,392 \cdot 10^7 \text{ Па} = -3,92 \text{ МПа.}$$

В сечении *D*

$$\sigma_D = \frac{N_D}{A_2} = -\frac{480 \cdot 10^3}{35 \cdot 35 \cdot 10^{-4}} = -0,392 \cdot 10^7 \text{ Па} = -3,92 \text{ МПа.}$$

$$\sigma'_D = \frac{N'_D}{A_3} = -\frac{480 \cdot 10^3}{50 \cdot 50 \cdot 10^{-4}} = -0,192 \cdot 10^7 \text{ Па} = -1,92 \text{ МПа.}$$

В сечении *B*

$$\sigma_B = \frac{N_B}{A_3} = -\frac{984 \cdot 10^3}{50 \cdot 50 \cdot 10^{-4}} = -0,394 \cdot 10^7 \text{ Па} = -3,94 \text{ МПа.}$$

По полученным значениям σ строится эпюра напряжений (эпюра σ), показанная на рис. 1.4, *з*.

Значения абсолютных продольных деформаций на участках колонны вычислим, используя формулы (1.3) и (1.4).

Следует обратить внимание, что на первом участке колонны продольная сила N складывается из сосредоточенной F_1 и равномерно распределенной q . Поэтому на первом участке

$$\begin{aligned}\Delta l_1 &= -\frac{N_{1,\min} l_1}{EA_1} - \frac{q_1 l_1^2}{2EA_1} = -\frac{60 \cdot 10^3 \cdot 1,0}{15 \cdot 10^9 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 10^{-4}} - \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 1,0^2}{2 \cdot 15 \cdot 10^9 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 10^{-4}} = \\ &= -0,010 \cdot 10^{-2} - 0,0083 \cdot 10^{-2} = -0,0183 \cdot 10^{-2} \text{ м} = -0,183 \text{ мм}.\end{aligned}$$

Распределенная нагрузка q_1 для второго участка колонны действует как сосредоточенная. Поэтому на втором участке

$$\Delta l_2 = -\frac{N_2 l_2}{EA_2} = -\frac{480 \cdot 10^3 \cdot 1,5}{15 \cdot 10^9 \cdot 35 \cdot 35 \cdot 10^{-4}} = -0,0392 \cdot 10^{-2} \text{ м} = -0,392 \text{ мм}.$$

На третьем участке

$$\begin{aligned}\Delta l_3 &= -\frac{N_{3,\min} l_3}{EA_3} - \frac{q_2 l_3^2}{2EA_3} = -\frac{480 \cdot 10^3 \cdot 1,2}{15 \cdot 10^9 \cdot 50 \cdot 50 \cdot 10^{-4}} - \frac{420 \cdot 10^3 \cdot 1,2^2}{2 \cdot 15 \cdot 10^9 \cdot 50 \cdot 50 \cdot 10^{-4}} = \\ &= -0,0154 \cdot 10^{-2} - 0,00806 \cdot 10^{-2} = -0,0235 \cdot 10^{-2} \text{ м} = -0,235 \text{ мм}.\end{aligned}$$

Для определения деформации участков колонны можно использовать эпюру напряжений. Особенно это удобно на участках с распределенной нагрузкой.

Деформация

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} = \frac{\sigma l}{E} = \frac{\omega}{E},$$

где ω – площадь эпюры напряжений.

Так, для участка I (где эпюра напряжений является трапецией)

$$\Delta l_1 = \frac{\omega_1}{E} = -\frac{1}{15 \cdot 10^9} \left(\frac{1,5 + 4}{2} \cdot 1,0 \right) \cdot 10^6 = -0,183 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -0,183 \text{ мм},$$

что соответствует первому вычислению.

Перемещения граничных сечений колонны определяются исходя из значений деформаций Δl его участков.

Для проведения расчета на колонне выбирается сечение, перемещение которого известно, – это опора, где перемещение равно нулю ($\delta_B = 0$).

Перемещения остальных граничных сечений вычисляются последовательным добавлением к начальному перемещению деформаций последующих участков колонны:

$$\delta_B = 0;$$

$$\delta_D = \delta_B + \Delta l_3 = 0 - 0,235 = -0,235 \text{ мм};$$

$$\delta_C = \delta_D + \Delta l_2 = -0,235 - 0,392 = -0,627 \text{ мм};$$

$$\delta_A = \delta_C + \Delta l_1 = -0,627 - 0,183 = -0,810 \text{ мм}.$$

По вычисленным значениям δ строится эпюра перемещений (эпюра δ), приведенная на рис. 1.4, δ .

На участке колонны, где $q \neq 0$, перемещение наращивается по закону параболы.

Из эпюры перемещений следует, что перемещение свободного сечения составляет $\delta = 0,810$ мм. Это же число определяет и полную деформацию колонны.

Пример 1.3

Определить размеры поперечных сечений стержней металло-деревянной фермы. Материал стержней 1 и 2 – древесина с равным квадратным поперечным сечением; стержень 3 стальной, из двух равнополочных уголков (рис. 1.5, a).

Расчетные сопротивления: для стали $R = 210$ МПа, для древесины $R_c = 13$ МПа.

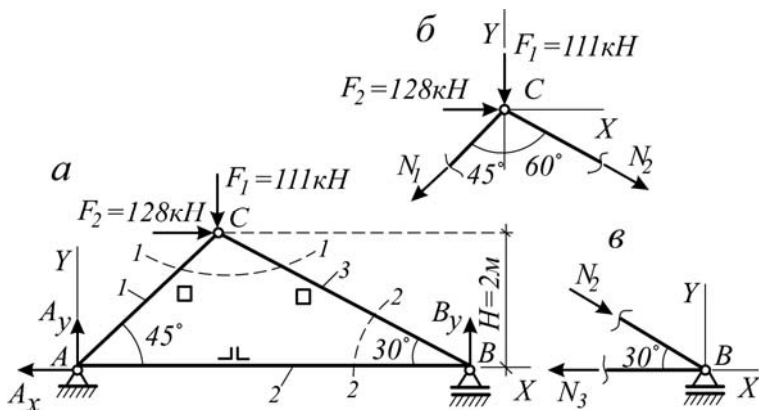


Рис. 1.5

Решение

Нагрузка F через стержни 1 и 2 передается на опоры A и B , где возникают три реакции (A_x , A_y , B_y), которые могут быть определены из уравнений равновесия ($\sum X = 0$, $\sum Y = 0$, $\sum M = 0$).

Значит, эта система является статически определимой.

Поскольку стержни фермы соединяются между собой при помощи шарниров, действующая нагрузка может вызвать в них только продольные силы N , т. е. они подвергаются деформации растяжения-сжатия.

Рассматриваемая система относится к случаю, когда внутренние силы в ее стержнях можно определить без нахождения опорных реакций.

Для определения усилий в стержнях фермы используется метод сечений, по которому ферма «разрезается» на две части так, чтобы одновременно отсекались не более трех стержней.

Первое сечение проведем, как показано на рис. 1.5, б, и составим уравнения равновесия для узла C .

Искомые усилия N_1 , N_2 направим от сечения (считаем растягивающими):

$$\sum X = N_2 \cos 30^\circ - N_1 \cos 45^\circ + 128 = 0;$$

$$\sum Y = -N_2 \cos 60^\circ - N_1 \cos 45^\circ - 111 = 0.$$

Решив уравнения, получим $N_1 = -33,1$ кН, $N_2 = -174,9$ кН, стержни 1 и 2 сжаты. Второе сечение проведем, как показано на рис. 1.5, в. Искомое усилие N_3 направим от сечения, а найденное N_2 – к сечению, так как стержень 2 сжат.

Уравнение равновесия узла В

$$\Sigma X = -N_3 + N_2 \cos 30^\circ = 0,$$

откуда

$$N_3 = 174,9 \cdot 0,866 = 151,5 \text{ кН.}$$

Стержень 3 испытывает деформацию растяжения.

Из условия прочности (1.2) определим значения площадей поперечных сечений стержней фермы.

Для первого стержня

$$A_1 = \frac{N_1}{R_c} = \frac{33,1 \cdot 10^3}{13 \cdot 10^6} = 2,55 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 25,5 \text{ см}^2,$$

сторона сечения $a_1 = \sqrt{A} = \sqrt{25,5} = 5,05$ см.

Для второго стержня

$$A_2 = \frac{N_2}{R_c} = \frac{174,9 \cdot 10^3}{13 \cdot 10^6} = 13,45 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 134,5 \text{ см}^2,$$

сторона сечения $a_2 = \sqrt{134,5} = 11,6$ см.

Конструктивно принимаем $a_1 = a_2 = 12$ см.

Для третьего стержня

$$A_3 = \frac{N_3}{R} = \frac{151,5 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 0,721 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 7,21 \text{ см}^2.$$

Для одного уголка

$$A_3' = \frac{7,21}{2} = 3,61 \text{ см}^2.$$

Из таблицы сортамента равнополочных уголков принимаем два уголка $40 \times 40 \times 5$ мм с площадью поперечного сечения

$$A_3 = 3,79 \cdot 2 = 7,58 \text{ см}^2.$$

Пример 1.4

Абсолютно жесткий (недеформирующийся) элемент P укреплен на шарнирно-неподвижной опоре A и поддерживается стержнем 1 .

Определить наибольшую допустимую нагрузку F и перемещение т. C (рис. 1.6, а).

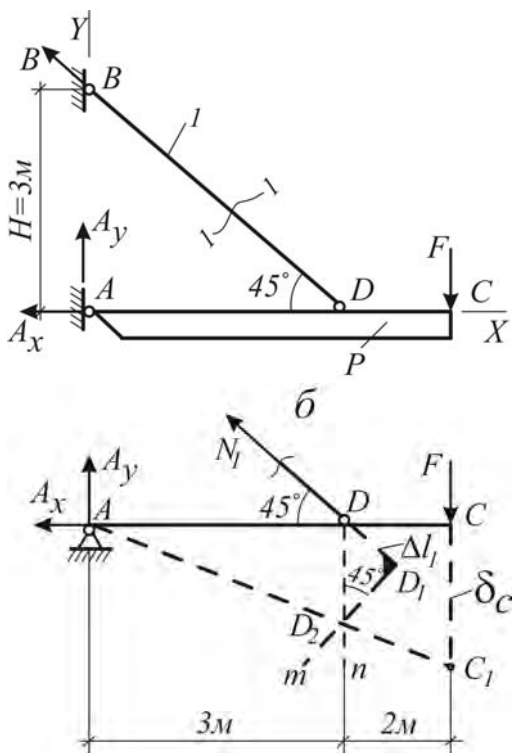


Рис. 1.6

Стержень 1 – стальной, швеллер № 10.
Для стали $R = 210$ МПа, $E = 200$ ГПа.

Решение

Нагрузка F через элемент P и стержень I передается на опоры, где возникают три реакции (A_x , A_y и B – направленная по продольной оси стержня), которые могут быть определены из уравнений равновесия ($\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, $\Sigma M = 0$). Следовательно, рассматриваемая система является статически определимой.

По таблице сортамента площадь сечения швеллера № 10 (стержень I) $A_1 = 10,9 \text{ см}^2$. Длина стержня

$$l_1 = 3/0,707 = 4,24 \text{ м.}$$

Так как стержень I соединяется с элементом P при помощи шарнира, в нем возникает только продольная сила N , т. е. он подвергается деформации растяжения-сжатия.

Для определения продольной силы N система «разрезается» по стержню I и для рассматриваемой части системы составляются уравнения равновесия (рис. 1.6, б). Опорные реакции A_x и A_y для условия задачи интереса не представляют. Рациональным уравнением равновесия будет

$$\Sigma M_A = -N_1 \sin \alpha \cdot 3 + F \cdot 5 = 0,$$

откуда

$$N_1 = \frac{5F}{\sin \alpha \cdot 3} \text{ (стержень растянут).}$$

Максимально допустимая продольная сила в стержне I из формулы (1.2)

$$N_{1,\text{adm}} = A_1 R = 10,9 \cdot 10^{-4} \cdot 210 \cdot 10^6 = 2289 \cdot 10^2 \text{ Н} = 228,9 \text{ кН.}$$

Наибольшая допустимая нагрузка на конструкцию (из уравнения равновесия)

$$F = \frac{N_{1,\text{adm}} \sin \alpha \cdot 3}{5} = \frac{228,9 \cdot 0,707 \cdot 3}{5} = 97,1 \text{ кН.}$$

Абсолютная продольная деформация стержня l по формуле (1.3)

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{228,9 \cdot 10^3 \cdot 4,24}{200 \cdot 10^9 \cdot 10,9 \cdot 10^{-4}} = 0,445 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 4,45 \text{ мм.}$$

Абсолютно жесткий элемент P под действием нагрузки F , вследствие деформации стержня l , повернется вокруг шарнира A на некоторый угол.

Чтобы построить схему перемещений (рис. 1.6, б), стержень l следует мысленно отсоединить от элемента P в т. D и по его направлению отложить отрезок, изображающий деформацию (удлинение) Δl_1 , – получим т. D_1 .

Поскольку элементы системы должны перемещаться совместно, конец продеформированного стержня l (т. D_1) нужно свести с точкой D элемента P .

Вследствие малых упругих деформаций можно допустить, что т. D_1 перемещается по перпендикуляру к продольной оси стержня, т. е. по $D_1 m$. Точка D элемента P по той же причине переместится по перпендикуляру к его продольной оси, т. е. по Dn .

Точка пересечения траекторий перемещений ($D_1 m$ и Dn) дает т. D_2 – положение узла D в продеформированном состоянии системы.

Из подобия треугольников ADD_2 и ACC_1 составляется зависимость между перемещением δ_C и деформацией Δl_1 :

$$\frac{DD_2}{3} = \frac{\delta_C}{5}, \quad DD_2 = \frac{\Delta l_1}{\sin \alpha}.$$

Тогда получим

$$\frac{\Delta l_1}{3 \sin \alpha} = \frac{\delta_C}{5},$$

откуда перемещение т. C (вниз, по вертикали) будет

$$\delta_C = \frac{5 \cdot 4,45}{0,707 \cdot 3} = 10,5 \text{ мм.}$$

1.5. Статически неопределимые системы

Статически неопределимыми являются системы, внутренние силы в элементах которых невозможно определить при помощи одних лишь уравнений равновесия (статики).

Степень статической неопределимости определяется разностью между числом неизвестных (внутренних сил и реакций опор) и числом возможных уравнений равновесия.

Для раскрытия статической неопределимости, т. е. определения внутренних сил в элементах системы, к уравнениям равновесия нужно составить столько дополнительных уравнений, сколько раз система статически неопределима.

Существует несколько методов раскрытия статической неопределимости. Наиболее простой – метод сравнения деформаций, построенный на принципе совместности перемещений.

Принцип совместности перемещений означает, что элементы системы в результате действия нагрузки должны перемещаться совместно, без разрушений, разъединений, смещений друг относительно друга.

Чтобы составить уравнение совместности перемещений, необходимо представить систему в деформированном состоянии и установить геометрическую зависимость между деформациями ее стержней.

Совместное решение уравнений равновесия с уравнениями перемещений позволяет раскрыть статическую неопределимость.

Следует заметить, что в статически определимых системах искомые внутренние силы в стержнях предварительно направлялись произвольно. В статически неопределимых многостержневых системах искомые внутренние силы в стержнях нужно направлять в соответствии с предполагаемой деформацией стержня. Так, если стержень удлиняется – неизвестная внутренняя сила в нем направляется от сечения, если укорачивается – к сечению.

Пример 1.5

Абсолютно жесткий элемент P , нагруженный расчетной нагрузкой $F = 136$ кН, подвешен на трех стальных стержнях одинаковой длины и площади поперечного сечения (рис. 1.7).

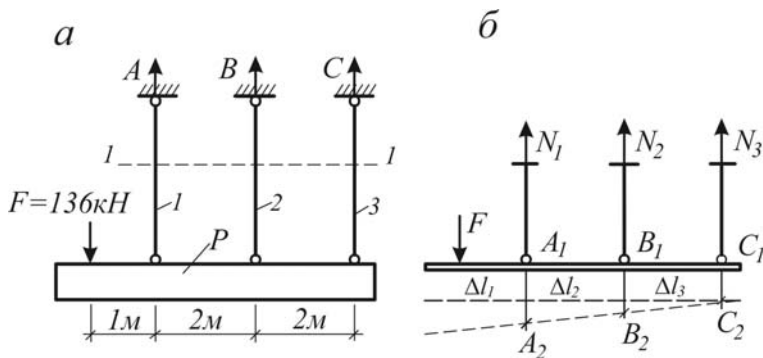


Рис. 1.7

Определить диаметр стержней, если $R = 210$ МПа.

Решение

Поскольку стержни системы соединяются с элементом P и опорами при помощи шарниров, в опорах возникает по одной реакции, направленной по продольной оси стержня (рис. 1.7, а), а в самих стержнях возникают только продольные силы N .

Трем неизвестным реакциям (A , B и C) соответствуют только два уравнения равновесия ($\sum Y = 0$, $\sum M = 0$), следовательно, система один раз статически неопределима.

Для определения внутренних сил N в стержнях сечением I–I выделим нижнюю часть системы (рис. 1.7, б).

Предполагаем, что все три стержня будут растянуты, и поэтому искомые N направляем от сечений стержней.

Исходя из точки приложения силы F , можно предположить, что стержни растянутся на разную величину и ось элемента P переместится вниз и несколько наклонится (см. рис. 1.7, б).

Рациональные уравнения равновесия

$$\sum M_{A_1} = -N_2 \cdot 2 - N_3 \cdot 4 - F \cdot 1 = 0, \quad (1.6)$$

$$\sum M_{C_1} = N_1 \cdot 4 + N_2 \cdot 2 - F \cdot 5 = 0. \quad (1.7)$$

Дополнительное уравнение, уравнение совместности перемещений, получим, рассматривая трапецию $A_1A_2C_1C_2$ с целью связать между собой деформации Δl стержней:

$$\frac{\Delta l_1 - \Delta l_3}{4} = \frac{\Delta l_2 - \Delta l_3}{2} \quad \text{или} \quad \Delta l_1 - 2\Delta l_2 + \Delta l_3 = 0.$$

Выразив деформации Δl через продольные силы N , получим

$$\frac{N_1 l}{EA} - 2 \frac{N_2 l}{EA} + \frac{N_3 l}{EA} = 0 \quad \text{или} \quad N_1 - 2N_2 + N_3 = 0. \quad (1.8)$$

Решив совместно уравнения (1.6), (1.7) и (1.8), получим

$$N_1 = 147,3 \text{ кН}, \quad N_2 = 45,4 \text{ кН}, \quad N_3 = -56,7 \text{ кН}.$$

Проверим полученные значения продольных сил:

$$\sum Y = 147,3 + 45,4 - 56,7 - 136 = 0.$$

Предположительный характер деформации подтвердился лишь для стержней 1 и 2, стержень 3 оказался сжатым.

Площадь поперечного сечения и диаметр наиболее нагруженного стержня (первого) определим из условия прочности по нормальным напряжениям:

$$A_1 = \frac{N_1}{R} = \frac{147 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 0,7 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 7,0 \text{ см}^2,$$

$$d_1 = \sqrt{\frac{7,01 \cdot 4}{3,14}} = 2,98 \approx 3,0 \text{ см}.$$

Поскольку по условию задачи сечения всех трех стержней должны быть одинаковыми, принимаем диаметр $d = 3,0$ см с площадью сечения $A = 7,065 \text{ см}^2$.

Нормальные напряжения в стержнях будут

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{147 \cdot 10^3}{7,065 \cdot 10^{-4}} = 20,81 \cdot 10^7 \text{ Па} = 208,1 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = 64,3 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = -80,3 \text{ МПа}.$$

При анализе значения нормальных напряжений в стержнях может возникнуть мысль об уменьшении диаметров сечений у стержней 2 и 3, так как они довольно сильно недонапряжены. Такая мысль будет ошибочной.

Особенность статически неопределимых систем такова, что при подборе размеров поперечного сечения стержней необходимо предварительно задаться их соотношением и выполнить это условие при расчете. В данном примере принято $A_1 = A_2 = A_3$. Если уменьшить d_2 и d_3 , увеличится напряжение в первом стержне, что приводит к его перенапряжению и, возможно, к разрушению.

Пример 1.6

Абсолютно жесткий элемент P закреплен в шарнирно-неподвижной опоре и поддерживается двумя стальными стержнями, выполненными из сдвоенных равнополочных уголков (рис. 1.8, *a*).

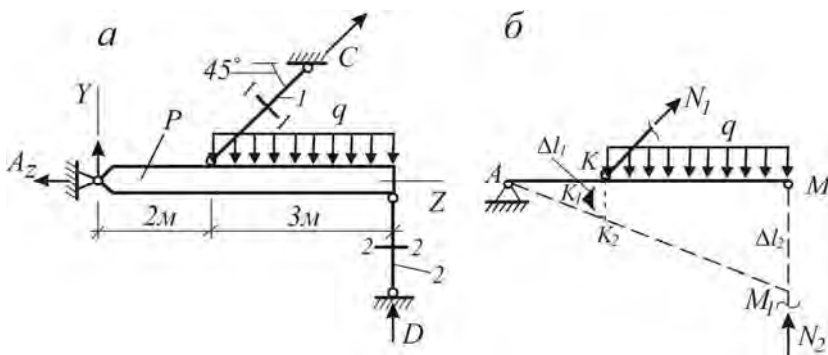


Рис. 1.8

Определить наибольшую допустимую нагрузку на систему.

Стержень 1: длина $l_1 = 2,5$ м, уголок $50 \times 50 \times 5$ мм; стержень 2: длина $l_2 = 1,5$ м, уголок $70 \times 70 \times 6$ мм.

Для стали $R = 210$ МПа, $E = 200$ ГПа.

Решение

Из таблицы сортамента прокатных уголков выписываем значения площадей сечения стержней:

$$A_1 = 4,8 \cdot 2 = 9,6 \text{ см}^2;$$

$$A_2 = 8,15 \cdot 2 = 16,3 \text{ см}^2.$$

Система имеет четыре опорные реакции. Для нее можно составить три уравнения равновесия. Следовательно, она является одним раз статически неопределимой ($4 - 3 = 1$).

Поскольку стержни 1 и 2 соединяются с элементом P при помощи шарниров, в них образуются только продольные силы N .

Исходя из характера закрепления элемента P , направления нагрузки и расположения стержней, можно предположить, что элемент P повернется вокруг шарнира A на некоторый угол. При этом стержень 1 удлинится, а стержень 2 укоротится. Соответственно этому показываются направления продольных сил в стержнях: N_1 – от сечения, N_2 – к сечению.

Рациональным уравнением равновесия является

$$\sum M_A = -N_1 \sin 45^\circ \cdot 2 - N_2 \cdot 5 + q \cdot 3 \cdot \left(2 + \frac{3}{2}\right) = 0$$

или

$$-1,414N_1 - 5N_2 + 10,5q = 0. \quad (1.9)$$

Чтобы построить диаграмму перемещений, стержни 1 и 2 следует мысленно отсоединить от элемента P и по направлению этих стержней отложить отрезки, изображающие их деформации: Δl_1 – удлинение, Δl_2 – укорочение. Получим точки K_1 и M_1 .

Из точки K_1 проведем перпендикуляр к продольной оси стержня 1 . Поскольку элементы системы должны перемещаться совместно, конец деформированного стержня 1 нужно свести с узлом K элемента P . Для этого из точки K проводим перпендикуляр к продольной оси элемента P . Пересечение двух названных перпендикуляров даст точку K_2 – новое положение узла K .

Так как элемент P абсолютно жесткий, его ось, повернувшись вокруг шарнира A , пройдет через точку K_2 и на оси стержня 2 отсечет отрезок Δl_2 (рис. 1.8, б).

Чтобы составить дополнительное уравнение, нужно из подобия треугольников AKK_2 и AMM_1 связать между собой деформации стержней Δl_1 и Δl_2 :

$$\frac{\Delta l_1}{2 \sin 45^\circ} = \frac{\Delta l_2}{5} \quad \text{или} \quad 5\Delta l_1 = 1,41\Delta l_2.$$

Выразив деформации через продольные силы, получим

$$5 \frac{N_1 l_1}{EA_1} = 1,41 \frac{N_2 l_2}{EA_2} \quad \text{или} \quad 1,30N_1 - 0,130N_2 = 0. \quad (1.10)$$

Из уравнений (1.9) и (1.10) получим

$$N_1 = 0,204q, \quad N_2 = 2,04q.$$

Допустимую нагрузку q найдем из условия прочности стержней. Из условия прочности стержня 1

$$N_1 \leq RA_1 = 210 \cdot 10^6 \cdot 9,6 \cdot 10^{-4} = 2016 \cdot 10^2 \text{ Н} = 201,6 \text{ кН},$$

а нагрузка

$$q = \frac{N_1}{0,204} = \frac{201,6}{0,204} = 988 \text{ кН/м}.$$

Из условия прочности стержня 2

$$N_2 \leq RA_2 = 210 \cdot 10^6 \cdot 16,3 \cdot 10^{-4} = 342,3 \text{ кН};$$

$$q = \frac{342,3}{2,04} = 168 \text{ кН/м}.$$

За максимально допустимую нагрузку на систему принимаем меньшее значение q : $q_{adm} = 168$ кН/м. При этой нагрузке продольные силы в стержнях будут

$$N_1 = 0,204 \cdot 168 = 34,3 \text{ кН}, \quad N_2 = 342,7 \text{ кН},$$

а напряжения $\sigma_1 = 36,0$ МПа, $\sigma_2 = 210$ МПа.

Как видно из расчета, стержень I недонапряжен, что является особенностью статически неопределимых систем, в которых достичь равной прочности всех стержней довольно сложно.

Пример 1.7

Стальной стержень круглого поперечного сечения, жестко заземленный обоими концами в неподвижных опорах, нагружен системой расчетных сил F (рис. 1.9, a).

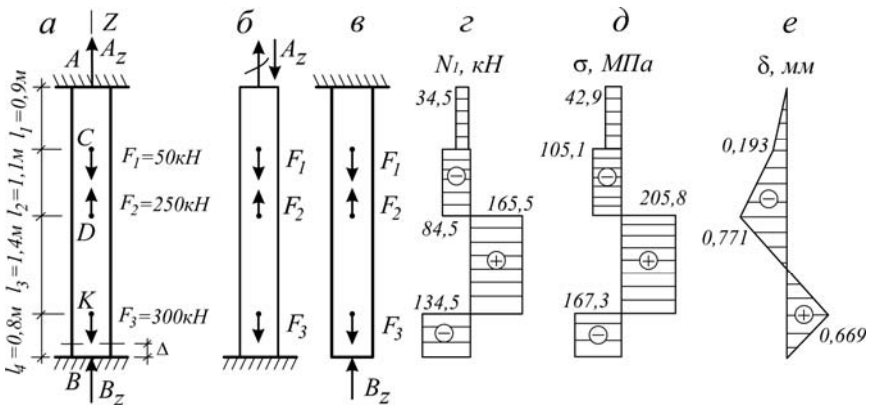


Рис. 1.9

Определить минимально необходимый диаметр стержня, если $R = 210$ МПа, $E = 200$ ГПа.

Решение

Нагрузка F , действующая по продольной оси стержня, вызывает в опорах только по одной реакции (A_z и B_z) по линии действия сил.

Сам стержень подвергается деформации растяжения-сжатия с образованием в его сечениях продольных сил N .

Неизвестные реакции направляются произвольно.

Для данного стержня можно составить только одно уравнение равновесия:

$$\sum Z = A_z - F_1 + F_2 - F_3 + B_z = 0,$$

из которого две неизвестные величины не могут быть определены. Значит, рассматриваемый стержень является статически неопределимым.

Для проведения расчета стержень делится на расчетные участки с граничными сечениями, в которых приложены внешние силы (активные и реактивные). В примере – четыре расчетных участка, в пределах которых намечаются сечения I–IV. Заданным длинам l участков придается номер расчетного участка (l_1, \dots, l_4).

Для раскрытия статической неопределимости к уравнению равновесия необходимо составить одно дополнительное уравнение, исходя из принципа совместности перемещений его участков.

Для проведения расчета выбирается так называемая основная (статически определимая) система, которая получается из статически неопределимой путем удаления одной связи (здесь – опоры). Основная система загружается заданной нагрузкой и неизвестной реакцией удаленной опоры. Один из вариантов основной системы показан на рис. 1.9, б, где удалена верхняя опора.

Смысл совместности перемещений в этом примере заключается в том, что в основной системе, вследствие деформации расчетных участков стержня от действия нагрузки (сил F) и неизвестной реакции A_z , перемещение сечения A (δ_A) должно быть равно нулю.

Уравнение перемещений в общем виде

$$\delta_A = \sum \Delta l_i = 0.$$

Выразив деформации Δl на участках стержня через продольные силы N по закону Гука ($\Delta l = \frac{Nl}{EA}$) и учтя, что на участках стержня $EA = \text{const}$, получим

$$\delta_A = \frac{1}{EA} [A_z(l_1 + l_2 + l_3 + l_4) - F_1(l_2 + l_3 + l_4) + F_2(l_3 + l_4) - F_3l_4] = 0$$

или

$$4,2A_z - 50 \cdot 3,3 + 250 \cdot 2,2 - 300 \cdot 0,8 = 0,$$

откуда $A_z = -34,5$ кН.

Полученный в результате вычислений знак «минус» при A_z означает, что эта реакция имеет противоположное направление. Направление A_z (см. рис. 1.9, б) исправлено на действительное.

Для определения реакции B_z рассмотрим основную систему, изображенную на рис. 1.9, в:

$$\delta_B = \sum \Delta l_i = 0,$$

$$\delta_B = \frac{1}{EA} [-B_z(l_1 + l_2 + l_3 + l_4) + F_1l_1 - F_2(l_1 + l_2) + F_3(l_1 + l_2 + l_3)] = 0;$$

$$-4,2B_z + 50 \cdot 0,9 - 250 \cdot 2,0 + 300 \cdot 3,4 = 0,$$

откуда $B_z = 134,5$ кН.

Направление реакции B_z на рис. 1.9, в показано правильно.

По уравнению равновесия проверим правильность определения опорных реакций:

$$\sum Z = -34,5 - 50 + 250 - 300 + 134,5 = 0 -$$

реакции определены правильно.

Определим продольные силы N на участках стержня, используя второй прием, по которому

$$N_i = \sum F_i,$$

и правило знаков, описанное выше (от сечения – «плюс», к сечению – «минус»).

Рассматриваем «отсеченную» верхнюю часть стержня:

$$N_1 = -A_z = -34,5 \text{ кН};$$

$$N_2 = -A_z - F_1 = -34,5 - 50 = -84,5 \text{ кН};$$

$$N_3 = -A_z - F_1 + F_2 = -34,5 - 50 + 250 = 165,5 \text{ кН};$$

$$N_4 = -A_z - F_1 + F_2 - F_3 = -34,5 - 50 + 250 - 300 = -134,5 \text{ кН}.$$

По этим данным строится эпюра продольных сил (рис. 1.9, z).

Диаметр стержня определяем из условия прочности по нормальным напряжениям.

Площадь поперечного сечения стержня

$$A = \frac{N_{\max}}{R} = \frac{165,5 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 0,788 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 7,88 \text{ см}^2,$$

а его диаметр

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 7,88}{3,14}} = 3,17 \text{ см}.$$

По стандарту принимаем диаметр стержня $d = 3,2$ см с площадью сечения $A = 8,04 \text{ см}^2$.

Нормальные напряжения на участках стержня

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = -\frac{34,5 \cdot 10^3}{8,04 \cdot 10^{-4}} = -4,29 \cdot 10^7 \text{ Па} = -42,9 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = -105,1 \text{ МПа}, \quad \sigma_3 = 205,8 \text{ МПа}, \quad \sigma_4 = -167,3 \text{ МПа}.$$

Эпюра нормальных напряжений показана на рис. 1.9, δ .

Для построения эпюры перемещений необходимо вычислить деформации на каждом расчетном участке стержня:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = -\frac{34,5 \cdot 10^3 \cdot 0,9}{200 \cdot 10^9 \cdot 8,04 \cdot 10^{-4}} = -0,0193 \cdot 10^{-2} \text{ м} = -0,193 \text{ мм.}$$

$$\Delta l_2 = -0,578 \text{ мм}; \quad \Delta l_3 = 1,44 \text{ мм}; \quad \Delta l_4 = -0,669 \text{ мм.}$$

Перемещения граничных сечений

$$\delta_A = 0,$$

$$\delta_C = \Delta l_1 = -0,193 \text{ мм},$$

$$\delta_D = \delta_C + \Delta l_2 = -0,193 - 0,578 = -0,771 \text{ мм},$$

$$\delta_K = \delta_D + \Delta l_3 = -0,771 + 1,44 = 0,669 \text{ мм},$$

$$\delta_B = \delta_K + \Delta l_4 = 0,669 - 0,669 = 0.$$

Эпюры перемещений показаны на рис. 1.9, е.

2. СДВИГ

Деформация сдвига наблюдается в тех случаях, когда внешние силы, действующие на стержень, пытаются сдвинуть одну его часть по отношению к другой (рис. 2.1).

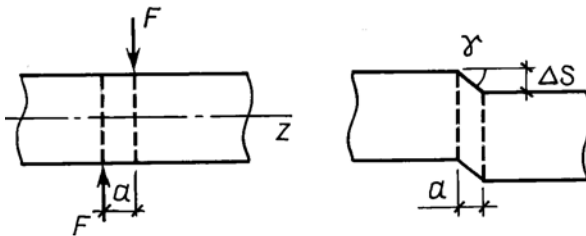


Рис. 2.1

Это происходит, когда на стержень перпендикулярно продольной оси Z на очень близком расстоянии a друг от друга действуют две равные сосредоточенные силы F , направленные в противоположные стороны.

Деформации сдвига (среза) подвергаются в основном соединительные элементы конструкций: заклепки, болты, швы электросварки, врубки, шпонки.

При сдвиге в поперечном сечении стержня возникают поперечная сила Q и изгибающий момент M . В большинстве случаев определяющее значение имеет поперечная сила, а изгибающим моментом пренебрегают, т. е. сдвиг считают чистым. Поперечная сила Q определяется методом сечений.

Поперечная сила приводит к образованию касательных напряжений τ , которые, как принято считать, по площади сдвига (среза) распределяются равномерно и определяются по формуле

$$\tau = \frac{Q}{A},$$

где Q – поперечная сила в сечении сдвига;

A – площадь поперечного сечения в зоне сдвига.

В зоне чистого сдвига материал элемента находится в условии плоского напряженного состояния. Но поскольку в зоне сдвига возникают только касательные напряжения, условие прочности записывается в виде

$$\tau_{\max} \leq R_s,$$

где R_s – расчетное сопротивление материала сдвигу.

В зоне сдвига наблюдаются следующие деформации: ΔS – абсолютный сдвиг и $\gamma = \Delta S/a$ – относительный сдвиг (см. рис. 2.1).

Закон Гука при сдвиге выражается формулой

$$\tau = G\gamma,$$

где G – модуль упругости материала при сдвиге (модуль упругости второго рода).

2.1. Расчет заклепочных соединений

В реальных условиях соединений заклепки рассчитываются на срез по касательным напряжениям, а контактирующие элементы (заклепки, соединяемые части) – еще и на смятие по нормальным напряжениям (рис. 2.2).

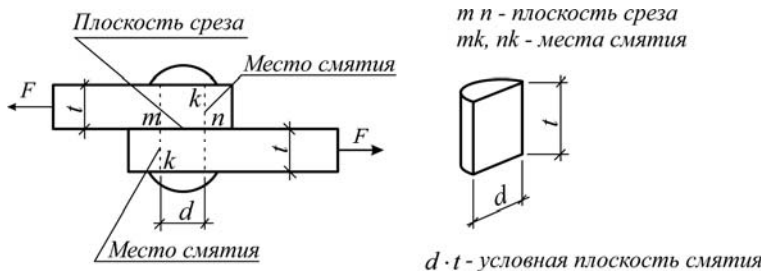


Рис. 2.2

Принято считать, что при статической нагрузке заклепки вдоль линии действия внешних сил нагружены одинаково.

Различают заклепочные соединения одно- и многосрезные (см. примеры).

Условие прочности на срез имеет вид

$$\tau = \frac{Q}{A_s} = \frac{Q}{Ann_s} \leq R_s, \quad (2.1)$$

где Q – поперечная (срезающая) сила в заклепочном соединении: $Q = f(F)$;

A_s – суммарная площадь срезаемых заклепок;

A – площадь поперечного сечения одной заклепки;

n – число заклепок в соединении;

n_s – число срезов в одной заклепке;

R_s – расчетное сопротивление материала заклепки срезу.

В местах контакта заклепки с соединяемыми элементами возникают усилия смятия, приводящие к образованию по площади контакта нормальных напряжений σ_p . Считается, что эти напряжения распределяются по условной площади сечения ($d \cdot t$) равномерно.

Условие прочности на смятие имеет вид

$$\sigma_p = \frac{N}{A_p} = \frac{N}{dn \sum t} \leq R_p, \quad (2.2)$$

где N – сминающая сила: $N = f(F)$;

A_p – суммарная площадь сопротивления смятию;

d – диаметр заклепки;

n – число заклепок в соединении;

Σt – наименьшая суммарная толщина элементов соединения, сминающихся в одном направлении;

R_p – расчетное сопротивление материала смятию.

Количество заклепок в соединении определяется из условий прочности на срез (2.1) и смятие (2.2). В расчет принимается большее их количество.

Поскольку площадь поперечного сечения соединяемых элементов конструкции уменьшена (ослаблена) отверстиями под заклепки, требуется проверка их прочности на растяжение по нормальным напряжениям:

$$\sigma = \frac{N}{A_{\text{нт}}} \leq R, \quad (2.3)$$

где N – продольная сила в соединяемых элементах;

$A_{\text{нт}}$ – площадь ослабленного сечения (нетто);

R – расчетное сопротивление материала соединяемых элементов на растяжение.

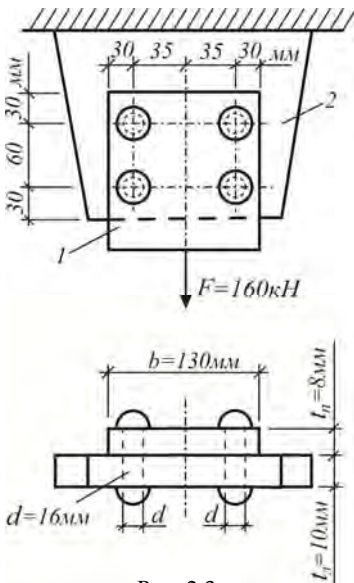


Рис. 2.3

Ослабление сечения отверстиями под заклепки у прокатных профилей составляет около 15 % ($A_{\text{нт}} \approx 0,85 A_{\text{брутто}}$).

Болтовые соединения рассчитываются аналогично заклепочным.

Пример 2.1

Стальная полоса I сечением 130×8 мм, с расчетной нагрузкой $F = 160$ кН прикрепляется к фасонному листу 2 толщиной 10 мм заклепками диаметром $d = 16$ мм, рис. 2.3.

Проверить прочность заклепочного соединения.

Расчетные сопротивления: для соединяемых элементов – на растяжение $R = 210$ МПа, на смятие $R_p = 420$ МПа, для заклепок – на срез $R_s = 200$ МПа.

Решение

Нагрузка F , приложенная к присоединяемой полосе, через заклепки передается на фасонный лист. Полоса и лист подвергаются растяжению, а заклепки – срезу. В местах соприкосновения заклепок с соединяемыми элементами происходит деформация смятия.

Проверка прочности соединения выполняется по трем условиям: на срез заклепок, смятие и разрыв полосы по ослабленному сечению.

Проверка прочности заклёпок на срез проводится по формуле (2.1):

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{Q}{A n n_s} = \frac{4F}{\pi d^2 n n_s} = \frac{4 \cdot 160 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 16^2 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 1} = \\ &= 0,199 \cdot 10^9 \text{ Па} = 199 \text{ МПа} < R_s = 200 \text{ МПа},\end{aligned}$$

т. е. условие прочности на срез выполняется.

Заметим, что заклепок в соединении $n = 4$, число срезов в одной заклепке $n_s = 1$ и что нагрузка F передается на все четыре заклепки поровну ($Q = F/n$).

Проверка прочности заклепок на смятие проводится по формуле (2.2):

$$\begin{aligned}\sigma_p &= \frac{N}{d n \sum t} = \frac{F}{d n \sum t} = \frac{160 \cdot 10^3}{16 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 8 \cdot 10^{-3}} = \\ &= 0,313 \cdot 10^9 \text{ Па} = 313 \text{ МПа} < 420 \text{ МПа},\end{aligned}$$

т. е. условие прочности на смятие выполняется.

Заметим, что в расчет принимается наименьшая толщина соединяемых элементов, т. е. полосы ($t_{\text{п}} = 8$ мм).

Проверка прочности присоединяемой полосы на растяжение проводится в ослабленном сечении по формуле (2.3):

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{N}{A_{\text{нт}}} = \frac{F}{b t_{\text{п}} - 2 d t_{\text{п}}} = \frac{160 \cdot 10^3}{130 \cdot 10^{-3} \cdot 8 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 16 \cdot 10^{-3} \cdot 8 \cdot 10^{-3}} = \\ &= 0,204 \cdot 10^9 \text{ Па} = 204 \text{ МПа} < 210 \text{ МПа},\end{aligned}$$

т. е. условие прочности полосы на растяжение выполняется.

Заметим, что $b t_n$ – площадь поперечного сечения полосы брутто (без отверстий), а $d t_n$ – площадь сечения полосы под заклепкой.

Фасонный лист, к которому приклепана полоса, также рассчитывается на растяжение по ослабленному сечению. В данном примере прочность его обеспечена за счет больших размеров поперечного сечения.

Таким образом, рассматриваемое заклепочное соединение отвечает всем требованиям прочности.

Пример 2.2

Нижний пояс фермы, выполненный из неравнополочных уголков, соединяется при помощи накладки и заклепок диаметром $d = 14$ мм, рис. 2.4.

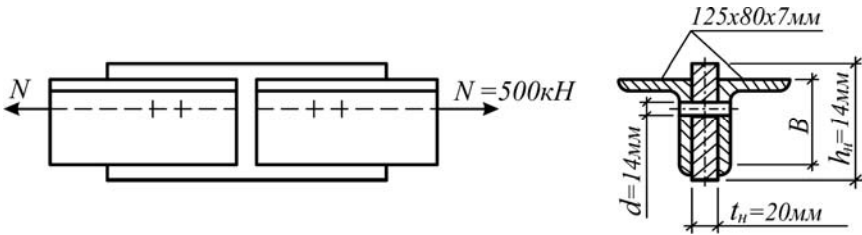


Рис. 2.4

Расчетная продольная сила (выявленная в процессе расчета фермы) $N = 500$ кН. Подобрать номер уголков и размеры поперечного сечения накладки, а также определить необходимое количество заклепок, если $R = 210$ МПа, $R_p = 350$ МПа, $R_s = 190$ МПа. Высоту накладки принять на 15 мм больше высоты полки уголка.

Решение

Соединяемые элементы (уголки) пояса фермы и соединительная накладка подвергаются растяжению и смятию, а заклепки – срезу.

Площадь поперечного сечения нижнего пояса фермы определим из условия прочности по нормальным напряжениям (2.3):

$$A_{нт} \approx 0,85 A_{бр} = \frac{N}{R};$$

$$A_{бр} = \frac{N}{0,85R} = \frac{500 \cdot 10^3}{0,85 \cdot 210 \cdot 10^6} = 28,0 \text{ см}^2.$$

Для одного уголка $A'_{бр} = 28,0 / 2 = 14,0 \text{ см}^2$.

По сортаменту для неравнополочных уголков принимаем два уголка $125 \times 80 \times 7$ мм с площадью

$$A_{бр} = 2 \cdot 14,06 = 28,1 \text{ см}^2.$$

Толщину накладки t_n можно определить из формулы (2.3) или воспользоваться значением $A_{бр}$ для уголков: $A_n = A_{бр}^{угол}$. По условию задачи

$$h_n = B + 15 \text{ мм} = 125 + 15 = 140 \text{ мм}.$$

Тогда

$$A_n = h_n t_n = 14,0 t_n = 28,1 \text{ см}^2,$$

откуда $t_n = 2$ см.

Определим количество заклепок из условия прочности на срез (2.1):

$$n \geq \frac{Q}{An_s R_s} = \frac{4N}{\pi d^2 n_s R_s} = \frac{4 \cdot 500 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 14^2 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 190 \cdot 10^6} = 0,00855 \cdot 10^3 = 8,55.$$

В рассматриваемом примере заклепки двухсрезные ($n_s = 2$).

Определим количество заклепок из условия прочности на смятие (2.2):

$$n \geq \frac{N}{d \sum t R_p} = \frac{500 \cdot 10^3}{14 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 7 \cdot 10^{-3} \cdot 350 \cdot 10^6} = 0,00729 \cdot 10^3 = 7,29.$$

Заметим, что в одном направлении сминаются уголки, для которых

$$\sum t = 2 \cdot 7 = 14 \text{ мм},$$

а в другом – накладка, для которой

$$\sum t = 1 \cdot 20 = 20 \text{ мм.}$$

В расчет идет меньшее значение $\sum t$ (как более слабое).

Из двух вычисленных значений n выбираем большее. Округлив число n до большего целого, получим $n = 9$.

Таким образом, на каждой половине накладки необходимо разместить по девять заклепок.

Уточним несущую способность N рассмотренного заклепочного соединения. Из условия прочности нижнего пояса фермы по формуле (2.3)

$$\begin{aligned} N &= A_{\text{нт}} R = (A_{\text{бр}} - A_{\text{отв}}) R = \\ &= (14,06 \cdot 10^{-4} \cdot 2 - 7 \cdot 10^{-3} \cdot 14 \cdot 10^{-3} \cdot 2) \cdot 210 \cdot 10^6 = 549 \text{ кН.} \end{aligned}$$

Из условия прочности накладки по (2.3)

$$\begin{aligned} N &= A_{\text{нт}} R = (140 \cdot 10^{-3} \cdot 20 \cdot 10^{-3} - 14 \cdot 10^{-3} \cdot 20 \cdot 10^{-3}) \times \\ &\times 210 \cdot 10^6 = 529 \text{ кН.} \end{aligned}$$

Из условия прочности заклепок на срез по (2.1)

$$N = An n_s R_s = \frac{\pi d^2}{4} n n_s R_s = \frac{3,14 \cdot 14^2 \cdot 10^{-6}}{4} \cdot 9 \cdot 2 \cdot 190 \cdot 10^6 = 526 \text{ кН.}$$

Из условия прочности заклепок на смятие по формуле (2.2)

$$N = dn \sum t R_p = 14 \cdot 10^{-3} \cdot 9 \cdot 7 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 350 \cdot 10^6 = 617 \text{ кН.}$$

Анализ полученных значений N показывает, что безопасная продольная сила, которую может воспринять заклепочное соединение, $N = 526$ кН, т. е. пояс фермы имеет повышенный на 5,2 % запас прочности.

2.2. Расчет сварных соединений

В строительных конструкциях наиболее применимы сварные соединения внахлестку, которые выполняются угловыми (валиковыми) электрошвами. Швы, расположенные в направлении действующей силы, называются боковыми (фланговыми), а расположенные перпендикулярно к этому направлению – торцевыми (лобовыми), рис. 2.5.

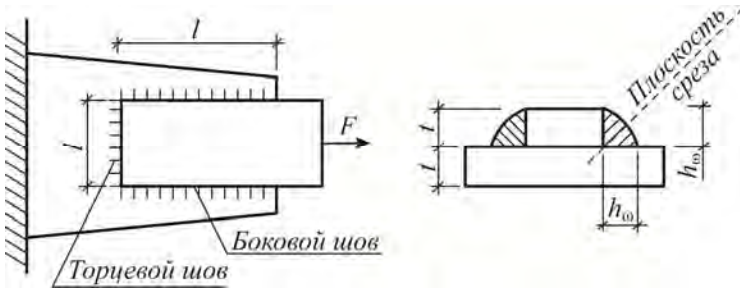


Рис. 2.5

Угловые швы (боковые и торцевые) работают в основном на срез. Образующиеся в них касательные напряжения считаются равномерно распределенными по площади среза.

Условие прочности на срез для угловых швов имеет вид

$$\tau_{\omega} = \frac{Q}{A_{\omega}} = \frac{Q}{\beta h_{\omega} l_{\omega}} \leq R_{\omega}, \quad (2.4)$$

где τ_{ω} – касательное напряжение по площади среза;

Q – усилие среза: $Q = f(F)$;

A_{ω} – площадь среза шва;

β – коэффициент, зависящий от вида сварки: $\beta = 0,7-1,0$;

h_{ω} – толщина (катет) углового шва;

l_{ω} – суммарная расчетная длина швов;

R_{ω} – расчетное сопротивление материала шва срезу.

Проектная длина каждого участка шва увеличивается на 1 см против расчетной в связи с неполным проваром его концов.

Длина отрезка шва должна быть в пределах $l_{\omega} = (4-60) h_{\omega}$.

Пример 2.3

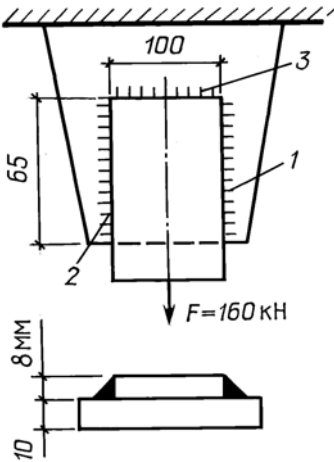


Рис. 2.6

Стальная полоса, нагруженная расчетной силой $F = 160$ кН (рис. 2.6), угловыми швами приварена к фасонному листу. Толщина шва $h_w = 8$ мм. Сварка выполнена ручным способом.

Проверить прочность полосы и сварных швов, если $R = 210$ МПа, $R_w = 150$ МПа.

Решение

Угловые швы (боковые 1, 2 и торцевой 3) подвергаются деформации сдвига. Присоединяемая полоса подвергается деформации растяжения.

Нормальные напряжения в полосе

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{F}{A} = \frac{160 \cdot 10^3}{100 \cdot 10^{-3} \cdot 8 \cdot 10^{-3}} = 0,200 \cdot 10^9 \text{ Па} = 200 \text{ МПа} < R = 210 \text{ МПа},$$

т. е. прочность полосы обеспечена.

Касательные напряжения в угловых швах по формуле (2.4)

$$\tau = \frac{Q}{A_w} = \frac{F}{A_w} = \frac{F}{\beta h_w l_w} = \frac{160 \cdot 10^3}{0,7 \cdot 8 \cdot 10^{-3} \cdot 200 \cdot 10^{-3}} = 0,143 \cdot 10^9 \text{ Па} = 143 \text{ МПа} < R_w = 150 \text{ МПа},$$

т. е. прочность угловых швов на срез обеспечена.

Для ручной сварки коэффициент $\beta = 0,7$. При вычислении расчетной длины шва в связи с неполным проваром концов все его отрезки уменьшаются на 10 мм:

$$l_w = 2(65 - 10) + (100 - 10) = 200 \text{ мм}.$$

Пример 2.4

Стык двух неравнополочных уголков, перекрытый накладкой, растягивается силой $F = 245 \text{ кН}$ (рис. 2.7).

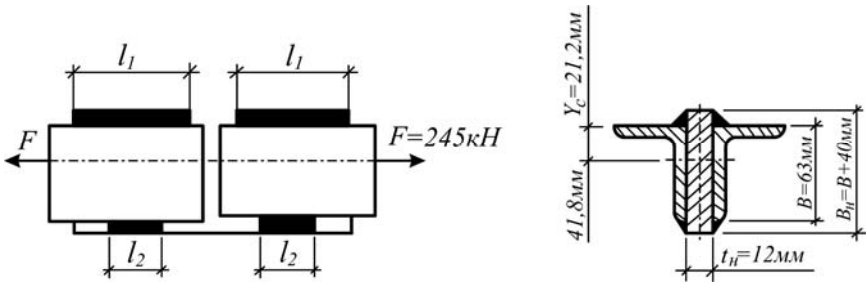


Рис. 2.7

Из условия равнопрочности соединения определить номер уголков, размеры поперечного сечения накладки и длину фланговых швов для соединения уголков с накладкой, если $R = 210 \text{ МПа}$, $R_w = 180 \text{ МПа}$. Сварка ручная.

Решение

Номер неравнополочных уголков определим из условия прочности по нормальным напряжениям:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{F}{A} \leq R,$$

откуда

$$A \geq \frac{F}{R} = \frac{245 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 1,17 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 11,7 \text{ см}^2.$$

Для одного уголка

$$A' = \frac{11,7}{2} = 5,85 \text{ см}^2.$$

Из таблицы сортамента принимаем два уголка $63 \times 40 \times 6$ мм с площадью сечения

$$A = 5,9 \cdot 2 = 11,8 \text{ см}^2.$$

Для принятого уголка $B = 63$ мм, $y_c = 2,12$ см.

Толщину накладки определим из условия ее равнопрочности с уголками, приняв во внимание, что ее сторона

$$B_n = B + 40 = 63 + 40 = 103 \text{ мм.}$$

$$B_n t_n = A = 11,8 \text{ см}^2,$$

откуда

$$t_n = 11,8 / 10,3 = 1,146 \text{ см.}$$

Принимаем $t_n = 1,2$ см.

Приняв толщину шва $h_w = 6$ мм (равную толщине уголка) и учитывая, что $Q = F$, длину сварных швов определим из условия прочности их на срез (2.4):

$$l_w = \frac{F}{\beta h_w R_w} = \frac{245 \cdot 10^3}{0,7 \cdot 6 \cdot 10^{-3} \cdot 180 \cdot 10^6} = 0,324 \text{ м} = 32,4 \text{ см.}$$

Вычисленная длина швов должна быть расположена по одну сторону от стыка.

Так как в соединении два уголка, на один уголок длина шва будет

$$l'_w = 32,4 / 2 = 16,2 \text{ см,}$$

причем

$$l_1 + l_2 = 16,2 \text{ см.} \quad (2.5)$$

Поскольку линия действия силы F , проходящая по продольной оси уголка, находится на разных расстояниях от верхнего 1 и нижнего 2 швов, длина их должна быть обратно пропорциональна расстоянию от продольной оси до швов, т. е.

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{B - y_c}{y_c} = \frac{4,18}{2,12} = 1,97. \quad (2.6)$$

Решив совместно уравнения (2.5) и (2.6), получим $l_1 = 10,75$ см; $l_2 = 5,45$ см.

Проектную длину швов с учетом неполного провара их концов примем $l_1 = 12$ см; $l_2 = 6,5$ см.

2.3. Расчет врубок

Врубки как способ соединения деревянных элементов конструкций, вследствие различной сопротивляемости древесины вдоль и поперек волокон, рассчитываются на скалывание (сдвиг) вдоль волокон и смятие вдоль и поперек волокон по площади соприкосновения соединяемых элементов (рис. 2.8).

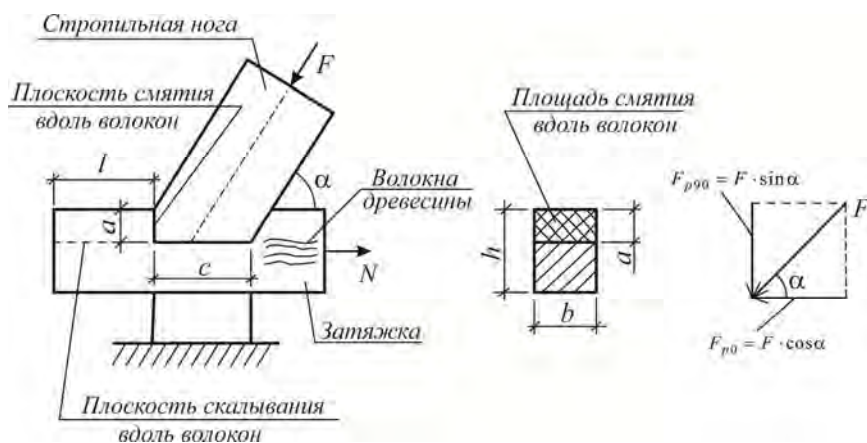


Рис. 2.8

Условие прочности врубки на скалывание вдоль волокон имеет вид

$$\tau_s = \frac{F_{p0}}{A_s} = \frac{F \cos \alpha}{bl} \leq R_s, \quad (2.7)$$

где τ_s – касательное напряжение в зоне скалывания;

F_{p0} – усилие скалывания вдоль волокон;

A_s – площадь скалывания вдоль волокон;

b – ширина врубки;

l – длина зоны скалывания;

R_s – расчетное сопротивление древесины на скалывание (вдоль волокон).

Условие прочности врубки на смятие вдоль волокон имеет вид

$$\sigma_{p0} = \frac{F_{p0}}{A_{p0}} = \frac{F \cos \alpha}{ba} \leq R_{p0}, \quad (2.8)$$

где σ_{p0} – нормальное напряжение по площади смятия (вдоль волокон);

F_{p0} – усилие смятия вдоль волокон;

A_{p0} – площадь смятия вдоль волокон;

F – сила, действующая на стропильную ногу;

b – ширина врубки;

a – глубина врубки;

R_{p0} – расчетное сопротивление древесины смятию вдоль волокон.

Условие прочности врубки на смятие поперек волокон имеет вид

$$\sigma_{p90} = \frac{F_{p90}}{A_{p90}} = \frac{F \sin \alpha}{cb} \leq R_{p90}, \quad (2.9)$$

где σ_{p90} – нормальное напряжение по площади смятия (поперек волокон);

F_{p90} – усилие смятия поперек волокон;

A_{p90} – площадь смятия поперек волокон;

c – длина врубки;

b – ширина врубки;

R_{p90} – расчетное сопротивление древесины смятию поперек волокон.

Соединение деревянных элементов конструкций при помощи шпонок, а также соединение на шип рассчитываются аналогично расчету врубок.

Пример 2.5

Соединение стропильной ноги 1 с затяжной 2 выполнено с помощью лобовой врубки. Усилие в стропильной ноге $F = 100$ кН (рис. 2.9).

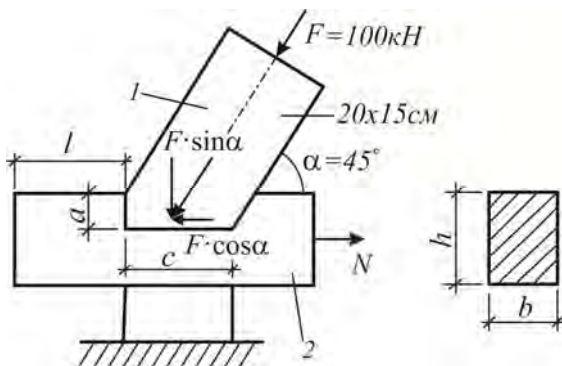


Рис. 2.9

Определить необходимые размеры соединения a , c , l , если $h = 20$ см, $b = 15$ см.

Расчетные сопротивления для древесины: на растяжение и сжатие $R = 10$ МПа, на смятие вдоль волокон $R_{p0} = 12$ МПа, на смятие поперек волокон $R_{p90} = 3$ МПа, на скалывание вдоль волокон $R_s = 2,2$ МПа.

Решение

Сжимающее усилие в стропильной ноге F передается затяжке.

В зоне врубки происходит деформация скалывания вдоль l , смятие поперек волокон по длине c и смятие вдоль волокон на участке a .

Длину выступающего конца затяжки l определяем из условия прочности на скалывание (2.7):

$$l \geq \frac{F \cos 45^\circ}{bR_s} = \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 0,707}{15 \cdot 10^{-2} \cdot 2,2 \cdot 10^6} = 2,14 \cdot 10^{-1} \text{ м} = 21,4 \text{ см},$$

принимаем $l = 22$ см.

Глубину врубки a определяем из условия прочности на смятие вдоль волокон (2.8):

$$a \geq \frac{F \cos 45^\circ}{bR_{p0}} = \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 0,707}{15 \cdot 10^{-2} \cdot 12 \cdot 10^6} = 0,393 \cdot 10^{-1} \text{ м} = 3,93 \text{ см},$$

принимаем $a = 4,0$ см.

Заметим, что вычисленная глубина врубки укладывается в техническую норму:

$$2 \text{ см} < a < \frac{h}{3} = \frac{20}{3} = 6,67 \text{ см.}$$

Длину опирания c стропильной ноги определим из условия прочности на смятие поперек волокон (2.9):

$$c \geq \frac{F \sin 45^\circ}{bR_{p90}} = \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 0,707}{15 \cdot 10^{-2} \cdot 3 \cdot 10^6} = 1,57 \cdot 10^{-1} \text{ м} = 15,7 \text{ см,}$$

принимаем $c = 16 \text{ см}$.

Пример 2.6

Стык двух сосновых брусьев сечением $h = 18 \text{ см}$ и $b = 6 \text{ см}$ осуществлен при помощи зуба (рис. 2.10).

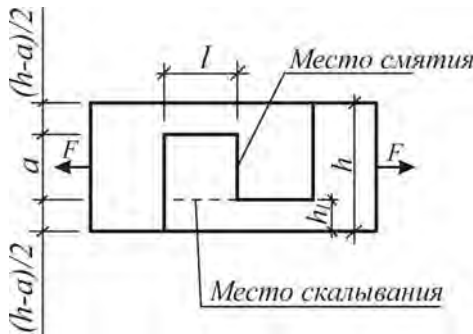


Рис. 2.10

Определить необходимые размеры зуба (длину l и высоту a).

Расчетные сопротивления брусьев: на растяжение $R = 10 \text{ МПа}$, на срез $R_s = 24 \text{ МПа}$, на смятие $R_{p0} = 14 \text{ МПа}$.

Решение

Зуб рассчитывается на скалывание и смятие вдоль волокон (зоны деформации показаны на рис. 2.10).

Высота ослабленного сечения бруса

$$h_1 = \frac{h-a}{2}$$

и высота зуба a связаны между собой. Выразив F из условия прочности на растяжение и смятие, найдем значение высоты зуба a , а следовательно, и значение высоты ослабленного сечения бруса h_1 .

Из условия прочности на растяжение

$$F = Rb \frac{h-a}{2} = 10 \cdot 10^6 \cdot 6 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{18 \cdot 10^{-2} - a \cdot 10^{-2}}{2}. \quad (2.10)$$

Из условия прочности на смятие

$$F = R_{p0} ba = 14 \cdot 10^6 \cdot 6 \cdot 10^{-2} \cdot a \cdot 10^{-2}. \quad (2.11)$$

Из уравнений (2.10) и (2.11) $a = 4,74$ см, принимаем $a = 5$ см.
Высота ослабленного сечения бруса

$$h_1 = \frac{18-5}{2} = 6,5 \text{ см.}$$

Наибольшая допустимая нагрузка на соединение брусьев

$$F_{\text{adm}} = Rbh_1 = 10 \cdot 10^6 \cdot 6 \cdot 10^{-2} \cdot 6,5 \cdot 10^{-2} = 39 \text{ кН.}$$

Длину зуба l определим из условия прочности на скалывание (2.7):

$$l = \frac{F}{bR_s} = \frac{39 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^{-2} \cdot 2,4 \cdot 10^6} = 2,71 \cdot 10^{-1} \text{ м} = 27,1 \text{ см,}$$

принимаем $l = 28$ см.

3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

Плоское поперечное сечение любого стержня характеризуется рядом геометрических величин:

площадью A ;

координатами центра тяжести x_0, y_0 ;

статическим моментом S ;

осевыми моментами инерции J_x, J_y ;

полярным моментом инерции J_p ;

центробежным моментом инерции J_{xy} .

Эти величины используются при расчетах элементов конструкций на прочность и жесткость.

Площадь поперечного сечения A характеризует сопротивляемость стержня растяжению и сжатию.

Осевые моменты инерции J_x и J_y характеризуют сопротивляемость изгибу, а полярный J_p – кручению, в зависимости от размеров и формы сечения.

Формулы для определения некоторых геометрических характеристик для простых фигур приведены на рис. 3.1.

Для прокатных профилей (двутавр, швеллер, уголок) данные о геометрических характеристиках приводятся в соответствующих стандартах на сортаменты (приложения).

Для определения координат центра тяжести сложного сечения произвольно выбирается прямоугольная система вспомогательных осей XOY . Сечение разделяется на простые фигуры, центры тяжести и площади которых легко определяются, отмечаются эти центры O_i , проводятся центральные оси X_iY_i и обозначаются расстояния x_i и y_i от центральной оси каждой простой фигуры до вспомогательных осей (рис. 3.2).

Координаты центра тяжести сложного сечения определяются по формулам

$$x_0 = \frac{\sum S_{y_{iB}}}{\sum A}; \quad y_0 = \frac{\sum S_{x_{iB}}}{\sum A}, \quad (3.1)$$

где $\sum S$ – сумма статических моментов простых фигур относительно соответствующей вспомогательной оси;

$\sum A$ – суммарная площадь простых фигур.

	$A = h \cdot b; \quad x_0 = \frac{b}{2}; \quad y_0 = \frac{h}{2};$ $J_x = \frac{b \cdot h^3}{12}; \quad J_y = \frac{h \cdot b^3}{12}.$
	$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4}; \quad x_0 = y_0 = \frac{d}{2};$ $J_x = J_y = \frac{\pi \cdot d^4}{64}.$
	$A = \frac{b \cdot h}{2}; \quad x_0 = \frac{b}{2}; \quad y_0 = \frac{h}{3};$ $J_x = \frac{b \cdot h^3}{36}; \quad J_y = \frac{h \cdot b^3}{48}.$
	$A = \frac{b \cdot h}{2}; \quad x_0 = \frac{2b}{3}; \quad y_0 = \frac{h}{3};$ $J_x = \frac{b \cdot h^3}{36}; \quad J_y = \frac{h \cdot b^3}{36}.$
	$A = \frac{\pi \cdot d^2}{8}; \quad x_0 = \frac{d}{2}; \quad y_0 = 0,212d;$ $J_x = 0,00686d^4; \quad J_y = \frac{\pi \cdot d^4}{128}.$
	$J_{xy} = \pm \sqrt{(J_x - J_{\min})(J_y - J_{\min})}.$

Рис. 3.1

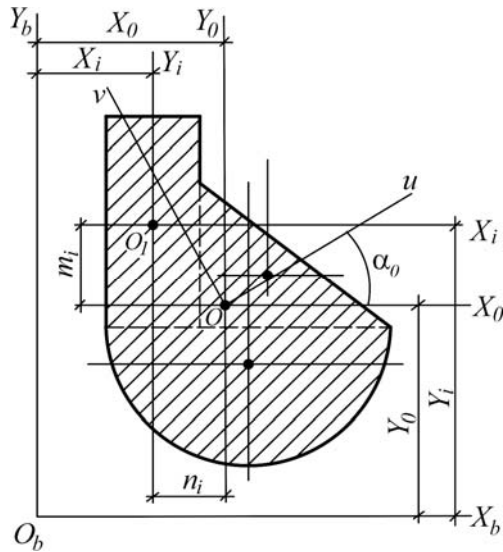


Рис. 3.2

Статические моменты площади сечения относительно вспомогательных осей равны произведению площади на расстояние от ее центра тяжести до данной оси:

$$S_{x_b} = \sum A_i y_i, \quad S_{y_b} = \sum A_i x_i, \quad (3.2)$$

где x_i, y_i – координаты центра тяжести отдельных простых фигур в системе вспомогательных осей;

A_i – площади сечений этих отдельных фигур.

Статический момент площади фигуры в зависимости от положения фигуры относительно рассматриваемой оси может быть положительным, отрицательным или равным нулю. Статический момент площади относительно центральной оси равен нулю.

Если фигура имеет ось симметрии, то ее центр тяжести лежит на этой оси. Если фигура имеет две оси симметрии, то ее центр тяжести совпадает с точкой пересечения этих осей.

Осевые и центробежные моменты инерции сложного сечения относительно его центральных осей $X_0 Y_0$ определяются исходя из значений моментов инерций для простых фигур с учетом

формулы перехода к параллельным осям (переход от центральной оси простой фигуры к центральной оси всего сечения):

$$J_{x0} = \sum (J_{x_i} + A_i m_i^2); \quad J_{y0} = \sum (J_{y_i} + A_i n_i^2); \quad (3.3)$$

$$J_{x0y0} = \sum (J_{x_i y_i} + A_i n_i m_i),$$

где J_{x_i} , J_{y_i} , $J_{x_i y_i}$ – моменты инерции простых фигур относительно собственных центральных осей;

m_i , n_i – расстояния между центральными осями простых фигур и центральными осями всего сечения (см. рис. 3.2).

Моменты инерции измеряются единицами длины в четвертой степени (мм^4 , см^4 , м^4). Осевые моменты инерции всегда положительны, а центробежный момент может быть положительным, отрицательным и равным нулю в зависимости от положения фигуры относительно координатных осей.

Центробежный момент инерции сечения относительно центральных осей, из которых хотя бы одна является осью симметрии, равен нулю.

Для неравнополочного и равнополочного уголков значение центробежного момента инерции относительно центральных осей, параллельных полкам, определяется по формуле

$$J_{XY} = \pm \sqrt{(J_x - J_{\min})(J_y - J_{\min})},$$

где J_{\min} – минимальный момент инерции сечения (приводится в сортаменте).

В некоторых сортаментах приводятся готовые значения J_{xy} . Знак J_{xy} для уголка зависит от его положения в сечении. Рекомендуется пользоваться схемой, приведенной на рис. 3.1, где показаны возможные положения уголка в сечении и приведены знаки для J_{xy} .

Главные центральные оси

При повороте центральных взаимно перпендикулярных осей X_0Y_0 вокруг центра тяжести сечения (точки O) значения осевых и центро-

бежного моментов инерции изменяются. При некотором положении этих осей центробежный момент инерции сечения станет равным нулю. Эти оси называются главными центральными и обозначаются буквами U и V . Положение их обусловлено углом α_0 (см. рис. 3.2), определяемым по формуле

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2J_{x_0y_0}}{J_{x_0} - J_{y_0}}. \quad (3.4)$$

Угол α_0 отсчитывается от оси с большим моментом инерции (X_0 или Y_0), положительное значение – против хода часовой стрелки. Так определяется положение оси U , а ось V ей перпендикулярна.

Осевые моменты инерции сечения относительно главных центральных осей имеют экстремальные значения (максимальное J_U и минимальное J_V) и определяются по формуле

$$J_{U,V} = \frac{1}{2} \left[(J_{x_0} + J_{y_0}) \pm \sqrt{(J_{x_0} - J_{y_0})^2 + 4J_{x_0y_0}^2} \right]. \quad (3.5)$$

В теории сопротивления материалов доказывается, что сумма осевых моментов инерции сечения при повороте осей относительно их центра тяжести не изменяется, т. е.

$$J_{x_0} + J_{y_0} = J_U + J_V.$$

Это положение может быть использовано для контроля определенных моментов инерции, вычисленных по формуле (3.5).

В сечении, имеющем одну ось симметрии, эта ось является одной из главных центральных осей. Если сечение имеет две оси симметрии, то они являются главными центральными осями.

Главные центральные моменты инерции, как имеющие экстремальные значения, характеризуют наибольшую и наименьшую жесткость (сопротивляемость) балки при изгибе. Они позволяют рационально расположить сечение балки по отношению к нагрузке.

Пример 3.1

Для заданного сечения определить значения главных центральных моментов инерции.

Данные к примеру: $h = 16$ см, $b = 12$ см, $d = 6$ см (рис. 3.3).

Решение

Данное сечение представляет собой прямоугольник с круглым отверстием. Поскольку центры тяжести этих простых фигур совпадают, центр тяжести сечения расположен в точке O .

Проведенные на сечении оси X_0 и Y_0 являются осями симметрии.

Вычислим значения моментов инерции относительно центральных осей X_0 и Y_0 , используя формулы, приведенные на рис. 3.1, для фигур, из которых состоит сечение:

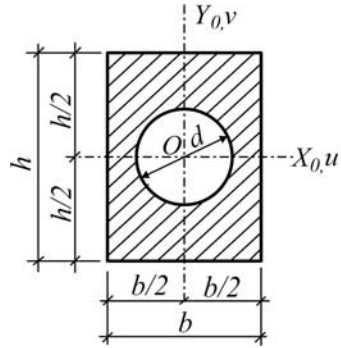


Рис. 3.3

$$J_{x_0} = J_x^{\text{пр}} - J_x^{\text{кр}} = \frac{bh^3}{12} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{12 \cdot 16^3}{12} - \frac{3,14 \cdot 6^4}{64} = 4032,4 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_0} = J_y^{\text{пр}} - J_y^{\text{кр}} = \frac{b^3h}{12} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{12^3 \cdot 16}{12} - \frac{3,14 \cdot 6^4}{64} = 2240,4 \text{ см}^4.$$

Поскольку оси X_0 и Y_0 сечения являются осями симметрии и проходят через центр тяжести, они являются главными центральными осями (U и V).

Исходя из значений J_{x_0} и J_{y_0} следует, что $J_U = J_{x_0} = 4032,4 \text{ см}^4$ (большее значение), а $J_V = J_{y_0} = 2240,4 \text{ см}^4$ (меньшее значение).

Следует отметить, что данное сечение имеет наибольшую сопротивляемость изгибу относительно оси X_0 , так как $J_U = J_{x_0} = J_{\text{max}}$, и наименьшую относительно оси Y_0 , так как $J_V = J_{y_0} = J_{\text{min}}$.

Пример 3.2

Для заданного сечения определить положение центра тяжести и значения главных центральных моментов инерции (рис. 3.4).

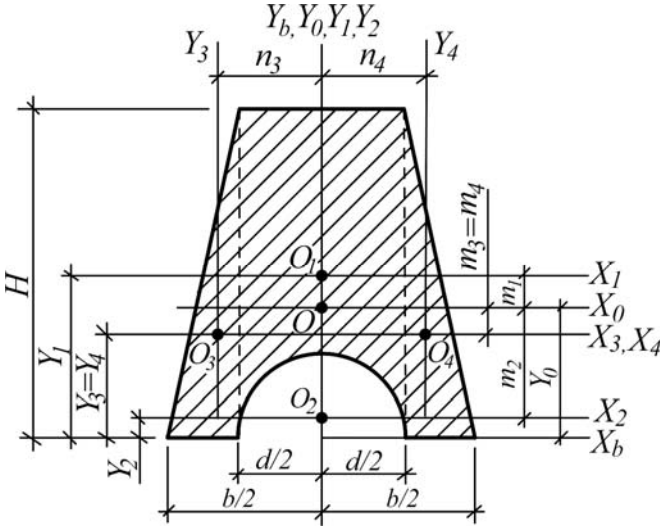


Рис. 3.4

Данные к примеру: $h = 15$ см, $b = 18$ см, $d = 8$ см.

Решение

Данное сложное сечение можно представить как сочетание прямоугольника (1), двух треугольников (3 и 4) и выемки в виде полуокруга (2).

На сечении отмечаются центры тяжести простых фигур (O_1, \dots, O_4) и проводятся их центральные оси (X_1, \dots, X_4) и (Y_1, \dots, Y_4).

Поскольку ось Y_0 сечения является осью симметрии – центр тяжести его лежит на этой оси. Для определения положения центра тяжести по оси Y_0 выбирается вспомогательная ось X_b , совпадающая с нижней стороной сечения.

Вычисляем расстояние от центральных осей простых фигур до вспомогательной оси:

$$y_1 = \frac{h}{2} = \frac{15}{2} = 7,5 \text{ см};$$

$$y_2 = 0,212d = 0,212 \cdot 8 = 1,70 \text{ см};$$

$$y_3 = y_4 = \frac{h}{3} = \frac{15}{3} = 5,0 \text{ см}.$$

Площадь рассматриваемого сечения

$$A = A_1 - A_2 + A_3 + A_4 = hd - \frac{\pi d^2}{4 \cdot 2} + \frac{h(\frac{b}{2} - \frac{d}{2})}{2} \cdot 2 = 15 \cdot 8 - \frac{3,14 \cdot 8^2}{4 \cdot 2} + \frac{15 \cdot (\frac{18}{2} - \frac{8}{2})}{2} \cdot 2 = 169,9 \text{ см}^2.$$

По формуле (3.2) статический момент площади сечения относительно вспомогательной оси

$$S_{xв} = \sum A_i y_i = A_1 y_1 - A_2 y_2 + A_3 y_3 \cdot 2 = \\ = 120 \cdot 7,5 - 25,1 \cdot 1,7 + 37,5 \cdot 5 \cdot 2 = 1232,3 \text{ см}^3.$$

Ордината центра тяжести сечения (по формуле (3.1))

$$y_0 = \frac{\sum S_{xв}}{\sum A} = \frac{1232,3}{169,9} = 7,25 \text{ см}.$$

На сечении отмечается центр тяжести (точка O) и проводится центральная ось X_0 . Напомним, что другой центральной осью является ось Y_0 .

Вычисляем расстояния m , n между центральными осями простых фигур и всего сечения:

$$m_1 = y_1 - y_0 = 7,5 - 7,25 = 0,25 \text{ см};$$

$$m_2 = y_0 - y_2 = 7,25 - 1,70 = 5,55 \text{ см};$$

$$m_3 = m_4 = y_0 - y_3 = 7,25 - 5 = 2,25 \text{ см};$$

$$n_1 = 0, \quad n_2 = 0;$$

$$n_3 = n_4 = \frac{d}{2} + \frac{1}{3} \left(\frac{b}{2} - \frac{d}{2} \right) = \frac{8}{2} + \frac{1}{3} \left(\frac{18}{2} - \frac{8}{2} \right) = 5,67 \text{ см}.$$

Предварительно для каждой простой фигуры вычисляем значения осевых моментов инерции относительно собственных центральных осей $X_i Y_i$.

Для первой фигуры (прямоугольник)

$$J_{x_1} = \frac{dh^3}{12} = \frac{8 \cdot 15^3}{12} = 2250 \text{ см}^4; \quad J_{y_1} = \frac{hd^3}{12} = \frac{15 \cdot 8^3}{12} = 640 \text{ см}^4.$$

Для второй фигуры (полукруг)

$$J_{x_2} = 0,00686d^4 = 0,00686 \cdot 8^4 = 28,1 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_2} = \frac{\pi d^4}{128} = \frac{3,14 \cdot 8^4}{128} = 100,5 \text{ см}^4.$$

Для третьей и четвертой фигур (треугольники)

$$J_{x_3} = J_{x_4} = \frac{\left(\frac{b}{2} - \frac{d}{2}\right)h^3}{36} = \frac{\left(\frac{18}{2} - \frac{8}{2}\right) \cdot 15^3}{36} = 468,8 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_3} = J_{y_4} = \frac{h\left(\frac{b}{2} - \frac{d}{2}\right)^3}{36} = \frac{15 \cdot \left(\frac{18}{2} - \frac{8}{2}\right)^3}{36} = 52,1 \text{ см}^4.$$

Определяем значения осевых моментов инерции заданного сечения относительно центральных осей $X_0 Y_0$ (по формуле (3.3)):

$$\begin{aligned}
 J_{x_0} &= \sum (J_{x_i} + A_i m_i^2) = J_{x_1} + A_1 m_1^2 - (J_{x_2} + A_2 m_2^2) + 2(J_{x_3} + A_3 m_3^2) = \\
 &= 2250 + 120 \cdot 0,25^2 - (28,1 + 25,1 \cdot 5,55^2) + 2 \cdot (468,8 + 37,5 \cdot 2,25^2) = \\
 &= 2773,5 \text{ см}^4,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{y_0} &= \sum (J_{y_i} + A_i n_i^2) = J_{y_1} - J_{y_2} + 2(J_{y_3} + A_3 n_3^2) = \\
 &= 640 - 100,5 + 2 \cdot (52,1 + 37,5 \cdot 5,67^2) = 3054,9 \text{ см}^4.
 \end{aligned}$$

Рассматриваемое сечение имеет ось симметрии – ось Y_0 . Значит, эта ось является одной из главных осей. Другая главная ось – X_0 – проходит через центр тяжести сечения и перпендикулярна первой.

Исходя из значений J_{x_0} и J_{y_0} следует, что $J_U = J_{y_0} = 3054,9 \text{ см}^4$, а $J_V = J_{x_0} = 2773,5 \text{ см}^4$.

Пример 3.3

Для сечения, составленного из двух швеллеров и листа, определить значения главных центральных моментов инерции (рис. 3.5).

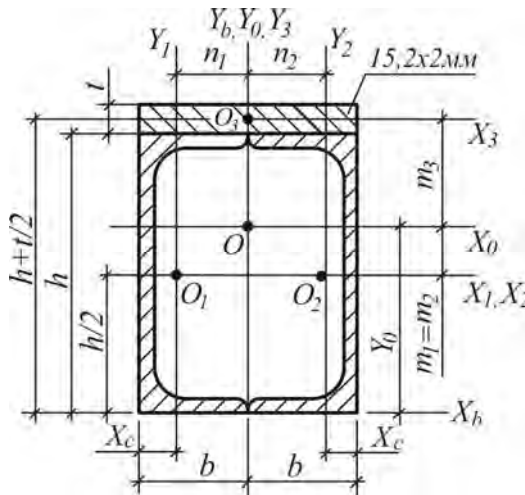


Рис. 3.5

Данные к примеру: швеллер № 20, лист сечением $15,2 \times 2$ см.

Из таблиц сортамента для швеллера № 20: $h = 20$ см, $b = 7,6$ см, $A = 23,4$ см², $J_x = 1520$ см⁴, $J_y = 113$ см⁴, $x_c = 2,07$ см.

Решение

На сечении отмечаются центры тяжести швеллеров (O_1, O_2), листа (O_3), проводятся их центральные оси (X_1, \dots, X_3) и (Y_1, \dots, Y_3).

Центр тяжести сечения лежит на оси Y_0 , так как последняя является осью симметрии. Вспомогательная ось X_B проводится по нижней стороне сечения.

Координаты центров тяжести отдельных фигур относительно осей $X_B Y_B$:

$$y_1 = y_2 = \frac{h}{2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ см};$$

$$y_3 = \frac{t}{2} + h = \frac{2}{2} + 20 = 21 \text{ см}.$$

Ордината центра тяжести

$$y_0 = \frac{\sum S_{xв}}{\sum A} = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A} = \frac{2 \cdot 23,4 \cdot 10 + 15,2 \cdot 2 \cdot 21}{2 \cdot 23,4 + 15,2 \cdot 2} = 14,3 \text{ см}.$$

На сечении отмечается центр тяжести O и проводится центральная ось X_0 .

Вычисляем расстояния между осями n и m :

$$m_1 = m_2 = y_0 - \frac{h}{2} = 14,3 - \frac{20}{2} = 4,3 \text{ см};$$

$$m_3 = \left(h + \frac{t}{2}\right) - y_0 = \left(20 + \frac{2}{2}\right) - 14,3 = 6,7 \text{ см};$$

$$n_1 = n_2 = b - x_c = 7,6 - 2,07 = 5,53 \text{ см}; \quad n_3 = 0.$$

Значения осевых моментов инерции относительно центральных осей $X_0 Y_0$:

$$J_{x_0} = \sum (J_{x_i} + A_i m_i^2) =$$

$$= 2 \cdot (1520 + 23,4 \cdot 4,3^2) + \frac{15,2 \cdot 2^3}{12} + 15,2 \cdot 2 \cdot 6,7^2 = 5280 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_0} = \sum (J_{y_i} + A_i n_i^2) =$$

$$= 2 \cdot (113 + 23,4 \cdot 5,53^2) + \frac{2 \cdot 15,2^3}{12} + 15,2 \cdot 2 \cdot 0 = 2243 \text{ см}^4.$$

Так как оси X_0Y_0 являются главными центральными осями сечения, значения J_{x_0} и J_{y_0} являются главными центральными моментами инерции. Из значений J_{x_0} и J_{y_0} следует, что $J_U = J_{x_0} = 5280 \text{ см}^4$, а $J_V = J_{y_0} = 2243 \text{ см}^4$. Данное сечение имеет наибольшую сопротивляемость изгибу относительно оси X_0 и наименьшую относительно оси Y_0 .

Пример 3.4

Для сечения, составленного из двух прокатных профилей (двутавра и неравнополочного уголка), определить положение центра тяжести и значения главных центральных моментов инерции (рис. 3.6).

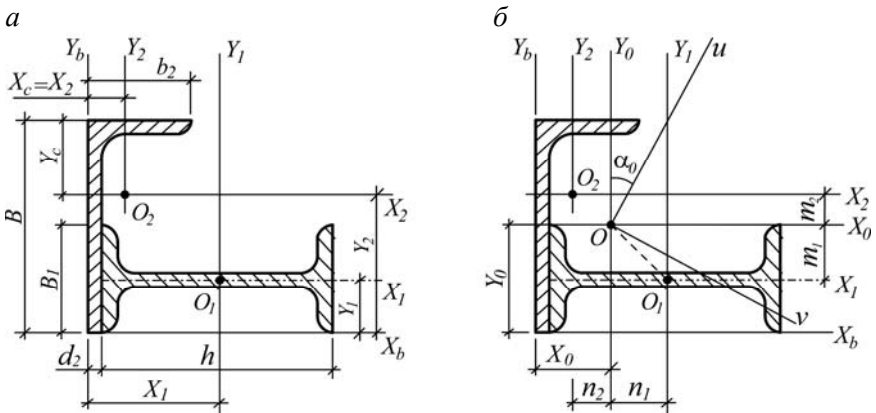


Рис. 3.6

Данные к примеру: двутавр № 22, уголок № 20/12,5/1,1.

В рассматриваемом сечении двутавр расположен иначе, чем в таблице сортамента, поэтому значения моментов инерции нужно записать с учетом его положения.

Выписка из таблиц сортамента:

1) для двутавра № 22

$$h = 22 \text{ см}, b = 11 \text{ см}, d = 0,54 \text{ см}, A = 30,6 \text{ см}^2, J_x = 157 \text{ см}^4, J_y = 2550 \text{ см}^4.$$

2) для уголка № 20/12,5/1,1

$$B = 20 \text{ см}, b = 12,5 \text{ см}, A = 34,87 \text{ см}^2, J_x = 1449 \text{ см}^4, d = 1,1 \text{ см}, J_y = 446 \text{ см}^4, x_c = 2,79 \text{ см}, y_c = 6,5 \text{ см}, J_{xy} = 465 \text{ см}^4.$$

Решение

Сечение не имеет осей симметрии. Для определения координат центра тяжести сечения выбираются вспомогательные оси $X_B Y_B$; отмечаются центры тяжести фигур (O_1, O_2), составляющих сечение; проводятся их центральные оси ($X_1 Y_1, X_2 Y_2$), параллельные вспомогательным, и вычисляются расстояния между ними и вспомогательными осями:

$$x_1 = d_2 + \frac{h}{2} = 1,1 + \frac{22}{2} = 12,1 \text{ см};$$

$$y_1 = \frac{b_1}{2} = \frac{11}{2} = 5,5 \text{ см};$$

$$x_2 = x_c = 2,79 \text{ см};$$

$$y_2 = B - y_c = 20 - 6,5 = 13,5 \text{ см}.$$

Координаты центра тяжести сечения

$$y_0 = \frac{\sum S_{XB}}{\sum A} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2} = \frac{30,6 \cdot 5,5 + 34,87 \cdot 13,5}{30,6 + 34,87} = 9,76 \text{ см};$$

$$x_0 = \frac{\sum S_{YB}}{\sum A} = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2}{A_1 + A_2} = \frac{30,6 \cdot 12,1 + 34,87 \cdot 2,79}{30,6 + 34,87} = 7,14 \text{ см}.$$

По значениям x_0 и y_0 на сечении отмечается центр тяжести O (рис. 3.6, б). Заметим, что центр тяжести должен лежать на прямой, соединяющей точки O_1 и O_2 .

Далее проводятся центральные оси X_0Y_0 , параллельные вспомогательным, и вычисляются расстояния n и m :

$$m_1 = -(y_0 - y_1) = -(9,76 - 5,5) = -4,26 \text{ см};$$

$$m_2 = y_2 - y_0 = 13,5 - 9,76 = 3,74 \text{ см};$$

$$n_1 = x_1 - x_0 = 12,1 - 7,14 = 4,96 \text{ см};$$

$$n_2 = -(x_0 - x_2) = -(7,14 - 2,79) = -4,35 \text{ см}.$$

Знаки при m и n назначаются с учетом перехода от центральных осей X_i, Y_i фигур, составляющих сечение, к общим центральным осям X_0, Y_0 .

Вычисляем значения осевых и центробежного моментов инерции сечения относительно центральных осей X_0, Y_0 :

$$\begin{aligned} J_{x_0} &= \sum (J_{x_i} + A_i m_i^2) = J_{x_1} + A_1 m_1^2 + J_{x_2} + A_2 m_2^2 = \\ &= 157 + 30,6 \cdot 4,26^2 + 1449 + 34,87 \cdot 3,74^2 = 2649 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{y_0} &= \sum (J_{y_i} + A_i n_i^2) = J_{y_1} + A_1 n_1^2 + J_{y_2} + A_2 n_2^2 = \\ &= 2550 + 30,6 \cdot 4,96^2 + 446 + 34,87 \cdot 4,35^2 = 4409 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{x_0 y_0} &= \sum (J_{x_i y_i} + A_i n_i m_i) = J_{x_1 y_1} + A_1 n_1 m_1 + J_{x_2 y_2} + A_2 n_2 m_2 = \\ &= 0 + 30,6 \cdot (-4,26) \cdot 4,96 + 465 + 34,87 \cdot 3,74 \cdot (-4,35) = -749 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Значение $J_{x_2 y_2}$ положительное (см. рис. 3.1).

Положение главных центральных осей сечения характеризуется углом α_0 , который определяется по формуле (3.3):

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2J_{x_0y_0}}{J_{x_0} - J_{y_0}} = -\frac{2 \cdot (-749)}{2649 - 4409} = -0,851;$$

$$2\alpha_0 = -40,4^\circ, \quad \alpha_0 = -20,2^\circ.$$

Угол α_0 отсчитывается от оси с большим моментом инерции, т. е. от Y_0 , по ходу часовой стрелки, так как численное значение угла отрицательное. Таким образом определяется положение оси U .

По формуле (3.5) определяем значения главных центральных моментов инерции сечения:

$$J_{U,V} = \frac{1}{2} \left((J_{x_0} + J_{y_0}) \pm \sqrt{(J_{x_0} - J_{y_0})^2 + 4J_{x_0y_0}^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left((2649 + 4409) \pm \sqrt{(2649 - 4409)^2 + 4 \cdot 749^2} \right) = \frac{1}{2} (7058 \pm 2311),$$

отсюда максимальный момент инерции сечения $J_U = 4684,5 \text{ см}^4$, минимальный $J_V = 2373,5 \text{ см}^4$.

Проверяем правильность вычислений, выполненных по формуле (3.5):

$$J_{X_0} + J_{Y_0} = 2649 + 4409 = 7057 \text{ см}^4;$$

$$J_U + J_V = 4684,5 + 2373,5 = 7057 \text{ см}^4.$$

Таким образом, рассмотренное сечение имеет наибольшую сопротивляемость изгибу относительно оси U и наименьшую – относительно оси V .

4. КРУЧЕНИЕ

Стержень подвергается деформации кручения при нагружении его парой сил F , лежащих в плоскости, перпендикулярной продольной оси Z . Пара сил приводится к моменту

$$T_e = Fa,$$

который называется *скручивающим* (внешним) моментом (рис. 4.1).

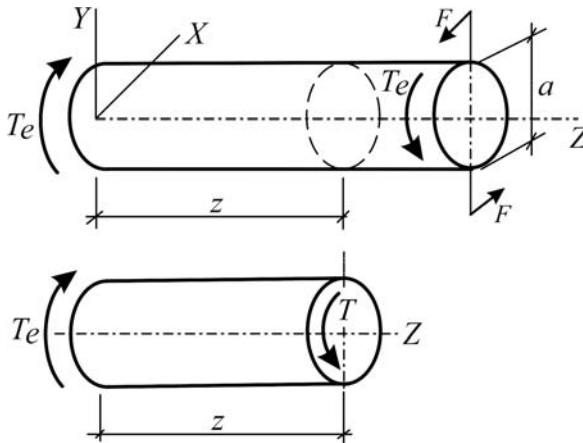


Рис. 4.1

Прямой стержень круглого поперечного сечения, работающий на кручение, называется *валом*. Нагрузка вала (скручивающие моменты) образуется от приводных шкивов и зубчатых колес, насаженных на вал, а также от двигателя.

Если вал находится в состоянии покоя или равномерного вращения, условие равновесия выражается уравнением

$$\sum T_{e(z)} = 0.$$

4.1. Внутренние силы при кручении

В поперечных сечениях скручиваемого стержня возникают внутренние силы сопротивления – крутящие моменты T . Они определяют

ся методом сечений, по которому стержень мысленно разделяется на две части и рассматривается равновесие любой из них (см. рис. 4.1).

Из условия равновесия вытекает, что крутящий момент T в сечении вала равен алгебраической сумме всех скручивающих моментов T_e , действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения (слева или справа):

$$T = \sum T_e^{\text{лев}} = \sum T_e^{\text{прав}}.$$

Правило знаков для моментов таково: скручивающий момент T_e образует в поперечном сечении положительный крутящий момент ($T > 0$), если он (T_e) направлен по ходу часовой стрелки при взгляде со стороны сечения, и наоборот.

Изложенное правило знаков иллюстрируется на рис. 4.2.

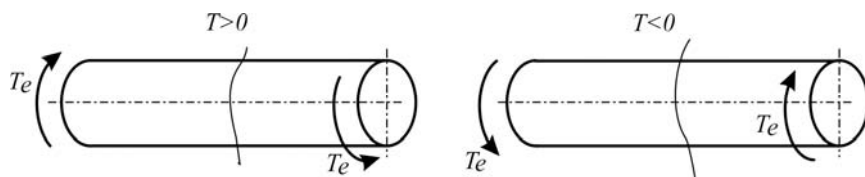


Рис. 4.2

Поскольку сопротивление кручению материалов в ту или другую сторону одинаково, можно применять и обратное правило знаков.

По вычисленным значениям T на расчетных участках вала (между сечениями, где приложены моменты) строится эпюра крутящих моментов.

4.2. Кручение стержней круглого поперечного сечения

4.2.1. Напряжения при кручении

При кручении стержня круглого поперечного сечения применима гипотеза плоских сечений – смежные сечения поворачиваются одно относительно другого, оставаясь плоскими при неизменном расстоянии между ними. Радиусы, проведенные в сечении до деформации, остаются прямыми и после нее.

Элементы материала скручиваемого стержня испытывают деформацию чистого сдвига и сопровождаются касательными напряжениями τ .

Формула для определения касательного напряжения τ в любой точке скручиваемого стержня круглого поперечного сечения имеет вид

$$\tau = \frac{T}{J_p} \rho, \quad (4.1)$$

где T – крутящий момент в рассматриваемом сечении стержня;

J_p – полярный момент инерции сечения стержня;

ρ – расстояние от рассматриваемой точки до центра тяжести сечения (радиус рассматриваемой точки сечения).

Касательные напряжения распределяются по поперечному сечению стержня неравномерно, нарастая от продольной оси Z к поверхности по линейному закону:

в центре тяжести сечения $\tau = 0$;

на контуре сечения, где $\rho = \rho_{\max} = r$, – достигают максимального значения $\tau = \tau_{\max}$ (рис. 4.3).

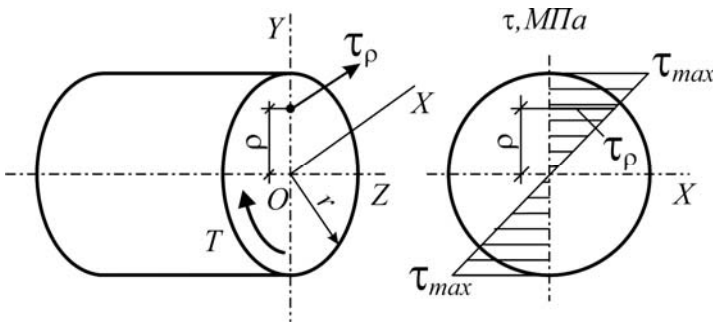


Рис. 4.3

Максимальные касательные напряжения в скручивающем стержне

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{J_p} r,$$

где r – радиус сечения стержня.

Отношение

$$\frac{J_p}{r} = W_p$$

называется *полярным моментом сопротивления*, который характеризует сопротивляемость сечения деформации кручения в зависимости от его размеров и формы.

Поскольку в поперечном сечении скручиваемого стержня возникают только касательные напряжения, материал его находится в условиях чистого сдвига, как частный случай плоского напряженного состояния.

Если кручение стержня происходит от нагрузки в состоянии покоя (статическое действие), то условие прочности для пластичного материала используется в виде

$$\tau_{\max} \leq R_s.$$

Для стержня круглого (сплошного и кольцевого) сечения условие прочности при кручении принимает вид

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_p} \leq R_s, \quad (4.2)$$

где T_{\max} – максимальный крутящий момент в стержне;

W_p – полярный момент сопротивления сечения;

R_s – расчетное сопротивление материала стержня сдвигу.

Для круглого сплошного сечения

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16}.$$

Для кольцевого сечения

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} (1 - c^4),$$

где d – диаметр сплошного (наружный диаметр кольцевого) сечения;
 c – отношение внутреннего диаметра d_0 к наружному d в кольцевом сечении ($c = \frac{d_0}{d}$).

4.2.2. Деформации при кручении. Условие жесткости

При кручении стержня круглого поперечного сечения его продольная ось остается прямой и не изменяет своей длины. Поперечные сечения, оставаясь плоскими и перпендикулярными к продольной оси, поворачиваются на некоторый угол φ (рис. 4.4).

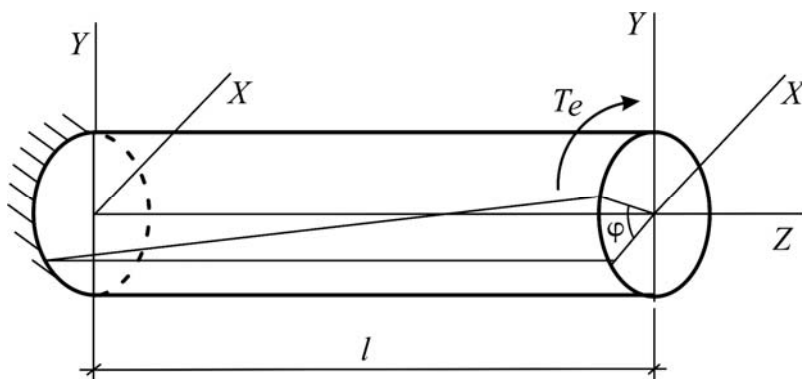


Рис. 4.4

Абсолютный угол закручивания (поворота сечения) определяется по формуле

$$\varphi = \frac{Tl}{GJ_p}, \quad (4.5)$$

где φ – угол закручивания (в радианах);
 T – крутящий момент на участке стержня;
 l – длина участка стержня;
 G – модуль сдвига материала стержня;
 J_p – полярный момент инерции.

Для сплошного круглого сечения

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32},$$

для кольцевого

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32}(1 - c^4).$$

Вычислив значения φ на участках стержня, можно найти перемещения граничных сечений и построить эпюру перемещений (см. примеры).

Величина угла закручивания ограничивается определенными пределами, которые обычно задаются в относительных величинах.

Условие жесткости при кручении имеет вид

$$\theta = \frac{\varphi_{\max}}{l} \leq \theta_{\text{adm}} \quad \text{или} \quad \theta = \frac{T_{\max}}{GJ_p} \leq \theta_{\text{adm}}, \quad (4.4)$$

где θ – относительный угол закручивания;

θ_{adm} – наибольший допустимый угол закручивания (радиан/метр).

Напомним, что

$$\varphi_{\text{град}} = \varphi_{\text{рад}} \frac{180^\circ}{\pi}.$$

Из условий прочности и жесткости можно решить три типа задач: проверить прочность и жесткость стержня, определить его диаметр и наибольшую допустимую нагрузку.

При определении диаметра стержня по названным условиям из двух его найденных значений принимается большее.

Значение скручивающего момента T_e , передаваемого двигателем на вал, определяется по формуле

$$T_e = 9550 \frac{P}{n}, \text{ Н}\cdot\text{м},$$

где P – мощность двигателя, кВт;

n – частота вращения, об/мин.

4.3. Кручение стержней прямоугольного поперечного сечения

При кручении стержня прямоугольного поперечного сечения гипотеза плоских сечений на опыте не подтверждается – поперечные сечения искривляются (депланируются) и касательные напряжения распределяются по сечению по более сложному закону (рис. 4.5).

Наибольшие касательные напряжения возникают посередине длинной стороны сечения и определяются по формуле

$$\tau_{h,\max} = \frac{T}{W_k}, \quad (4.5)$$

где $W_k = ab^2h$ – момент сопротивления при кручении;

b и h – меньшая и большая стороны прямоугольного сечения;

α – коэффициент, зависящий от соотношения сторон прямоугольника (h/b), принимаемый по табл. 4.1.

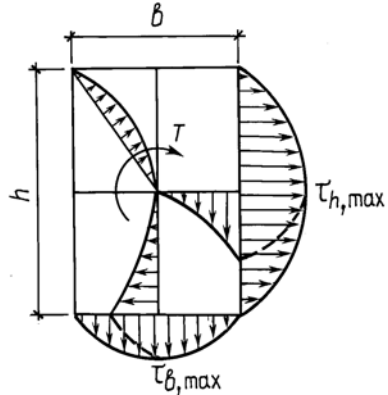


Рис. 4.5

Таблица 4.1

h/b	1,0	1,5	2,0	3,0	4,0
α	0,140	0,294	0,457	0,790	1,123
β	0,208	0,346	0,493	0,801	1,150
γ	1,000	0,859	0,795	0,753	0,745

Посередине короткой стороны касательные напряжения составляют часть максимального напряжения по длинной стороне:

$$\tau_{b,\max} = \gamma \tau_{h,\max},$$

где γ – коэффициент, зависящий от отношения h/b .

В угловых точках и в центре тяжести прямоугольного сечения касательные напряжения равны нулю.

Угол закручивания стержня прямоугольного сечения определяется по формуле

$$\varphi = \frac{Tl}{GJ_k}, \quad (4.6)$$

где $J_k = \beta b^3 h$ – момент инерции при кручении стержня прямоугольного сечения;

β – коэффициент, зависящий от соотношения сторон прямоугольника.

Значения коэффициентов α , β , и γ для прямоугольного сечения приведены в табл. 4.1.

Пример 4.1

Стальной стержень круглого поперечного сечения (рис. 4.6) находится под действием скручивающей нагрузки (моментов T_e).

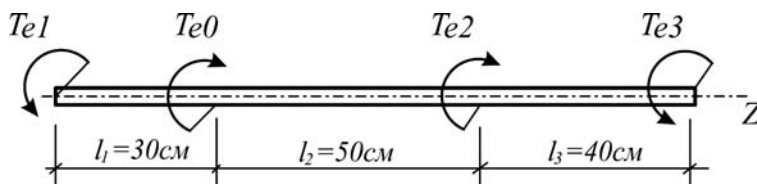


Рис. 4.6

Определить диаметр стержня из условий прочности и жесткости. Для материала стержня $R_s = 120 \text{ МПа}$, $G = 80 \text{ ГПа}$, $\theta_{adm} = 0,04 \text{ рад/м}$.

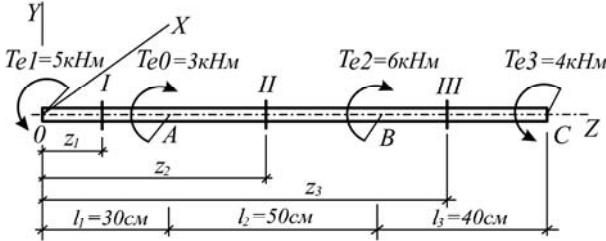
Решение

Как следует из условия примера, стержень подвергается деформации кручения.

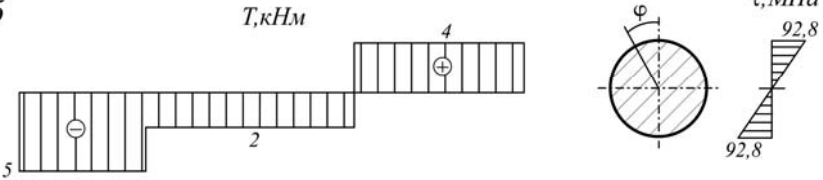
На расчетной схеме (рис. 4.7) выбирается начало координат (крайнее левое сечение) и положительное направление продольной оси Z ; назначаются расчетные участки с границами в сечениях, где приложены скручивающие моменты T_e . Длинам участков придается индекс номера участка. В пределах расчетных участков намечаются попе-

речные сечения (I–III) и отмечается их положение в системе координатной оси (z_1 – z_3).

a



б



в

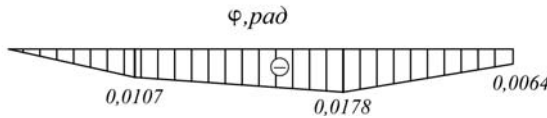


Рис. 4.7

Исходя из характера нагрузки к стержню может быть применено только одно уравнение равновесия $\sum M_z = 0$, из которого определим значение момента T_{e0} .

Уравнение равновесия

$$\sum M_z = -T_{e1} + T_{e0} + T_{e2} - T_{e3} = -5 + T_{e0} + 6 - 4 = 0,$$

откуда $T_{e0} = 3$ кН·м.

Определим крутящие моменты T на участках стержня, используя ранее описанный способ:

1) участок $0 \leq z_1 \leq 30$ см:

$$T_1 = -T_{e1} = -5 \text{ кН·м;}$$

2) участок $30 \text{ см} \leq z_2 \leq 80 \text{ см}$:

$$T_2 = -T_{e1} + T_{e0} = -5 + 3 = -2 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

3) участок $80 \text{ см} \leq z_3 \leq 120 \text{ см}$:

$$T_3 = -T_{e1} + T_{e0} + T_{e2} = -5 + 3 + 6 = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

При сосредоточенной нагрузке значения крутящих моментов T не зависят от ординаты Z и, следовательно, являются постоянными в пределах расчетных участков ($T_i = \text{const}$).

По полученным значениям T в выбранном масштабе строится эпюра крутящих моментов (рис. 4.7, б). Из эпюры максимальный крутящий момент $T_{\max} = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Из условия прочности по касательным напряжениям (4.2) определяем диаметр стержня:

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_p} = \frac{16T_{\max}}{\pi d^3} \leq R_s,$$

откуда

$$d = \sqrt[3]{\frac{16T_{\max}}{\pi R_s}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 5 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 120 \cdot 10^6}} = 0,597 \cdot 10^{-1} \text{ м} = 5,97 \text{ см}.$$

Из условия жесткости (4.4)

$$\theta = \frac{T_{\max}}{GJ_p} = \frac{32T_{\max}}{G\pi d^4} \leq \theta_{\text{adm}}$$

диаметр стержня

$$d = \sqrt[4]{\frac{32T_{\max}}{G\pi\theta_{\text{adm}}}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 5 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^9 \cdot 3,14 \cdot 0,04}} = 0,631 \cdot 10^{-1} \text{ м} = 6,32 \text{ см}.$$

Из двух значений d выбираем большее и, с учетом стандарта, принимаем $d = 6,5 \text{ см}$.

Деформации (углы закручивания φ) на участке стержня определяются по формуле (4.3):

$$\varphi_1 = \frac{T_1 l_1}{G J_p} = -\frac{32 T_1 l_1}{G \pi d^4} = -\frac{32 \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot 30 \cdot 10^{-2}}{80 \cdot 10^9 \cdot 3,14 \cdot 6,5^4 \cdot 10^{-8}} = -0,0107 \text{ рад};$$

$$\varphi_2 = -0,00714 \text{ рад}; \quad \varphi_3 = 0,0114 \text{ рад}.$$

Полученные значения углов закручивания φ позволяют вычислить перемещения граничных сечений стержня и построить эпюру перемещений. Крайнее левое сечение O примем за относительно неподвижное: $\varphi_0 = 0$. Перемещение последующих граничных сечений будет равно алгебраической сумме углов закручивания участков, расположенных с начала отсчета:

$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_A = \varphi_0 + \varphi_1 = 0 - 0,0107 \text{ рад} = -0,0107 \text{ рад};$$

$$\varphi_B = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 \quad \text{или} \quad \varphi_B = \varphi_A + \varphi_2 = -0,0107 - 0,00714 = -0,0178 \text{ рад};$$

$$\varphi_C = \varphi_B + \varphi_3 = -0,0178 + 0,0114 = -0,00640 \text{ рад}.$$

Эпюра перемещений показана на рис. 4.7, в.

Наибольшее касательное напряжение будет на первом участке стержня, где T_{\max} :

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_p} = \frac{16 T_{\max}}{\pi d^3} = \frac{16 \cdot 5 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 6,5^3 \cdot 10^{-6}} = 0,0928 \cdot 10^9 \text{ Па} = 92,8 \text{ МПа}.$$

Эпюра распределения касательных напряжений по поперечному сечению и угол поворота приведены на рис. 4.7, г.

Анализ результатов вычислений

На эпюре крутящих моментов в граничных сечениях имеются «скачки», равные значениям скручивающих моментов.

Наиболее нагружен первый участок стержня ($T_{1,\max}$). Здесь и наибольшие касательные напряжения

$$\tau_{\max} = 92,8 \text{ МПа} < R_s = 120 \text{ МПа}.$$

Материал стержня значительно недонапряжен, так как диаметр стержня принят не по условию прочности, а по условию жесткости, которое оказалось более требовательным.

Наибольший относительный угол закручивания будет на третьем участке:

$$\theta_{\max} = \frac{\varphi_3}{l_3} = \frac{0,0114}{0,40} = 0,0285 \text{ рад/м.}$$

Из эпюры перемещений видно, что наибольшее перемещение пре-терпевает сечение B , в котором $\varphi = 0,0178$ рад.

Пример 4.2

Проверить прочность и жесткость стального стержня круглого поперечного сечения, защемленного левым концом (рис. 4.8).

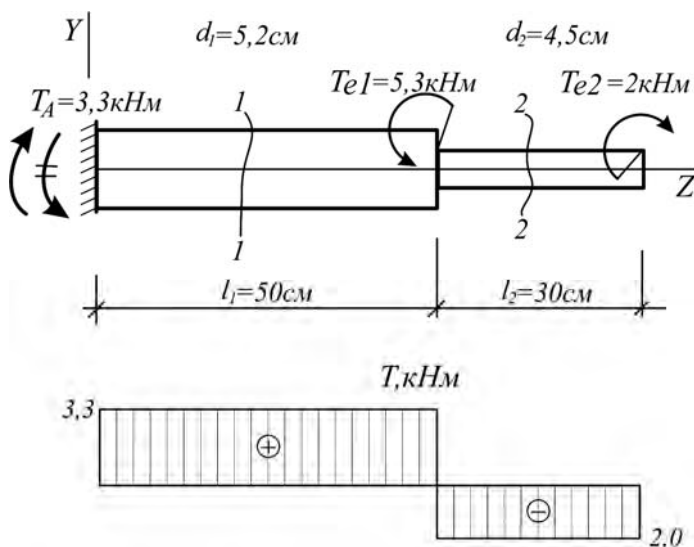


Рис. 4.8

Диаметры участков: $d_1 = 5,2$ см, $d_2 = 4,5$ см.

Для материала стержня $R_s = 120$ МПа, $G = 80$ ГПа, $\theta_{\text{adm}} = 0,07$ рад/м.

Решение

Действующие на стержень скручивающие моменты вызывают в опоре реактивный момент T_A , для определения которого имеется одно уравнение равновесия $\sum M_z = 0$ (система статически определима). Искомый момент T_A направляется произвольно.

$$\sum M_z = -T_A - T_{e1} + T_{e2} = 0,$$

откуда $T_A = -5,3 + 2 = -3,3$ кН·м.

Полученный знак «минус» при T_A означает, что действительное направление момента противоположное.

Стержень имеет два расчетных участка.

Крутящие моменты на участках стержня (рассматриваются части стержня слева от сечения)

$$T_1 = T_A = 3,3 \text{ кН·м};$$

$$T_2 = T_A - T_{e1} = 3,3 - 5,3 = -2,0 \text{ кН·м}.$$

Касательные напряжения на участках стержня (по формуле (4.2))

$$\tau_1 = \frac{T_1}{W_p} = \frac{16T_1}{\pi d_1^3} = \frac{16 \cdot 3,3 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 5,2^3 \cdot 10^{-6}} = 120 \text{ МПа} = R_s;$$

$$\tau_2 = \frac{T_2}{W_p} = \frac{16T_2}{\pi d_2^3} = \frac{16 \cdot 2,0 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 4,5^3 \cdot 10^{-6}} = 112 \text{ МПа} < R_s.$$

Относительные деформации на участках стержня (по формуле (4.4))

$$\theta_1 = \frac{T_1}{GJ_{p1}} = \frac{32T_1}{G\pi d_1^4} = \frac{32 \cdot 3,3 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^9 \cdot 3,14 \cdot 5,2^4 \cdot 10^{-8}} = 0,0575 \text{ рад/м} < \theta_{\text{adm}};$$

$$\theta_2 = \frac{T_2}{GJ_{p2}} = \frac{32T_2}{G\pi d_2^4} = \frac{32 \cdot 2,0 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^9 \cdot 3,14 \cdot 4,5^4 \cdot 10^{-8}} = 0,0621 \text{ рад/м} < \theta_{\text{adm}}.$$

Прочность и жесткость стержня при данных диаметрах обеспечены.

Пример 4.3

Стержень круглого поперечного сечения $d = 3\text{ см}$ с защемленными концами подвергается действию двух скручивающих моментов, соотношение которых $T_{e1} / T_{e2} = 2$.

Определить наибольшие допустимые значения скручивающих моментов и угол поворота сечения (т. К) стержня, если $R_s = 120\text{ МПа}$, $G = 80\text{ ГПа}$ (рис. 4.9).

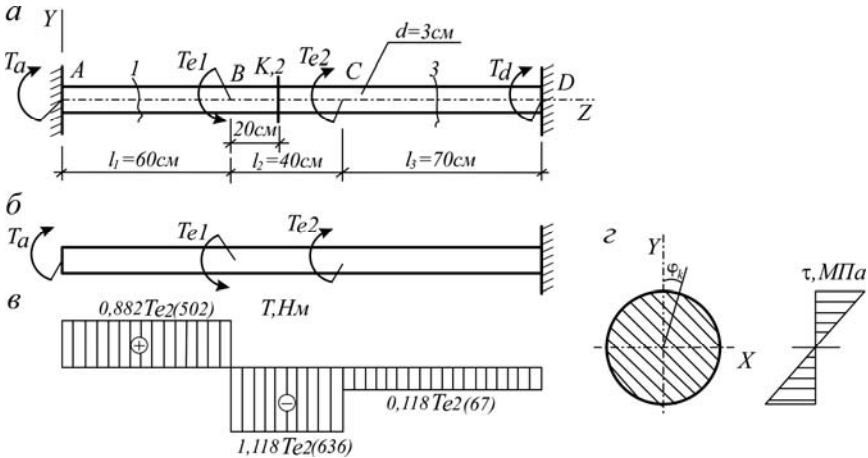


Рис. 4.9

Решение

Исходя из характера нагрузки на стержень, в его опорах возникнет по одной реакции – реактивному моменту T (предварительно направляются произвольно), рис. 4.9, а.

Уравнение равновесия можно составить только одно:

$$\sum M_z = T_A - T_{e1} + T_{e2} + T_D = 0,$$

в котором две неизвестные величины. Значит, рассматриваемый стержень является один раз статически неопределимым ($2 - 1 = 1$).

Для раскрытия статической неопределимости необходимо составить дополнительное уравнение исходя из принципа совместности перемещений.

За основную (статически определимую) систему выбираем стержень с удаленной, например, левой опорой (рис. 4.9, б), нагруженный заданными моментами T_{e1} и T_{e2} и неизвестным реактивным опорным моментом T_A .

На опоре A (заделке) угол поворота в заданной системе (см. рис. 4.9, а) $\varphi_A = 0$. Чтобы основная система (см. рис. 4.9, б) была эквивалентна заданной, необходимо выдержать это условие и в основной системе: $\varphi_A = 0$. Это и есть дополнительное уравнение, выраженное в общем виде.

Применив метод независимости (сложения) действия сил и исходя из принципа совместности деформации (углов поворота) участков стержня, раскроем дополнительное уравнение, используя формулу (4.3) и соотношение скручивающих моментов:

$$\varphi_A = \frac{T_A(l_1 + l_2 + l_3)}{GJ_p} - \frac{T_{e1}(l_2 + l_3)}{GJ_p} + \frac{T_{e2}l_3}{GJ_p} = 0$$

или

$$1,7T_A - 1,1T_{e1} + 0,7T_{e2} = 0.$$

Учитывая, что $T_{e1} = 2T_{e2}$, получим

$$T_A = \frac{2T_{e2}1,1 - T_{e2}0,7}{1,7} = 0,882T_{e2}.$$

Направление T_A было выбрано правильно (значение T_A положительное). Определением момента T_A статическая неопределимость раскрыта. Аналогичным образом можно определить реактивный момент T_D .

Определяем значения крутящих моментов на трех расчетных участках стержня:

$$T_1 = T_A = 0,882T_{e2};$$

$$T_2 = T_A - T_{e1} = T_A - 2T_{e2} = 0,882T_{e2} - 2T_{e2} = -1,118T_{e2};$$

$$T_3 = T_A - 2T_{e2} + T_{e2} = 0,882T_{e2} - 2T_{e2} + T_{e2} = -0,118T_{e2}.$$

По значениям крутящих моментов, выраженных в долях от T_{e2} , строим эпюру крутящих моментов (рис. 4.9, в).

Из эпюры следует, что $T_{\max} = 1,118T_{e2}$.

Из условия прочности (4.2) максимальный допустимый крутящий момент, который может воспринять стержень:

$$T_{\max} = R_s W_p = R_s \frac{\pi d^3}{16} = 120 \cdot 10^6 \cdot \frac{3,14 \cdot 3^3 \cdot 10^{-6}}{16} = 636 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Нагрузочные (скручивающие) моменты на стержень и реактивный момент

$$T_{\max} = 636 \text{ Н} \cdot \text{м} = 1,118T_{e2},$$

откуда

$$T_{e2} = 569 \text{ Н} \cdot \text{м}, \text{ а } T_{e1} = 2T_{e2} = 2 \cdot 569 \text{ Н} \cdot \text{м} = 1138 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$T_A = 0,882T_{e2} = 0,882 \cdot 569 = 502 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

На эпюре крутящих моментов (рис. 4.9, в) проставлены значения крутящих моментов на участках стержня.

Угол поворота среднего сечения (т. К) стержня определим, используя формулу (4.3):

$$\begin{aligned} \varphi_K &= \varphi_{(T_1)} + \varphi_{(T_2)} = \frac{T_1 l_1}{GJ_p} + \frac{T_2 \frac{l_2}{2}}{GJ_p} = \frac{32T_1 l_1}{G\pi d^4} + \frac{32T_2 \frac{l_2}{2}}{G\pi d^4} = \\ &= \frac{32 \cdot 502 \cdot 60 \cdot 10^{-2} - 32 \cdot 636 \cdot 20 \cdot 10^{-2}}{80 \cdot 10^9 \cdot 3,14 \cdot 3^4 \cdot 10^{-8}} = 0,0274 \text{ рад} \end{aligned}$$

или

$$\varphi_K = 0,0274 \cdot \frac{180}{3,14} = 1,57^\circ.$$

Эпюра касательных напряжений и угол поворота сечения К показаны на рис. 4.9, з.

Пример 4.4

Стальной стержень кольцевого сечения скручивается моментом T_e .

Определить наибольшее допустимое значение момента из условий прочности и жесткости, если $R_s = 90$ МПа, $G = 80$ ГПа, $\theta_{adm} = 1,5$ град/м (рис. 4.10).

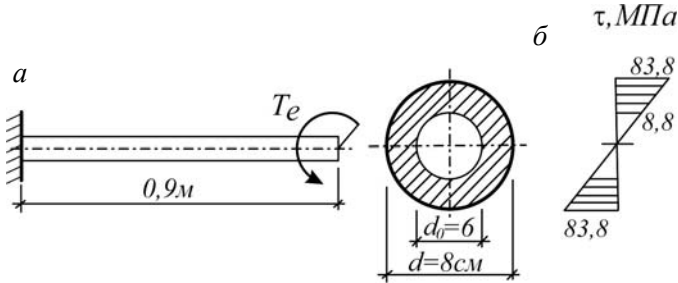


Рис. 4.10

Решение

Вычислим геометрические характеристики заданного сечения.

$$c = \frac{d_0}{d} = \frac{6}{8} = 0,75;$$

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} (1 - c^4) = \frac{3,14 \cdot 8^4 \cdot 10^{-8}}{32} \cdot (1 - 0,75^4) = 275 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} (1 - c^4) = \frac{3,14 \cdot 8^3 \cdot 10^{-6}}{16} \cdot (1 - 0,75^4) = 68,7 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Допустимый относительный угол закручивания

$$\theta_{adm} = 1,5 \cdot 3,14 / 180 = 0,0262 \text{ рад/м.}$$

Из условия прочности (4.2) вычислим значение наибольшего скручивающего момента:

$$T_{adm} = R_s W_p = 90 \cdot 10^6 \cdot 68,7 \cdot 10^{-6} = 6183 \text{ Н} \cdot \text{м} = 6,183 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

из условия жесткости (4.4)

$$T_{\text{adm}} = \theta_{\text{adm}} G J_p = 0,0262 \cdot 80 \cdot 10^9 \cdot 275 \cdot 10^{-8} = 5764 \text{ Н}\cdot\text{м} = 5,76 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

В качестве допустимого скручивающего момента принимаем его меньшее значение: $T_{\text{adm}} = 5,76 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Касательные напряжения на наружных и внутренних волокнах стержня вычислим по формуле (4.1):

$$\tau_{\text{нар}} = \frac{T_{\text{adm}}}{J_p} \cdot \frac{d}{2} = \frac{5,76 \cdot 10^3 \cdot 8 \cdot 10^{-2}}{275 \cdot 10^{-8} \cdot 2} = 0,0838 \cdot 10^9 \text{ Па} = 83,8 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\text{вн}} = \frac{T_{\text{adm}}}{J_p} \cdot \frac{d_0}{2} = \frac{5,76 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 10^{-2}}{275 \cdot 10^{-8} \cdot 2} = 0,0628 \cdot 10^9 \text{ Па} = 62,8 \text{ МПа}.$$

Эпюра касательных напряжений показана на рис. 4.10, б.

Пример 4.5

Стальной стержень прямоугольного поперечного сечения скручивается моментом $T_e = 2,5 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Определить размер сторон прямоугольного сечения ($h/b = 2$, $R_s = 100 \text{ МПа}$) и угол закручивания свободного конца стержня ($G = 80 \text{ ГПа}$), рис. 4.11.

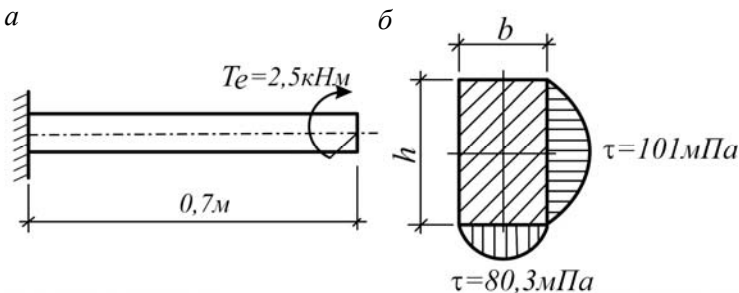


Рис. 4.11

Решение

Геометрические характеристики заданного сечения

$$W_k = \alpha b^2 h = 0,457b^2 2b = 0,914b^3, \text{ см}^3;$$

$$J_k = \beta b^3 h = 0,493b^3 2b = 0,986b^4, \text{ см}^4.$$

Наибольшие касательные напряжения по длинной стороне сечения

$$\tau_{h,\max} = R_s = 100 \text{ МПа.}$$

Из условия прочности (4.5)

$$W_k = \frac{T}{R_s} = \frac{T_e}{R_s} = \frac{2,5 \cdot 10^3}{100 \cdot 10^6} = 0,025 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 25 \text{ см}^3$$

или

$$W_k = 0,914b^3 = 25,$$

откуда $b = 3,013 \text{ см}$.

Принимаем $b = 3,0 \text{ см}$, $h = 2b = 2 \cdot 3 = 6 \text{ см}$.

Вычислим наибольшие касательные напряжения по сторонам сечения.

По длинной стороне

$$\tau_{h,\max} = \frac{T}{W_k} = \frac{2,5 \cdot 10^3}{0,914 \cdot 3^3 \cdot 10^{-6}} = 0,101 \cdot 10^9 \text{ Па} = 101 \text{ МПа} > R_s.$$

Перенапряжение составляет 1 %, что допустимо.

По короткой стороне

$$\tau_{b,\max} = \gamma \tau_{h,\max} = 0,795 \cdot 101 = 80,3 \text{ МПа.}$$

Эпюра касательных напряжений показана на рис. 4.11, б.

Абсолютный угол закручивания свободного конца стержня (по формуле (4.6))

$$\varphi = \frac{Tl}{GJ_k} = \frac{2,5 \cdot 10^3 \cdot 0,7}{80 \cdot 10^9 \cdot 0,986 \cdot 3^4 \cdot 10^{-8}} =$$

$$= 0,000274 \cdot 10^2 \text{ рад} = 0,0274 \text{ рад} = 1,57^\circ.$$

5. ПРЯМОЙ ИЗГИБ

Изгиб – это деформация, при которой происходит искривление оси бруса. Изгиб бывает плоский и пространственный, прямой и косой.

В этом разделе рассматривается плоский прямой изгиб, при котором вся нагрузка, включая и реакции опор, лежит в одной плоскости, называемой силовой (P), и эта плоскость проходит по линии симметрии поперечных сечений балки (рис. 5.1).

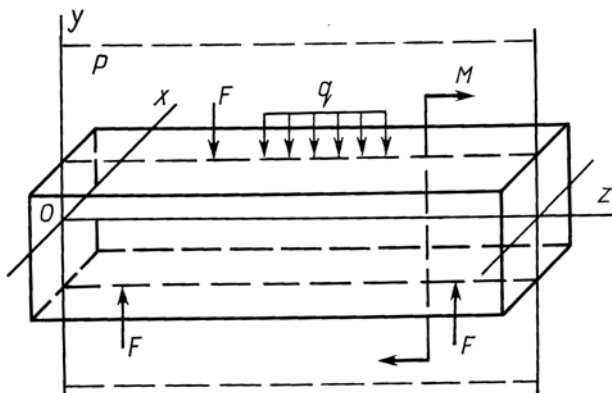


Рис. 5.1

При прямом изгибе деформированная ось балки также находится в плоскости действия нагрузки.

При изучении изгиба используется обычная система координатных осей: ось Z совпадает с продольной осью балки, а оси X и Y

располагаются в плоскостях поперечных сечений и совпадают с главными центральными осями инерции.

Плоский изгиб балки может происходить в плоскости YOZ (вертикальной) или XOZ (горизонтальной).

5.1. Внутренние силы. Эпюры

Балка как элемент конструкции соединяется с другими элементами при помощи устройств, называемых *опорами*. Различают три типа опор: шарнирно-неподвижную, шарнирно-подвижную и защемление (заделка). Опорные устройства препятствуют произвольному перемещению балок от воздействия нагрузки, накладывая на балку определенное число связей (ограничений). В наложенных на балку связях возникают *реакции*, называемые опорными. Число опорных реакций равно числу наложенных связей.

Так, шарнирно-неподвижная опора A (рис. 5.2, *а*) имеет две связи – вертикальную и горизонтальную, дает две реакции A_y и A_z . Шарнирно-подвижная опора B имеет одну связь – дает одну реакцию B_y . Защемление C имеет три связи – дает три реакции: C_y , C_z , M_C (рис. 5.2, *б*).

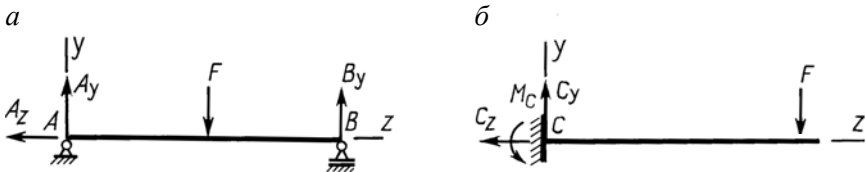


Рис. 5.2

Наименьшее число связей, обеспечивающих неподвижность балки по отношению к другим элементам конструкции в плоской системе сил, равно трем. Эти связи должны быть расположены рационально: не быть параллельными друг другу или пересекаться в одной точке.

Под действием нагрузки и опорных реакций балка должна находиться в равновесии. Поэтому для определения опорных реакций

можно воспользоваться тремя условиями равновесия (для плоской системы сил):

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum M = 0.$$

Сумма моментов берется относительно любой точки, лежащей в плоскости действия сил.

Рекомендуется такой порядок определения опорных реакций:

$$\sum M_A = 0 \rightarrow B_y; \quad \sum M_B = 0 \rightarrow A_y; \quad \sum y = 0.$$

Балки, опорные реакции которых можно определить при помощи трех уравнений равновесия, называются статически определимыми. Такие балки рассматриваются в настоящем разделе.

В результате действия внешних сил (нагрузки) в поперечных сечениях балки возникают *внутренние силы (усилия)*: поперечная сила Q_y и изгибающий момент M_x . Такой изгиб называют *поперечным*. В частном случае в поперечных сечениях балки может возникать только один изгибающий момент M_x . В этом случае изгиб называют *чистым*. Внутренние силы, как и при других, изученных выше деформациях, определяются методом сечений.

Балка в исследуемом сечении мысленно рассекается на две части (рис. 5.3, а). Одна из частей балки мысленно отбрасывается. Поскольку вся балка находится в равновесии, то и оставшаяся ее часть (рис. 5.3, б) под действием известных внешних сил (активных q , M и реактивной A_y) и неизвестных внутренних (Q_y и M_x) в исследуемом сечении также должна находиться в равновесии и удовлетворять условиям $\sum Y = 0$, $\sum M_0 = 0$ (момент относительно центра рассматриваемого сечения):

$$\sum Y = A_y - qa - Q_y = 0,$$

откуда

$$Q_y = A_y - qa;$$

$$\sum M_0 = A_y z - qa(z - a/2) + M - M_x = 0,$$

откуда

$$M_x = A_y z - qa(z - a/2) + M.$$

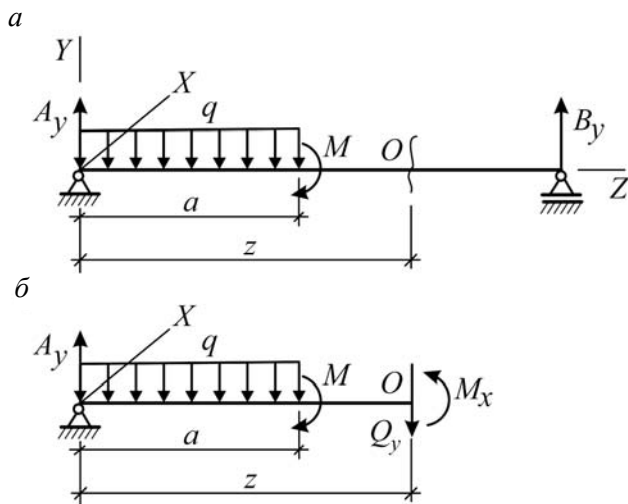


Рис. 5.3

Исходя из названных условий равновесия выработано правило определения поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_x в сечениях балки. При этом сами уравнения равновесия ($\sum Y = 0$, $\sum M = 0$) не составляются, а сразу записываются выражения для Q_y и M_x .

Правило таково – в рассматриваемом сечении балки:

поперечная сила Q_y численно равна алгебраической сумме проекций на плоскость сечения всех внешних сил (активных и реактивных), расположенных по одну сторону от этого сечения:

$$Q_y = \sum(F_i);$$

изгибающий момент M_x численно равен алгебраической сумме моментов относительно центра тяжести сечения всех внешних сил, расположенных по одну сторону от этого сечения:

$$M_x = \sum(F_i z_i).$$

Для определения Q_y и M_x можно рассматривать любую часть «рассеченной» балки.

При вычислении Q_y и M_x принято следующее правило знаков:

– если внешняя сила (активная или реактивная) стремится повернуть рассматриваемую часть балки относительно центра тяжести исследуемого сечения по часовой стрелке, то возникающая в этом сечении поперечная сила считается положительной, а если против часовой стрелки – отрицательной;

– если внешняя сила (F , M , q) изгибает рассматриваемую часть балки относительно исследуемого сечения выпуклостью вниз, то возникающий в этом сечении изгибающий момент считается положительным, если выпуклостью вверх – отрицательным.

Изложенное правило знаков иллюстрируется на рис. 5.4.

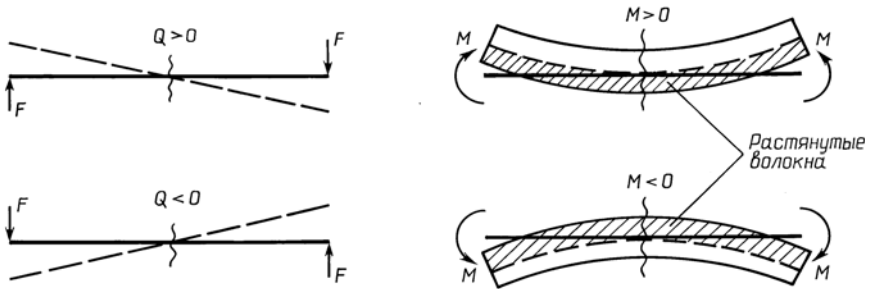


Рис. 5.4

Для проведения расчетов балки на прочность необходимо знать максимальные значения Q_y и M_x . Для этого нужно выявить закон изменения этих величин по длине балки:

$$Q_y = f(z), M_x = f(z).$$

Изменения Q_y и M_x по длине балки удобно представлять графически в виде э п ю р (рис. 5.5).

Исходя из нагрузки, на балке выделяют расчетные участки: между точками приложения сосредоточенных нагрузок (F , M) и в пределах распределенной (q).

В пределах каждого расчетного участка намечаются сечения (I, II, i) и отмечаются их положения в системе координатных осей (z_1, z_2, \dots, z_i).

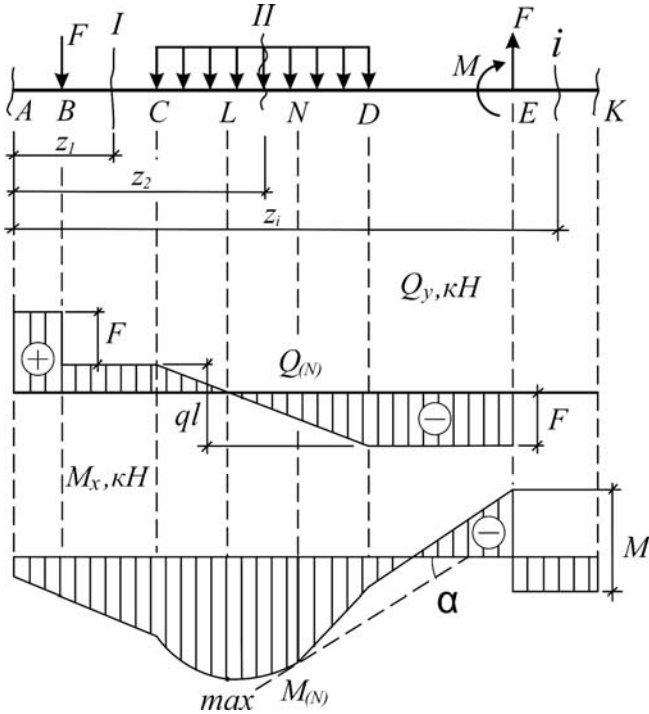


Рис. 5.5

Затем на каждом расчетном участке балки по ранее изложенным правилам составляются выражения для определения Q_y и M_x . По составленным выражениям вычисляются значения Q_y и M_x в характерных сечениях каждого участка балки. По этим данным в выбранном масштабе строятся соответствующие эпюры (см. рис. 5.5).

Положительные ординаты Q_y откладываются вверх от оси эпюры, отрицательные – вниз. Эпюра изгибающих моментов в строительном проектировании строится со стороны *растянутых* волокон балки. Это значит, что положительные значения M_x откладываются *вниз* от оси эпюры, а отрицательные – *вверх*.

При построении эпюр Q_y и M_x и для проверки их правильности могут быть использованы дифференциальные зависимости между Q_y , M_x и q :

$$Q_{(z)} = \frac{dM_{(z)}}{dz};$$

$$q = \frac{dQ_{(z)}}{dz} = \frac{d^2M_{(z)}}{dz^2},$$

где индекс z при Q и M означает, что эти параметры являются функцией абсциссы z балки.

Из названных дифференциальных зависимостей вытекает ряд важных следствий (см. рис. 5.5):

1. Если на участке балки $q = 0$ (AC , DK), то поперечная сила $Q_y = \text{const}$, а изгибающий момент M_x изменяется по линейному закону.

2. Если на участке балки $q \neq 0$ (CD), то поперечная сила Q_y изменяется по линейному закону, а изгибающий момент M_x – по закону параболы (выпуклостью по направлению нагрузки q).

3. Если на участке балки поперечная сила $Q_y = 0$ (EK), то изгибающий момент $M_x = \text{const}$.

4. Если на участке балки поперечная сила $Q_y > 0$ (AL), то изгибающий момент M_x возрастает, и наоборот (LE).

5. В сечении балки, где поперечная сила переходит через нуль ($Q_y = 0$), изгибающий момент имеет экстремальное значение (максимум или минимум) – сечение L .

6. В сечении балки, где приложена сосредоточенная сила F (сечение B , E), на эпюре Q_y имеется «скачок» на величину этой силы и в ее направлении, а на эпюре M_x – излом.

7. В сечении балки, где приложен сосредоточенный момент M (сечение E), на эпюре M_x имеется «скачок» на величину этого момента, а на эпюре Q_y изменений нет.

8. Поперечная сила в данном сечении балки может рассматриваться как тангенс угла наклона касательной к эпюре M в соответствующей этому сечению точке (точка N на рис. 5.5).

Из построенных эпюр поперечных сил и изгибающих моментов для расчета на прочность выбираются максимальные значения Q_{max} и M_{max} .

Пример 5.1

Для консольной балки построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (рис. 5.6).

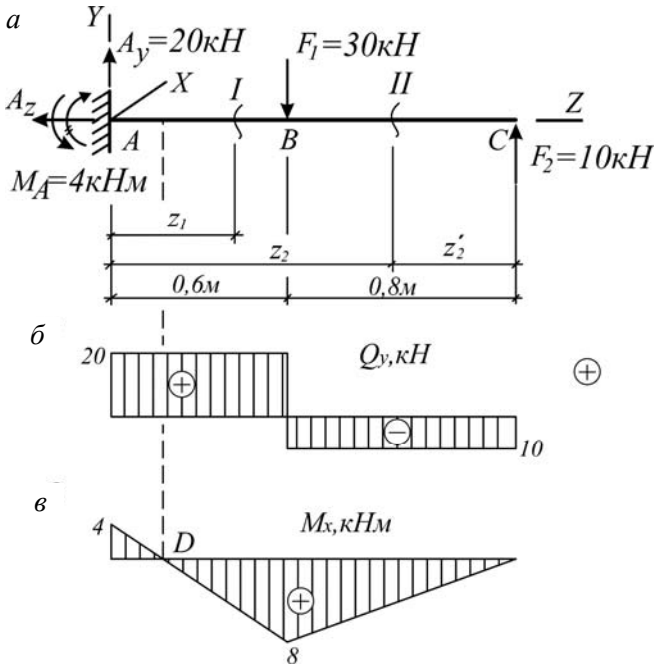


Рис. 5.6

Решение

На расчетной схеме балки размещается система координатных осей X, Y, Z с началом в крайнем левом сечении балки.

Действующие на балку нагрузки F_1 и F_2 передаются на опору (закрепление), где возможны три опорные реакции (A_y, A_z и M_A), которые предварительно направляются произвольно.

Для определения трех опорных реакций используются три уравнения равновесия ($\sum Y = 0, \sum Z = 0, \sum M = 0$). Значит, рассматриваемая система (балка) является статически определимой.

Рекомендуется следующий порядок определения опорных реакций, пригодный для всех схем балок.

Составляются уравнения моментов относительно крайних сечений балки (здесь точки A и C):

$$\Sigma M_A = M_A + F_1 \cdot 0,6 - F_2 (0,6 + 0,8) = M_A + 30 \cdot 0,6 - 10 (0,6 + 0,8) = 0,$$

откуда $M_A = -4$ кН·м.

Знак «минус» при M_A указывает на то, что момент направлен в противоположную сторону. На схеме показывается действительное направление M_A , и далее знак «минус» не учитывается.

$$\Sigma M_C = -M_A + A_y (0,6 + 0,8) - F_1 \cdot 0,8 = -4 + A_y \cdot 1,4 - 30 \cdot 0,8 = 0,$$

откуда $A_y = 20$ кН (направление A_y правильное).

Из уравнения $\Sigma Z = 0$ определяем реакцию A_z :

$$\Sigma Z = -A_z = 0.$$

Уравнение $\Sigma Y = 0$ используется для проверки правильности определения реакций:

$$\Sigma Y = A_y - F_1 + F_2 = 20 - 30 + 10 = 0 - \text{реакции определены верно.}$$

При расположении нагрузки перпендикулярно продольной оси балки реакция опоры вдоль оси Z всегда равна нулю. Поэтому в последующих задачах она не будет указываться.

Для определения Q и M на балке выделяются расчетные участки (здесь – два), в пределах которых помечаются сечения I и II и отмечается их положение в системе координатных осей (z_1, z_2).

Составим выражения для определения поперечной силы Q и изгибающего момента M для каждого участка балки.

Участок I.

Рассматриваем левую от сечения часть балки (ход слева):

$$0 \leq z_1 \leq 0,6 \text{ м,}$$

$$Q = A_y = 20 \text{ кН} = \text{const};$$

$$M = -M_A + A_y z_1 - \text{линейная зависимость.}$$

При $z_1 = 0$ $M = -4$ кН·м;
при $z_1 = 0,6$ м

$$M = -4 + 20 \cdot 0,6 = 8 \text{ кН·м.}$$

Проверим знаки слагаемых в составленных выражениях.

В выражении для Q реакция A_y дает положительное слагаемое, так как пытается повернуть рассматриваемую часть балки относительно сечения I по ходу часовой стрелки.

В выражении для M опорный момент M_A дает отрицательное слагаемое, так как стремится изогнуть рассматриваемую часть балки относительно сечения I выпуклостью вверх, а реакция A_y – положительное значение, так как стремится изогнуть балку выпуклостью вниз.

Участок 2.

Рассматриваем левую от сечения часть балки (ход слева):

$$0,6 \leq z_2 \leq (0,6 + 0,8) \text{ м,}$$

$$Q = A_y - F_1 = 20 - 30 = -10 \text{ кН} = \text{const};$$

$M = -M_A + A_y z_2 - F_1 (z_2 - 0,6)$ – линейная зависимость.

При $z_2 = 0,6$ м

$$M = -4 + 20 \cdot 0,6 = 8 \text{ кН·м;}$$

при $z_2 = 1,4$ м

$$M = -4 + 20 \cdot 1,4 - 30 \cdot 0,8 = 0.$$

О знаках слагаемых. Сила F_1 в выражении для Q дает отрицательное слагаемое, так как стремится повернуть рассматриваемую часть балки относительно сечения II против хода часовой стрелки, а в выражении для M также дает отрицательное слагаемое, так как стремится изогнуть балку выпуклостью вверх.

Заметим, что значения Q и M на концах балки согласуются с действующими здесь нагрузками (реакциями). Так, вычисленное значение Q в сечении C численно равно приложенной здесь силе F_2 , а вычисленное значение M численно равно приложенному здесь моменту M (в данном случае $M = 0$).

Для определения Q и M можно рассматривать и правую часть балки (с началом отсчета ординаты Z в сечении C).

Так, для второго участка (ход справа):

$$0 \leq z'_2 \leq 0,8 \text{ м,}$$

$$Q = -F_2 = -10 \text{ кН} = \text{const};$$

$M = F_2 z'_2$ – линейная зависимость.

При $z'_2 = 0$ $M = 0$;

при $z'_2 = 0,8$ м

$$M = 10 \cdot 0,8 = 8 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Значения Q и M совпадают с ранее полученными.

Второй вариант составления выражений для Q и M (ход со стороны свободного конца) для консольной балки имеет преимущество в том, что не требуется определения опорных реакций. Но при этом контрольные значения (A_y , M_A) отсутствуют.

По полученным значениям Q и M в характерных сечениях балки в выбранном масштабе строятся эпюры Q (рис. 5.6, б) и эпюра M (рис. 5.6, в). Положительные значения Q откладываются вверх от оси эпюры, а положительные значения M – вниз.

При таком направлении ординат M эпюра изгибающих моментов оказывается построенной со стороны *растянутых* волокон балки, что удобно в строительном проектировании.

Проанализируем характер эпюр Q и M на участках балки. На участках балки, где нет распределенной нагрузки ($q = 0$), эпюра Q – прямолинейна, параллельна оси балки, а эпюра M – прямолинейна, наклонна к оси балки.

В сечениях A , B и C , где действуют активные и реактивные сосредоточенные силы, на эпюре Q имеются скачки на величину этих сил.

Если смотреть со стороны крайнего *левого* сечения балки, то скачки на эпюре Q направлены в сторону действия сосредоточенной силы (активной и реактивной). Так, сила F_1 направлена вниз – скачок на эпюре Q также вниз, а в сечении C – вверх, так как сила F_2 направлена вверх.

В сечении балки B , где приложена сосредоточенная сила F_1 , на эпюре M имеется излом.

В сечении балки A , где действует момент M_A , на эпюре M имеется скачок на величину этого момента, направленный вверх, так как M_A направлен против хода часовой стрелки.

Из эпюр Q и M следует, что на участке балки AD верхние волокна растянуты (ординаты M лежат сверху от оси эпюры), а нижние сжаты. На участке DC нижние волокна растянуты, верхние сжаты.

Из построенных эпюр Q и M следует, что $Q_{\max} = 20$ кН, $M_{\max} = 8$ кН·м. Эти значения нужны для последующих расчетов.

Пример 5.2

Для двухпорной балки построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (рис. 5.7).

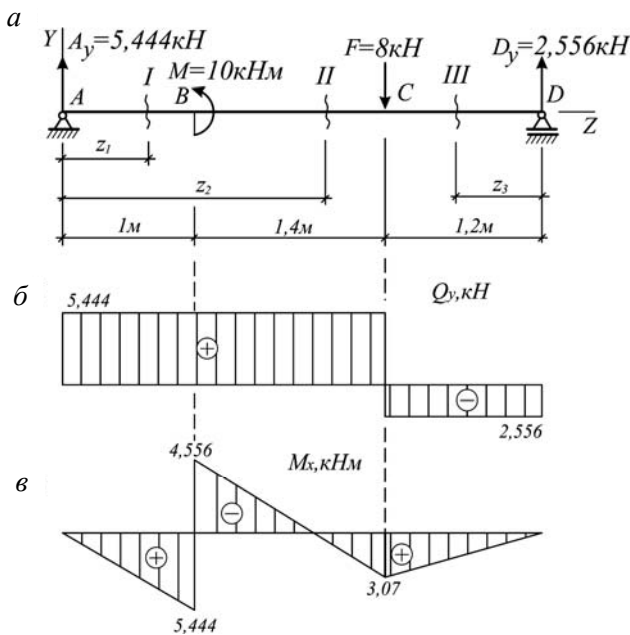


Рис. 5.7

Решение

Координатная ось Z совпадает с продольной осью балки, ось Y ей перпендикулярна.

Действующая на балку нагрузка передается на опоры, где возникают опорные реакции A_y и D_y , которые определяются из уравнений равновесия.

Составим два уравнения моментов относительно опорных сечений, чтобы реакции можно было найти независимо друг от друга:

$$\begin{aligned}\sum M_A &= -D_y (1,0 + 1,4 + 1,2) + F (1,0 + 1,4) - M = \\ &= -D_y \cdot 3,6 + 8 \cdot 2,4 - 10 = 0,\end{aligned}$$

откуда $D_y = 2,556$ кН;

$$\sum M_D = A_y \cdot 3,6 - M - F \cdot 1,2 = A_y \cdot 3,6 - 10 - 8 \cdot 1,2 = 0,$$

откуда $A_y = 5,444$ кН.

Знаки «плюс» у реакций A_y и D_y указывают на то, что их действительное направление совпадает с предполагаемым.

Проверим правильность вычисления реакций:

$\sum Y = A_y - F + D_y = 5,444 - 8,0 + 2,556 = 0$ – реакции определены верно.

На балке выделяются три расчетных участка. С целью сокращения объема вычислений для составления выражений для Q и M будем рассматривать часть сечений с левого, а часть – с правого конца балки (рис. 5.7, а).

Участок 1 – ход слева: $0 \leq z_1 \leq 1,0$ м,

$Q = A_y = 5,444$ кН = const, $M = A_y z_1$ – линейная зависимость.

При $z_1 = 0$ $M = 0$;

при $z_1 = 1,0$ м

$$M = 5,444 \cdot 1 = 5,444 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок 2 – ход слева: $1,0 \leq z_2 \leq 2,4$ м,

$Q = A_y = 5,444$ кН = const, $M = A_y z_2 - M$ – линейная зависимость.

При $z_2 = 1,0$ м

$$M = 5,444 \cdot 1 - 10 = -4,556 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

при $z_2 = 2,4$ м

$$M = 5,444 \cdot 2,4 - 10 = 3,07 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок 3 – ход справа: $0 \leq z_3 \leq 1,2$ м,

$$Q = -D_y = -2,556 \text{ кН} = \text{const}, \quad M = D_y z_3 - \text{линейная зависимость.}$$

При $z_3 = 0$ $M = 0$;

при $z_3 = 1,2$ м

$$M = 2,556 \cdot 1,2 = 3,07 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

По полученным значениям Q и M строятся соответствующие эпюры (рис. 5.7, б, в).

Анализ эпюры изгибающих моментов показывает, что в том сечении балки, где приложен сосредоточенный момент M , на эпюре образуется скачок на величину этого момента. Скачок направлен вверх, так как M направлен против хода часовой стрелки.

На участке AC балки поперечная сила $Q > 0$ – изгибающий момент возрастает, а на участке CD , где $Q < 0$ – изгибающий момент убывает.

В концевых шарнирных опорах балки (A , D) изгибающие моменты равны нулю.

Характер деформации волокон балки на ее участках предлагается установить самостоятельно.

Из построенных эпюр следует, что $Q_{\max} = 5,444$ кН, $M_{\max} = 5,444$ кН·м.

Пример 5.3

Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для двухопорной балки с консолью (рис. 5.8).

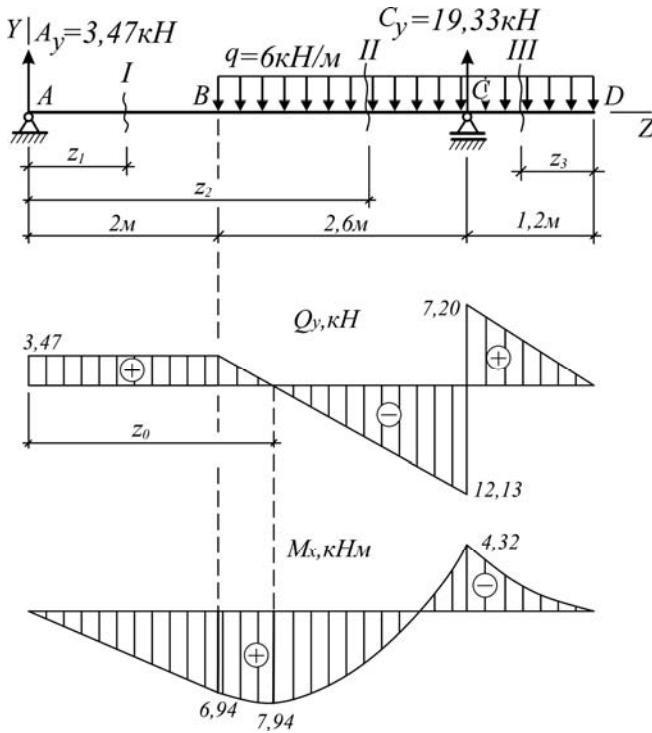


Рис. 5.8

Решение

Определяем опорные реакции.

$$\sum M_A = -C_y \cdot 4,6 + q \cdot 2,6 \left(2 + \frac{2,6}{2} \right) + q \cdot 1,2 \left(4,6 + \frac{1,2}{2} \right) = 0,$$

откуда $C_y = 19,33$ кН;

$$\sum M_C = A_y \cdot 4,6 - q \cdot 2,6 \cdot \frac{2,6}{2} + q \cdot 1,2 \cdot \frac{1,2}{2} = 0,$$

откуда $A_y = 3,47$ кН.

$\Sigma Y = 3,47 + 19,33 - 6(2,6 + 1,2) = 22,8 - 22,8 = 0$ – реакции определены верно (по направлению и значениям).

Балка имеет три расчетных участка.

Участок 1 – ход слева: $0 \leq z_1 \leq 2,0$ м,

$$Q = A_y = 3,47 \text{ кН}, \quad M = A_y z_1.$$

При $z_1 = 0$ $M = 0$;

при $z_1 = 2,0$ м

$$M = 3,47 \cdot 2 = 6,94 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок 2 – ход слева: $2 \leq z_2 \leq 4,6$ м,

$Q = A_y - q(z_2 - 2)$ – линейная зависимость;

$M = A_y z_2 - q(z_2 - 2) \frac{(z_2 - 2)}{2}$ – параболическая зависимость.

При $z_2 = 2$ м $Q = 3,47$ кН, $M = 6,94$ кН·м;

при $z_2 = 4,6$ м $Q = -12,13$ кН, $M = -4,32$ кН·м.

Участок 3 – ход справа: $0 \leq z_3 \leq 1,2$ м,

$Q = q z_3$ – линейная зависимость;

$M = -q z_3 \frac{z_3}{2}$ – параболическая зависимость.

При $z_3 = 0$ $Q = 0$, $M = 0$;

при $z_3 = 1,2$ м $Q = 7,2$ м, $M = -4,32$ кН·м.

На участке *BC* балки эпюра Q переходит через нуль ($Q = 0$). В этом сечении, определяемом абсциссой z_0 , изгибающий момент M имеет экстремальное значение.

Определим расстояние z_0 из выражения

$$Q = A_y - q(z_0 - 2) = 0,$$

откуда $z_0 = 2,58$ м.

При $z = z_0 = 2,58$ м

$$M_{\max} = A_y z_0 - q(z_0 - 2) \frac{(z_0 - 2)^2}{2} =$$

$$= 3,47 \cdot 2,58 - 6 \cdot (2,58 - 2) \cdot \frac{(2,58 - 2)^2}{2} = 7,94 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Заметим, что на участках балки, где действует распределенная нагрузка q , изгибающий момент изменяется по закону параболы. Линия эпюры изогнута в сторону направления нагрузки q .

Из построенных эпюр следует, что $Q_{\max} = 12,13$ кН, $M_{\max} = 7,94$ кН·м.

Пример 5.4

Построить эпюры Q и M для двухпролетной балки с промежуточным шарниром (рис. 5.9).

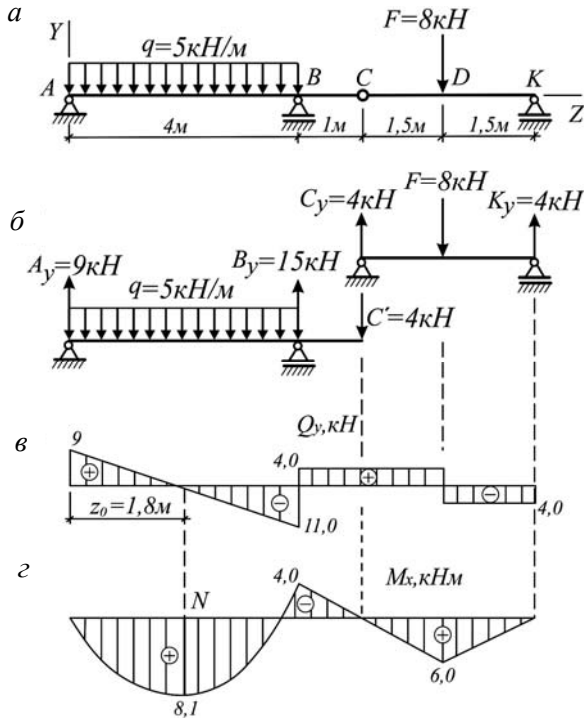


Рис. 5.9

Решение

Сложная (составная) балка AK состоит из двух частей: основной AC , покоящейся на шарнирных опорах A и B , и дополнительной, опирающейся левым концом на основную балку, а правым – на опору K .

Нагрузка q , действующая на основную балку, передается только на опоры A и B . Нагрузка F , действующая на дополнительную часть балки, передается на опору K и через шарнир C – на основную часть балки, а затем на опоры A и B .

Для ведения расчета сложную балку следует расчленить на основную и дополнительную части, проведя сечение через шарнир C (рис. 5.9, б).

Реакции в опорах балки определяют обычным образом, рассматривая отдельно каждую часть сложной балки, начиная с дополнительной.

Составляем уравнения равновесия для дополнительной части балки (CK):

$$\Sigma M_C = 8 \cdot 1,5 - K_y \cdot 3 = 0, \text{ откуда } K_y = 4,0 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_K = -8 \cdot 1,5 + C_y \cdot 3 = 0, \text{ откуда } C_y = 4,0 \text{ кН};$$

$$\Sigma Y = C_y - F + K_y = 4 - 8 + 4 = 0.$$

Составляем уравнения равновесия для основной части балки (AC). В сечении C основной части балки нужно приложить ту часть нагрузки F , которая с дополнительной части передается на основную. Эта часть нагрузки C'_y равна реакции C_y дополнительной части, т. е. $C'_y = C_y$. Направлять C'_y следует противоположно направлению C_y .

$$\Sigma M_A = q4 \cdot \frac{4}{2} + C'_y(4+1) - B_y 4 = 0, \text{ откуда } B_y = 15 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_B = -q4 \cdot \frac{4}{2} + C'_y 1 + A_y 4 = 0, \text{ откуда } A_y = 9 \text{ кН};$$

$$\Sigma Y = A_y - q4 + B_y - C'_y = 9 - 5 \cdot 4 + 15 - 4 = 0.$$

Для определения опорных реакций можно поступить иначе. Так как изгибающий момент в шарнире равен нулю (через шарнир мо-

мент не передается), то к обычным уравнениям равновесия можно добавить еще одно – сумма моментов относительно шарнира C от сил слева или справа от него равна нулю ($\sum M_C^{\text{лев}} = \sum M_C^{\text{сп}} = 0$). Тогда рис. 5.9, б не нужен.

В данном примере целесообразно составить следующие уравнения равновесия:

1) $\sum M_C^{\text{сп}} = 0$ – определяется реакция K_y ;

2) $\sum M_B = 0$ – войдут неизвестная реакция A_y и известная реакция K_y . Совместное решение уравнений $\sum M_C^{\text{сп}} = 0$ и $\sum M_B = 0$ дает значение реакции A_y ;

3) $\sum M_C^{\text{лев}} = 0$ – определяется реакция B_y .

Возможно применение других вариантов уравнений равновесия.

Эпюры Q и M строятся обычным путем, отдельно для каждой части балки, а затем их нужно соединить.

После того как изучены закономерности изменения Q и M на участках балки в зависимости от вида нагрузки, процедуру их определения можно несколько упростить. Выражения для Q и M на каждом участке балки в зависимости от z не составляются, а сразу вычисляются их значения для конкретных сечений (обычно это границы расчетных участков балки).

Как выявлено ранее, в сечении, где приложена сосредоточенная сила F , на эпюре Q образуется скачок на величину этой силы. Поэтому в таких сечениях вычисляются два значения Q на бесконечно малых расстояниях слева (л) и справа (сп) от него.

То же относится и к сосредоточенному моменту M .

Определяем внутренние силы (усилия) в характерных сечениях балки.

Ход слева.

Сечение A :

$$Q = A_y = 9 \text{ кН}, \quad M = 0.$$

Сечение B :

$$Q^{\text{л}} = A_y - q \cdot 4 = 9 - 5 \cdot 4 = -11 \text{ кН};$$

$$Q^{\text{сп}} = A_y - q \cdot 4 + B_y = 9 - 5 \cdot 4 + 15 = 4 \text{ кН};$$

$$M = +A_y \cdot 4 - q \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} = +9 \cdot 4 - 5 \cdot 4 \cdot 2 = -4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Сечение С:

$$Q = A_y - q \cdot 4 + B_y = 9 - 5 \cdot 4 + 15 = 4 \text{ кН};$$

$$\begin{aligned} M &= +A_y \cdot (4+1) - q \cdot 4 \cdot \left(\frac{4}{2} + 1\right) + B_y \cdot 1 = \\ &= +9 \cdot 5 - 5 \cdot 4 \cdot 3 + 15 \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

Для остальной части балки целесообразен ход справа.

Сечение К:

$$Q = -K_y = -4 \text{ кН}, \quad M = 0.$$

Сечение D:

$$Q^{\text{II}} = -K_y = -4 \text{ кН};$$

$$Q^{\text{II}} = -K_y + F = -4 + 8 = 4 \text{ кН};$$

$$M = +K_y \cdot 1,5 = +4 \cdot 1,5 = +6 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Сечение С:

$$Q = -K_y + F = -4 + 8 = 4 \text{ кН};$$

$$M = K_y (1,5 + 1,5) - F \cdot 1,5 = +4 \cdot 3 - 8 \cdot 1,5 = 0.$$

Заметим, что последние значения Q и M можно было не определять (уже найдены).

По вычисленным значениям Q и M строятся их эпюры (рис. 5.9, в, г).

На участке AB балки эпюра Q переходит через нуль. Определим это сечение N , в котором изгибающий момент имеет максимальное значение:

$$Q_N = A_y - qz_0 = 0,$$

откуда $z_0 = A_y/q = 9/5 = 1,8$ м.

При $z = z_0 = 1,8$ м

$$M_{\text{max}} = A_y z_0 - qz_0 \frac{z_0}{2} = +9 \cdot 1,8 - 5 \cdot 1,8 \cdot 0,9 = 8,1 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Из построенных эпюр следует, что $Q_{\max} = 11$ кН, $M_{\max} = 8,1$ кН·м.

Процедуру построения эпюры Q можно еще более упростить, применив графоаналитический прием, помня о закономерности изменения Q в зависимости от вида нагрузки.

Начинать построение удобно с крайнего *левого* сечения балки.

В сечении A – скачок на величину и направление реакции, т. е. вверх на 9 кН. На участке AB – прямая, наклонная по направлению нагрузки q , т. е. вниз на

$$5 \cdot 4 = 20 \text{ кН.}$$

Получим точку с ординатой

$$9 - 20 = -11 \text{ кН.}$$

От этой точки вверх на значение реакции $B_y = 15$ кН получим точку с ординатой 4 кН. На участке BC и CD изменений нет – эпюра прямая, параллельная оси. В сечении D – скачок вниз на $F = 8$ кН – получим ординату 4 кН. На участке DK изменений нет. В сечении K – скачок вверх на значение реакции $K_y = 4$ кН. Построение всегда должно «замкнуться» на нуле.

Пример 5.5

Построить эпюры Q и M для составной балки, нагруженной сосредоточенным моментом M и нагрузкой q , распределенной по закону треугольника, с максимальной ординатой $q = 6$ кН/м (рис. 5.10).

Решение

В защемлении (сечение A) возникают вертикально направленная реакция A_y и момент M_A , а в шарнирной опоре D – реакция D_y .

Опорные реакции определяются из уравнения равновесия

$$\sum M_C^{\text{пр}} = -D_y \cdot 2,7 + \frac{q \cdot 2,7}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2,7 = 0,$$

откуда

$$D_y = 7,29 / 2,7 = 2,7 \text{ кН.}$$

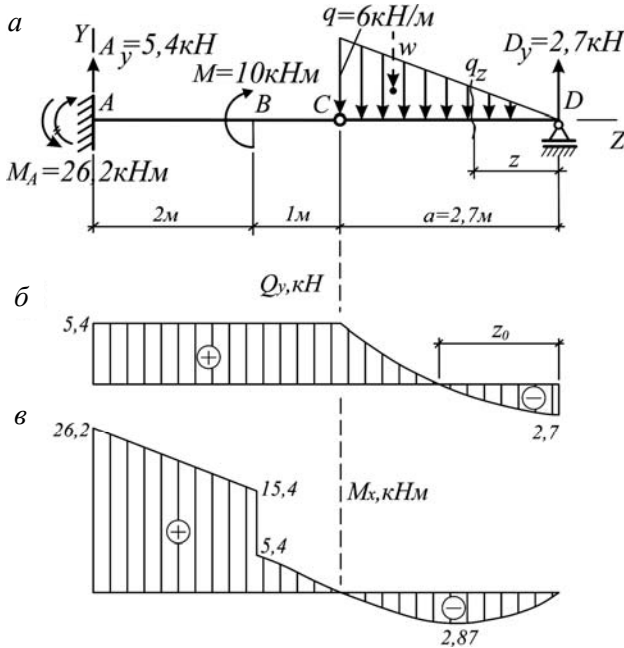


Рис. 5.10

При определении реакции распределенная нагрузка была заменена равнодействующей, которая равна площади этой нагрузки (треугольника) $\omega = 0,5qa$ и приложена в центре тяжести.

Плечо равнодействующей относительно сечения C равно $\frac{a}{3}$:

$$\sum M_A = M_A + M - D_y 5,7 + \frac{q 2,7}{2} \left(2 + 1 + \frac{2,7}{3} \right) = 0,$$

откуда $M_A = -26,2$ кН·м.

$$\sum M_C^{\text{лев}} = A_y 3 - M_A + M = 0,$$

откуда $A_y = 5,4$ кН.

Проверка:

$$\sum Y = 5,4 + 2,7 - \frac{6 \cdot 2,7}{2} = 8,1 - 8,1 = 0 \text{ — реакции найдены верно.}$$

Определяем внутренние силы (Q и M) в характерных сечениях балки.

Ход слева.

Сечение A :

$$Q = A_y = 5,4 \text{ кН};$$

$$M = -M_A = -26,2 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Сечение B :

$$Q = A_y = 5,4 \text{ кН};$$

$$M^{\text{лев}} = -M_A + A_y \cdot 2 = -26,2 + 5,4 \cdot 2 = -15,4 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M^{\text{пр}} = -M_A + M = -26,2 + 5,4 \cdot 2 + 10 = -5,4 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Сечение C :

$$Q = A_y = 5,4 \text{ кН};$$

$$M = -M_A + A_y \cdot 3 + M = -26,2 + 5,4 \cdot 3 + 10 = 0.$$

Для участка балки CD , где нагрузка носит сложный характер, составим подробные выражения для Q и M .

Ход справа:

$$Q = -D_y + \frac{q_z z}{2}; \quad M = D_y z - \frac{q_z z}{2} \cdot \frac{1}{3} z.$$

Ординату распределенной нагрузки q_z найдем из подобия треугольников (нагрузочного и отсеченного):

$$\frac{q}{a} = \frac{q_z}{z},$$

откуда

$$q_z = \frac{qz}{a}.$$

С учетом ординаты нагрузки q_z получим

$Q = -D_y + \frac{qzz}{2a} = -D_y + \frac{qz^2}{2a}$ – поперечная сила изменяется по квадратической параболе, обращенной выпуклостью вниз;

$M = D_y z - \frac{qzz}{2a} \cdot \frac{1}{3} z = D_y z - \frac{qz^3}{6a}$ – изгибающий момент изменяется по кубической параболе, выпуклостью вниз.

Чтобы установить направленность выпуклости эпюры, следует определить значения Q и M еще в одном сечении участка балки (лучше посередине).

Вычисляем значения Q и M на участке CD .

При $z = 0$

$$Q = -D_y = -2,7 \text{ кН}, \quad M = 0.$$

При $z = 2,7$ м

$$Q = -2,7 + \frac{6 \cdot 2,7^2}{2 \cdot 2,7} = 5,4 \text{ кН};$$

$$M = 2,7 \cdot 2,7 - \frac{6 \cdot 2,7^3}{6 \cdot 2,7} = 0.$$

Эпюры Q и M показаны на рис. 5.10, б, в.

Для отыскания сечения, в котором $Q = 0$, нужно приравнять ее выражение нулю:

$$Q_{(z_0)} = -2,7 + \frac{6z_0^2}{2 \cdot 2,7} = 0,$$

откуда $z_0 = 1,56$ м.

При $z = z_0 = 1,56$ м максимальный изгибающий момент в этом сечении балки

$$M_{\max} = 2,7 \cdot 1,56 - \frac{6 \cdot 1,56^3}{6 \cdot 2,7} = 2,8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Из построенных эпюр внутренних сил следует, что $Q_{\max} = 5,4 \text{ кН}$, $M_{\max} = 26,2 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

5.2. Напряжения при изгибе. Условия прочности

Как было отмечено выше, в общем случае нагружения балки в ее поперечных сечениях возникают изгибающий момент M_x и поперечная сила Q_y или в частном случае – только изгибающий момент (при чистом изгибе).

Принято считать, что при чистом изгибе поперечное сечение, плоское до деформации, остается плоским и после деформации (гипотеза плоских сечений). Предполагается, что продольные волокна балки не давят друг на друга, но каждое из них претерпевает простое растяжение или сжатие.

При изгибе продольные волокна балки принимают криволинейное очертание. При этом с выпуклой стороны они удлиняются (растягиваются), а с вогнутой – укорачиваются (сжимаются) (см. рис. 5.4). Существует промежуточный слой волокон, который не деформируется – это нейтральный слой. В поперечном сечении он проходит через центр тяжести сечения, совпадает с главной центральной осью и называется нейтральной осью (н.о.) или нулевой линией (н.л.). Нейтральная ось делит поперечное сечение балки на две части – растянутую и сжатую.

Поскольку волокна балки при чистом изгибе ($Q_y = 0, M_x \neq 0$) испытывают простое растяжение или сжатие, в них возникают нормальные напряжения σ , действующие перпендикулярно поперечному сечению (рис. 5.11, а).

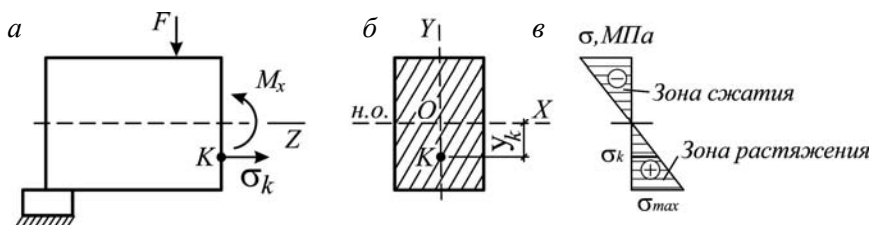


Рис. 5.11

Нормальные напряжения σ в любой точке поперечного сечения балки определяются по следующей формуле:

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y, \quad (5.1)$$

где M_x – изгибающий момент в сечении балки;

J_x – момент инерции сечения относительно нейтральной оси;

y – расстояние от рассматриваемой точки до нейтральной оси.

Напряжение σ зависит от величины y линейно, поэтому эпюра нормальных напряжений прямолинейна (рис. 5.11, в). Максимальные нормальные напряжения появляются в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси.

Знак нормальных напряжений устанавливается по смыслу: «+ σ » – если точка расположена в растянутой зоне сечения и «- σ » – если в сжатой. Характер деформации зоны сечения устанавливается по эпюре M_x .

При поперечном изгибе ($Q_y \neq 0, M_x \neq 0$) характер деформации волокон балки несколько изменяется: отдельные волокна сдвигаются относительно друг друга, отчего поперечные сечения слегка искривляются, т. е. гипотеза плоских сечений нарушается.

Поскольку влияние указанных изменений на величину нормальных напряжений невелико, формула (5.1), полученная для случая чистого изгиба, используется и при поперечном изгибе.

Так как при поперечном изгибе волокна балки претерпевают сдвиг, в ее сечении возникают касательные напряжения τ , которые лежат в плоскости сечения (рис. 5.12, а) и в любой его точке определяются по формуле Журавского:

$$\tau = \frac{Q_y S_x}{J_x b}, \quad (5.2)$$

где Q_y – поперечная сила в сечении балки;

S_x – статический момент части площади сечения, расположенной выше или ниже рассматриваемого слоя, относительно нейтральной оси; равен произведению отсеченной площади на расстояние от центра тяжести этой площади до нейтральной оси;

J_x – момент инерции всего сечения относительно нейтральной оси;
 b – ширина сечения на уровне точки, в которой определяется напряжение.

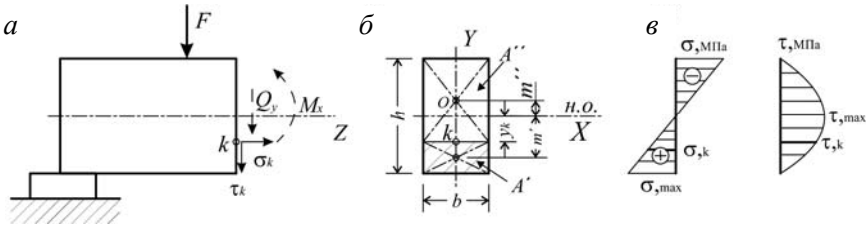


Рис. 5.12

Для произвольной точки K (рис. 5.12, б), расположенной на расстоянии y_K от нейтральной оси, статический момент

$$S_x = A'm' \quad \text{или} \quad S_x = A''m''.$$

Считается, что касательные напряжения τ распределяются по ширине сечения равномерно. По высоте сечения τ изменяются по закону параболы (рис. 5.12, в). Наибольшее касательное напряжение появляется на нейтральной оси, проходящей через центр тяжести сечения. В крайних точках сечения $\tau = 0$, так как для этих точек $S_x = 0$.

Следует обратить внимание, что напряжение τ достигает максимума в тех точках сечения, где напряжение $\sigma = 0$, а напряжение σ достигает максимума в тех точках, где $\tau = 0$. Поэтому материал балки в различных точках по высоте сечения находится в разных напряженных состояниях.

Рассмотрим тавровое поперечное сечение (рис. 5.13).

В крайних точках поперечного сечения $\tau = 0$, $\sigma = \sigma_{\max}$. Материал балки здесь находится в условиях линейного напряженного состояния (рис. 5.13, з) и условие прочности имеет вид $\sigma_{\max} \leq R$.

На нейтральной оси поперечного сечения $\sigma = 0$, $\tau = \tau_{\max}$. Здесь материал испытывает чистый сдвиг (рис. 5.13, в), являющийся частным случаем плоского напряженного состояния, и условие прочности записывается в виде $\tau_{\max} \leq R_s$.

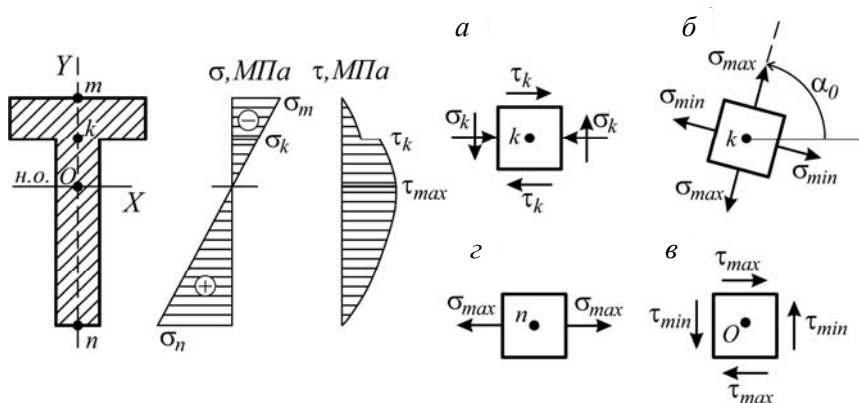


Рис. 5.13

Во всех остальных точках поперечного сечения изгибаемого стержня, где $\sigma \neq 0$ и $\tau \neq 0$, имеет место общий случай плоского напряженного состояния (рис. 5.13, а, б) и проверку прочности следует вести по теориям прочности.

Для большинства случаев проверка прочности балок проводится отдельно по нормальным σ и отдельно по касательным τ напряжениям.

Условие прочности по нормальным напряжениям имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x \max}}{J_x} y_{\max} \leq R, \quad (5.3)$$

где $M_{x \max}$ – максимальный изгибающий момент в балке;

J_x – момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси;

y_{\max} – ордината точки сечения, наиболее удаленной от нейтральной оси;

R – расчетное сопротивление материала балки растяжению (сжатию).

Для балок, поперечные сечения которых симметричны относительно нейтральной оси, условие прочности по нормальным напряжениям целесообразно использовать в виде

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x\max}}{W_x} \leq R, \quad (5.4)$$

где W_x – момент сопротивления сечения относительно нейтральной оси.

Момент сопротивления сечения W_x характеризует сопротивляемость балки изгибу и зависит только от формы и размеров поперечного сечения.

Для прямоугольного сечения

$$W_x = \frac{bh^2}{6},$$

для круглого

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32}.$$

Для прокатных профилей (двутавр, швеллер) значения W_x приведены в таблицах сортамента.

Отклонение максимального нормального напряжения от расчетного сопротивления не должно превышать $\pm 5\%$. При подборе сечений балок из прокатных профилей допускаются и более значительные отклонения в сторону уменьшения σ_{\max} .

Проверку прочности балок, изготовленных из хрупкого материала, ведут по растягивающим напряжениям, так как расчетное сопротивление растяжению меньше, чем сжатию ($R < R_{сж}$). Однако следует проверять и сжимающие напряжения.

Условие прочности по касательным напряжениям имеет вид

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{y\max} S_{x\max}}{J_x b} \leq R_s, \quad (5.5)$$

где $Q_{y\max}$ – максимальная поперечная сила в балке;

$S_{x\max}$ – статический момент относительно нейтральной оси части площади сечения, расположенной от нейтральной оси до края сечения;

J_x – момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси;

b – ширина поперечного сечения балки у нейтрального слоя;

R_s – расчетное сопротивление материала балки сдвигу.

В сопротивлении материалов принято, что касательные напряжения во всех точках прямоугольного поперечного сечения параллельны силе Q_y . В действительности для некоторых других форм сечений (круг, двутавр, швеллер) по контуру сечения и в крайних точках его направление τ несколько изменяется.

Поскольку максимальные касательные напряжения (по которым ведется проверка прочности) расположены на нейтральной оси, где τ параллельны Q , формула (5.5) применима практически для всех типов сечений.

Для отдельных форм сечения балок (двутавр, швеллер, тавр) и в отдельных случаях нагружения (короткая балка, большая нагрузка вблизи опор) возникает необходимость проверить прочность не в крайних точках сечения и не на нейтральной оси, а в некоторой промежуточной точке, например K , где одновременно действуют и нормальные σ и касательные τ напряжения (см. рис. 5.13), т. е. произвести полную проверку прочности.

По граням прямоугольного элемента, выделенного вокруг т. K , действует система напряжений: по поперечным сечениям σ и τ , по продольным – только τ (по закону парности касательных напряжений) (см. рис. 5.13, a).

При некотором положении прямоугольного элемента (под углом α_0 к нейтральной оси) по его граням касательные напряжения станут равными нулю ($\tau = 0$), а нормальные σ достигнут экстремальных (максимальных или минимальных) значений (см. рис. 5.13, b), которые называются *главными напряжениями* и определяются по формуле

$$\sigma_{\min}^{\max} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \quad (5.6)$$

где σ и τ – напряжения в поперечном сечении, определяемые по формулам (5.1) и (5.2).

Положение главных площадок (направление главных напряжений) определяется по формуле

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau}{\sigma},$$

где угол α_0 отсчитывается от направления нейтральной оси. Положительные значения – против хода часовой стрелки.

По площадкам, образующим с главными площадками угол 45° (рис. 5.13, в), действуют максимальные касательные напряжения

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Для полной проверки прочности балки сначала по эпюрам Q_y и M_x находится сечение, в котором оба их значения одновременно возможно большие. Это будет опасное сечение. Далее по высоте сечения выбирается точка, в которой одновременно значения σ и τ также возможно большие. Это будет опасная точка сечения. Для прямоугольного сечения эта точка не явна. Для сечений типа двутавр, швеллер, тавр опасная точка – точка соединения стенки с полкой.

Полная проверка прочности балки проводится по гипотезам прочности.

Для пластического материала, например, по четвертой (энергетической) теории, условие прочности имеет вид

$$\sigma_{\text{des}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq R, \quad (5.7)$$

где σ_{des} – приведенное напряжение;

σ, τ – напряжения в проверяемой точке сечения.

Рациональной формой сечения балки будет та, при которой обеспечена прочность при малом весе. В большинстве случаев потеря прочности связана с нормальными напряжениями. Из эпюры σ (см. рис. 5.12, 5.13) видно, что материал у нейтральной оси напряжен слабо. Поэтому часть материала можно «перенести» от нейтральной оси к краям сечения, где напряжения большие и где материал будет использоваться полнее. Чем дальше от нейтральной оси расположены частицы сечения, тем больше будет момент сопротивления W_x .

Экономичность поперечного сечения балки можно оценить отношением $\omega_x = \frac{W_x}{\sqrt{A^3}}$: чем больше это отношение, тем экономичнее сечение.

Для пластичных материалов (сталь) рациональной является форма двутавра.

Для хрупких материалов (чугун), у которых сопротивление сжатию больше, чем растяжению, рациональным является такой тип сечения, у которого нейтральная ось сдвинута в сторону растянутых волокон. Это тавровое сечение.

Практика показала, что в большинстве случаев расчет балок на прочность ведется по нормальным напряжениям для крайних точек сечения по условию

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x \max}}{W_x} \leq R.$$

По этому условию можно решить три типа задач:

- проверить прочность σ_{\max} при заданной форме и размерах сечения;
- подобрать размеры поперечного сечения (через W_x) при принятой форме сечения;
- определить наибольшую допустимую нагрузку (через $M_{x \max}$) при известной форме и размерах поперечного сечения.

Пример 5.6

Определить значения нормальных и касательных напряжений в точке K деревянной балки (рис. 5.14). Проверить прочность балки по этим напряжениям и построить их эпюры.

Расчетные сопротивления материала балки $R = 15$ МПа, $R_s = 2$ МПа.

Решение

Определяем опорные реакции:

$$\sum M_A = -B_y \cdot 5 + 15 \cdot 2 + 4 = 0, \quad B_y = 6,8 \text{ кН},$$

$$\sum M_B = A_y \cdot 5 - 15 \cdot 3 + 4 = 0, \quad A_y = 8,2 \text{ кН},$$

$$\sum Y = 8,2 - 15 + 6,8 = 0 \text{ (проверка)}.$$

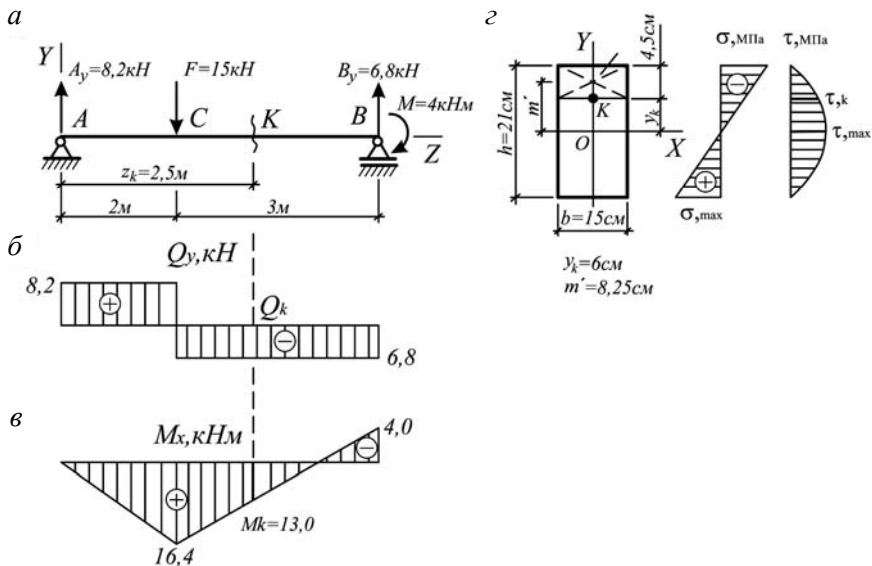


Рис. 5.14

Вычислим значения Q и M для характерных сечений балки и построим их эпюры (рис. 5.14, б и в).

Сечение А:

$$Q = A_y = 8,2 \text{ кН}, \quad M = 0.$$

Сечение С:

$$Q^I = A_y = 8,2 \text{ кН}, \quad M = A_y \cdot 2 = 8,2 \cdot 2 = 16,4 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

$$Q^{II} = A_y - F = 8,2 - 15 = -6,8 \text{ кН}.$$

Сечение В:

$$Q = -B_y = -6,8 \text{ кН}, \quad M = -4 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Определим напряжения в точке К. В сечении балки, где расположена эта точка, $Q = 6,8 \text{ кН}$,

$$M = 8,2 \cdot 2,5 - 15 \cdot (2,5 - 2) = 13 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Для определения нормального напряжения воспользуемся формулой (5.5).

По модулю

$$\sigma_K = \frac{M_x}{J_x} y_K = \frac{13 \cdot 10^3}{11576 \cdot 10^{-8}} \cdot 6 \cdot 10^{-2} = 0,00674 \cdot 10^9 \text{ Па} = 6,74 \text{ МПа.}$$

Для прямоугольного сечения балки момент инерции относительно нейтральной оси

$$J_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{15 \cdot 21^3}{12} = 11576 \text{ см}^4.$$

Для установления знака вычисленного напряжения нужно обратиться к эпюре M_x . В сечении, где расположена точка K , ординаты эпюры лежат снизу от оси эпюры. Это значит, что волокна балки, лежащие ниже продольной оси, растянуты, а выше – сжаты. Так как точка K расположена в сжатой зоне сечения балки, напряжению в ней присваивается знак «минус» ($\sigma_K = -6,74$ МПа).

Значение касательного напряжения в заданной точке вычислим по формуле (5.2):

$$\tau_K = \frac{Q_y S_x^K}{J_x b} = \frac{6,8 \cdot 10^3 \cdot 557 \cdot 10^{-6}}{11576 \cdot 10^{-8} \cdot 15 \cdot 10^{-2}} = 0,218 \text{ МПа.}$$

Статический момент части площади сечения, расположенной выше точка K :

$$S_x^K = A' m' = 15 \cdot 4,5 \cdot (6 + 4,5/2) = 557 \text{ см}^3.$$

Касательному напряжению присваивается знак поперечной силы ($\tau_K = -0,218$ МПа).

Проверка прочности балки производится по максимальным значениям Q_y и M_x . В данном примере $Q_{y \max} = 8,2$ кН, $M_{x \max} = 16,4$ кН·м.

Заметим, что максимальные значения внутренних сил могут быть в одном или в разных сечениях.

Проверку прочности по нормальным напряжениям проведем по формуле (5.3):

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x \max}}{J_x} y_{\max} = \frac{16,4 \cdot 10^3}{11576 \cdot 10^{-8}} \cdot \frac{21}{2} \cdot 10^{-2} =$$
$$= 0,0149 \cdot 10^9 \text{ Па} = 14,9 \text{ МПа} < R = 15 \text{ МПа}.$$

Эти напряжения появляются в крайних точках сечения. На нейтральной оси, где $y = 0$, нормальные напряжения равны нулю: $\sigma = 0$.

Проверку прочности по касательным напряжениям проведем по формуле (5.5):

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{y \max} S_{x \max}}{b J_x} = \frac{8,2 \cdot 10^3 \cdot 827 \cdot 10^{-6}}{15 \cdot 10^{-2} \cdot 11576 \cdot 10^{-8}} =$$
$$= 0,0391 \cdot 10^7 \text{ Па} = 0,39 \text{ МПа} < R_s = 2 \text{ МПа}.$$

Статический момент на уровне нейтральной оси

$$S_{x \max} = \frac{h}{2} b \frac{h}{4} = \frac{21}{2} \cdot 15 \cdot \frac{21}{4} = 827 \text{ см}^3.$$

Максимальные касательные напряжения появляются в точках на нейтральной оси сечения балки. В крайних точках сечения, где $S_x = 0$, касательные напряжения равны нулю: $\tau = 0$.

Таким образом, условия прочности балки по нормальным и касательным напряжениям выполняются.

Закономерность распределения нормальных и касательных напряжений по высоте сечения, т. е. их эпюры, показана на рис. 5.14, з.

Пример 5.7

Подобрать размеры нижеобозначенных форм сечений балки и сопоставить коэффициенты их экономичности. Для прямоугольного сечения принять $h/b = 1,4$.

Расчетные сопротивления материала балки $R = 210 \text{ МПа}$, $R_y = 130 \text{ МПа}$ (рис. 5.15).

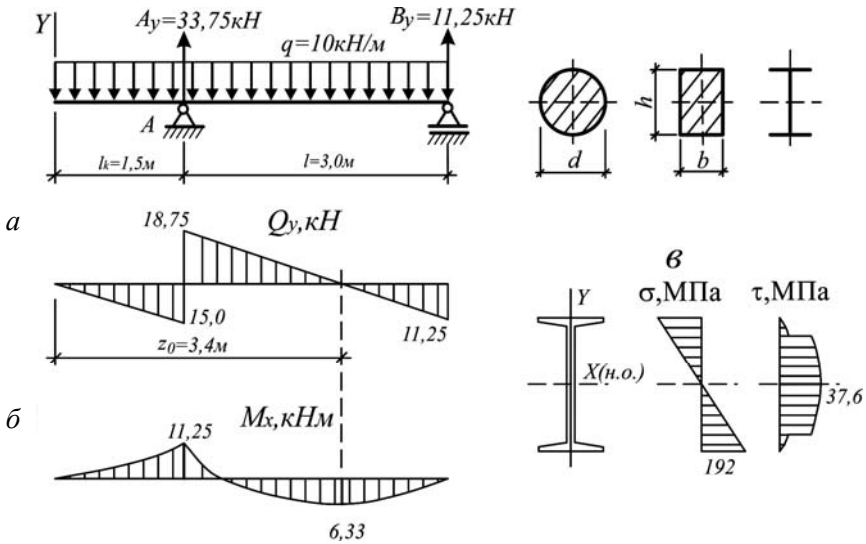


Рис. 5.15

Решение

Определяем опорные реакции:

$$\sum M_A = -B_y l + \frac{q l^2}{2} - \frac{q l_K^2}{2} = -B_y \cdot 3 + \frac{10 \cdot 3^2}{2} - \frac{10 \cdot 1.5^2}{2} = 0;$$

$$B_y = 11,25 \text{ кН.}$$

$$\sum M_B = -\frac{q(l + l_K)^2}{2} + A_y l = -\frac{10(3 + 1,5)^2}{2} + A_y \cdot 3 = 0;$$

$$A_y = 33,75 \text{ кН.}$$

$\sum Y = A_y - q(l + l_K) + B_y = 33,75 - 10(3 + 1,5) + 11,25 = 0$ – реакции определены верно.

Вычислим значения Q и M в характерных сечениях балки и построим их эпюры (рис. 5.15, а, б).

Сечение С:

$$Q = 0, \quad M = 0.$$

Сечение А:

$$Q^{\text{II}} = -10 \cdot 1,5 = -15 \text{ кН};$$

$$Q^{\text{I}} = -10 \cdot 1,5 + 33,75 = 18,75 \text{ кН};$$

$$M = -10 \cdot 1,5 \cdot 1,5/2 = -11,25 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Сечение В:

$$Q^{\text{II}} = 33,75 - 10 \cdot 4,5 = -11,25 \text{ кН}, \quad M = 0.$$

Абсцисса z_0 , где $Q = 0$, будет

$$z_0 = 1,5 + \frac{Q_A^{\text{II}}}{q} = 1,5 + \frac{18,75}{10} = 3,4 \text{ м}.$$

При $z = 3,4$ м

$$M = -10 \cdot 3,4^2/2 + 33,75(3,4 - 1,5) = 6,33 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Подбор сечений ведется по формуле (5.4), исходя из $M_{x \text{ max}} = 11,25 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Требуемый момент сопротивления

$$W_x \geq \frac{M_{x \text{ max}}}{R} = \frac{11,25 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 0,054 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 54 \text{ см}^3.$$

Для круглого поперечного сечения

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32} = 54 \text{ см}^3,$$

откуда $d = \sqrt[3]{\frac{54 \cdot 32}{3,14}} = 8,19 \text{ см}$, принимаем $d = 8,5 \text{ см}$.

Для прямоугольного сечения

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(1,4b)^2}{6} = 54 \text{ см}^3,$$

откуда $b = 5,49 \text{ см}$, $h = 7,68 \text{ см}$.

Конструктивно принимаем $h = 8 \text{ см}$, $b = 5,5 \text{ см}$.

Для прокатного профиля из сортамента по $W_x = 54 \text{ см}^3$ принимаем двутавр № 12 с $W_x = 58,4 \text{ см}^3$, $A = 14,7 \text{ см}^2$.

Вычислим коэффициенты экономичности для принятых размеров сечений балки по выражению

$$\omega_x = \frac{W_x}{\sqrt{A^3}}.$$

Для круглого сечения

$$W_x = \frac{3,14 \cdot 8,5^3}{32} = 60,3 \text{ см}^3;$$

$$A = \frac{3,14 \cdot 8,5^2}{4} = 56,7 \text{ см}^2,$$

$$\omega_x = 0,141.$$

Для прямоугольного сечения

$$W_x = \frac{5,5 \cdot 8^2}{6} = 58,7 \text{ см}^3;$$

$$A = 5,5 \cdot 8 = 44 \text{ см}^2,$$

$$\omega_x = 0,201.$$

Для двутавра $W_x = 58,4 \text{ см}^3$, $A = 14,7 \text{ см}^2$, $\omega_x = 1,036$.

Из рассмотренных форм сечений балки наиболее экономичным является двутавр.

Вычислим максимальные значения нормальных и касательных напряжений для принятых размеров сечений балки.

Нормальные напряжения (максимальны в крайних точках сечений):

а) круглое сечение

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x \max}}{W_x} = \frac{11,25 \cdot 10^3}{60,3 \cdot 10^{-6}} = 187 \text{ МПа} < R = 210 \text{ МПа};$$

б) прямоугольное сечение

$$\sigma_{\max} = \frac{11,25 \cdot 10^3}{58,7 \cdot 10^{-6}} = 192 \text{ МПа} < R = 210 \text{ МПа};$$

в) для двутавра

$$\sigma_{\max} = \frac{11,25 \cdot 10^3}{58,4 \cdot 10^{-6}} = 193 \text{ МПа} < R = 210 \text{ МПа}.$$

Касательные напряжения (максимальны на уровне нейтральной оси):

а) круглое сечение

$$S_{x \max} = \frac{\pi d^2}{8} \cdot 0,212d = \frac{3,14 \cdot 8,5^2}{8} \cdot 0,212 \cdot 8,5 = 51,10 \text{ см}^3;$$

$$J_x = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3,14 \cdot 8,5^4}{64} = 256,11 \text{ см}^4; \quad b = d;$$

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{y \max} S_{x \max}}{b J_x} = \frac{18,75 \cdot 10^3 \cdot 51,10 \cdot 10^{-6}}{8,5 \cdot 10^{-2} \cdot 256,11 \cdot 10^{-8}} =$$

$$= 4,40 \text{ МПа} < R_s = 130 \text{ МПа}.$$

Для круглого сечения $S_{x \max} = A'm'$, где половина площади сечения $A' = \frac{\pi d^2}{8}$, а расстояние от центра тяжести до ее нейтральной оси $m' = 0,212 d$;

б) прямоугольное сечение

$$S_{x \max} = b \frac{h}{2} \frac{h}{4} = 5,5 \cdot \frac{8,0}{2} \cdot \frac{8,0}{4} = 44 \text{ см}^3;$$

$$J_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{5,5 \cdot 8,0^3}{12} = 234,67 \text{ см}^4;$$

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{Q_{y \max} S_{y \max}}{bJ_x} = \frac{18,75 \cdot 10^3 \cdot 44 \cdot 10^{-6}}{5,5 \cdot 10^{-2} \cdot 234,67 \cdot 10^{-8}} = \\ &= 6,38 \text{ МПа} < R_s = 130 \text{ МПа}; \end{aligned}$$

в) для двутавра № 12 $J_x = 350 \text{ см}^4$, $S_{x \max} = 33,7 \text{ см}^3$, $d = 4,8 \text{ мм}$ (толщина стенки)

$$b = d;$$

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{Q_{y \max} S_{x \max}}{bJ_x} = \frac{18,75 \cdot 10^3 \cdot 33,7 \cdot 10^{-6}}{4,8 \cdot 10^{-3} \cdot 350 \cdot 10^{-8}} = \\ &= 37,61 \text{ МПа} < R_s = 130 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

По полученным значениям σ и τ для двутавра построены соответствующие эпюры (рис. 5.15, в) с учетом того, что на нейтральной оси сечения $\sigma = 0$, а в крайних точках сечения $\tau = 0$.

Проанализировав значения τ_{\max} для рассмотренных форм сечений (а это наиболее распространенные), заметим: если размеры сечений определены из условия прочности по нормальным напряжениям, то максимальные касательные напряжения значительно меньше не достигают предельно допустимых значений.

Пример 5.8

Расположив сечение чугунной балки (рис. 5.16) рационально по отношению к нагрузке, определить ее наибольшее допустимое значение, если расчетное сопротивление на растяжение $R_t = 50$ МПа, а сопротивление на сжатие $R_c = 140$ МПа. Построить эпюры σ и τ .

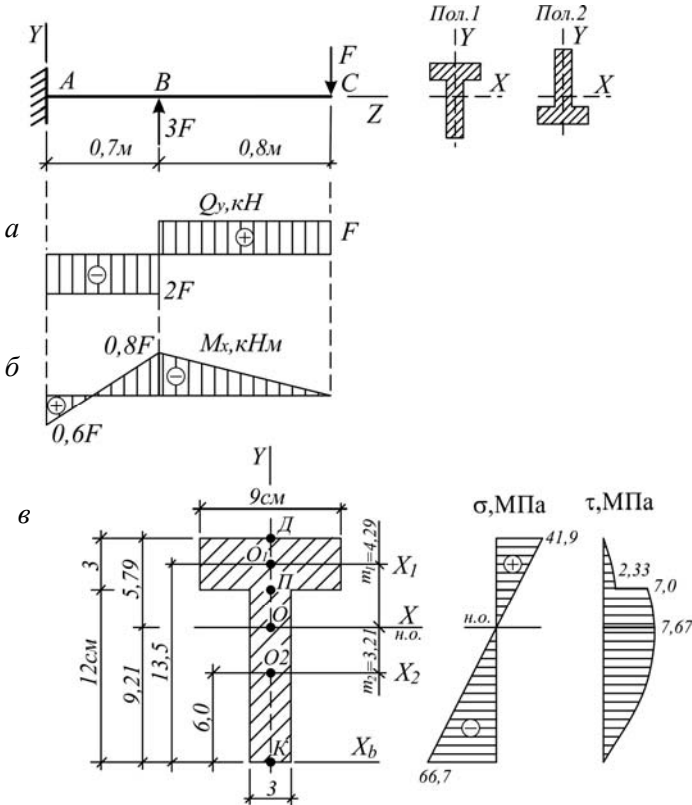


Рис. 5.16

Решение

Для вычисления значений Q и M будем намечать сечения, начиная с правого (свободного) конца балки (ход справа). При этом не требуется определять реакции в опоре балки. Составим выражения для $Q = f(F)$, $M = f(F)$.

Сечение С:

$$Q = F, \quad M = 0.$$

Сечение В:

$$Q^{\text{II}} = F, \quad Q^{\text{I}} = F - 3F = -2F, \quad M = -0,8F.$$

Сечение А:

$$Q = F - 3F = -2F,$$

$$M = -1,5F + 3F \cdot 0,7 = 0,6F.$$

Определим геометрические характеристики сечения балки. Разделим сложное сечение на два прямоугольника.

Положение центра тяжести сечения

$$y_0 = \frac{\sum S_{xB}}{\sum A} = \frac{9 \cdot 3 \cdot 13,5 + 3 \cdot 12 \cdot 6}{9 \cdot 3 + 3 \cdot 12} = 9,21 \text{ см.}$$

Осевой момент инерции

$$J_x = \sum (J_{xi} + A_i m_i^2) = \frac{9 \cdot 3^3}{12} + 9 \cdot 3 \cdot 4,29^2 + \frac{3 \cdot 12^3}{12} + 3 \cdot 12 \cdot 3,21^2 = 1320 \text{ см}^4,$$

где $m_1 = 13,5 - y_0 = 13,5 - 9,21 = 4,29$ см;

$$m_2 = 6,0 - y_0 = 6,0 - 9,21 = -3,21 \text{ см.}$$

Статический момент части сечения, расположенной ниже нейтральной оси:

$$S_{x(O)} = 3 \cdot 9,21 \cdot 9,21/2 = 127 \text{ см}^3.$$

Статический момент части сечения, расположенной выше места соединения полки и стенки, относительно нейтральной оси (точка II):

$$S_{x(\text{II})} = 9 \cdot 3 \cdot 4,29 = 116 \text{ см}^3.$$

Наибольшую допустимую нагрузку на балку определим из условия прочности по нормальным напряжениям (5.3), учитывая разные значения расчетного сопротивления.

Опасным является сечение B , где $M_{x \max} = 0,8 F$. В этом сечении верхние от нейтральной оси волокна растянуты (так как ординаты эпюры M лежат сверху), а нижние – сжаты.

Поскольку хрупкий материал балки лучше работает на сжатие, чем на растяжение, сечение нужно расположить так, чтобы в точке K были сжимающие напряжения, а в точке D , где сечение шире, – растягивающее. Это положение 1.

Рассматриваем принятое положение сечения (полкой вверх).

Из формулы (5.3) наибольший изгибающий момент:

по растягивающим напряжениям

$$M_{x \max} \leq \frac{R_t J_x}{y_D} = \frac{50 \cdot 10^6 \cdot 1320 \cdot 10^{-8}}{5,79 \cdot 10^{-2}} = 11399 \text{ Н} \cdot \text{м} = 11,4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

сжимающим напряжениям

$$M_{x \max} \leq \frac{R_c J_x}{y_K} = \frac{140 \cdot 10^6 \cdot 1320 \cdot 10^{-8}}{9,21 \cdot 10^{-2}} = 20,1 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Чтобы обеспечить выполнение условий прочности по растягивающим и сжимающим напряжениям, в качестве наибольшего допустимого следует принять меньшее значение изгибающего момента $M_x = 11,4 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Наибольшую допустимую нагрузку на балку определим из равенства

$$M_{x \max} = 0,8F = 11,4 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

откуда $F = 14,25 \text{ кН}$.

Следует проверить прочность по нормальным напряжениям в сечении A при принятом положении сечения балки и значении нагрузки $F = 14,25 \text{ кН}$.

В сечении A

$$M_x = 0,6;$$

$$F = 0,6 \cdot 14,25 = 8,55 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

В точке D (сжатие)

$$\sigma_D = \frac{M_x}{J_x} y_D = \frac{8,55 \cdot 10^3}{1320 \cdot 10^{-8}} \cdot 5,79 \cdot 10^{-2} = 37,5 \text{ МПа} < R_c = 140 \text{ МПа}.$$

В точке K (растяжение)

$$\sigma_K = \frac{8,55 \cdot 10^3}{1320 \cdot 10^{-8}} \cdot 9,21 \cdot 10^{-2} = 59,7 \text{ МПа} > R_t = 50 \text{ МПа}.$$

Условие прочности по растягивающим напряжениям не выполняется. Значит, значение нагрузки F следует скорректировать (уменьшить).

Из условия прочности по растягивающим напряжениям (как наиболее опасным)

$$M_{x \max} \leq \frac{R_t J_x}{y_K} = \frac{50 \cdot 10^6 \cdot 1320 \cdot 10^{-8}}{9,21 \cdot 10^{-2}} = 7,17 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

но $M_x = 0,6F$, откуда $F = 11,95 \text{ кН}$.

Окончательно принимаем $F_{\text{adm}} = 11,95 \text{ кН}$.

Вычислим значения σ и τ , необходимые для построения эпюр напряжений. Для касательных напряжений опасным является сечение A , где

$$Q = 2F = 2 \cdot 11,95 = 23,9 \text{ кН},$$

для нормальных – сечение B , где

$$M_x = 0,8F = 0,8 \cdot 11,95 = 9,56 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Нормальные напряжения в характерных точках сечения B

$$\sigma_K = \frac{9,56 \cdot 10^3}{1320 \cdot 10^{-8}} \cdot 9,21 \cdot 10^{-2} = 0,0667 \cdot 10^9 \text{ Па} = 66,7 \text{ МПа (сжатие)},$$

$$\sigma_0 = 0, \quad \sigma_D = \frac{9,56 \cdot 10^3}{1320 \cdot 10^{-8}} \cdot 5,79 \cdot 10^{-2} = 41,9 \text{ МПа (растяжение)}.$$

Касательные напряжения в характерных точках сечения A (по формуле (5.2))

$$\tau_K = 0 \text{ (так как } S_{x(K)} = 0);$$

$$\tau_0 = \frac{QS_{x(0)}}{bJ_x} = \frac{23,9 \cdot 10^3 \cdot 127 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 10^{-2} \cdot 1320 \cdot 10^{-8}} = 0,766 \cdot 10^7 \text{ Па} = 7,66 \text{ МПа};$$

$$\tau_{II} = \frac{23,9 \cdot 10^3 \cdot 116 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 10^{-2} \cdot 1320 \cdot 10^{-8}} = 7,0 \text{ МПа};$$

$$\tau'_{II} = \frac{23,9 \cdot 10^3 \cdot 116 \cdot 10^{-6}}{9 \cdot 10^{-2} \cdot 1320 \cdot 10^{-8}} = 2,33 \text{ МПа};$$

$$\tau_D = 0 \text{ (так как } S_{x(D)} = 0).$$

Заметим, что в точке II ширина сечения изменяется скачкообразно. Вследствие этого также скачкообразно изменяется значение τ (на эпюре скачок).

Эпюры σ и τ приведены на рис. 5.16, *в*.

Расположив сечение балки полкой вниз (положение 2) и проделав аналогичные вычисления, получим меньшее значение допустимой нагрузки $F = 9,5 \text{ кН}$.

Пример 5.9

Определить главные напряжения в указанных точках балки (рис. 5.17) и установить вид напряженного состояния. Сечение балки – двутавр № 16.

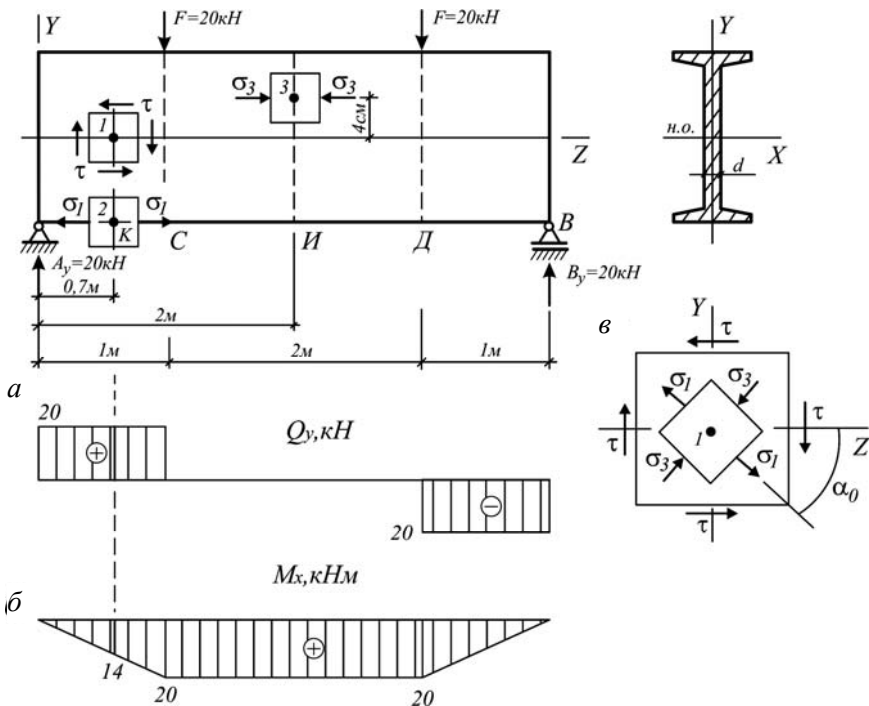


Рис. 5.17

Решение

Из таблицы сортамента для двутавра № 16:

$$W_x = 109 \text{ см}^3, J_x = 873 \text{ см}^4, S_x = 62,3 \text{ см}^3, d = 5 \text{ мм.}$$

Вследствие симметрии нагрузки опорные реакции

$$A_y = B_y = F = 20 \text{ кН.}$$

Эпюры Q и M показаны на рис. 5.17, а, б.

Заметим, что на участке СД балка подвергается чистому изгибу, так как на этом участке $Q = 0$.

В исследуемом сечении К

$$Q = 20 \text{ кН}, M = 20 \cdot 0,7 = 14 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Для определения главных напряжений по формулам (5.1) и (5.2) необходимо вычислить значения нормальных и касательных напряжений в исследуемых точках сечения, а по формуле (5.6) – главные напряжения.

В точке 1

$$\sigma = 0, \quad \tau = \frac{QS_{x(0)}}{dJ_x} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 62,3 \cdot 10^{-6}}{5 \cdot 10^{-3} \cdot 873 \cdot 10^{-8}} = 28,5 \text{ МПа.}$$

Экстремальные напряжения

$$\sigma_{\frac{\max}{\min}} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{4\tau^2} = \pm \tau,$$

$$\sigma_{\max} = \tau = 28,5 \text{ МПа, } \sigma_{\min} = -28,5 \text{ МПа.}$$

Главные напряжения $\sigma_1 = 28,5 \text{ МПа}$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -28,5 \text{ МПа}$.

В точке 1 балки имеет место плоское напряженное состояние, так как действуют два главных напряжения (σ_1 и σ_3).

Направление главных напряжений

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau}{\sigma} = -\frac{2 \cdot 28,5}{0} = -\infty, \quad 2\alpha_0 = -90^\circ, \quad \alpha_0 = -45^\circ.$$

Угол α_0 отсчитывается от продольной оси Z. Отрицательное значение – по ходу часовой стрелки (рис. 5.17, в).

В точке 2

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} = \frac{14 \cdot 10^3}{109 \cdot 10^{-6}} = 0,128 \cdot 10^9 \text{ Па} = 128 \text{ МПа, } \tau = 0;$$

$$\sigma_{\frac{\max}{\min}} = \frac{128}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{128^2} = 64 \pm 64, \quad \sigma_{\max} = 128 \text{ МПа, } \sigma_{\min} = 0.$$

$\sigma_1 = 128 \text{ МПа}$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 0$ – в точке 2 материал испытывает линейное напряженное состояние, так как действует только одно главное напряжение.

В сечении И балки $Q = 0$, $M = 20$ кН·м.
 В точке 3

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y = \frac{20 \cdot 10^3}{873 \cdot 10^{-8}} \cdot 4 \cdot 10^{-2} = 91,6 \text{ МПа (сжатие)}, \tau = 0.$$

$$\sigma_{\max} = -45,8 \pm 45,8; \quad \sigma_{\min} = -91,6 \text{ МПа}, \quad \sigma_{\max} = 0.$$

Главные напряжения $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -91,6$ МПа – в точке 3 материал испытывает линейное напряженное состояние.

Если на участке CD балки $Q \neq 0$ (что чаще имеет место), то в точке 3 материал испытывает плоское напряженное состояние.

Пример 5.10

Провести полную проверку прочности балки, состоящей из двух швеллеров № 22, если $R = 210$ МПа, $R_s = 130$ МПа (рис. 5.18).

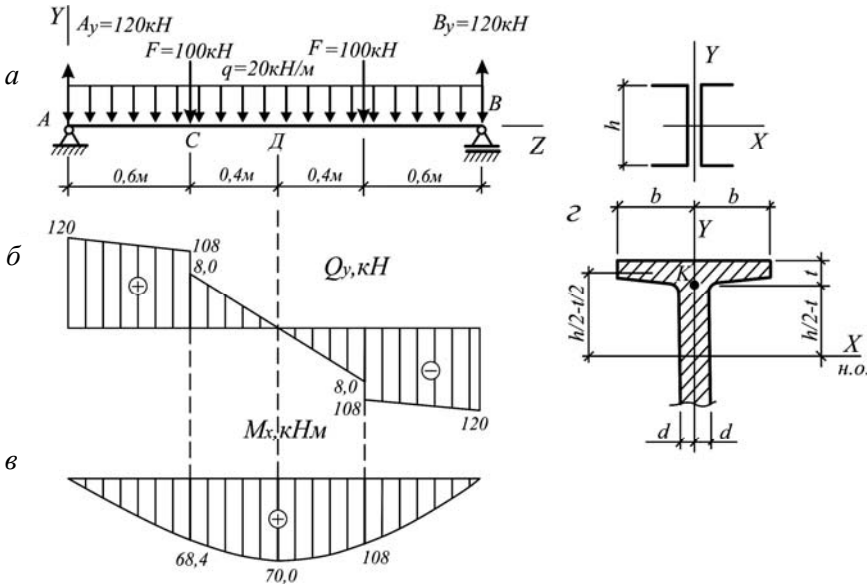


Рис. 5.18

Решение

Из таблицы сортамента для швеллера № 22:

$$h = 220 \text{ мм}, b = 82 \text{ мм}, d = 5,4 \text{ мм}, t = 9,5 \text{ мм},$$

$$J_x = 2110 \text{ см}^4, W_x = 192 \text{ см}^3, S_x = 110 \text{ см}^3.$$

Вследствие симметрии нагрузки опорные реакции $A_y = B_y = 120 \text{ кН}$.
Значения Q и M в характерных сечениях:

в сечении A

$$Q = 120 \text{ кН}, M = 0;$$

в сечении C

$$Q^I = 120 - 20 \cdot 0,6 = 108 \text{ кН},$$

$$Q^{II} = 120 - 100 - 20 \cdot 0,6 = 8 \text{ кН},$$

$$M = 120 \cdot 0,6 - 20 \cdot 0,6 \cdot 0,3 = 68,4 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

в сечении D

$$Q = 0, M = 70 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

В других сечениях Q и M определить самостоятельно.

Эпюры Q и M показаны на рис. 5.18, б, в.

Проверка прочности балки по нормальным напряжениям производится для сечения D , где M_x максимален:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x \max}}{W_x} = \frac{70 \cdot 10^3}{2 \cdot 192 \cdot 10^{-6}} = 182 \text{ МПа} < R = 210 \text{ МПа}.$$

Проверка прочности по касательным напряжениям производится для сечения A , где Q максимально:

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{Q_{y \max} S_x}{d J_x} = \frac{120 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 110 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 5,4 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 2110 \cdot 10^{-8}} = \\ &= 57,9 \text{ МПа} < R_s = 130 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Условия прочности балки по σ и τ выполняются.

Полная проверка прочности производится в сечении балки, где Q и M одновременно большие. В рассматриваемом примере опасное сечение C , где $Q = 108$ кН, $M = 68,4$ кН·м.

Опасной точкой, где проводится полная проверка прочности, для сечений типа двутавр, швеллер является точка сопряжения полки со стенкой (точка K). В этой точке – самое неблагоприятное сочетание напряжений σ и τ .

При вычислении статического момента на уровне точки K полку швеллера можно рассматривать как прямоугольник шириной b и высотой t (без учета скруглений и скоса):

$$S_{x(K)} = 2 \left(bt \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) \right);$$

$$S_{x(K)} = 2 \left(8,2 \cdot 0,95 \cdot \left(\frac{22}{2} - \frac{0,95}{2} \right) \right) = 164,0 \text{ см}^3.$$

Определяем нормальные и касательные напряжения в опасной точке K :

$$\sigma_K = \frac{68,4 \cdot 10^3}{2 \cdot 2110 \cdot 10^{-8}} \cdot \left(\frac{22}{2} - 0,95 \right) \cdot 10^{-2} = 0,163 \cdot 10^9 \text{ Па} = 163 \text{ МПа};$$

$$\tau_K = \frac{108 \cdot 10^3 \cdot 164,0 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 5,4 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 2110 \cdot 10^{-8}} = 0,389 \cdot 10^8 \text{ Па} = 38,9 \text{ МПа}.$$

По формуле (5.6) главные напряжения

$$\sigma_{\frac{\max}{\min}} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \frac{163}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{163^2 + 4 \cdot 38,9^2} = 81,5 \pm 90,3;$$

$$\sigma_{\max} = 171,8 \text{ МПа}, \quad \sigma_{\min} = -8,8 \text{ МПа}.$$

Следовательно, $\sigma_1 = 171,8$ МПа, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -8,8$ МПа.

В точке K материал испытывает плоское напряженное состояние, поэтому проверка прочности производится по гипотезам прочности.

Для стальной балки (пластичный материал) применима четвертая (энергетическая) теория прочности (формула (5.6)):

$$\sigma_{\text{des}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{163^2 + 3 \cdot 38,9^2} = 176,4 \text{ МПа} < R = 210 \text{ МПа}.$$

Условие прочности по четвертой теории выполняется.

5.3. Деформации при изгибе. Проверка на жесткость

Под действием нагрузки балка деформируется. Ось ее искривляется и при плоском изгибе представляет собой плавную плоскую кривую, называемую упругой линией (или осью изогнутой балки). При этом поперечные сечения балки претерпевают перемещения, преимущественно линейные ϑ (прогиб перпендикулярно оси балки) и угловые θ (угол поворота сечения относительно первоначального положения) (рис. 5.19). Перемещения вдоль оси Z незначительные и ими пренебрегают.

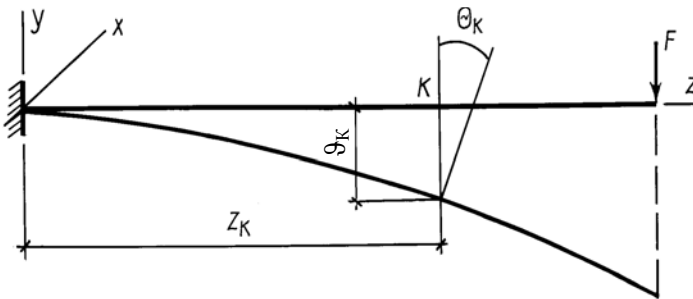


Рис. 5.19

Для определения перемещений балки необходимо получить уравнения ее упругой линии: $v = f(z)$, $\theta = f'(z)$.

Такие уравнения в дифференциальной форме составлены для случая чистого изгиба ($M_x \neq 0$, $Q_y = 0$). Поскольку влияние поперечной силы Q_y на величину перемещений незначительно, уравнения

считаются допустимыми и для случая поперечного изгиба, когда $M_x \neq 0$, $Q_y \neq 0$.

Для определения перемещений (θ , ϑ) в балке существует несколько методов.

1. Метод непосредственного интегрирования дифференциального уравнения упругой линии. Метод применяется для простых балок с одним или двумя участками нагружения.

2. Метод начальных параметров: используются универсальные уравнения упругой линии балки, пригодные для любых (по сложности нагрузок) балок и позволяющие определить перемещения в любых ее сечениях.

3. Метод Мора с непосредственным интегрированием формулы перемещений, а также с использованием правила Верещагина для решения интеграла Мора. Метод универсален, применим как для прямых, так и ломаных стержней, как при изгибе, так и других деформациях. Целесообразен для определения перемещений в конкретном сечении.

В настоящее время для определения перемещений в балках наиболее часто используются универсальные уравнения упругой линии, а также формула Мора и правило Верещагина.

Проверка жесткости балки сводится к требованию, по которому наибольший прогиб ϑ_{\max} не должен превышать определенной, установленной нормами проектирования, допустимой величины.

Обычно нормами задается допустимый относительный прогиб, т. е. максимальный прогиб, отнесенный к длине пролета (расстоянию между опорами).

В зависимости от назначения конструкции допустимый относительный прогиб в строительном проектировании колеблется в пределах

$$\left(\frac{\vartheta}{l}\right)_{\text{adm}} = \frac{1}{150} \dots \frac{1}{500}.$$

Условие жесткости при изгибе имеет вид

$$\frac{\vartheta_{\max}}{l} \leq \left(\frac{\vartheta}{l}\right)_{\text{adm}}, \quad (5.8)$$

где ϑ_{\max} – максимальный прогиб в пролете балки;

$\left(\frac{\vartheta}{l}\right)_{\text{adm}}$ – допустимый относительный прогиб.

Практически можно считать, что максимальный прогиб в пролетной части балки наблюдается посередине ее длины. Прогибы на консолях оговариваются отдельно.

5.3.1. Метод начальных параметров

За начало координатных осей выбирается крайнее левое сечение балки, а положительные направления их – вправо (Z) и вверх (Y) (рис. 5.20).

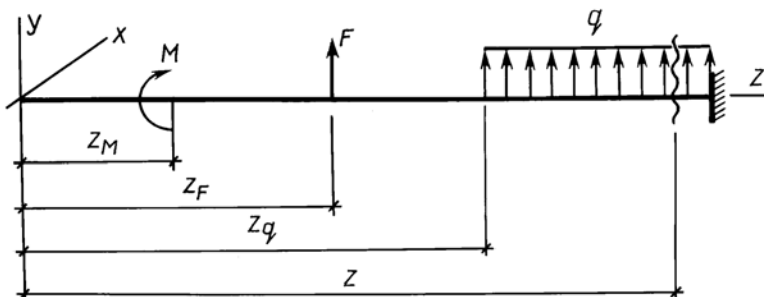


Рис. 5.20

Универсальными уравнениями оси изогнутой балки (упругой линии) являются:

уравнение углов поворота сечений

$$EJ_x \theta = EJ_x \theta_0 + \sum M(z - z_M) + \sum F \frac{(z - z_F)^2}{2} + \sum q \frac{(z - z_q)^3}{6}; \quad (5.9)$$

уравнение прогибов

$$EJ_x \vartheta = EJ_x \vartheta_0 + EJ_x \theta_0 z + \sum M \frac{(z - z_M)^2}{2} + \sum F \frac{(z - z_F)^3}{6} + \sum q \frac{(z - z_q)^4}{24}, \quad (5.10)$$

где E – модуль продольной упругости материала балки;

J_x – момент инерции сечения балки относительно нейтральной оси;

θ – угол поворота исследуемого сечения балки;

θ_0 – угол поворота сечения в начале координатных осей (начальный параметр);

ϑ – прогиб в исследуемом сечении балки;

ϑ_0 – прогиб балки в начале координатных осей (начальный параметр);

z – абсцисса исследуемого сечения;

z_M, z_F, z_q – абсциссы точек приложения соответствующей внешней силы (M, F) и начала распределенной нагрузки q ;

M, F, q – внешние силы (активные и реактивные).

При составлении уравнений упругой линии балки для конкретного сечения следует включать в них только те силовые факторы, которые расположены левее этого сечения, и назначить знаки слагаемых, принятые для изгибающих моментов (см. рис. 5.4).

Если распределенная нагрузка q не доходит до конца балки, то ее продлевают и прикладывают компенсирующую нагрузку $q' = q$ (рис. 5.21, а).

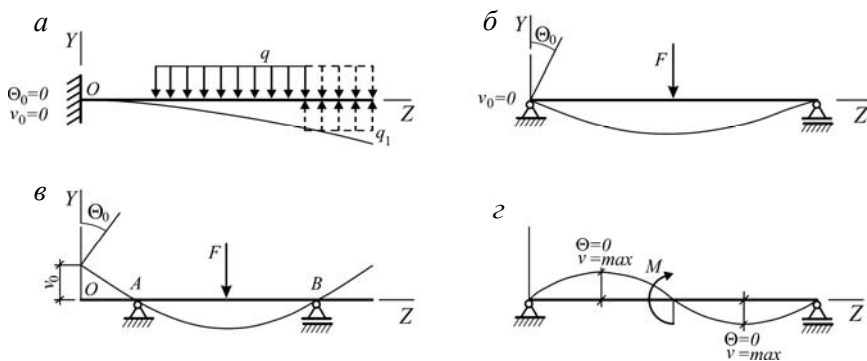


Рис. 5.21

Начальные параметры θ_0 и ϑ_0 определяются из условий закрепления опор балок: в защемлении $\theta_0 = 0$, $\vartheta_0 = 0$ (см. рис. 5.21, а), на шарнирной опоре $\theta_0 \neq 0$, $\vartheta_0 = 0$ (рис. 5.21, б).

Если начало отсчета координатных осей находится на свободном конце балки (рис. 5.21, в), начальные параметры θ_0 и ϑ_0 определяются из условий закрепления на опорах: $\vartheta_A = 0$, $\vartheta_B = 0$.

По вычисленным значениям θ и ϑ в характерных сечениях балки (обычно на границе расчетных участков) можно построить графики – эпюры углов поворота сечений θ и прогибов ϑ .

В сечениях балки, где $\theta = 0$, на эпюре ϑ имеется перегиб, а сам прогиб достигает максимального значения (рис. 5.21, з).

При решении задач следует иметь в виду, что положительный прогиб ϑ направлен вверх (в сторону положительного направления оси Y), а положительный угол поворота сечения θ – против хода часовой стрелки (от первоначального положения сечения).

Пример 5.11

Для консольной балки определить углы поворота и прогибы сечений B и C (в долях от жесткости сечения балки – EJ_x), рис. 5.22.

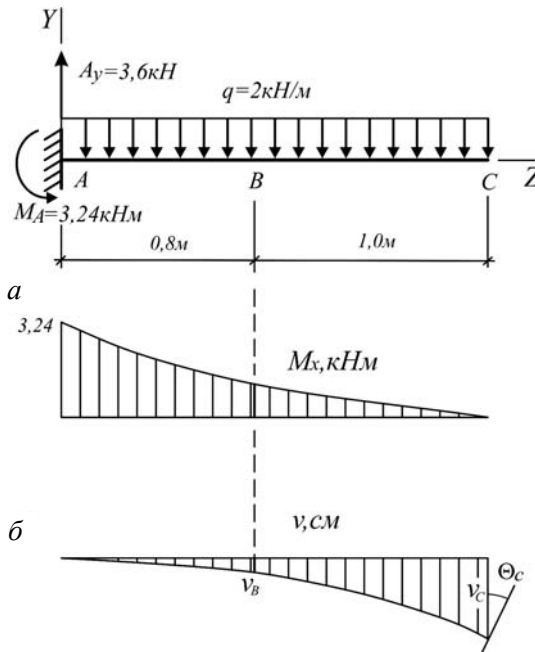


Рис. 5.22

Решение

Начало координатных осей помещаем в крайнем левом сечении балки (защемлении).

Опорные реакции определяются из условий равновесия:

$$A_y = 2(0,8 + 1,0) = 3,6 \text{ кН};$$

$$M_A = 2 \frac{(0,8 + 1,0)^2}{2} = 3,24 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Балка имеет один расчетный участок.

Эпюра изгибающих моментов показана на рис. 5.22, а.

Составим уравнения оси изогнутой балки по формулам (5.9) и (5.10).

Уравнение углов поворота сечений

$$\begin{aligned} EJ_x \theta &= EJ_x \theta_0 - M_A (z - 0) + A_y \frac{(z - 0)^2}{2} - q \frac{(z - 0)^3}{6} = \\ &= EJ_x \theta_0 - 3,24z + 3,6 \frac{z^2}{2} - 2 \frac{z^3}{6}. \end{aligned}$$

Уравнение прогибов

$$\begin{aligned} EJ_x \vartheta &= EJ_x \vartheta_0 + EJ_x \theta_0 z - M_A \frac{(z - 0)^2}{2} + A_y \frac{(z - 0)^3}{6} - q \frac{(z - 0)^4}{24} = \\ &= EJ_x \vartheta_0 + EJ_x \theta_0 z - 3,24 \frac{z^2}{2} + 3,6 \frac{z^3}{6} - 2 \frac{z^4}{24}. \end{aligned}$$

Заметим, что слагаемыми уравнений являются выражения изгибающих моментов (с их знаками) от соответствующих силовых факторов (например, $A_y z$), проинтегрированные в уравнении углов поворота сечений один раз ($A_y \frac{z^2}{2}$), а в уравнении прогибов – два раза ($A_y \frac{z^3}{2 \cdot 3}$).

Начальные параметры (θ_0 и ϑ_0) в составленных уравнениях определяются исходя из деформативных условий в начале координат.

Поскольку начало координат помещено на опоре A – заземлении, где невозможны ни линейные, ни угловые перемещения, начальные параметры $\theta_0 = 0$, $\vartheta_0 = 0$.

Уравнения перемещений оси балки примут вид

$$EJ_x\theta = -3,24z + 1,8z^2 - 0,333z^3,$$

$$EJ_x\vartheta = -1,62z^2 + 0,6z^3 - 0,0833z^4.$$

Определяем перемещения в названных сечениях.

При $z = 0,8$ м (сечение B)

$$EJ_x\theta_B = -3,24 \cdot 0,8 + 1,8 \cdot 0,8^2 - 0,333 \cdot 0,8^3 = -1,61 \text{ кН}\cdot\text{м}^2,$$

откуда угол поворота сечения $\theta_B = -\frac{1,61}{EJ_x}$ (направлен по ходу часовой стрелки);

$$EJ_x\vartheta_B = -1,62 \cdot 0,8^2 + 0,6 \cdot 0,8^3 - 0,0833 \cdot 0,8^4 = -0,764 \text{ кН}\cdot\text{м}^3,$$

откуда прогиб $\vartheta_B = -\frac{0,764}{EJ_x}$ (направлен вниз от оси Z).

При $z = 1,8$ м (сечение C)

$$\begin{aligned} EJ_x\theta_C &= -3,24 \cdot 1,8 + 1,8 \cdot 1,8^2 - 0,333 \cdot 1,8^3 = -5,832 + 5,832 - 1,942 = \\ &= -1,942 \text{ кН}\cdot\text{м}^2, \end{aligned}$$

откуда $\theta_C = -\frac{1,942}{EJ_x}$;

$$EJ_x\vartheta_C = -1,62 \cdot 1,8^2 + 0,6 \cdot 1,8^3 - 0,0833 \cdot 1,8^4 = -2,624 \text{ кН}\cdot\text{м}^3,$$

откуда прогиб $\vartheta_C = -\frac{2,624}{EJ_x}$ (направлен вниз).

По вычисленным значениям можно построить эпюры углов поворота сечений θ и прогибов ϑ . Эпюра ϑ показана на рис. 5.22, б, где отмечен также угол θ_C . Полностью эпюра θ строится редко.

Результаты вычислений показывают, что в данном примере наибольшие перемещения претерпевает концевое сечение балки (сечение С).

Эпюра изгибающих моментов M_x и эпюра прогибов ϑ связаны между собой следующей зависимостью: ординаты эпюры M_x должны лежать с выпуклой стороны изогнутой балки, где волокна ее растянуты. В строительном проектировании эпюру M_x принято строить со стороны растянутых волокон.

Пример 5.12

Для двухопорной деревянной балки прямоугольного поперечного сечения ($h = 18$ см, $b = 14$ см) построить эпюру прогибов и определить наибольший относительный прогиб, если модуль продольной упругости материала $E = 10$ ГПа (рис. 5.23).

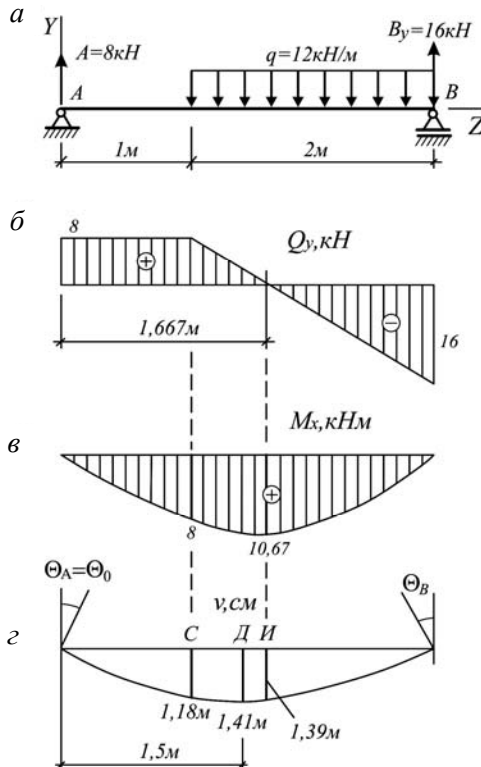


Рис. 5.23

Решение

Начало координатных осей помещаем в сечении A – шарнирной опоре балки.

Значения опорных реакций приведены на рис. 5.23, a , а эпюры Q и M_x – на рис. 5.23, b и $в$.

Момент инерции сечения балки относительно нейтральной оси

$$J_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{14 \cdot 18^3}{12} = 6804 \text{ см}^4.$$

Балка имеет два расчетных участка. Составим уравнения оси изогнутой балки:

$$\begin{aligned} EJ_x \theta &= EJ_x \theta_0 + A_y \frac{(z-0)^2}{2} \Big|_{0 \leq z \leq 1 \text{ м}} \Big|_I - q \frac{(z-1)^3}{6} \Big|_{1 \leq z \leq 3 \text{ м}} \Big|_{II} = \\ &= EJ_x \theta_0 + 4z^2 \Big|_I - 2(z-1)^3 \Big|_{II}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EJ_x \vartheta &= EJ_x \vartheta_0 + EJ_x \theta_0 z + A_y \frac{(z-0)^3}{6} \Big|_I - q \frac{(z-1)^4}{24} \Big|_{II} = \\ &= EJ_x \vartheta_0 + EJ_x \theta_0 z + 1,333z^3 \Big|_I - 0,5(z-1)^4 \Big|_{II}. \end{aligned}$$

Вертикальными линиями отмечены границы уравнений для участков балки и область их применения.

В уравнения для первого участка вошли только те силовые факторы, которые лежат левее конца этого участка, т. е. только A_y . На втором участке добавилась нагрузка q .

Для определения начальных параметров в составленных уравнениях нужно рассмотреть условия перемещений в начале координат, т. е. на шарнирной опоре A . В шарнирной опоре вертикальное перемещение отсутствует, т. е. $\vartheta_A = 0$, следовательно, $\vartheta_0 = 0$. Угловое же перемещение на шарнирной опоре возможно, т. е. $\theta_A \neq 0$, значит, и $\theta_0 \neq 0$.

Для определения параметра θ_0 нужно составить уравнение прогибов для сечения B , где на шарнирной опоре вертикальное перемещение отсутствует, т. е. $\vartheta_B = 0$.

При $z = 3$ м (сечение B)

$$EJ_x \vartheta_B = EJ_x \theta_0 \cdot 3 + 1,333 \cdot 3^3 - 0,5(3-1)^4 = 0,$$

откуда $EJ_x \theta_0 = -9,33 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$.

После определения всех начальных параметров уравнения оси изогнутой балки примут вид

$$EJ_x \theta = -9,33 + 4z^2 \Big|_I - 2(z-1)^3 \Big|_{II};$$

$$EJ_x \vartheta = -9,33z + 1,333z^3 \Big|_I - 0,5(z-1)^4 \Big|_{II}.$$

Известно, что максимальный прогиб балки будет в том сечении, угол поворота которого равен нулю. Отыщем это сечение.

Уравнение углов поворота сечений:

для первого участка

$$EJ_x \theta = -9,33 + 4z_0^2 = 0,$$

откуда $z_0 = 1,527$ м > 1 (сечение за пределами участка);

второго участка

$$EJ_x \theta = -9,33 + 4z_0^2 - 2(z_0 - 1)^3 = 0,$$

откуда $z_0 = 1,555$ м.

Для построения эпюры прогибов вычислим их значения для нескольких характерных сечений балки, а также вычислим углы поворота сечений A и B .

При $z = 0$ (сечение A , 1-й участок)

$$EJ_x \theta_A = -9,33 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$\theta_A = \frac{-9,33 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^9 \cdot 6804 \cdot 10^{-8}} = -0,0137 \text{ рад};$$

$$EJ_x \vartheta_A = 0.$$

При $z = 1$ м (сечение C , 1-й участок)

$$EJ_x \vartheta_C = -9,33 \cdot 1 + 1,33 \cdot 1^3 = -8,0 \text{ кН} \cdot \text{м}^3;$$

$$\vartheta_C = -\frac{8,0 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^9 \cdot 6804 \cdot 10^{-8}} = -0,0118 \text{ м} = -1,18 \text{ см}.$$

При $z = 1,5$ м (сечение D , 2-й участок, середина пролета)

$$EJ_x \vartheta_D = -9,33 \cdot 1,5 + 1,33 \cdot 1,5^3 - 0,5 \cdot 0,5^4 = -9,54 \text{ кН} \cdot \text{м}^3;$$

$$\vartheta_D = -0,0140 \text{ м} = -1,40 \text{ см}.$$

При $z = 1,555$ м (сечение, где $\theta = 0$)

$$EJ_x \vartheta_{\max} = -9,543 \text{ кН} \cdot \text{м}^3;$$

$$\vartheta_{\max} = -1,41 \text{ см}.$$

При $z = 1,667$ м (сечение I , где $M_x \max$)

$$EJ_x \vartheta_I = -9,48 \text{ кН} \cdot \text{м}^3;$$

$$\vartheta_I = -1,39 \text{ см}.$$

При $z = 3$ м (сечение B , 2-й участок)

$$EJ_x \theta_B = -9,33 + 4 \cdot 3^2 - 2 \cdot 2^3 = 10,67 \text{ кН} \cdot \text{м}^2, \quad \theta_B = 0,016 \text{ рад.}$$

$$\begin{aligned} EJ_x \vartheta_B &= -9,33 \cdot 3 + 1,333 \cdot 3^3 - 0,5 \cdot 2^4 = -35,99 + 35,991 = \\ &= 0,001 \approx 0 \text{ (контроль)}. \end{aligned}$$

По полученным значениям ϑ построена эпюра прогибов (рис. 5.23, z).

Выпуклость изогнутой оси балки (эпюра ϑ) направлена в сторону ординат эпюры M_x .

Анализ полученных значений прогибов показывает, что абсолютный прогиб в середине пролета балки ($\vartheta_{\text{д}}$) и максимальный (ϑ_{max}) практически совпадают.

Относительный прогиб балки

$$\frac{\vartheta_{\text{max}}}{l} = \frac{1,41}{300} = \frac{1}{213}.$$

Сечение с наибольшим прогибом ϑ_{max} не обязательно должно совпадать с сечением, где изгибающий момент наибольший ($M_{x \text{ max}}$). Это возможно лишь в частных случаях.

Пример 5.13

Для двухопорной балки с консолью (рис. 5.24), выполненной из двух стальных швеллеров, подобрать их номер и проверить жесткость, если $R = 210$ МПа, $\left(\frac{\vartheta}{l}\right)_{\text{adm}} = \frac{1}{180}$, $E = 200$ ГПа.

Построить эпюру прогибов.

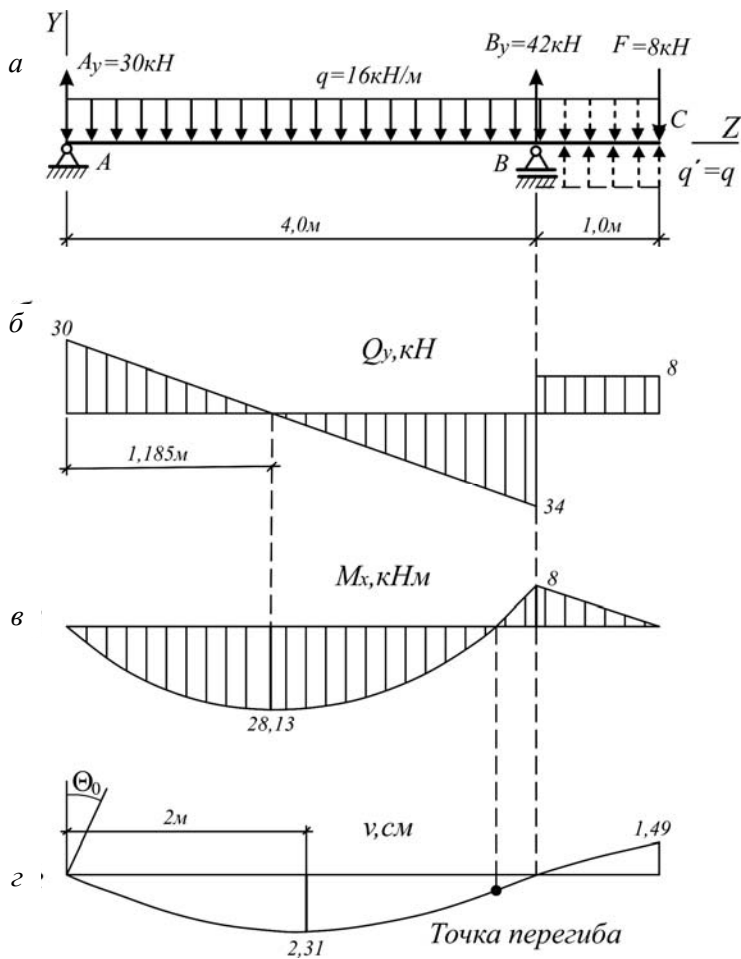


Рис. 5.24

Решение

Начало координатных осей помещено в сечении A .

Значения опорных реакций приведены на рис. 5.24, a (нагрузку q , показанную пунктиром, при вычислении реакций можно не учитывать).

Построим эпюры Q и M .

В сечении А

$$Q = A_Y = 30 \text{ кН}, \quad M = 0.$$

В сечении С

$$Q = 8 \text{ кН}, \quad M = 0.$$

В сечении В

$$Q^{\text{II}} = 8 \text{ кН}, \quad M = -8 \cdot 1 = -8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$Q^{\text{I}} = 8 - 42 = -34 \text{ кН}.$$

Для сечения, в котором $Q = 0$, ордината

$$z_0 = \frac{30}{16} = 1,875 \text{ м}$$

и

$$M_{x \text{ max}} = 30 \cdot 1,875 - \frac{16 \cdot 1,875^2}{2} = 28,13 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Из условия прочности по нормальным напряжениям требуемый момент сопротивления

$$W_x = \frac{28,13 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 134 \text{ см}^3.$$

По таблицам сортамента принимаем два швеллера № 14 с $W_x = 70,2 \cdot 2 = 140,4 \text{ см}^3$ и $J_x = 491 \cdot 2 = 982 \text{ см}^4$.

Рассматриваемая балка имеет два расчетных участка (участка нагружения).

Заметим, что распределенная нагрузка q не доходит до конца балки. Поэтому ее необходимо продлить по консоли до конца балки и на этом участке приложить компенсирующую нагрузку $q' = q$.

Составим уравнения перемещений оси изогнутой балки:

$$EJ_x \theta = EJ_x \theta_0 + A_y \frac{z^2}{2} - q \frac{z^3}{6} \Big|_{0 \leq z \leq 4 \text{ м}} \Big|_I + B_y \frac{(z-4)^2}{2} + q \frac{(z-4)^3}{6} \Big|_{4 \leq z \leq 5 \text{ м}} \Big|_{II} =$$

$$= EJ_x \theta_0 + 15z^2 - 2,667z^3 \Big|_I + 21(z-4)^2 + 2,667 \cdot (z-4)^3 \Big|_{II};$$

$$EJ_x \vartheta = EJ_x \vartheta_0 + EJ_x \theta_0 z + A_y \frac{z^3}{6} - q \frac{z^4}{24} \Big|_I + B_y \frac{(z-4)^3}{6} + q \frac{(z-4)^4}{24} \Big|_{II} =$$

$$= EJ_x \vartheta_0 + EJ_x \theta_0 z + 5z^3 - 0,667z^4 \Big|_I + 7(z-4)^3 + 0,667(z-4)^4 \Big|_{II}.$$

Начальные параметры θ_0 и ϑ_0 определим, исходя из деформационных условий на опорах балки. При $z = 0$ (опора A) прогиб $\vartheta_A = 0$, а значит, и $\vartheta_0 = 0$.

При $z = 4$ м (опора B) прогиб $\vartheta_B = 0$.

Запишем уравнение прогибов для сечения B (первый участок, $z = 4$ м):

$$EJ_x \vartheta_B = EJ_x \theta_0 \cdot 4 + 5 \cdot 4^3 - 0,667 \cdot 4^4 = 0,$$

откуда

$$EJ_x \theta_0 = -37,3 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Определим значение прогибов посередине пролета балки и на конце консоли.

При $z = 2$ м

$$EJ_x \vartheta = -37,3 \cdot 2 + 5 \cdot 2^3 - 0,667 \cdot 2^4 = -45,3 \text{ кН} \cdot \text{м}^3,$$

откуда

$$\vartheta = \frac{-45,3 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^9 \cdot 982 \cdot 10^{-8}} = -2,31 \text{ см}.$$

При $z = 5$ м

$$EJ_x \vartheta = 29,2 \text{ кН} \cdot \text{м}^3, \quad \vartheta = 1,49 \text{ см.}$$

Эпюра прогибов показана на рис. 5.24, *г*. При построении эпюры прогибов ее очертание согласуется с эпюрой изгибающих моментов.

Максимальный абсолютный прогиб в пролете балки достигает значения $\vartheta_{\max} = 2,31$ см, относительный прогиб

$$\frac{\vartheta_{\max}}{l} = \frac{2,31}{400} = \frac{1}{173}.$$

Условие жесткости по формуле (5.8)

$$\frac{\vartheta_{\max}}{l} = \frac{1}{173} < \left(\frac{\vartheta}{l} \right)_{\text{adm}} = \frac{1}{180} \text{ — выполняется.}$$

Пример 5.14

Подобрать номер прокатного швеллера для двухконсольной балки из условия жесткости, если $\left(\frac{\vartheta}{l} \right)_{\text{adm}} = \frac{1}{200}$ (рис. 5.25).

Построить эпюру прогибов.

Решение

Начало координат помещаем в крайнем левом сечении балки, т. е. на конце консоли (сечение O).

Значения опорных реакций и эпюра изгибающих моментов показаны на рис. 5.25.

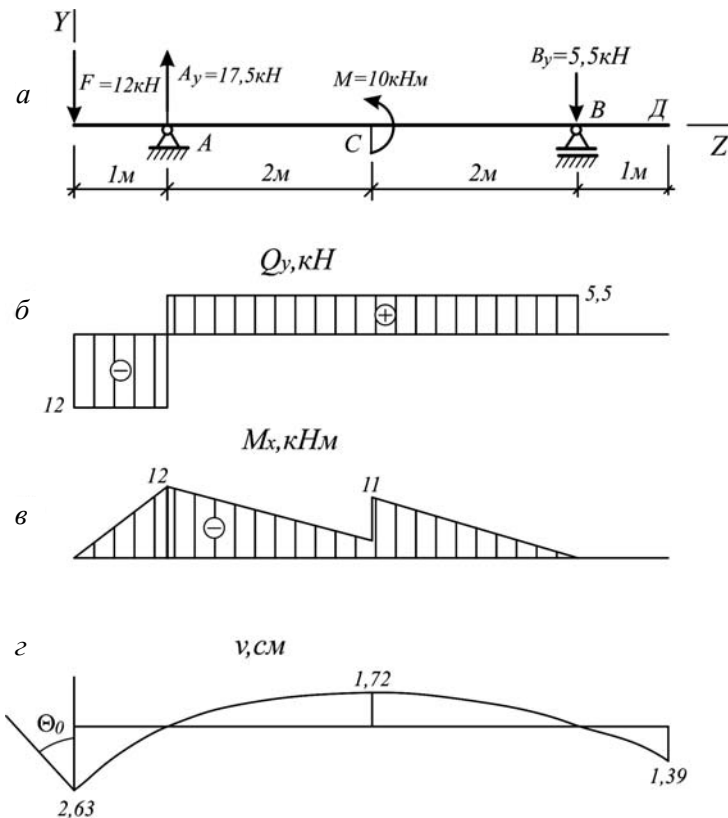


Рис. 5.25

Рассматриваемая балка имеет четыре расчетных участка.
Уравнение прогибов оси балки

$$\begin{aligned}
 EJ_x \vartheta &= EJ_x \vartheta_0 + EJ_x \theta_0 z - 12 \frac{z^3}{6} \Big|_I + 17,5 \frac{(z-1)^3}{6} \Big|_{II} - 10 \frac{(z-3)^2}{2} \Big|_{III} - 5,5 \frac{(z-5)^3}{6} \Big|_{IV} = \\
 &= EJ_x \vartheta_0 + EJ_x \theta_0 z - 2z^3 \Big|_I + 2,917(z-1)^3 \Big|_{II} - 5(z-3)^2 \Big|_{III} - 0,92(z-5)^3 \Big|_{IV}.
 \end{aligned}$$

В данном случае, когда начало координат расположено на свободном конце балки, ни один из начальных параметров не равен

нулю. Значения их определим, исходя из деформативных условий на шарнирных опорах A и B , где вертикальные перемещения (прогибы) равны нулю: $\vartheta_A = 0$, $\vartheta_B = 0$.

Запишем уравнения прогибов для названных сечений.

Сечение A ($z = 1$ м, участок 1)

$$EJ_x \vartheta = EJ_x \vartheta_0 + EJ_x \theta_0 \cdot 1 - 2 \cdot 1^3 = 0.$$

Сечение B ($z = 5$ м, участок 3)

$$EJ_x \vartheta = EJ_x \vartheta_0 + EJ_x \theta_0 \cdot 5 - 2 \cdot 5^3 + 2,917 \cdot 4^3 - 5 \cdot 2^2 = 0$$

или

$$EJ_x \vartheta = EJ_x \vartheta_0 + EJ_x \theta_0 \cdot 5 - 83,3 = 0.$$

Из этих уравнений $EJ_x \theta_0 = 20,33 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$; $EJ \vartheta_0 = -18,33 \text{ кН} \cdot \text{м}^3$.

Прогиб посередине пролета балки ($z = 3$ м, участок 2)

$$EJ_x \vartheta_{\max} = -18,33 + 20,33 \cdot 3 - 2 \cdot 3^3 + 2,917 \cdot 2^3 = 12,0 \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

Требуемый момент инерции сечения для пролетной части балки

$$I_x = \frac{12,0}{E \vartheta_{\max}}.$$

Примем $\vartheta_{\max} = \vartheta_{\text{adm}}$.

Тогда из заданного условия жесткости

$$\vartheta_{\text{adm}} = l \frac{1}{200} = 400 \frac{1}{200} = 2,0 \text{ см},$$

где l – длина пролета (расстояние между опорами).

Для сечения из двух швеллеров

$$J_x = \frac{12 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-2}} = 300 \text{ см}^4.$$

На один швеллер момент инерции составит

$$J'_x = \frac{300}{2} = 150 \text{ см}^4.$$

По таблицам сортамента принимаем два швеллера № 10, для которых $W_x = 34,8 \cdot 2 = 69,6 \text{ см}^3$, $J_x = 174 \cdot 2 = 348 \text{ см}^4$.

Вычисляем прогибы в характерных сечениях балки.

При $z = 0$ (сечение O)

$$\vartheta = \vartheta_0 = -\frac{18,33}{EI_x} = -\frac{18,33 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^9 \cdot 348 \cdot 10^{-8}} = -2,63 \text{ см.}$$

При $z = 3 \text{ м}$ (сечение C) $\vartheta = 1,72 \text{ см.}$

При $z = 6 \text{ м}$ (сечение D) $\vartheta = -1,39 \text{ см.}$

По полученным значениям прогибов строится соответствующая эпюра (рис. 5.25, z).

Проследите соответствие эпюры прогибов эпюре изгибающих моментов.

Правая консоль балки (участок BD) не нагружена и, следовательно, не деформируется. Ось ее остается прямой, но все сечения перемещаются за счет деформаций остальной части балки.

В завершение примера вычислим значения наибольшего нормального напряжения в балке:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x \max}}{W_x} = \frac{12 \cdot 10^3}{101,2 \cdot 10^{-6}} = 172 \text{ МПа} < R = 210 \text{ МПа.}$$

Прочность балки по нормальным напряжениям обеспечена, но материал ее недонапряжен на 18 %. Это обусловлено тем, что условие жесткости более «требовательно».

5.3.2. Метод Мора и Верещагина

Формула (интеграл) Мора, позволяющая определить перемещения в любом отдельном сечении балки, имеет вид

$$\Delta = \sum_0^l \int \frac{M_F \bar{M}}{E J_x} dz, \quad (5.11)$$

где Δ – перемещение (угловое, линейное) в исследуемом сечении;

M_F – выражение изгибающих моментов от заданной нагрузки;

\bar{M} – выражение изгибающих моментов от вспомогательной единичной силы;

EJ_x – жесткость сечения балки.

На рис. 5.26, *a* показана заданная балка, у которой нужно определить угол поворота θ и прогиб ϑ концевое сечения.

На рис. 5.26, *б*, *в* показаны вспомогательные состояния той же балки.

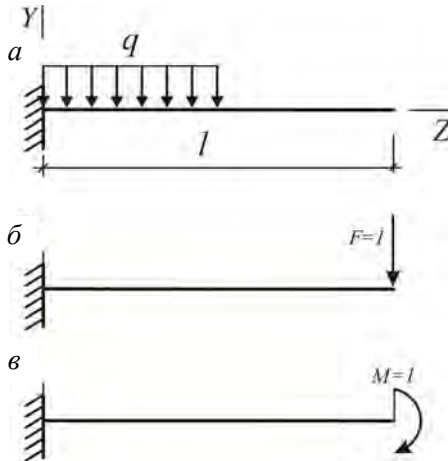


Рис. 5.26

При определении прогиба ϑ в искомом сечении прикладывается единичная сила $F = 1$, а при определении угла поворота – единичный момент $M = 1$.

Составляются выражения для M_F и \bar{M} и по формуле (5.11) определяется искомое перемещение.

Если балка имеет сложную нагрузку и много участков нагружения, непосредственное интегрирование выражений изгибающих моментов трудоемко.

Вместо непосредственного вычисления интеграла Мора можно воспользоваться способом Верещагина – это графоаналитический прием решения интеграла перемещений, основанный на перемножении эпюр.

По способу Верещагина перемещение Δ (угол поворота сечения или прогиб) в любом сечении балки определяется по формуле

$$\Delta = \frac{\sum \omega_i y_i}{EJ_x}, \quad (5.12)$$

где ω_i – площадь эпюры изгибающих моментов от заданной нагрузки (силовая площадь);

y_i – ордината эпюры изгибающих моментов от единичной силы, лежащая против центра тяжести эпюры изгибающих моментов от заданной нагрузки.

Определяются (рис. 5.27) прогиб ϑ в сечении n и угол поворота θ в сечении m .

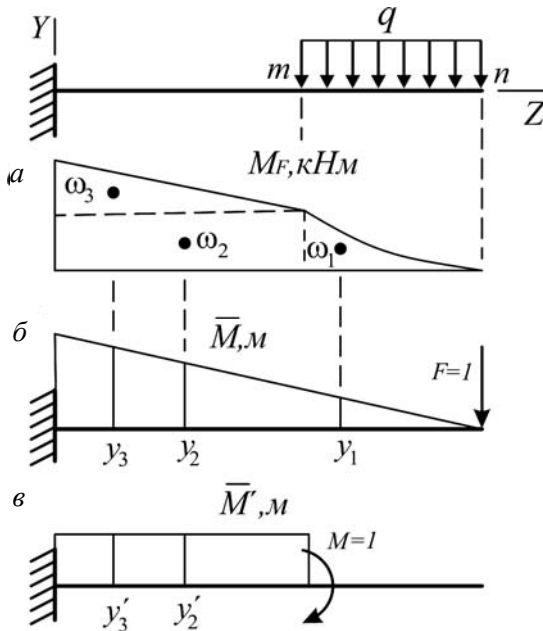


Рис. 5.27

На рис. 5.27, *a* изображена эпюра изгибающих моментов M_F от заданной нагрузки.

На рис. 5.27, *б* – единичная эпюра \bar{M} от вспомогательной единичной силы $F = 1$ (для определения прогиба ϑ), а на рис. 5.27, *в* – единичная эпюра \bar{M}' от вспомогательного единичного момента $M = 1$ (для определения угла поворота θ).

Эпюра M_F , которая может быть любой формы, в пределах расчетных участков разделяется на простые фигуры, площади и центры тяжести которых можно легко определить.

По формуле (5.12) прогиб в сечении n

$$\vartheta_n = \frac{\sum \omega_i y_i}{EJ_x} = \frac{\omega_1 y_1 + \omega_2 y_2 + \omega_3 y_3}{EJ_x},$$

угол поворота в сечении m

$$\theta_m = \frac{\omega_2 y'_2 + \omega_3 y'_3}{EJ_x},$$

где ω – площади простых фигур на одной из эпюр изгибающих моментов;

y, y' – ординаты под центром тяжести этих фигур на другой эпюре.

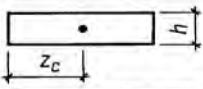
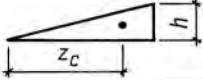
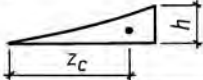
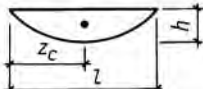
Эпюры изгибающих моментов от единичных сил всегда прямолинейны.

Если в пределах расчетного участка обе эпюры (M_F и \bar{M}) прямолинейны, то можно брать площадь ω любой из них. Если эпюра M_F криволинейна, то площадь ω берется обязательно с этой эпюры.

Положительный результат перемножения эпюр означает, что направление перемещения (θ, ϑ) совпадает с направлением единичной силы (или момента); если результат отрицательный – перемещение происходит в обратном направлении вектора единичной силы.

В табл. 5.1 приведены выражения для определения площадей некоторых простых фигур и положение их центра тяжести.

Таблица 5.1

Вид эпюры	ω	z_c
	$h \cdot l$	$\frac{l}{2}$
	$\frac{h \cdot l}{2}$	$\frac{2 \cdot l}{3}$
	$\frac{h \cdot l}{3}$	$\frac{3 \cdot l}{4}$
	$\frac{2 \cdot h \cdot l}{3}$	$\frac{l}{2}$

Параболические эпюры, приведенные в табл. 5.1, получены от действия только распределенной нагрузки q .

В тех случаях, когда в сложной эпюре M_F криволинейные участки получены от одновременного действия q , F , M , их (участки) надо разделить на простые фигуры (см. примеры).

Пример 5.15

Определить угол поворота и прогиб сечения B консольной балки (в долях от жесткости сечения EJ_x), рис. 5.28.

Решение

Эпюра изгибающих моментов от заданной нагрузки (грузовая эпюра M_F) показана на рис. 5.28, *а*.

Для определения прогиба в сечении B к свободной от заданной нагрузки балке (вспомогательное состояние) в названном сечении прикладывается вспомогательная единичная сосредоточенная сила ($F = 1$) и строится эпюра изгибающих моментов – единичная эпюра \bar{M} (рис. 5.28, *б*). Единичная сила направляется произвольно, т. е. в положительном или отрицательном направлении оси Y .

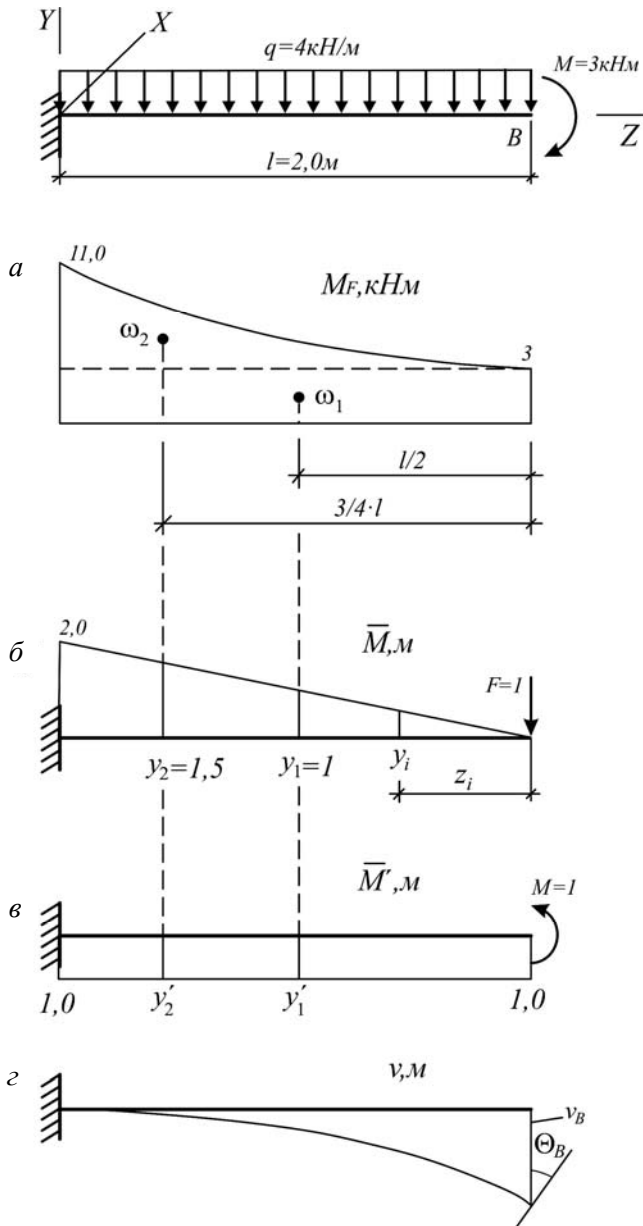


Рис. 5.28

Аналогичная операция производится для определения угла поворота сечения. Только в качестве вспомогательной единичной силы выступает единичный вспомогательный момент ($M = 1$), направляемый произвольно относительно оси X . Эпюра от единичного момента \bar{M}' показана на рис. 5.28, в.

На рис. 5.28, б и в схема балки и единичные эпюры совмещены.

Заметим, что балка имеет один расчетный участок как для M_F , так для \bar{M} и что единичные эпюры прямолинейны и имеют вид треугольника или прямоугольника, а грузовая – криволинейна и имеет сложное очертание.

Для определения перемещений по способу Верещагина используются эпюры изгибающих моментов (грузовые и единичные). От одних из них берутся площади эпюр (ω), из других – ординаты (y) под центром тяжести первых. Поскольку грузовая эпюра M_F имеет криволинейное очертание, площадь ω должна браться с этой эпюры.

Для проведения расчета эпюра M_F сложного очертания делится на простые фигуры: прямоугольник (от момента M) площадью

$$\omega_1 = 3 \cdot 2 = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$$

и параболический треугольник (от нагрузки q) площадью

$$\omega_2 = \frac{1}{3} \cdot (11 - 3) \cdot 2 = 5,33 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

На выделенных простых фигурах отмечаются их центры тяжести (см. табл. 5.1).

На единичных эпюрах отмечаются ординаты y , лежащие под центром тяжести составляющих частей грузовой эпюры M_F . В данном примере ордината определяется как $y_i = 1z_i$:

$$y_1 = 1 \cdot \frac{l}{2} = 1 \text{ м};$$

$$y_2 = 1 \cdot \frac{3}{4} l = 1 \cdot \frac{3}{4} \cdot 2 = 1,5 \text{ м}.$$

Для определения углов поворота сечений ординаты берутся из единичной эпюры \bar{M}' :

$$y'_1 = y'_2 = 1.$$

Прогиб в сечении B по формуле (5.12):

$$EJ_x \Delta = EJ_x \vartheta_B = \sum \omega_i y_i = 6 \cdot 1 + 5,33 \cdot 1,5 = 14,0 \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

Все слагаемые в выражении прогибов положительны, так как площади ω и ординаты y лежат по одну сторону от оси эпюры. Положительные значения $EJ_x \theta_B$ означают, что прогиб происходит в направлении единичной силы, т. е. вниз.

Угол поворота сечения B

$$\begin{aligned} EJ_x \Delta = EJ_x \theta_B &= \sum \omega_i y_i = -\omega_1 y'_1 - \omega_2 y'_2 = \\ &= -6 \cdot 1 - 5,33 \cdot 1 = -11,33 \text{ кН} \cdot \text{м}^2. \end{aligned}$$

В полученном выражении слагаемые отрицательны, так как площади ω и ординаты y лежат по разную сторону от оси эпюры. Отрицательное значение $EJ_x \theta_B$ означает, что поворот сечения происходит в направлении, противоположном направлению единичного момента, т. е. по ходу часовой стрелки (рис. 5.28, з).

Эпюра прогибов показана на рис. 5.28, з.

Таким образом, перемещения на свободном конце балки (в долях от жесткости сечения)

$$\theta_B = \frac{-11,33}{EJ_x} \text{ (по ходу часовой стрелки)}, \quad \vartheta_B = \frac{14,0}{EJ_x} \text{ (вниз)}.$$

Пример 5.16

Определить прогиб посередине пролета двухопорной балки (в долях от EJ_x), рис. 5.29.

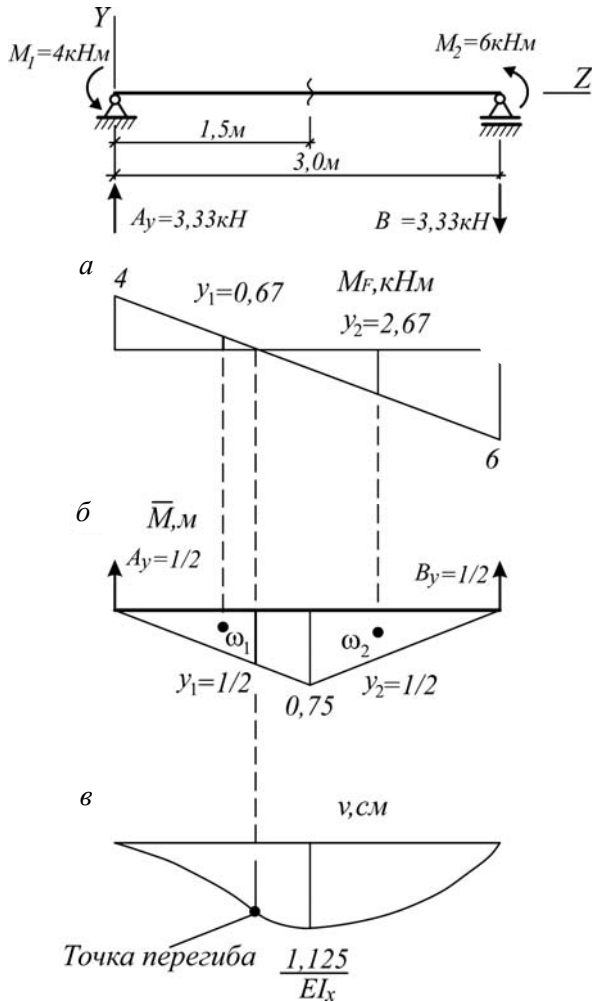


Рис. 5.29

Решение

Грузовая эпюра изгибающих моментов M_F (от заданной нагрузки) показана на рис. 5.29, а.

Посередине пролета, где требуется определить прогиб, к балке вспомогательного состояния прикладывается единичная сосредото-

ченная сила $F = 1$ (рис. 5.29, б), определяются опорные реакции и строится эпюра \bar{M} .

В данном примере грузовая эпюра M_F балки пересекает ось, а единичная эпюра имеет два расчетных участка, поэтому площадь ω берется с единичной эпюры, а ордината y – с грузовой.

Ординаты y берутся из грузовой эпюры M_F , как моменты в соответствующем сечении:

$$y_1 = A_y \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,5 - M_1 = 0,67 ;$$

$$y_2 = -B_y \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,5 + M_2 = 2,67.$$

Прогиб посередине пролета балки

$$\begin{aligned} EJ_x \vartheta &= \sum(\omega_i y_i) = -\omega_1 y_1 + \omega_2 y_2 = \\ &= -\frac{0,75 \cdot 1,5}{2} \cdot 0,67 + \frac{0,75 \cdot 1,5}{2} \cdot 2,67 = 1,125 \text{ кН} \cdot \text{м}^3. \end{aligned}$$

Найденный прогиб направлен вниз, по направлению единичной силы $F = 1$.

Вид эпюры прогибов показан на рис. 5.29, в.

Пример 5.17

Для двухопорной балки с консолью определить прогибы в сечениях С и Д и построить эпюру прогибов (в долях EJ_x), рис. 5.30.

Решение

Значения опорных реакций определяются из условий равновесия:

$$\sum M_A = -B_y \cdot 6 + 10 + 40 = 0, \quad B_y = 8,33 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = A_y \cdot 6 + 10 - 80 = 0, \quad A_y = 11,67 \text{ кН};$$

$$\sum Y = 11,67 + 8,33 - 5 \cdot 4 = 0.$$

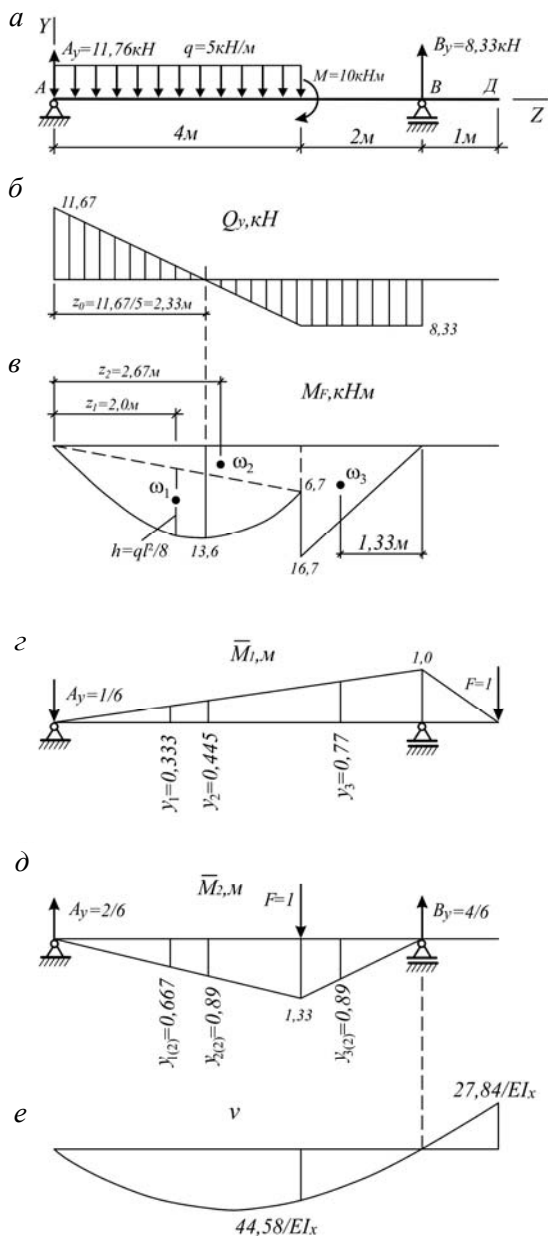


Рис. 5.30

Определим значения ординат для построения эпюр Q и M .

$$\text{При } z = 0 \quad Q = 11,67 \text{ кН}, \quad M = 0.$$

$$\text{При } z = 2,33 \text{ м} \quad Q = 0, \quad M = 13,6 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

При $z = 4,0$ м

$$Q = 11,67 - 20 = -8,33 \text{ кН},$$

$$M^I = 11,67 \cdot 4 - 5 \cdot 4 \cdot 2 = 6,7 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M^{II} = 11,67 \cdot 4 - 5 \cdot 4 \cdot 2 + 10 = 16,7 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

При $z = 6,0$ м

$$Q = 11,67 - 20 = -8,33 \text{ кН}, \quad M = 0.$$

Эпюры Q и M даны на рис. 5.30, б и в.

Единичные эпюры \bar{M}_1 и \bar{M}_2 от сил $F = 1$, приложенных в сечениях, где нужно определить прогибы, показаны на рис. 5.30, г и д.

Грузовую эпюру M_F сложного очертания, разделим на простые фигуры. Выделим параболу ω_1 и два треугольника ω_2 и ω_3 .

Площадь параболы

$$\omega_1 = \frac{2}{3}hl,$$

где l – длина параболы;

h – высота параболы в центре тяжести ее (от нижней точки до пунктирной линии).

Высоту параболы можно вычислить геометрически по эпюре M , но удобнее пользоваться выражением $h = \frac{ql^2}{8}$:

$$h = \frac{5 \cdot 4^2}{8} = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Определим ординаты на единичной эпюре (см. рис. 5.30, *з*) под центрами тяжести выделенных простых фигур:

$$y_1 = \frac{1}{6} \cdot 2 = 0,333;$$

$$y_2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = 0,445;$$

$$y_3 = \frac{1}{6} \left(4 + \frac{1}{3} \cdot 2 \right) = 0,778.$$

Необходимо обратить внимание на расположение грузовой и единичных эпюр относительно их осей.

Прогиб на конце консоли (сечение Д):

$$\begin{aligned} EJ_x \vartheta_D &= -\omega_1 y_1 - \omega_2 y_2 - \omega_3 y_3 = \\ &= -\frac{2}{3} \cdot 10 \cdot 4 \cdot 0,333 - \frac{1}{2} \cdot 6,7 \cdot 4 \cdot 0,445 - \frac{1}{2} \cdot 16,7 \cdot 2 \cdot 0,778 = -27,84 \text{ кН} \cdot \text{м}^3 \end{aligned}$$

(направлен в противоположную сторону по отношению $F = 1$, т. е. вверх).

Определим ординаты под центрами тяжести простых фигур на второй единичной эпюре:

$$y_1(2) = \frac{2}{6} \cdot 2 = 0,667;$$

$$y_2(2) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = 0,89;$$

$$y_3(2) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = 0,89.$$

Прогиб в пролете балки (сечение C)

$$EJ_x \vartheta_C = \omega_1 y_{1(2)} + \omega_2 y_{2(2)} + \omega_3 y_{3(2)} =$$
$$= \frac{2}{3} \cdot 10 \cdot 4 \cdot 0,667 + \frac{1}{2} \cdot 6,7 \cdot 4 \cdot 0,89 + \frac{1}{2} \cdot 16,7 \cdot 2 \cdot 0,89 = 44,58 \text{ кН} \cdot \text{м}^3$$

(направлен по направлению силы $F = 1$, т. е. вниз).

По полученным значениям прогибов строится соответствующая эпюра (рис. 5.30, e).

Очерчивая эпюру прогибов, следует обратить внимание, что консоль балки (участок BD) не нагружена и, следовательно, этот участок не деформируется, но перемещается вследствие деформации пролетной части.

В случае необходимости определения прогиба не на границе расчетных участков балки, а в произвольном сечении расчет по способу Верещагина значительно усложняется, особенно на участках с распределенной нагрузкой q .

В таких случаях лучше воспользоваться методом начальных параметров.

6. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ БАЛКИ

Статически неопределимыми называются балки, опорные реакции у которых невозможно определить при помощи одних лишь уравнений равновесия, так как они имеют «лишние» неизвестные реакции.

Степень статической неопределимости определяется разностью между числом неизвестных реакций и числом независимых уравнений равновесия.

Балки, изображенные на рис. 6.1, имеют четыре опорные связи, а следовательно и четыре опорные реакции. При трех возможных уравнениях равновесия ($\Sigma Z = 0$, $\Sigma Y = 0$, $\Sigma M = 0$) они являются один раз статически неопределимыми ($4 - 3 = 1$).

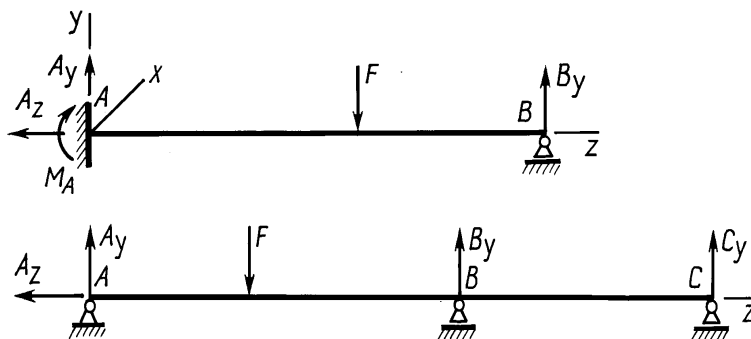


Рис. 6.1

Раскрытие статической неопределимости балки заключается в определении лишних неизвестных реакций путем составления дополнительных уравнений к имеющимся уравнениям равновесия. Дополнительных уравнений должно быть столько, сколько лишних неизвестных, т. е. сколько раз балка статически неопределима.

Существует несколько методов раскрытия статической неопределимости балок. Выбор метода связан со степенью статической неопределимости. Если «лишних» неизвестных немного (одна-две), дополнительные уравнения целесообразно составить, исходя из деформационных условий (прогибов) на опорах балки, используя метод начальных параметров.

У неразрезных балок степень статической неопределимости может быть высокой. В таких случаях дополнительные уравнения составля-

ются исходя из деформационных условий (углов поворота сечений) на промежуточных опорах балки с использованием метода сил.

Из совместного решения уравнений равновесия и дополнительных уравнений определяются все опорные реакции балки.

Для расчета статически неопределимой балки выбирается так называемая *основная система*, которая получается из статически неопределимой балки путем удаления «лишних» связей. Основная система должна быть статически определимой, геометрически и кинематически неизменяемой.

В качестве «лишних» неизвестных могут быть выбраны внешние (реакции опор) или внутренние факторы (изгибающие моменты в каком-либо сечении балки).

Дополнительные уравнения составляются из условий совместности перемещений основной системы и заданной балки. Существует несколько способов составления этих уравнений. Наиболее общим и распространенным является метод сил.

В неразрезной балке (рис. 6.2, *а*) решение по методу сил получается наименее трудоемким, если основную систему выбрать путем установки шарнира на промежуточной опоре (рис. 6.2, *б*). Тогда неразрезная балка разделится на две статически определимые, а в качестве неизвестной принимается изгибающий момент на промежуточной опоре (обозначается буквой X).

Эквивалентная система получается путем загрузки основной системы заданными внешними силами и неизвестными опорными моментами (рис. 6.2, *в*) и составлением условия совместности перемещения (основной системы и заданной балки).

Система канонических уравнений метода сил, полученная исходя из условий совместности перемещений основной системы и заданной балки, имеет вид

$$\begin{aligned} X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + \dots + X_n\delta_{1n} + \Delta_{1F} &= 0; \\ X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + \dots + X_n\delta_{2n} + \Delta_{2F} &= 0; \\ \dots\dots\dots & \\ X_1\delta_{n1} + X_2\delta_{n2} + \dots + X_n\delta_{nn} + \Delta_{nF} &= 0, \end{aligned} \tag{6.1}$$

где X_1, X_2, \dots, X_n – неизвестные изгибающие моменты на промежуточных опорах;

$\delta_{11}, \delta_{12}, \dots, \delta_{in}$ – коэффициенты – перемещения от единичных сил;
 $\Delta_{1F}, \Delta_{2F}, \dots, \Delta_{nF}$ – свободные члены – перемещения от заданных внешних сил (F, q, M).

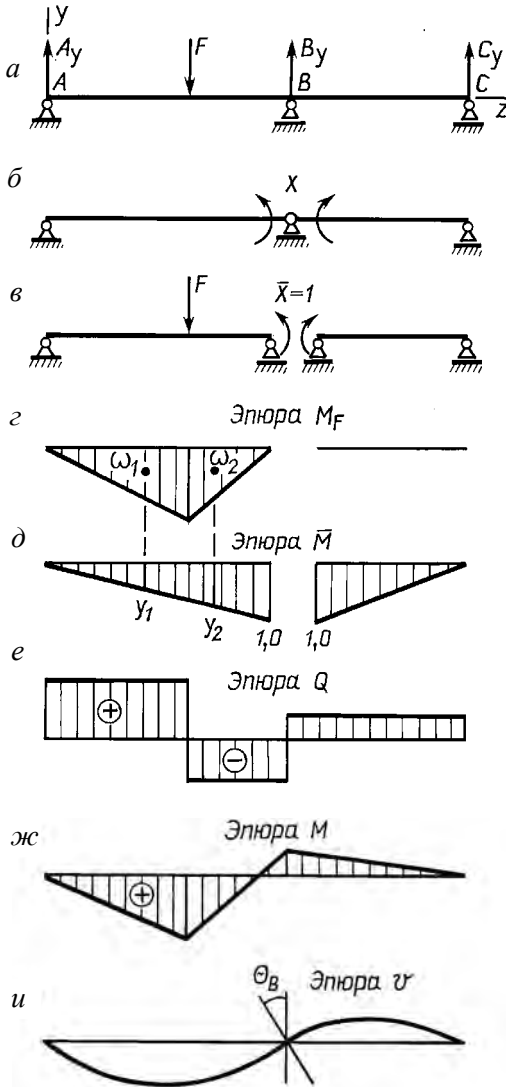


Рис. 6.2

Первый индекс коэффициентов и свободных членов уравнений означает направление перемещения и одновременно номер промежуточной опоры, второй – причину, вызвавшую перемещение (номер единичной силы).

Физический смысл уравнений метода сил для неразрезных балок заключается в неразрывности упругой линии над промежуточными опорами, т. е. в совместности угловых перемещений θ сечений над опорами (рис. 6.2, *и*).

Для определения параметров канонических уравнений необходимо построить эпюры изгибающих моментов для однопролетных балок основной системы: сначала от заданной нагрузки (грузовые эпюры M_F), рис. 6.2, *з*, а затем от опорных моментов, принятых равными единице: $X = 1$ (единичные эпюры \bar{M}), рис. 6.2, *д*.

Коэффициенты δ_i и свободные члены Δ_i канонических уравнений определяются по способу Верещагина путем перемножения единичных и грузовых эпюр:

$$\delta_i(\Delta_i) = \frac{1}{EJ_x} \sum \omega_i y_i.$$

У одной из эпюр берется ее площадь ω , а у другой – ордината y , измеренная против центра тяжести первой (см. п. 5.3).

Перемножая единичные эпюры сами на себя, получают значения $\delta_{11}, \delta_{22}, \dots, \delta_{nn}$, а между собой – $\delta_{12}, \delta_{21}, \dots, \delta_{1n}$. Исходя из теоремы о взаимности перемещений справедливы равенства $\delta_{12} = \delta_{21}$, $\delta_{1n} = \delta_{n1}$. Перемножив грузовые эпюры на единичные, получают значения свободных членов $\Delta_{1F}, \Delta_{2F}, \dots, \Delta_{nF}$.

Решив систему канонических уравнений, находят значения изгибающих моментов на промежуточных опорах неразрезной балки: $X_1 = M_1, X_2 = M_2, \dots, X_n = M_n$. Этим заканчивается раскрытие ее статической неопределимости.

Окончательные эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M строятся отдельно для каждого пролета балки, загруженного заданной нагрузкой и найденными опорными реакциями с учетом их знаков (рис. 6.2, *е, ж*).

Эпюра прогибов (см. рис. 6.2, *и*) строится по значениям прогибов, полученных любым из ранее названных способов.

Заметим, что на промежуточной опоре B угол поворота одинаковый как для левого примыкающего сечения, так и для правого, т. е. выполняется условие совместности перемещений, заложенное в канонические уравнения.

Расчет статически неопределимых балок на прочность и жесткость ведется так же, как и статически определимых.

Пример 6.1

Для балки (рис. 6.3, a) построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов и определить прогиб посередине пролета. Изобразить ось изогнутой балки.

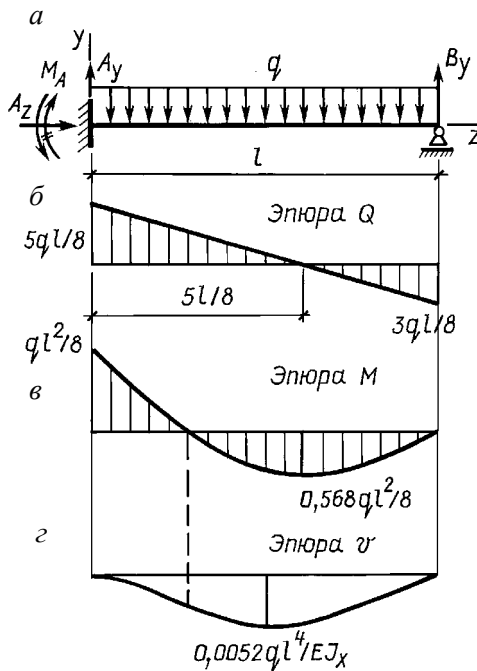


Рис. 6.3

Жесткость сечения балки EJ_x .

Решение

На левой опоре балки – защемлении (заделке) – возникнут три реакции A_y , A_z , M_A , на правой – шарнирно-подвижной – одна, B_y . Всего – четыре реакции. Уравнений равновесия можно составить только три ($\sum Y = 0$, $\sum Z = 0$, $\sum M = 0$). Значит, рассматриваемая балка является один раз статически неопределимой.

Составим уравнения равновесия:

$$\sum Z = A_z = 0, \text{ откуда } A_z = 0;$$

$$\sum Y = A_y - q l + B_y = 0; \quad (6.2)$$

$$\sum M_B = M_A - q l \frac{l}{2} + A_y l = 0. \quad (6.3)$$

Два уравнения равновесия содержат три неизвестные величины. Непосредственное решение уравнений невозможно.

Необходимо составить одно дополнительное уравнение, исходя из условий деформации на опорах балки: на опоре A угол поворота сечения $\theta_A = 0$, прогиб $\vartheta_A = 0$; на опоре B прогиб $\vartheta_B = 0$.

Используем условие на опоре B и составим выражение для определения прогиба ϑ_B по методу начальных параметров:

$$EJ_x \vartheta_B = EJ_x \vartheta_0 + EJ_x \theta_0 l + M_A \frac{l^2}{2} + A_y \frac{l^3}{6} - q \frac{l^4}{24} = 0.$$

Учтем, что на опоре A $\theta_A = 0$ и $\vartheta_A = 0$. Следовательно, начальные параметры уравнения прогибов $\theta_0 = 0$ и $\vartheta_0 = 0$.

Тогда

$$M_A + A_y \frac{l}{3} - q \frac{l^2}{12} = 0. \quad (6.4)$$

Решив совместно уравнения (6.3) и (6.4), получим

$$A_y = \frac{5}{8} q l, \quad M_A = -\frac{q l^2}{8}$$

(направление противоположно изображенному на рис. 6.3, a).

Реакцию B_y целесообразно определить из уравнения $\sum M_A = 0$:

$$\sum M_A = -M_A + q \frac{l^2}{2} - B_y l = -\frac{ql^2}{8} + \frac{ql^2}{2} - B_y l = 0,$$

откуда $B_y = \frac{3}{8} ql$.

Проверим правильность решения по уравнению (6.2).

$$\sum Y = \frac{5}{8} ql - ql + \frac{3}{8} ql = 0 \text{ – решение верно.}$$

После раскрытия статической неопределимости дальнейший расчет балки ведется как и для статически определимой.

Эпюры Q и M показаны на рис. 6.3, б и в.

Выражение для определения прогиба посередине пролета балки ($z = l/2$)

$$\begin{aligned} EJ_x \vartheta &= -M_A \frac{z^2}{2} + A_y \frac{z^3}{6} - q \frac{z^4}{24} = \\ &= -\frac{ql^2}{8 \cdot 2} \left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{5}{8} ql \frac{1}{6} \left(\frac{l}{2}\right)^3 - \frac{q}{24} \left(\frac{l}{2}\right)^4 = 0,0052ql^4, \end{aligned}$$

откуда прогиб

$$\vartheta = -\frac{0,0052ql^4}{EJ_x}.$$

Ось изогнутой балки (эпюра прогибов) изображена на рис. 6.3, г. Напомним, что эпюра прогибов в точке, где $M = 0$, имеет перегиб.

Пример 6.2

Для двухпролетной балки (рис. 6.4, а) построить эпюры Q и M , подобрать номер прокатного двутавра, определить прогиб в сечении D , изобразить ось изогнутой балки.

Для стали $R = 210$ МПа, $E = 200$ ГПа.

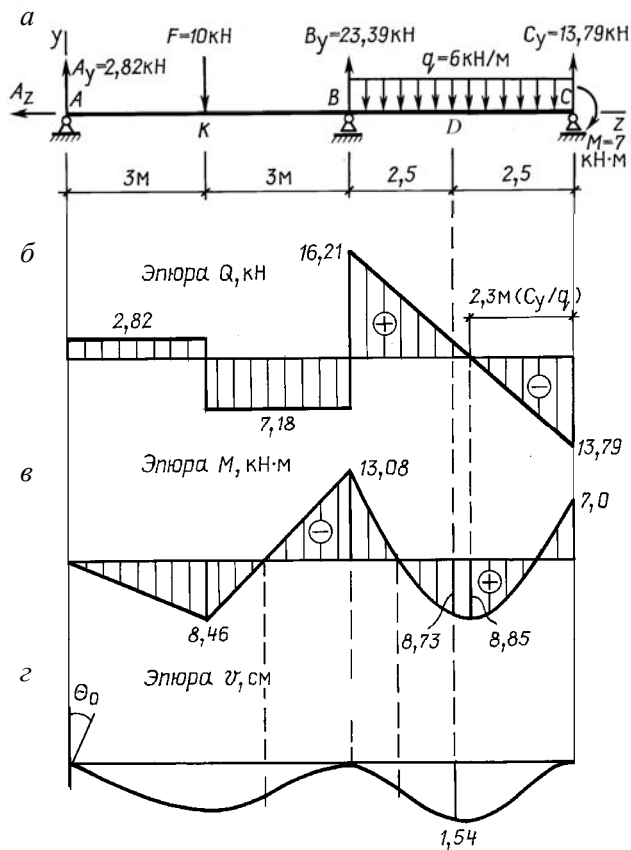


Рис. 6.4

Решение

Неизвестных опорных реакций четыре: A_z , A_y , B_y , C_y .
 Независимых уравнений равновесия три:

$$\sum Z = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum M = 0.$$

Следовательно, балка один раз статически неопределима.
 Уравнения равновесия

$$\sum Z = A_z = 0;$$

$$\sum Y = A_y + B_y + C_y - F - q \cdot 5 = 0. \quad (6.5)$$

Независимое уравнение $\sum M = 0$ можно составить только одно относительно любой точки балки. В примере рационально использовать точку C :

$$\sum M_C = A_y(6+5) + B_y \cdot 5 - F(3+5) - q \cdot 5 \cdot 2,5 + M = 0$$

или
$$11A_y + 5B_y - 148 = 0. \quad (6.6)$$

Раскрытие статической неопределимости проведем двумя методами: с использованием метода начальных параметров и метода сил.

1. *Расчет по методу начальных параметров.*

Составим дополнительное уравнение, исходя из деформативных условий на опорах балки: $\vartheta_B = 0$, $\vartheta_C = 0$.

Напомним, что начало координатных осей помещается в крайнем левом сечении балки – сечении A .

Составим выражения для названных прогибов.

При $z = 6$ м

$$EJ_x \vartheta_B = EJ_x \vartheta_0 + EJ_x \theta_0 \cdot 6 + A_y \frac{6^3}{6} - F \frac{3^3}{6} = 0. \quad (6.7)$$

При $z = 11$ м

$$EJ_x \vartheta_C = EJ_x \vartheta_0 + EJ_x \theta_0 \cdot 11 + A_y \frac{11^3}{6} - F \frac{8^3}{6} + B_y \frac{5^3}{6} - q \frac{5^4}{24} = 0. \quad (6.8)$$

Начальный параметр $\vartheta_0 = 0$, так как прогиб на опоре A $\vartheta_A = 0$.

Решая совместно уравнения (6.7) и (6.8), после исключения $EJ_x \theta_0$, получим

$$156A_y + 20,8B_y - 926,9 = 0. \quad (6.9)$$

Из совместного решения уравнений (6.6) и (6.9) найдем, что $A_y = 2,82$ кН, $B_y = 23,39$ кН.

Осталась неизвестной реакция C_Y . Для ее определения нужно составить уравнение $\sum M = 0$ относительно точки A или B :

$$\sum M_A = 10 \cdot 3 + 6 \cdot 5 \cdot 8,5 + 7 - 23,39 \cdot 6 - C_Y \cdot 11 = 0,$$

откуда $C_Y = 13,79$ кН.

Контроль правильности определения реакций выполним по уравнению (6.5):

$\sum Y = 2,82 + 23,39 + 13,79 - 10 - 6 \cdot 5 = 40,0 - 40,0 = 0$ – раскрытие статической неопределимости выполнено верно.

Дальнейший расчет балки обычный.

Ординаты эпюры M в характерных сечениях:

сечение A : $M = 0$;

сечение K :

$$M = 2,82 \cdot 3 = 8,46 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

сечение B :

$$M = 2,82 \cdot 6 - 10 \cdot 3 = -13,08 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

сечение C :

$$M = -7 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

сечение D :

$$M = -7 - 6 \cdot 2,5 \cdot \frac{2,5}{2} + 13,79 \cdot 2,5 = 8,73 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

При $z = 2,3$ м (ход справа)

$$M = -7 - 6 \cdot \frac{2,3^2}{2} + 13,79 \cdot 2,3 = 8,85 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Эпюры Q и M показаны на рис. 6.4, б, в.

Из эпюры M следует, что $M_{\max} = 13,08$ кН·м.

Требуемый момент сопротивления для подбора номера двутавра

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{R} = \frac{13,08 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 0,0623 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 62,3 \text{ см}^3.$$

Принимаем двутавр № 14 с $W_x = 81,7 \text{ см}^3$, $J_x = 572 \text{ см}^4$.

Для определения прогибов в сечениях балки составим соответствующее выражение (по методу начальных параметров), учтя, что $\vartheta_0 = 0$:

$$EJ_x \vartheta = EJ_x \theta_0 z + 2,82 \frac{z^3}{6} - 10 \frac{(z-3)^3}{6} + 23,39 \frac{(z-6)^3}{6} - 6 \frac{(z-6)^4}{24}.$$

Начальный параметр θ_0 определим из условия, что прогиб на опоре B ($z = 6 \text{ м}$) равен нулю ($\vartheta_B = 0$):

$$EJ \vartheta_B = EJ_x \theta_0 \cdot 6 + 2,82 \cdot \frac{6^3}{6} - 10 \frac{(6-3)^3}{6} = 0,$$

откуда $EJ_x \theta_0 = -9,42 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$.

Прогиб в заданном сечении D (при $z = 8,5 \text{ м}$)

$$EJ_x \vartheta_D = -9,42 \cdot 8,5 + 2,82 \frac{8,5^3}{6} - 10 \frac{(8,5-3)^3}{6} +$$

$$+ 23,39 \frac{(8,5-6)^3}{6} - 6 \frac{(8,5-6)^4}{24} = -17,58 \text{ кН} \cdot \text{м}^3,$$

$$\vartheta_D = -\frac{17,58 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^9 \cdot 572 \cdot 10^{-8}} = -0,0001537 \cdot 10^2 \text{ м} = -1,54 \text{ см}.$$

Ось изогнутой балки изображена на рис. 6.4, z .

Напомним, что очертание эпюры прогибов необходимо согласовывать с эпюрой M : ординаты M должны находиться на выпуклой стороне балки. В сечениях, где $M = 0$, на эпюре прогибов находятся точки перегиба.

2. Расчет по методу сил.

Необходимую для расчета основную систему получим путем постановки шарнира на промежуточной опоре B (рис. 6.5, а).

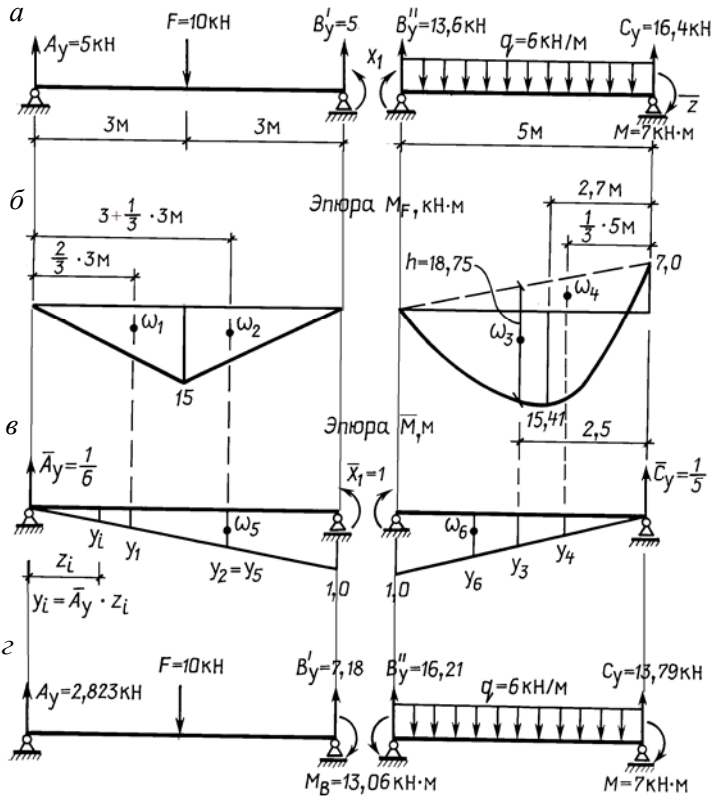


Рис. 6.5

Образуются две статически определимые балки, связанные между собой шарниром B (на рис. 6.5, а для удобства пояснения балки раздвинуты).

Обозначим неизвестный опорный момент через X_1 и для его определения запишем каноническое уравнение метода сил (6.1):

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1F} = 0.$$

Параметры уравнения определим по способу Верещагина. Сначала загружаем основную систему заданной нагрузкой, определяем опорные реакции и обычным способом строим эпюры изгибающих моментов M_F (грузовые эпюры) для каждого пролета (рис. 6.5, б).

Затем нагружаем основную систему единичным опорным моментом $\overline{X}_1 = 1$, определяем опорные реакции и строим эпюру изгибающих моментов \overline{M} (единичную эпюру) также для каждого пролета (рис. 6.5, в).

Грузовая эпюра M_F расчленяется на простые фигуры $\omega_1 - \omega_4$, и отмечаются их центры тяжести. На единичных эпюрах \overline{M} под центром тяжести простых фигур вычисляются значения ординат $y_1 - y_4$ и отмечаются собственные центры тяжести ω_5, ω_6 .

Вычислим сначала значения всех площадей ω (треугольники и парабола) и ординат y .

Площади:

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{15 \cdot 3}{2} = 22,5 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$\omega_3 = \frac{2}{3}hl = \frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{8}l = \frac{2}{3} \cdot \frac{6 \cdot 5^2}{8} \cdot 5 = 62,5 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$\omega_4 = \frac{7 \cdot 5}{2} = 17,5 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$\omega_5 = \frac{1 \cdot 6}{2} = 3 \text{ м};$$

$$\omega_6 = \frac{1 \cdot 5}{2} = 2,5 \text{ м}.$$

Ординаты:

$$y_1 = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 = \frac{1}{3} \text{ м};$$

$$y_2 = y_5 = \frac{1}{6} \left(3 + \frac{1}{3} \cdot 3 \right) = \frac{2}{3} \text{ м};$$

$$y_3 = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 = \frac{1}{2} \text{ м};$$

$$y_4 = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot 5 = \frac{1}{3} \text{ м};$$

$$y_6 = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{2}{3} \text{ м}.$$

Напомним, что $y_i = \bar{A}_y (\bar{C}_y) z_i$.

Приступаем к определению параметров уравнения метода сил (6.5).

Умножив единичную эпюру \bar{M} сама на себя, получим значение коэффициента уравнения:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_x} (\omega_5 y_5 + \omega_6 y_6) = \frac{1}{EJ_x} \left(3 \cdot \frac{2}{3} + 2,5 \cdot \frac{2}{3} \right) = \frac{3,67}{EJ_x}.$$

Умножив грузовую эпюру M_F на единичную \bar{M} , получим значение свободного члена уравнения:

$$\begin{aligned} \Delta_{1F} &= \frac{1}{EJ_x} (\omega_1 y_1 + \omega_2 y_2 + \omega_3 y_3 - \omega_4 y_4) = \\ &= \frac{1}{EJ_x} \left(22,5 \cdot \frac{1}{3} + 22,5 \cdot \frac{2}{3} + 62,5 \cdot \frac{1}{2} - 17,5 \cdot \frac{1}{3} \right) = \frac{47,92}{EJ_x}. \end{aligned}$$

Заметим, что произведение ωy будет положительным, если площадь ω и ордината y лежат по одну сторону от оси эпюры, отрицательным – если по разные (в примере ω_4 и y_4 лежат по разные стороны оси).

Полученные значения подставим в каноническое уравнение:

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1F} = X_1 \cdot 3,67 + 47,92 = 0,$$

откуда
$$X_1 = -\frac{47,92}{3,67} = -13,06 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Знак «минус» при X_1 означает, что направление изгибающего момента на опоре B противоположно предполагаемому.

Таким образом, определением изгибающего момента на опоре B балки $M_B = X_1 = 13,06$ кН·м заканчивается раскрытие ее статической неопределенности.

Для построения эюр Q и M нужно рассматривать отдельно балку каждого пролета, нагруженную заданной нагрузкой и найденным опорным моментом (рис. 6.5, z).

Построив эюры Q и M , можно убедиться, что они совпадают с показанными на рис. 6.4, b , $в$.

Для определения прогибов по способу Верещагина в заданном сечении D основной системы следует приложить единичную силу $\bar{F} = 1$ (рис. 6.6, b), построить от нее единичную эюру \bar{M} и перемножить эту эюру с окончательной эюрой изгибающих моментов M в этом пролете балки (рис. 6.6, a).

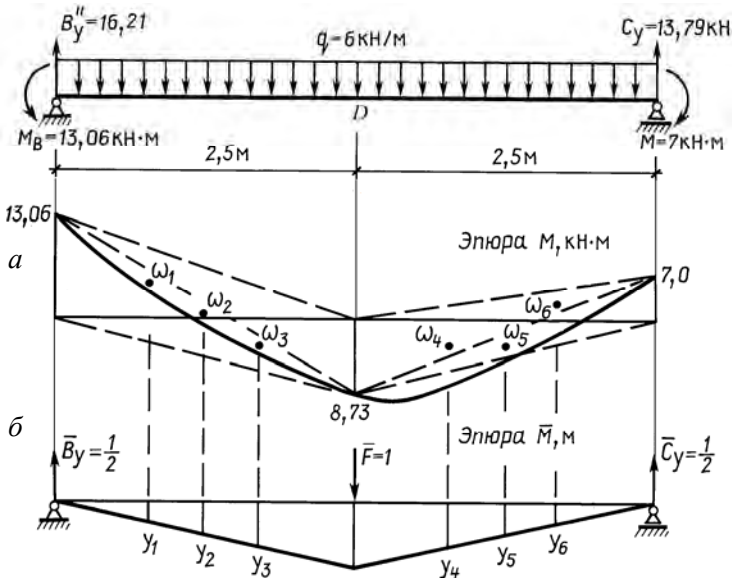


Рис. 6.6

При разделении сложной эюры M на простые фигуры следует иметь в виду, что единичная сила $\bar{F} = 1$ разделила пролет балки на

два расчетных участка и на каждом из них выделяются парабола и два треугольника (см. рис. 6.6, а).

Площади фигур

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \cdot 13,06 \cdot 2,5 = 16,33 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$\omega_2 = \omega_5 = \frac{2}{3} hl = \frac{2}{3} \cdot \frac{6 \cdot 2,5^2}{8} \cdot 2,5 = 7,81 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$\omega_3 = \omega_4 = \frac{1}{2} \cdot 8,73 \cdot 2,5 = 10,91 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$\omega_6 = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 2,5 = 8,75 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Ординаты y

$$y_1 = y_6 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2,5}{3} = 0,417 \text{ м};$$

$$y_3 = y_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,5 = 0,833 \text{ м};$$

$$y_2 = y_5 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2,5}{2} = 0,625 \text{ м}.$$

Заметим, что обе параболы (ω_2 и ω_5) лежат ниже оси эпюры M . Это станет очевидным, если представить эпюру M только от распределенной нагрузки q .

Прогиб в сечении D :

$$\begin{aligned} EJ_x \vartheta_D &= -\omega_1 y_1 + \omega_2 y_2 + \omega_3 y_3 + \omega_4 y_4 + \omega_5 y_5 - \omega_6 y_6 = \\ &= -16,33 \cdot 0,417 + 7,81 \cdot 0,625 + 10,91 \cdot 0,833 + 10,91 \cdot 0,833 + \\ &\quad + 7,81 \cdot 0,625 - 8,75 \cdot 0,417 = 17,48 \text{ кН} \cdot \text{м}^3. \end{aligned}$$

$$\vartheta_D = \frac{17,48 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^9 \cdot 572 \cdot 10^{-8}} = 0,0001528 \cdot 10^2 \text{ м} = 1,53 \text{ см}.$$

Знак «плюс» при \mathcal{D} означает, что прогиб происходит в направлении единичной силы $\overline{F} = 1$, т. е. вниз.

Таким образом, результаты расчета двухпролетной балки методом начальных параметров и методом сил совпадают.

Анализируя трудоемкость расчета, можно сделать вывод, что для балки один раз статически неопределимой оба метода примерно равноценны. При большей степени статической неопределимости метод сил эффективнее.

Заметим, что при сложной нагрузке (особенно распределенной q) вычисление прогибов по способу Верещагина может оказаться сложнее, чем по методу начальных параметров.

Пример 6.3

Для многопролетной балки (рис. 6.7, а) построить эпюры Q и M , подобрать номер прокатного двутавра, если $R = 210$ МПа.

Определить прогиб посередине ненагруженного пролета, изобразить ось изогнутой балки.

Решение

Рассматриваемая балка состоит из трех пролетов и проходит не прерываясь над двумя промежуточными опорами, т. е. является неразрезной и дважды статически неопределимой (по числу промежуточных опор). Для ее решения воспользуемся методом сил.

Основную систему получим путем постановки шарниров на промежуточных опорах B и C (рис. 6.7, б). Обозначив неизвестные изгибающие моменты на этих опорах через X_1 и X_2 , запишем систему канонических уравнений по выражению (6.1):

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Загрузив основную систему заданной нагрузкой (рис. 6.7, б), вычислив опорные реакции и значения M в характерных сечениях, построим грузовую эпюру изгибающих моментов M_F для каждого пролета балки (рис. 6.7, в).

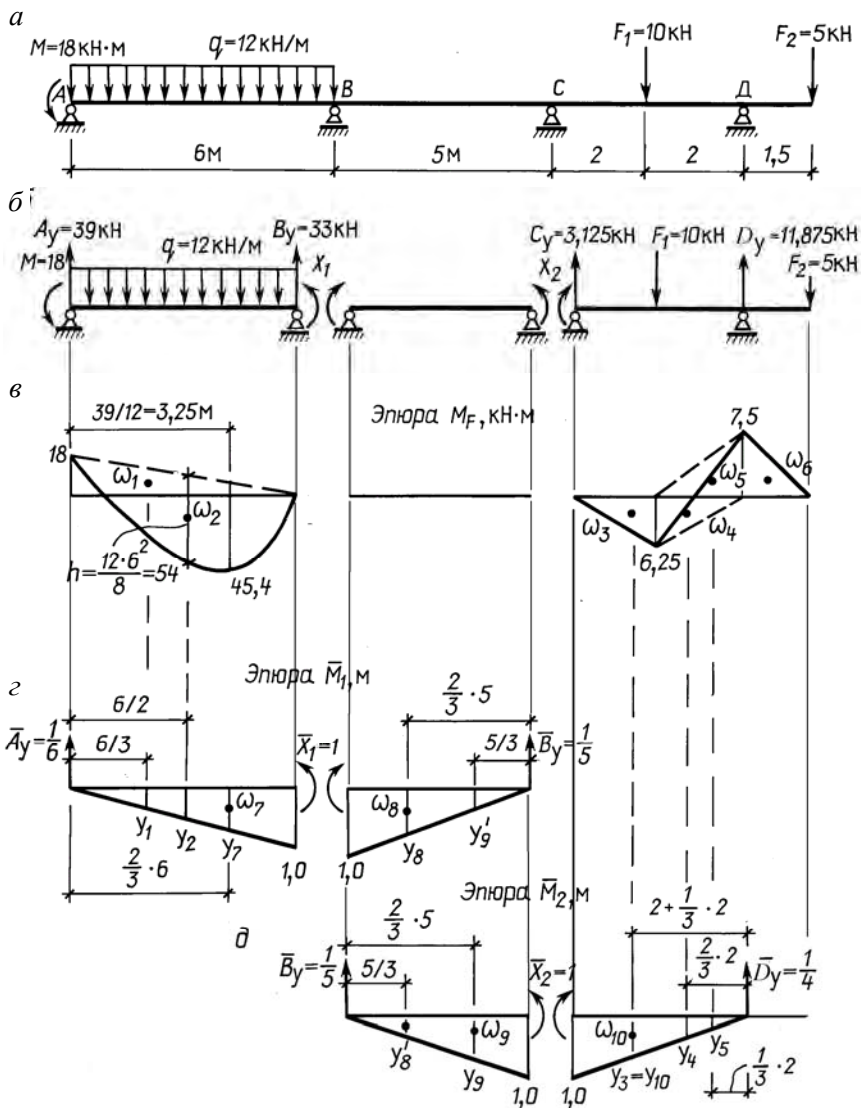


Рис. 6.7

Затем нагружаем основную систему единичными опорными моментами $\bar{X}_1=1$ на опоре В и $\bar{X}_2=1$ – на опоре С. Для каждого

пролета основной системы определяем опорные реакции и строим единичные эпюры \overline{M} (рис. 6.7, з, д).

Грузовая эпюра M_F расчленяется на простые фигуры $\omega_1-\omega_6$, и отмечаются их центры тяжести (см. рис. 6.7, в). На единичных эпюрах \overline{M} под центрами тяжести $\omega_1-\omega_6$ вычисляются значения ординат y_1-y_6 (см. рис. 6.7, з, д). Отмечаются также центры тяжести единичных эпюр $\omega_7-\omega_{10}$ и ординаты y_7-y_{10} в их расположении.

Вычисляем значения площадей фигур, составляющих эпюры M_F и \overline{M} :

$$\omega_1 = \frac{18 \cdot 6}{2} = 54 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$\omega_2 = \frac{2}{3}hl = \frac{2}{3} \cdot 54 \cdot 6 = 216 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$\omega_3 = \omega_4 = \frac{6,25 \cdot 2}{2} = 6,25 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$\omega_5 = \frac{7,5 \cdot 2}{2} = 7,5 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$\omega_6 = \frac{7,5 \cdot 1,5}{2} = 5,63 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$\omega_7 = \frac{1 \cdot 6}{2} = 3,0 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$\omega_8 = \omega_9 = \frac{1 \cdot 5}{2} = 2,5 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$\omega_{10} = \frac{1 \cdot 4}{2} = 2,0 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Вычисляем значения ординат y на единичных эпюрах:

$$y_1 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot 6 = \frac{1}{3} \text{ м};$$

$$y_2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 = \frac{1}{2} \text{ м};$$

$$y_3 = \frac{1}{4} \cdot \left(2 + \frac{1}{3} \cdot 2\right) = \frac{2}{3} \text{ м};$$

$$y_4 = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{1}{3} \text{ м};$$

$$y_5 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{1}{6} \text{ м};$$

$$y_6 = 0 \text{ м};$$

$$y_7 = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{2}{3} \text{ м};$$

$$y_8 = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{2}{3} \text{ м};$$

$$y'_8 = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot 5 = \frac{1}{3} \text{ м};$$

$$y_9 = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{2}{3} \text{ м};$$

$$y'_9 = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot 5 = \frac{1}{3} \text{ м};$$

$$y_{10} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{2}{3} \text{ м}.$$

Перемножив единичные эпюры (сами на себя и между собой), получим значения коэффициентов канонических уравнений:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_x} (\omega_7 y_7 + \omega_8 y_8) = \frac{1}{EJ_x} \left(3 \cdot \frac{2}{3} + 2,5 \cdot \frac{2}{3} \right) = \frac{3,667}{EJ_x};$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ_x} (\omega_9 y_9 + \omega_{10} y_{10}) = \frac{1}{EJ_x} \left(2,5 \cdot \frac{2}{3} + 2,0 \cdot \frac{2}{3} \right) = \frac{3,0}{EJ_x};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EJ_x} (\omega_8 y_8') = \frac{1}{EJ_x} \left(2,5 \cdot \frac{1}{3} \right) = \frac{0,833}{EJ_x}.$$

Перемножив грузовые эпюры на единичные, получим значения свободных членов канонических уравнений:

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EJ_x} (-\omega_1 y_1 + \omega_2 y_2) = \frac{1}{EJ_x} \left(-54 \cdot \frac{1}{3} + 216 \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{90}{EJ_x};$$

$$\begin{aligned} \Delta_{2F} &= \frac{1}{EJ_x} (\omega_3 y_3 + \omega_4 y_4 - \omega_5 y_5 - \omega_6 y_6) = \\ &= \frac{1}{EJ_x} \left(6,25 \cdot \frac{2}{3} + 6,25 \cdot \frac{1}{3} - 7,5 \cdot \frac{1}{6} - 5,63 \cdot 0 \right) = \frac{5}{EJ_x}. \end{aligned}$$

С учетом значений коэффициентов и свободных членов канонические уравнения примут вид

$$\left. \begin{aligned} 3,667 X_1 + 0,883 X_2 + 90 &= 0; \\ 0,883 X_1 + 3,00 X_2 + 5 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

Решив систему уравнений (6.10), получим значения изгибающих моментов на промежуточных опорах неразрезной балки:

$$X_1 = M_1 = -25,79 \text{ кН}\cdot\text{м}, \quad X_2 = M_2 = 5,489 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Решая задачи самостоятельно, не забудьте проверить правильность решения системы уравнений (6.10).

Заметим и учтем, что направление опорного момента M_1 противоположно направлению \overline{X}_1 (знак «минус»), а направления M_2 и \overline{X}_2 совпадают.

Определением значений M_1 и M_2 заканчивается раскрытие статической неопределенности балки.

Окончательные эпюры Q и M построим, рассматривая отдельно каждый пролет неразрезной балки как самостоятельную балку, нагруженную заданной нагрузкой и найденными опорными моментами (рис. 6.8, а). Сначала определяются опорные реакции, а затем значения Q и M в характерных сечениях.

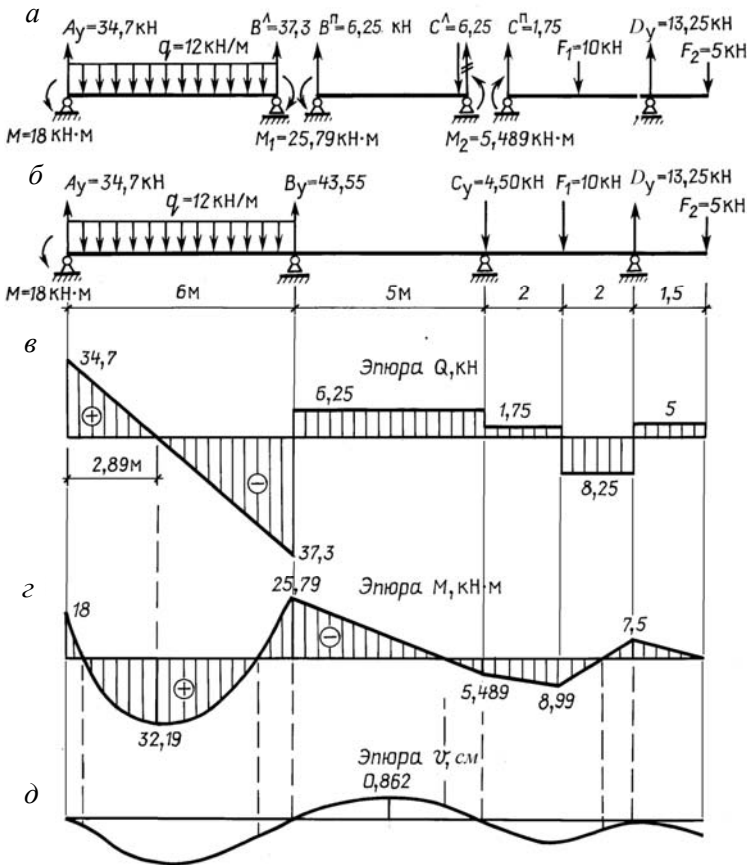


Рис. 6.8

Эпюры Q и M для рассмотренной неразрезной балки показаны на рис. 6.8, б, в.

Для проверки правильности выполнения расчетов надо перемножить окончательную эпюру изгибающих моментов на единичные. Решение будет верным, если результат перемножения будет равен нулю.

Ограничимся перемножением окончательной эпюры M на единичную \bar{M}_1 (рис. 6.9, а, б):

$$\begin{aligned} \Delta_{1F} &= \frac{1}{EJ_x} \Sigma(\omega_i y_i) = \frac{1}{EJ_x} \left(\frac{2}{3} \cdot 54 \cdot 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 - 18 \cdot 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(25,79 - 18) \cdot 6}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 - \frac{25,79 \cdot 5}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 + \frac{5,489 \cdot 5}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot 5 \right) = \\ &= \frac{0,01}{EJ_x} \approx 0 - \text{решение верно.} \end{aligned}$$

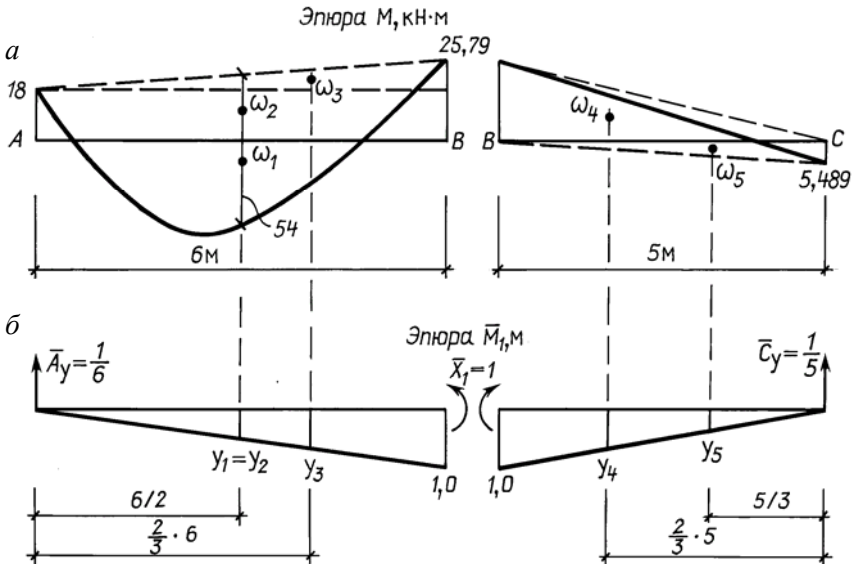


Рис. 6.9

Определим номер двутавра. Из окончательной эпюры M следует, что $M_{\max} = 32,19 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Требуемый момент сопротивления сечения

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{R} = \frac{32,19 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 153 \text{ см}^3.$$

Принимаем двутавр № 20, для которого $W_x = 184 \text{ см}^3$, $J_x = 1840 \text{ см}^4$.

Для определения прогиба посередине пролета BC (сечение K) следует в названном сечении основной системы приложить единичную силу $\bar{F} = 1$ и построить единичную эпюру \bar{M} (рис. 6.10, a).

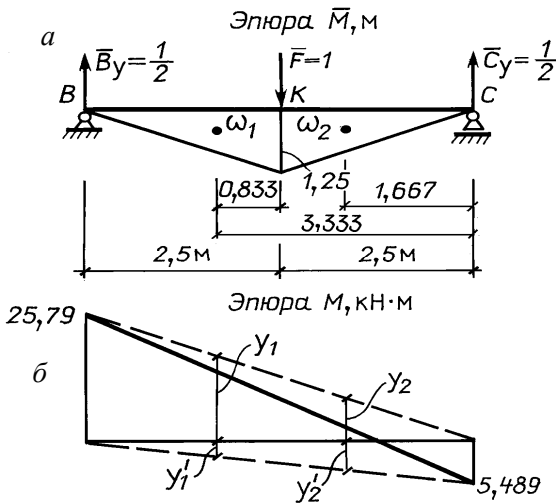


Рис. 6.10

Напомним, что:

- единичная эпюра всегда прямолинейна;
- площадь ω берется обязательно с криволинейной эпюры;
- если обе эпюры (грузовая и единичная) прямолинейны, без перелома, площадь ω можно взять от любой из них;
- если одна из эпюр изображается ломаной линией, она разбивается на ряд участков и площадь ω берется именно с этой эпюры.

В настоящем примере на грузовой эпюре M – один расчетный участок, на единичной (ломаная прямая) – два. Площадь ω берут с каждого участка единичной эпюры, а ординаты y – с грузовой, расчленив ее, как показано на рис. 6.10, б.

Значения площадей и ординат:

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{1,25 \cdot 2,5}{2} = 1,563 \text{ м};$$

$$y_1 = \frac{25,79}{5} \cdot 3,333 = 17,19 \text{ м (из подобных треугольников);}$$

$$y'_1 = \frac{5,489}{5} \cdot 1,667 = 1,83 \text{ м};$$

$$y_2 = 8,598 \text{ м}; \quad y'_2 = 3,659 \text{ м}.$$

Перемножив эпюры, получим

$$\begin{aligned} EJ_x \vartheta_K &= -\omega_1(y_1 - y'_1) - \omega_2(y_2 - y'_2) = \\ &= -1,563 \cdot (17,19 - 1,83) - 1,563 \cdot (8,598 - 3,659) = -31,73 \text{ кН} \cdot \text{м}^3, \end{aligned}$$

откуда прогиб

$$\vartheta_K = -\frac{31,73 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^9 \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = -0,00862 \text{ м} = -0,862 \text{ см}.$$

Знак «минус» при ϑ означает, что прогиб происходит в направлении, противоположном единичной силе $\bar{F} = 1$, т. е. вверх (рис. 6.8, д).

Ось изогнутой неразрезной балки (эпюра прогибов) изображена на рис. 6.8, д.

Обратите внимание на точки перегиба на эпюре ϑ и проследите согласование расположения ординат эпюры M с выпуклостью балки.

7. АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В ТОЧКЕ

В разделе «Введение» было определено, что материал конструкции может находиться в линейном, плоском или объемном напряженном состоянии, в зависимости от того, испытывает ли выделенный вокруг точки элементарный параллелепипед растяжение или сжатие соответственно в одном, двух или трех взаимно перпендикулярных направлениях. В этом разделе рассматриваются линейное и плоское напряженные состояния. Объемное напряженное состояние рассматривается в курсе «Теория упругости».

Анализ напряженного состояния в точке деформированного тела сводится к определению напряжений в наклонных площадках при известных главных напряжениях (прямая задача) и определению главных напряжений по известным неглавным напряжениям (обратная задача).

Значения главных напряжений используются при проверке прочности элементов конструкций по соответствующим теориям прочности.

Нормальные и касательные напряжения на площадках элемента определяются по формулам сопротивления материалов, а также методами теории упругости. Эти напряжения могут быть получены и опытным путем посредством электротензометрии.

Установим правило знаков для напряжений. Растягивающее нормальное напряжение будем считать положительным, сжимающее – отрицательным. Касательное напряжение будет положительным, если оно стремится повернуть бесконечно малый элемент конструкции по ходу часовой стрелки, и наоборот (рис. 7.1).

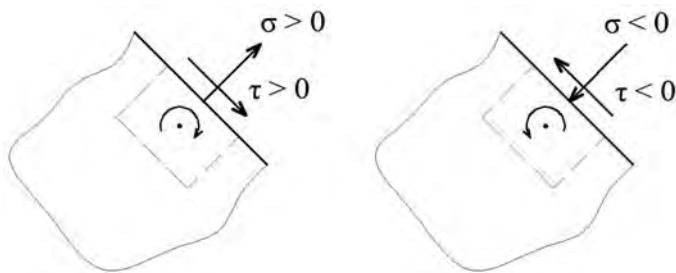


Рис. 7.1

7.1. Линейное напряженное состояние

Этот вид напряженного состояния имеет место в материале элементов конструкций, подвергающихся растяжению-сжатию, в некоторых точках сечений изгибаемых элементов и других видах деформаций (сопротивлений).

При линейном (одноосном) напряженном состоянии по исходным граням элемента действуют только нормальные напряжения и только в одном направлении (по одной оси): σ_1 — при растяжении (рис. 7.2, а) или σ_3 — при сжатии (рис. 7.2, б). Касательные напряжения по этим граням отсутствуют.

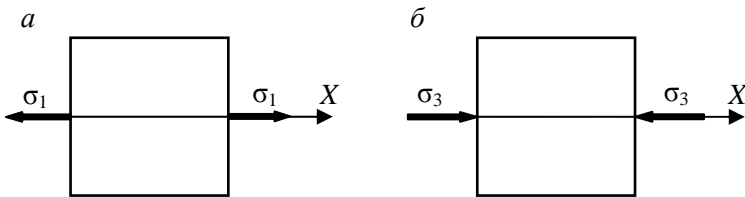


Рис. 7.2

В наклонных площадках (сечениях), образующих новый элемент внутри исходного, действуют как нормальные, так и касательные напряжения (рис. 7.3, а).

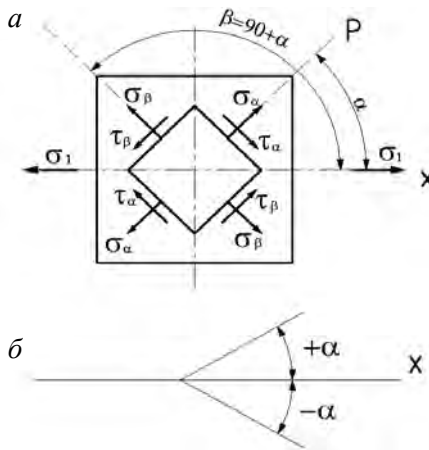


Рис. 7.3

Угол α , отсчитываемый от направления главного напряжения к нормали P в наклонной площадке против хода часовой стрелки, считается положительным (рис. 7.3, б).

При решении прямой задачи, т. е. при определении нормальных и касательных напряжений в наклонных площадках, используются следующие формулы:

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cos^2 \alpha; \quad \tau_{\alpha} = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha; \quad (7.1)$$

$$\sigma_{\beta} = \sigma_1 \sin^2 \alpha; \quad \tau_{\beta} = -\frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha. \quad (7.2)$$

Здесь $\sigma_1 = \sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta} = \text{const}$ – нормальное напряжение в поперечном сечении стержня. Из формул (7.1) и (7.2) следует, что $\tau_{\alpha} = -\tau_{\beta}$.

Проведем анализ напряжений в элементе при линейном напряженном состоянии:

$$\text{при } \alpha = 0 \quad \sigma_{\alpha} = \sigma_1, \quad \tau_{\alpha} = 0;$$

$$\text{при } \alpha = 45^{\circ} \quad \sigma_{\alpha} = \sigma_1/2, \quad \tau_{\alpha} = \sigma_1/2;$$

$$\text{при } \alpha = 90^{\circ} \quad \sigma_{\alpha} = 0, \quad \tau_{\alpha} = 0.$$

Очевидно, что максимальные нормальные напряжения появляются при $\alpha = 0$, т. е. в поперечном сечении стержня. Максимальные касательные напряжения появляются в наклонном под углом 45° сечении и равны половине нормального напряжения.

Пример 7.1

На элементарный параллелепипед, выделенный в окрестности некоторой точки деформированного стержня, действует нормальное напряжение $\sigma_x = 200$ МПа (рис. 7.4).

Определить значения нормальных и касательных напряжений по площадкам под углом $\alpha = 30^{\circ}$ и $\beta = 120^{\circ}$ к исходной грани, а также значение наибольшего касательного напряжения.

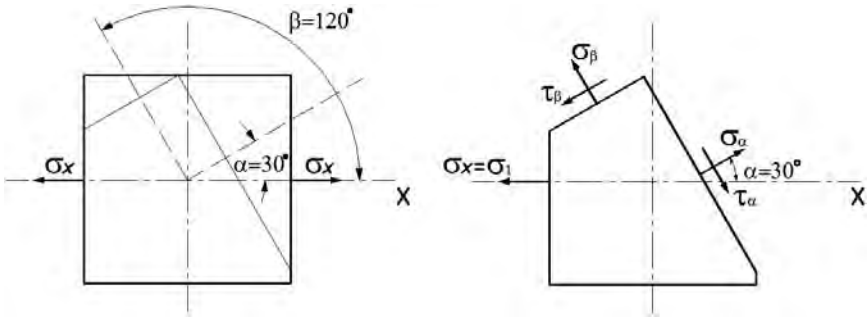


Рис. 7.4

Решение

Элементарный параллелепипед находится в условиях линейного напряженного состояния, так как по его граням действуют только нормальные напряжения и только в одном направлении. Исходя из этого, $\sigma_x = \sigma_1 = 200$ МПа.

По площадкам параллелепипеда под углом $\alpha = 30^\circ$ и $\beta = 120^\circ$ действуют нормальные и касательные напряжения (см. рис. 7.4), которые определяются по формулам (7.1), (7.2):

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha = 200 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 150 \text{ МПа};$$

$$\sigma_\beta = \sigma_1 \sin^2 \alpha = 200 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 50 \text{ МПа};$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha = \frac{200}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 86,6 \text{ МПа};$$

$$\tau_\beta = -\tau_\alpha = -86,6 \text{ МПа}.$$

Наибольшее касательное напряжение будет действовать в сечении под углом $\alpha = 45^\circ$ к оси X:

$$\tau_{\alpha=45^\circ} = \tau_{\max} = \frac{\sigma_1}{2} \sin 90^\circ = \frac{200}{2} \cdot 1 = 100 \text{ МПа}.$$

Пример 7.2

Как велики должны быть нормальные напряжения, действующие по граням параллелепипеда (рис. 7.5) в направлении оси X, чтобы в наклонной площадке под углом $\alpha = 60^\circ$ нормальное напряжение было сжимающим и не превышало 30 МПа? Касательное напряжение не должно превышать 40 МПа.

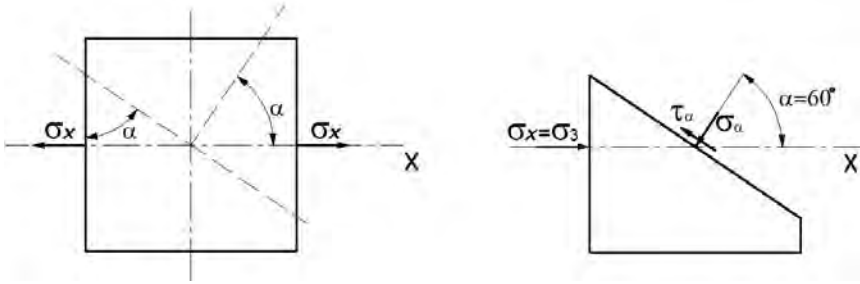


Рис. 7.5

Решение

Рассматриваемый параллелепипед находится в условиях линейного напряженного состояния. Для того чтобы в наклонной площадке появилось сжимающее напряжение, по исходной площадке должно действовать также сжимающее напряжение: $\sigma_x = \sigma_z$.

По формулам (7.1), исходя из требования по σ и по τ при $\alpha = 60^\circ$:

$$\sigma_x = \frac{\sigma_\alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{-30}{0,5^2} = -120 \text{ МПа};$$

$$\sigma_x = \frac{2\tau_\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{2(-40)}{0,866} = -92,4 \text{ МПа.}$$

Принимаем $\sigma_x = \sigma_z = -92,4$ МПа.

Пример 7.3

Элементарный параллелепипед находится в условиях линейного напряженного состояния. При условии $\sigma_1 = R = 210$ МПа определить положение наклонной площадки, в которой нормальное напряжение будет равно $0,8R$.

Решение

Напряжение на наклонной площадке

$$\sigma_\alpha = 0,8R = 0,8 \cdot 210 = 168 \text{ МПа.}$$

Из формулы (7.1)

$$\cos^2 \alpha = \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_1} = \frac{168}{210} = 0,8,$$

откуда $\cos \alpha = 0,894$, угол $\alpha = 26,6^\circ$.

7.2. Плоское напряженное состояние

Этот вид напряженного состояния имеет место в материале элементов конструкций, подвергающихся изгибу, в трубах с внутренним давлением, при изгибе с кручением и других видах деформаций (сопротивлений).

При плоском (двухосном) напряженном состоянии в элементе, выделенном в окрестности исследуемой точки, по двум взаимно перпендикулярным направлениям: σ_1 и σ_2 или σ_1 и σ_3 , или σ_2 и σ_3 (рис. 7.6), действуют два главных отличных от нуля напряжения.

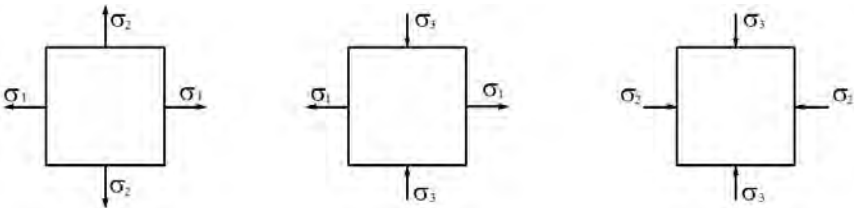


Рис. 7.6

Решение прямой задачи — определение напряжений по наклонным площадкам при известных главных напряжениях, действующих по исходным граням (рис. 7.7), производится по формулам

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha ; \quad \tau_{\alpha} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha ; \quad (7.3)$$

$$\sigma_{\beta} = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha ; \quad \tau_{\beta} = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha . \quad (7.4)$$

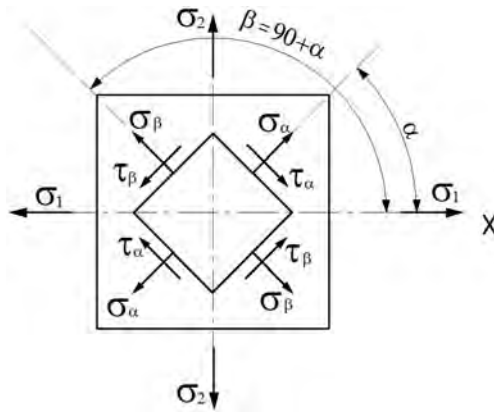


Рис. 7.7

Таким образом, $\tau_{\alpha} = -\tau_{\beta}$, т. е. по двум взаимно перпендикулярным площадкам всегда действуют равные по величине касательные напряжения, направленные так, что поворачивают элемент в противоположные направления — закон парности касательных напряжений.

При любых значениях угла α

$$\sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta} = \sigma_1 + \sigma_2 .$$

Наибольшие нормальные напряжения в случае плоского напряженного состояния

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \text{ при } \alpha = 0,$$

а наибольшие касательные напряжения

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad \text{при } \alpha = 45^{\circ}. \quad (7.5)$$

Угол α отсчитывается от большего главного напряжения против хода часовой стрелки при положительном его значении (см. рис. 7.3, б).

Для определения значений главных напряжений, максимальных касательных напряжений, а также положения главных площадок (обратная задача) используются формулы

$$\sigma_{\max}^{\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2}; \quad (7.6)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{yx}}{\sigma_x - \sigma_y}; \quad (7.7)$$

$$\tau_{\alpha=45^{\circ}} = \tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2}, \quad (7.8)$$

при этом $\sigma_1 = \sigma_{\max}$, $\sigma_2 = \sigma_{\min}$ или $\sigma_3 = \sigma_{\min}$ (рис. 7.8).

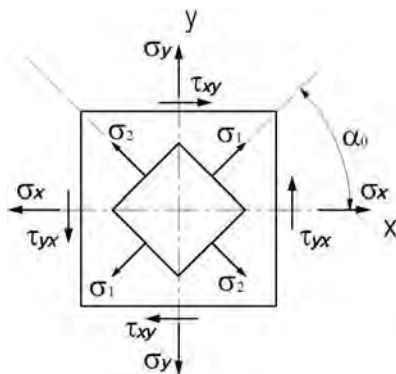


Рис. 7.8

Плоское напряженное состояние, при котором $\sigma_1 = -\sigma_3$, называют *чистым сдвигом*. В этом случае по площадкам под углом $\alpha = 45^\circ$ нормальные напряжения равны нулю, а касательные равны главным (рис. 7.9).

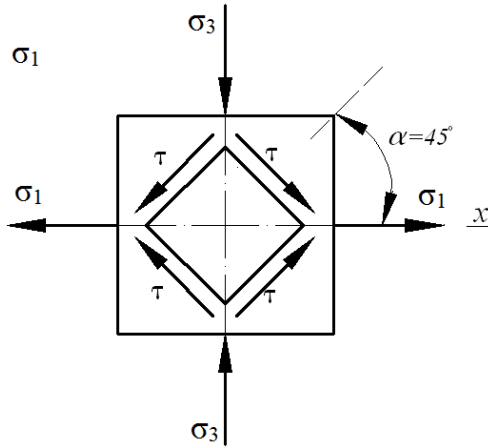


Рис. 7.9

Пример 7.4

По исходным граням параллелепипеда действуют нормальные напряжения, как показано на рис. 7.10, а.

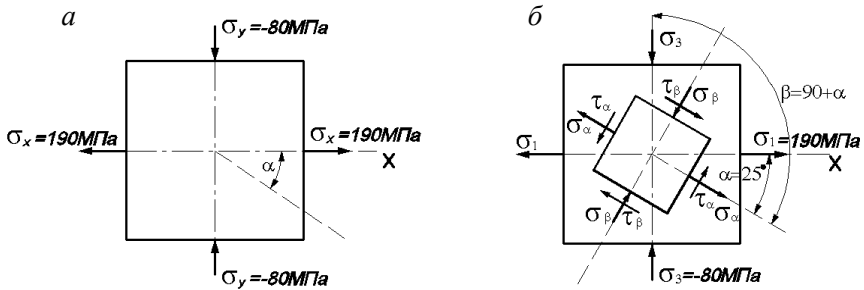


Рис. 7.10

Определить значения напряжений по площадкам нового параллелепипеда, повернутого по отношению к исходному на угол $\alpha = 25^\circ$ по ходу часовой стрелки, а также максимальное касательное напряжение.

Решение

Действующие по исходным граням параллелепипеда нормальные напряжения являются главными, так как на этих гранях нет касательных напряжений. Исходя из значений и направлений, алгебраически большее напряжение $\sigma_1 = \sigma_x = 190$ МПа, а алгебраически меньшее напряжение $\sigma_3 = \sigma_y = -80$ МПа.

Рассматриваемый элемент находится в условиях плоского напряженного состояния.

Нормальные напряжения на наклонных площадках определяем по формулам (7.3) и (7.4):

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha &= \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_3 \sin^2 \alpha = 190 \cdot 0,906^2 + (-80) \cdot 0,423^2 = \\ &= 156 - 14,3 = 141,7 \text{ МПа};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_\beta &= \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_3 \cos^2 \alpha = 190 \cdot 0,423^2 + (-80) \cdot 0,906^2 = \\ &= 34 - 65,7 = -31,7 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

Проверим закономерность, что по взаимно перпендикулярным граням (площадкам) $\Sigma\sigma = \text{const}$:

$$141,7 + (-31,7) = 190 + (-80) = \text{const}.$$

Касательные напряжения в наклонных площадках определим по формулам (7.3) и (7.4):

$$\tau_\alpha = -\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha = -\frac{190 + 80}{2} 0,766 = -103 \text{ МПа};$$

$$\tau_\beta = -\tau_\alpha = 103 \text{ МПа}.$$

Максимальное касательное напряжение в параллелепипеде определяется по формуле (7.5):

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{190 + 80}{2} = 135 \text{ МПа.}$$

Эти напряжения действует под углом 45° к главным площадкам.

На рис. 7.10, б показаны направления нормальных и касательных напряжений по площадкам повернутого элемента.

Пример 7.5

По граням элемента, выделенного из нагруженного тела, действуют напряжения, как показано на рис. 7.11, а.

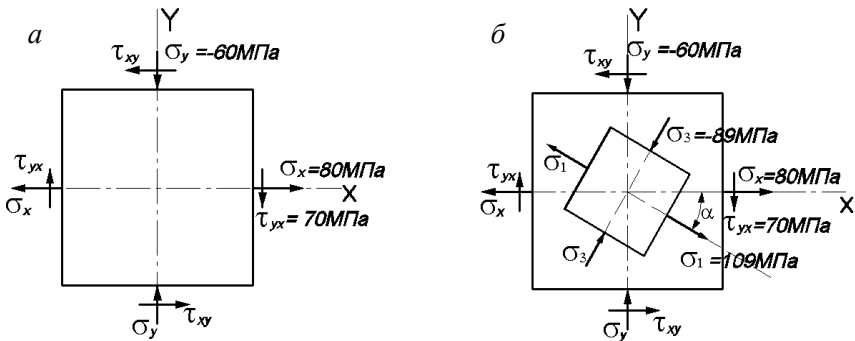


Рис. 7.11

Определить положение главных площадок, значения главных напряжений и наибольших касательных напряжений. Установить вид напряженного состояния элемента.

Решение

Значение главных нормальных напряжений определим по формуле (7.6):

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_{\max}}{\min} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2} = \\ &= \frac{80 - 60}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(80 + 60)^2 + 4 \cdot 70^2} = 10 \pm 99;\end{aligned}$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = 109 \text{ МПа}, \quad \sigma_{\min} = \sigma_3 = -89 \text{ МПа}.$$

Закономерность $\Sigma\sigma = \text{const}$ выполняется:

$$80 + (-60) = 109 - 89.$$

Наибольшее касательное напряжение найдем по формуле (7.8):

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(80 + 60)^2 + 4 \cdot 70^2} = 99 \text{ МПа}.$$

Положение одной из главных площадок (угол между осью X и направлением σ_1) определим по формуле (7.7):

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{yx}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2 \cdot 70}{80 + 60} = -1,000;$$

$$2\alpha_0 = -45^\circ, \quad \alpha_0 = -22^\circ 30'.$$

Вторая главная площадка, с напряжением σ_3 , располагается перпендикулярно к первой.

Угол α_0 откладывается от оси с алгебраически большим неглавным напряжением, т. е. от оси X по ходу часовой стрелки, так как угол отрицательный.

На рис. 7.11, б показаны исходные, а также и найденные главные напряжения.

Анализ полученных значений главных нормальных напряжений показывает, что элемент находится в условиях плоского напряженного состояния, так как два главных напряжения σ_1 и σ_3 (действуют в двух направлениях) отличны от нуля.

Пример 7.6

По граням элемента, выделенного из нагруженного тела, действуют напряжения, показанные на рис. 7.12, а.

Определить положение главных площадок, значения главных напряжений и установить вид напряженного состояния.

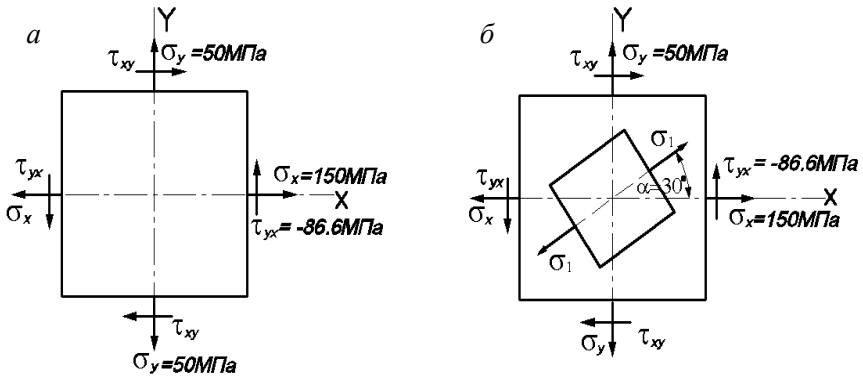


Рис. 7.12

Решение

Определим значения главных напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max/\min} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2} = \\ &= \frac{150 + 50}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(150 - 50)^2 + 4 \cdot 86,6^2} = 100 \pm 100; \end{aligned}$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = 200 \text{ МПа}, \quad \sigma_{\min} = 0.$$

Положение главной площадки с напряжением σ_1

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{yx}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2 \cdot (-86,6)}{150 - 50} = 1,732; \quad 2\alpha_0 = 60^\circ, \quad \alpha_0 = 30^\circ.$$

Угол $\alpha_0 = 30^\circ$ отсчитывается от оси X против хода часовой стрелки, так как угол положительный.

На рис. 7.12, б по вычисленным значениям показаны положения главных площадок и направления главных напряжений.

Анализ полученных значений главных напряжений показывает, что рассмотренный элемент находится в условиях линейного напряженного состояния, так как отличным от нуля оказалось только одно главное напряжение σ_1 (действует только в одном направлении).

8. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

В рассмотренных выше деформациях, таких как, например, растяжение-сжатие, изгиб, кручение, внешние силовые факторы, действующие на брус, по отношению к его продольной оси Z направлены строго определенным образом:

при растяжении-сжатии – по его продольной оси (рис. 8.1, а);

изгибе – перпендикулярно продольной оси, но в одной из главных плоскостей сечения (рис. 8.1, б);

кручении – вокруг продольной оси (рис. 8.1, в).

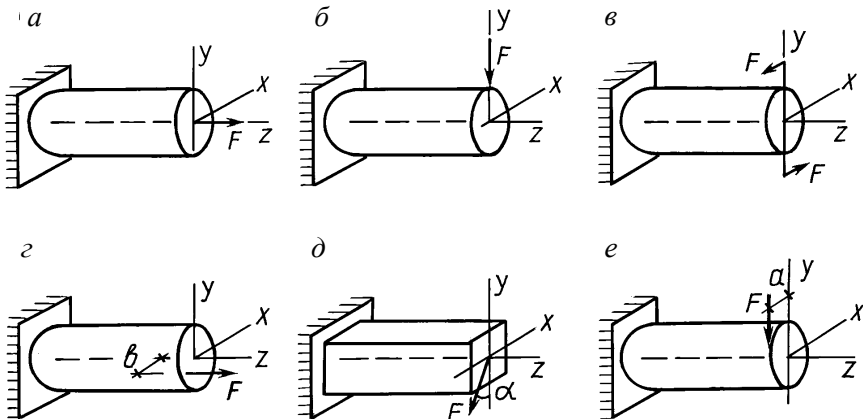


Рис. 8.1

На практике часто имеют место случаи, когда внешние силы ориентированы по отношению к продольной оси Z бруса произвольно: параллельно продольной оси, но с эксцентриситетом b к ней (рис. 8.1, ε), перпендикулярно продольной оси, но не в главной плоскости сечения (рис. 8.1, δ), перпендикулярно продольной оси, но с эксцентриситетом a к ней (рис. 8.1, e). В таких случаях в поперечном сечении бруса возникает одновременно несколько внутренних силовых факторов и он находится в условиях *сложного сопротивления* (сложной деформации).

Вид сложного сопротивления в простых случаях загрузки стержня легко установить по направлению внешних сил по отношению к его продольной оси. При сложной нагрузке вид сопротивления устанавливается после определения внутренних сил.

Для выявления внутренних сил все действующие на брус произвольно направленные внешние силы (рис. 8.2, a) должны быть разложены на составляющие по направлению координатных осей (рис. 8.2, b) и приведены к продольной оси Z по правилам механики (рис. 8.2, $в$). Заметим, что оси X и Y являются главными центральными осями сечения бруса. В общем случае действия сил в сечении бруса образуются продольная сила N , изгибающие моменты M_x и M_y , крутящий момент $T = M_z$ и поперечная сила Q .

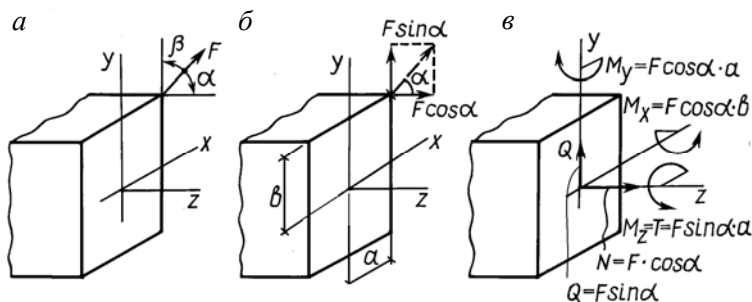


Рис. 8.2

По сочетанию внутренних сил могут быть следующие виды сложного сопротивления: косоу изгиб (M_x, M_y), внецентренное растяжение-сжатие (N, M_x, M_y), изгиб с кручением (T, M_x, M_y) и др. Поперечная сила Q при расчете на прочность при сложном сопротивлении не играет существенной роли.

При расчетах сложного сопротивления используется принцип независимости действия сил. Это значит, что напряжения и перемещения от различных силовых воздействий суммируются: нормальные напряжения – алгебраически, а касательные напряжения и перемещения – геометрически.

Последовательность расчета элементов конструкций на прочность следующая: определяются опорные реакции, вычисляются значения внутренних сил, строятся их эпюры, выявляются опасное сечение и наиболее напряженная его точка, устанавливается вид напряженного состояния и с использованием теории прочности вычисляется значение наибольшего напряжения.

Перемещения в элементах конструкции при сложном сопротивлении определяются теми же методами, что и при простых сопротивлениях.

Условие прочности и жесткости при сложном сопротивлении составляет идентично простым видам сопротивлений: максимальные напряжения и перемещения не должны превышать допустимых значений.

8.1. Косой изгиб

Косой изгиб наблюдается в тех случаях, когда плоскость действия нагрузки, проходящая через продольную ось бруса, не совпадает ни с одной из главных плоскостей (рис. 8.3, б), или когда она действует одновременно в двух главных плоскостях (рис. 8.3, а).

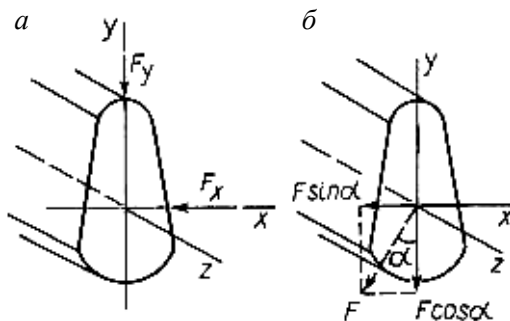


Рис. 8.3

В поперечном сечении бруса, подвергающегося косому изгибу, возникают, как и при плоском поперечном изгибе, поперечная сила Q и изгибающий момент M , но только не в одной, а в двух взаимно перпендикулярных главных плоскостях. Косой изгиб есть сочетание двух плоских изгибов.

Определение внутренних сил (изгибающих моментов), построение их эпюр и нахождение напряжений при косом изгибе ведутся по тем же правилам и формулам, что и при плоском изгибе.

Нормальные напряжения при косом изгибе в любой точке поперечного сечения определяются по формуле

$$\sigma = \pm \frac{M_x}{J_x} y \pm \frac{M_y}{J_y} x,$$

где M_x, M_y – изгибающие моменты в главных плоскостях исследуемого сечения;

J_x, J_y – моменты инерции сечения относительно главных центральных осей;

x, y – координаты точки, в которой определяется напряжение.

Знаки напряжений устанавливаются в зависимости от расположения рассматриваемой точки в растянутой ($+\sigma$) или сжатой ($-\sigma$) зоне сечения. Характер деформации зоны устанавливается по направлению изгибающих моментов M_x и M_y в данном сечении.

На рис. 8.4, *a* показаны эпюры нормальных напряжений в двух главных плоскостях сечения (σ_{M_x} и σ_{M_y}) и результирующая (эпюра σ).

Заметим, что изгибающий момент M_x растягивает часть сечения, расположенную выше оси X , а нижнюю часть сжимает (см. эпюру σ_{M_x}). Изгибающий момент M_y растягивает часть сечения, расположенную справа от оси Y , а левую часть сжимает (см. эпюру σ_{M_y}).

При сложной нагрузке характер деформации зоны сечения удобнее определять по эпюрам изгибающих моментов (см. примеры).

Нормальные напряжения при косом изгибе распределяются в поперечном сечении по линейному закону, но неравномерно (как и при плоском изгибе). Наибольшие напряжения возникают в точках сечения, наиболее удаленных от нейтральной оси (н.о.). На рис. 8.4, *a* это точка K .

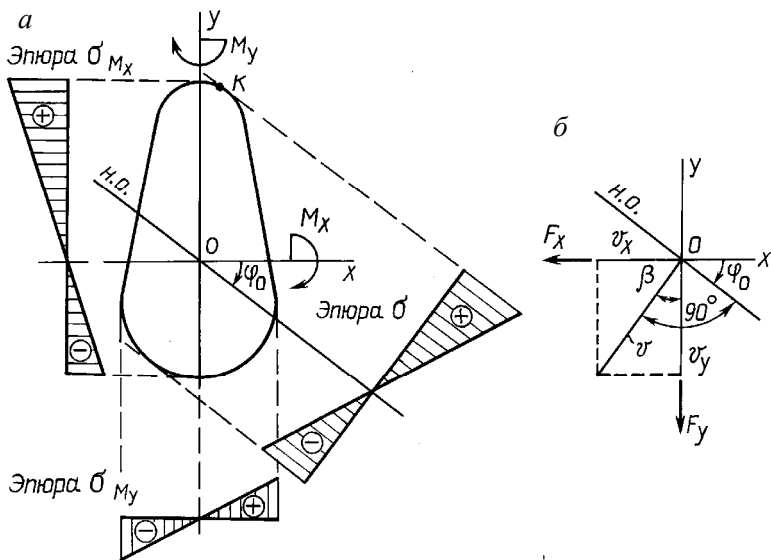


Рис. 8.4

При косом изгибе нейтральная ось проходит через центр тяжести сечения и делит его на две зоны: растянутая и сжатая зона.

На нейтральной оси волокна не деформируются, а следовательно, нормальные напряжения в этой области равны нулю.

Положение нейтральной оси определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = -\frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{J_x}{J_y}, \quad (8.1)$$

где φ_0 – угол наклона нейтральной оси к главной центральной оси X .

В приведенной формуле следует учитывать знаки изгибающих моментов. Положительное значение угла φ_0 отсчитывается от оси X против хода часовой стрелки, отрицательное – по ходу.

Максимальные нормальные напряжения действуют по контуру сечения бруса, где касательные напряжения равны нулю. Следовательно, в названных точках имеет место линейное напряженное состояние и условие прочности используется в виде $\sigma_{\max} \leq R$.

В развернутом виде условие прочности при косом изгибе для любой формы сечения в наиболее напряженной (опасной) точке имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{J_x} y_{\max} + \frac{M_y}{J_y} x_{\max} \leq R,$$

где x_{\max} , y_{\max} – координаты точки, наиболее удаленной от нейтральной оси;

R – расчетное сопротивление материала стержня.

Для бруса из хрупкого материала следует проверять прочность как по растягивающим, так и по сжимающим напряжениям.

При сложной нагрузке, когда изгибающие моменты изменяются по длине бруса по различным законам, в поисках опасного сечения приходится проверять несколько сечений, где оба изгибающих момента достигают возможно больших значений (см. примеры).

Для поперечных сечений, имеющих две оси симметрии и выступающие (незакругленные) углы (прямоугольник, двутавр, швеллер и подобные другие), условие прочности можно представить в виде

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq R, \quad (8.2)$$

где W_x , W_y – моменты сопротивления сечения относительно главных центральных осей.

При подборе размеров сечения условие прочности целесообразно использовать в виде

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x + kM_y}{W_x} = \frac{M_{\text{des}}}{W_x} \leq R, \quad (8.3)$$

где $M_{\text{des}} = M_x + kM_y$ – приведенный (расчетный) момент;

k – коэффициент, равный отношению W_x / W_y .

Для прямоугольного сечения $k = h/b$, среднее значение для прокатного двутавра $k = 8$, для швеллера $k = 7$.

Наибольшее значение расчетного момента M_{des} определяется путем пробных вычислений в нескольких сечениях бруса.

Для бруса круглого поперечного сечения $W_x = W_y$. Поэтому косо́й изгиб сводится к плоскому и условие прочности принимает вид

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\text{и}}}{W_x} \leq R,$$

где $M_{\text{и}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$ – суммарный изгибающий момент в опасном сечении бруса.

Рациональной формой поперечного сечения при косо́м изгибе является сечение, у которого выполняется условие

$$\frac{W_x}{W_y} = \frac{M_x}{M_y}.$$

Для прямоугольного сечения минимальная площадь сечения получается при условии

$$\frac{h}{b} = \frac{M_x}{M_y}.$$

Перемещения при косо́м изгибе определяются теми же методами, что и при плоском. Рекомендуется использовать уравнения метода начальных параметров, а также метод Мора и способ Верещагина.

Перемещения определяются отдельно в каждой из главных плоскостей (в горизонтальной ϑ_x и вертикальной ϑ_y) от действующих в них внешних сил или их составляющих (см. рис. 8.4, б).

Полный (суммарный) прогиб определяется по выражению

$$\vartheta = \sqrt{\vartheta_x^2 + \vartheta_y^2}$$

и направлен перпендикулярно нейтральной оси и под углом β к вертикальной оси сечения ($\beta = \varphi_0$).

При косо́м изгибе продольная ось бруса представляет собой плоскую или пространственную кривую.

Пример 8.1

Проверить прочность и жесткость стальной консольной балки составного поперечного сечения (рис. 8.5, а), если нагрузка F направлена под углом $\alpha = 30^\circ$ к вертикальной оси сечения.

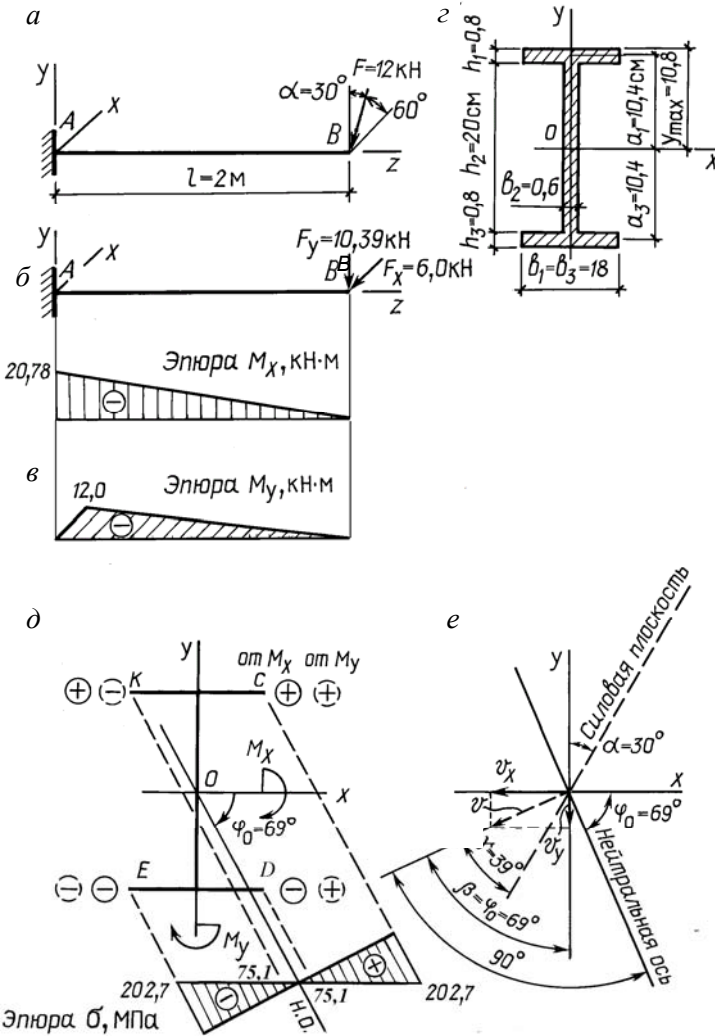


Рис. 8.5

Для материала балки $R = 210$ МПа, $E = 200$ ГПа.

Допустимый относительный прогиб балки $\left(\frac{\vartheta}{l}\right)_{\text{adm}} = \frac{1}{150}$.

Для определения прогиба на конце консоли (т. B) следует воспользоваться формулой $\vartheta = \frac{Fl^3}{3EJ}$, взятой из справочника.

Решение

Внешняя сила действует на балку перпендикулярно ее продольной оси и не совпадает ни с одной из главных центральных осей сечения XU .

Следовательно, рассматриваемая балка подвергается деформации косоуго изгиба.

Разложим силу F на составляющие по направлению главных центральных осей сечения (рис. 8.5, б):

$$F_y = F \cos 30^\circ = 12 \cdot 0,866 = 10,39 \text{ кН};$$

$$F_x = F \cos 60^\circ = 12 \cdot 0,50 = 6,0 \text{ кН}.$$

Вычислим значения изгибающих моментов для характерных сечений балки в главных плоскостях (в вертикальной и горизонтальной).

В вертикальной плоскости:

в сечении B $M_x = 0$;

в сечении A

$$M_x = F_y \cdot 2 = 10,39 \cdot 2 = 20,78 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

В горизонтальной плоскости:

в сечении B $M_y = 0$;

в сечении A

$$M_y = F_x \cdot 2 = 6 \cdot 2 = 12 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Эпюры изгибающих моментов строятся отдельно в вертикальной и горизонтальной плоскостях (рис. 8.5, в).

В примере опасным является сечение A , где оба изгибающих момента достигают максимальных значений.

Поскольку сечение балки имеет две оси симметрии и нескругленные углы, для ведения расчета целесообразно использовать условие прочности в виде (8.2):

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq R.$$

Приступим к вычислению геометрических характеристик сечения балки. Для вычисления моментов инерции сечение необходимо разделить на три прямоугольника (рис. 8.5, z). Вследствие симметрии сечения центр тяжести его очевиден.

Следует обратить внимание, что оси Y всех трех прямоугольников, составляющих сечение, совпадают, а оси X – нет. При вычислении J_x необходимо учесть переход к параллельным осям.

Моменты инерции сечения относительно главных центральных осей:

$$\begin{aligned} J_x &= \frac{b_2 h_2^3}{12} + 2\left(\frac{b_1 h_1^3}{12} + b_1 h_1 a_1^2\right) = \\ &= \frac{0,6 \cdot 20^3}{12} + 2\left(\frac{18 \cdot 0,8^3}{12} + 0,8 \cdot 18 \cdot 10,4^2\right) = 3517 \text{ см}^4; \\ J_y &= \frac{h_2 b_2^3}{12} + 2\frac{h_1 b_1^3}{12} = \frac{20 \cdot 0,6^3}{12} + 2\frac{0,8 \cdot 18^3}{12} = 778 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Моменты сопротивления сечения

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}} = \frac{3517}{10,8} = 325,6 \text{ см}^3;$$

$$W_y = \frac{J_y}{x_{\max}} = \frac{778}{9} = 86,4 \text{ см}^3.$$

Перейдем к вычислению нормальных напряжений в балке. Значение максимального нормального напряжения в опасном сечении балки (сечение A)

$$\begin{aligned}\sigma_{\max} &= \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{20,78 \cdot 10^3}{325,6 \cdot 10^{-6}} + \frac{12,0 \cdot 10^3}{86,4 \cdot 10^{-6}} = \\ &= 0,06382 \cdot 10^9 \text{ Па} + 0,1389 \cdot 10^9 \text{ Па} = \\ &= 63,82 \text{ МПа} + 138,9 \text{ МПа} = 202,7 \text{ МПа} < R.\end{aligned}$$

Из результата вычисления следует, что прочность балки обеспечена.

Для установления наиболее напряженной точки опасного сечения следует знать положение нейтральной оси в этом сечении, которое определяется из формулы (8.1):

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = -\frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{J_x}{J_y} = -\frac{-12}{-20,78} \cdot \frac{3517}{778} = -2,61 \quad \text{и} \quad \varphi_0 = -69,0^\circ.$$

Заметим, что в формуле (8.1) следует учитывать знаки изгибающих моментов.

Отрицательное значение угла φ_0 откладываем от оси X по ходу часовой стрелки (рис. 8.5, δ).

Знаки нормальных напряжений в точках сечения устанавливаются исходя из зоны растяжения и сжатия.

Так, часть сечения A , расположенная выше оси X , от изгибающего момента M_x растянута ($+\sigma$), а часть, расположенная ниже оси X , — сжата ($-\sigma$).

От изгибающего момента M_y растянута часть сечения, расположенная справа от оси Y , и сжата расположенная слева (см. рис. 8.5, δ).

Определим нормальные напряжения в характерных (угловых) точках опасного сечения A , используя ранее вычисленные его составляющие:

$$\sigma_C = 63,8 + 138,9 = 202,7 \text{ МПа};$$

$$\sigma_D = -63,8 + 138,9 = 75,1 \text{ МПа};$$

$$\sigma_E = -63,8 - 138,9 = -202,7 \text{ МПа};$$

$$\sigma_K = 63,8 - 138,9 = -75,1 \text{ МПа}.$$

Суммарная эпюра нормальных напряжений показана на рис. 8.5, *д*.

Заметим, что максимальные нормальные напряжения находятся, как и при плоском изгибе, в наиболее удаленных от нейтральной оси точках (точки *C* и *E*).

Завершим пример рассмотрением перемещений балки.

Вычислим значения вертикального и горизонтального прогиба свободного конца балки (сечение *B*):

$$\vartheta_y = \frac{F_y l^3}{3EJ_x} = \frac{10,39 \cdot 10^3 \cdot 2^3}{3 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 3517 \cdot 10^{-8}} = 0,000039 \cdot 10^2 \text{ м} = 0,39 \text{ см};$$

$$\vartheta_x = \frac{F_x l^3}{3EJ_y} = \frac{6 \cdot 10^3 \cdot 2^3}{3 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 778 \cdot 10^{-8}} = 0,000103 \cdot 10^2 \text{ м} = 1,03 \text{ см}.$$

Суммарный абсолютный прогиб конца балки (рис. 8.5, *е*)

$$\vartheta = \vartheta_{\max} = \sqrt{\vartheta_x^2 + \vartheta_y^2} = \sqrt{0,39^2 + 1,03^2} = 1,1 \text{ см}.$$

Относительный прогиб

$$\frac{\vartheta_{\max}}{l} = \frac{1,1}{200} = \frac{1}{182} < \frac{1}{150} \text{ — жесткость балки обеспечена.}$$

Полный прогиб балки ϑ направлен перпендикулярно нейтральной оси, под углом

$$\beta = \varphi_0 = 69^\circ$$

к вертикальной оси Y сечения и под углом

$$\gamma = \beta - \alpha = 69^\circ - 30^\circ = 39^\circ$$

к силовой плоскости (рис. 8.5, е).

Поскольку в любом сечении рассматриваемой балки отношение $\frac{M_x}{M_y} = \text{const}$, изогнутая ось балки представляет собой плоскую кривую.

Пример 8.2

Определить значение наибольшей допустимой нагрузки q на стальную консольную балку (рис. 8.6, а), выполненную из двутавра № 24, расположив его сечение рационально по отношению к этой нагрузке.

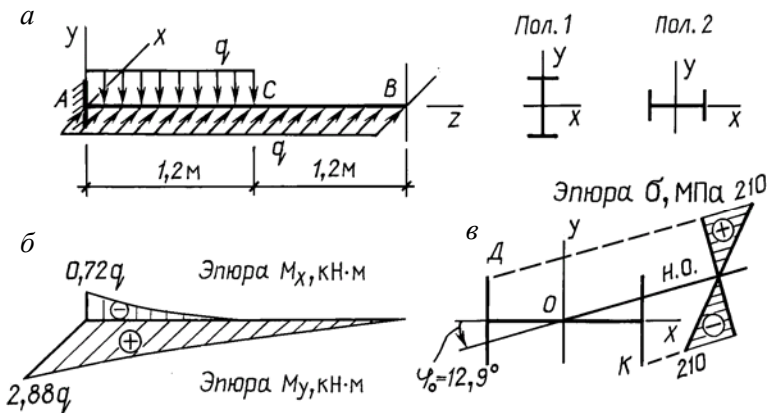


Рис. 8.6

Расчетное сопротивление для стали $R = 210$ МПа.

Решение

Нагрузка на балку действует в двух плоскостях, совпадающих с главными центральными осями сечения X и Y , т. е. в двух главных плоскостях. Значит, эта балка подвергается косому изгибу.

Выпишем из таблицы сортамента геометрические характеристики для двутавра № 24, соответствующие положению 1:

$$J_x = 3460 \text{ см}^4; J_y = 198 \text{ см}^4; W_x = 289 \text{ см}^3; W_y = 34,5 \text{ см}^3.$$

Во втором положении двутавра его характеристики

$$J_x = 198 \text{ см}^4; J_y = 3460 \text{ см}^4; W_x = 34,5 \text{ см}^3; W_y = 289 \text{ см}^3.$$

Эпюры изгибающих моментов строятся в вертикальной и горизонтальной плоскостях (рис. 8.6, б).

В сечении A

$$M_x = q \cdot 1,2 \cdot \frac{1,2}{2} = 0,72q;$$

$$M_y = q \cdot 2,4 \cdot \frac{2,4}{2} = 2,88q.$$

Анализ эпюр изгибающих моментов показывает, что в опасном сечении A балки наибольший изгибающий момент действует в горизонтальной плоскости ($M_y > M_x$). Следовательно, рациональным будет *второе* положение сечения балки, так как *бóльшему* изгибающему моменту будет соответствовать *бóльший* момент сопротивления.

Исходя из формы поперечного сечения балки, условие прочности следует использовать в виде (8.2):

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{0,72q}{34,5 \cdot 10^{-6}} + \frac{2,88q}{289 \cdot 10^{-6}} = R = 210 \text{ МПа}.$$

Из этого условия наибольшая допустимая нагрузка на балку

$$0,0308q = 210,$$

откуда

$$q = \frac{210}{0,0308} = 6818 \text{ Н/м} = 6,82 \text{ кН/м}.$$

В завершение примера определим положение нейтральной оси и построим суммарную эпюру нормальных напряжений.

Угол наклона нейтральной оси к главной центральной оси X определяется по формуле (8.1):

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = -\frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{J_x}{J_y} = -\frac{2,88 \cdot 6,82 \cdot 10^3}{-0,72 \cdot 6,82 \cdot 10^3} \cdot \frac{198 \cdot 10^{-8}}{3460 \cdot 10^{-8}} = 0,229,$$

$$\varphi_0 = 12,9^\circ.$$

Положительное значение угла φ_0 отсчитывается от оси X против хода часовой стрелки (рис. 8.6, в).

На нейтральной оси нормальные напряжения равны нулю. Наибольшие напряжения будут в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси, и равны расчетному сопротивлению R . Это точки D и K сечения.

В точке D нормальные напряжения будут положительными как от момента M_x , так и от момента M_y . В точке K оба значения отрицательны (см. рис. 8.6, в).

Пример 8.3

Определить размеры поперечного прямоугольного сечения деревянной двухопорной балки (рис. 8.7, а), подвергающейся изгибу в двух главных плоскостях, при заданном отношении сторон $h/b = 1,4$.

Расчетное сопротивление материала балки $R = 12$ МПа.

Виды опор балки в вертикальной и горизонтальной плоскостях однотипны.

Решение

Рассматриваемая балка подвергается косому изгибу.

Определим реакции опор и построим эпюры изгибающих моментов в плоскостях действующей нагрузки.

Вертикальная плоскость (рис. 8.7, б):

$$\sum M_A = B_y \cdot 5 - 6 \cdot 5 \cdot 2,5 = 0,$$

откуда $B_y = 15$ кН. Аналогично $A_y = 15$ кН.

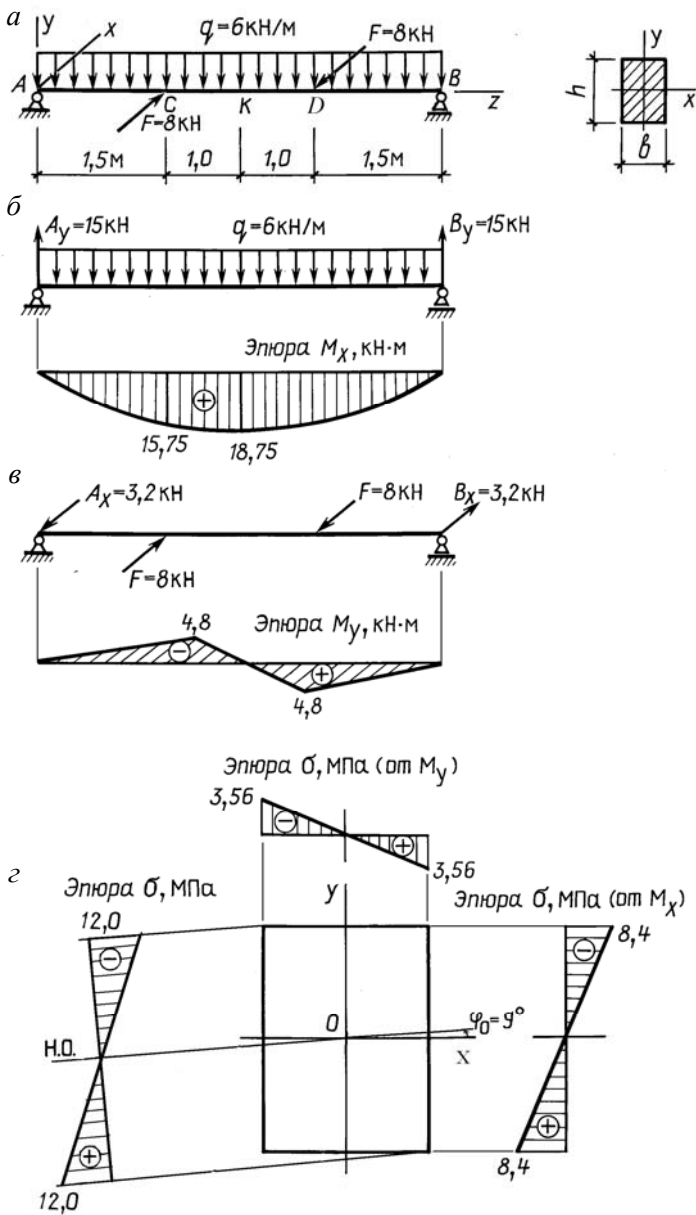


Рис. 8.7

При $z = 1,5$ м

$$M_C = 15 \cdot 1,5 - 6 \cdot \frac{1,5^2}{2} = 15,75 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

при $z = 2,5$ м

$$M_K = 15 \cdot 2,5 - 6 \cdot \frac{2,5^2}{2} = 18,75 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Горизонтальная плоскость (рис. 8.7, *в*):

$$\sum M_A = -B_x \cdot 5 - 8 \cdot 1,5 + 8 \cdot 3,5 = 0,$$

откуда $B_x = 3,2$ кН, аналогично $A_x = 3,2$ кН.

При $z = 1,5$ м

$$M_C = -3,2 \cdot 1,5 = -4,8 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

при $z = 2,5$ м

$$M_K = -3,2 \cdot 2,5 + 8 \cdot 1 = 0.$$

Эпюры изгибающих моментов показаны на рис. 8.7, *б* и *в*.

Подбор размеров сечения балки проведем из условия прочности в виде (8.3):

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x + kM_y}{W_x} = \frac{M_{\text{des}}}{W_x} \leq R.$$

В данном примере коэффициент

$$k = W_x / W_y = h / b = 1,4.$$

Расчет должен производиться по наибольшему расчетному моменту M_{des} .

Анализ эпюр изгибающих моментов показывает, что опасное сечение балки, где сочетание этих моментов самое неблагоприятное, неявно.

Исследуем сечение C и K :
в сечении C

$$M_{\text{des}} = 15,75 + 1,4 \cdot 4,8 = 22,47 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

в сечении K

$$M_{\text{des}} = 18,75 + 1,4 \cdot 0 = 18,75 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Таким образом, опасным является сечение C , где $M_{\text{des max}} = 22,47 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Требуемый момент сопротивления сечения балки из условия прочности будет

$$W_x = \frac{\max M_{\text{des}}}{R} = \frac{22,47 \cdot 10^3}{12 \cdot 10^6} = 1,873 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 1873 \text{ см}^3.$$

Для прямоугольного поперечного сечения с учетом того, что $h / b = 1,4$:

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(1,4b)^2}{6} = 0,33b^3 = 1873 \text{ см}^3,$$

откуда получим $b = 17,9 \text{ см}$, $h = 25,06 \text{ см}$.

Приняв конструктивно $b = 18 \text{ см}$, $h = 25 \text{ см}$ вычислим значение максимального нормального напряжения по формуле (8.2):

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{max}} &= \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{15,75 \cdot 10^3 \cdot 6}{18 \cdot 25^2 \cdot 10^{-6}} + \frac{4,8 \cdot 10^3 \cdot 6}{25 \cdot 18^2 \cdot 10^{-6}} = \\ &= 8,4 \cdot 10^6 + 3,56 \cdot 10^6 = 11,96 \text{ МПа} \approx 12 \text{ МПа} = R. \end{aligned}$$

Размеры сечения определены верно.

Моменты инерции принятого сечения

$$J_x = \frac{18 \cdot 25^3}{12} = 23\,438 \text{ см}^4;$$

$$J_y = \frac{25 \cdot 18^3}{12} = 12\,150 \text{ см}^4.$$

Положение нейтральной оси в сечении C

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = -\frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{J_x}{J_y} = -\frac{-4,8}{15,75} \cdot \frac{12150}{23438} = 0,16, \quad \varphi_0 = 9,0^\circ.$$

Положительное значение φ_0 откладываем от оси X против хода часовой стрелки.

Эпюры нормальных напряжений σ от каждого изгибающего и суммарного момента приведены на рис. 8.7, z .

8.2. Внецентренное растяжение-сжатие

Элемент конструкции (стержень) подвергается деформации внецентренного растяжения-сжатия, когда внешняя сила действует параллельно его продольной оси с некоторым эксцентриситетом от центра тяжести сечения (рис. 8.8, a).

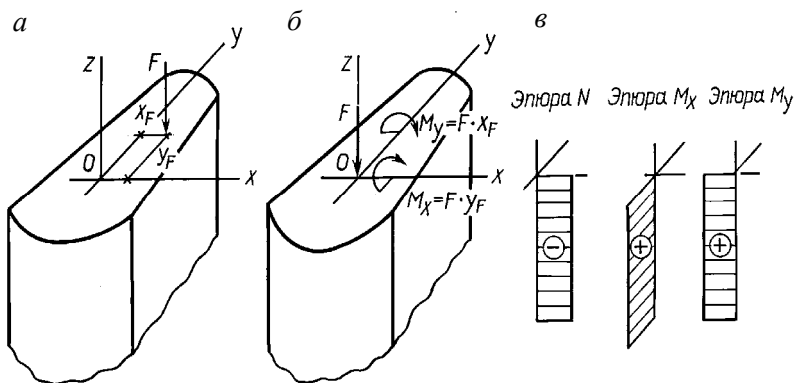


Рис. 8.8

Расчетная схема стержня составляется путем переноса внешней силы F к центру тяжести сечения по правилам механики (рис. 8.8, b). При этом образуются продольная сила $N = F$ и изгибающие моменты относительно главных центральных осей сечения

$$M_x = F y_F \quad \text{и} \quad M_y = F x_F,$$

где y_F и x_F – координаты точки приложения силы F . Поперечная сила Q отсутствует.

Эпюры внутренних сил показаны на рис. 8.8, в. Следует заметить, что строить эпюры необязательно, так как все внутренние силы по длине стержня постоянны.

Таким образом, внецентренное растяжение-сжатие есть сочетание центрального растяжения-сжатия и чистого изгиба в главных плоскостях сечения стержня.

Для определения напряжений используются формулы, полученные для центрального растяжения-сжатия и чистого изгиба.

Продольная сила N и изгибающие моменты M_x и M_y связаны с нормальными напряжениями, которые в любой точке поперечного сечения внецентренно растянутого или сжатого стержня определяются по формуле

$$\sigma = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M_x}{J_x} y \pm \frac{M_y}{J_y} x, \quad (8.4)$$

где N, M_x, M_y – внутренние силовые факторы в сечении стержня;

A, J_x, J_y – геометрические характеристики сечения;

x, y – координаты точки сечения, в которой определяются напряжения.

Знаки напряжений устанавливаются в зависимости от того, расположена точка в растянутой или сжатой зоне сечения стержня. Характер деформации зоны сечения устанавливается исходя из направления действия внутренних силовых факторов (N, M_x, M_y) по отношению к этому сечению (см. примеры).

При внецентренном растяжении-сжатии нормальные напряжения распределяются в сечении по линейному закону, но не равномерно. Нейтральная ось (где $\sigma = 0$) не проходит через центр тяжести сечения. Она располагается в четверти сечения, противоположной точке приложения внешней силы F , и делит сечение на растянутую и сжатую зоны (рис. 8.9).

Положение нейтральной оси в сечении стержня определяется по формулам

$$x_0 = -\frac{J_y}{Ax_F}, \quad y_0 = -\frac{J_x}{Ay_F}, \quad (8.5)$$

где x_0, y_0 – отрезки, отсекаемые нейтральной осью на главных центральных осях сечения;

x_F, y_F – координаты точки приложения внешней силы F в тех же осях.

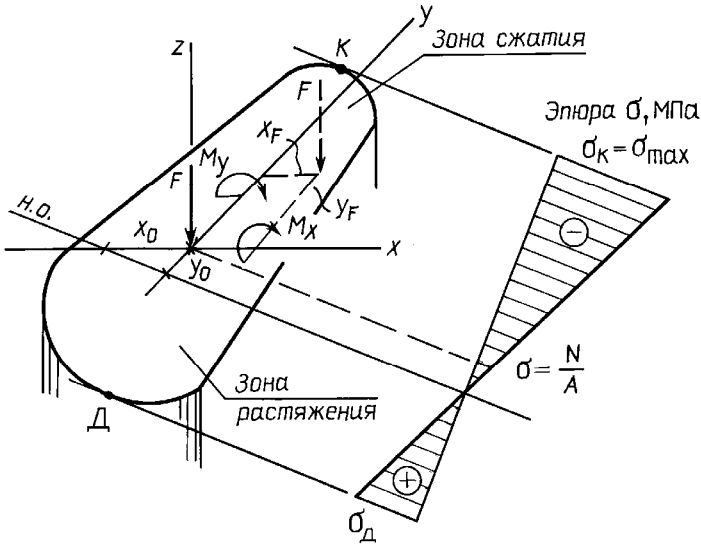


Рис. 8.9

В выражениях (8.5) следует учитывать знаки координат точки приложения внешней силы F . Заметим, что координаты x_0, y_0 и x_F, y_F всегда имеют разные знаки, так как полюс силы и нейтральная ось лежат по разные стороны от центра тяжести сечения (в противоположных четвертях).

Положение нейтральной оси зависит от размеров и формы сечения и координат полюса силы F , но не зависит от ее величины.

При внецентренном растяжении-сжатии в любой точке поперечного сечения стержня (кроме точек нейтральной оси) возникают лишь нормальные напряжения σ , а касательные τ отсутствуют. Это значит, что материал стержня находится в условиях линейного напряженного состояния и условие прочности используется в виде

$$\sigma_{\max} \leq R.$$

В раскрытом виде это условие для любой формы сечения стержня принимает вид

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} y_{\text{дан}} + \frac{M_y}{J_y} x_{\text{дан}} \leq R,$$

где $x_{\text{дан}}, y_{\text{дан}}$ – координаты опасной точки сечения, т. е. наиболее удаленной от нейтральной оси точки.

Опасные точки определяются при помощи касательных, проведенных к сечению параллельно нейтральной оси (нулевой линии) (на рис. 8.9 – точки K и D).

Для пластичных материалов опасной является максимально удаленная от нейтральной оси точка сечения, где напряжения по абсолютному значению наибольшие. Для хрупких материалов проверка прочности должна производиться как по растягивающим, так и по сжимающим напряжениям.

Для стержней, имеющих сечение с двумя осями симметрии и выступающими углами (прямоугольник, двутавр и подобные), условие прочности можно представить в виде

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq R, \quad (8.6)$$

где W_x, W_y – моменты сопротивления сечения изгибу относительно главных центральных осей.

Для названных выше типов сечений наиболее напряженными всегда являются угловые точки.

Подбор размеров сечения при внецентренном растяжении-сжатии не дает однозначного решения, так как геометрические параметры A, W_x, W_y взаимно связаны. Рекомендуется проведение ряда последовательных попыток.

Между полюсом внешней силы F и положением нейтральной оси существует определенная взаимосвязь – они расположены по разные стороны от центра тяжести поперечного сечения. При приближении силы F к центру тяжести сечения нейтральная ось удаляется от него, и наоборот. При некотором положении полюса силы F нейтральная ось будет касаться контура сечения. При этом по всему сечению напряжения будут иметь один и тот же знак.

Зона в сечении стержня, расположенная вокруг его центра тяжести, в пределах которой следует прикладывать нагрузку, чтобы по всему сечению напряжения имели один и тот же знак, называется *ядром сечения* (рис. 8.10).

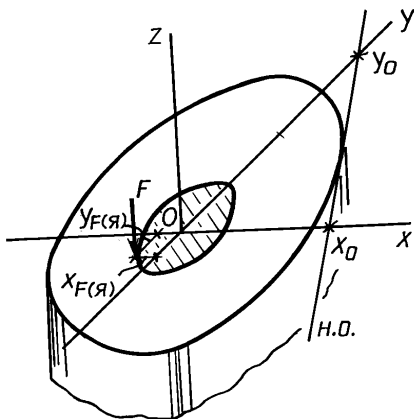


Рис. 8.10

Координаты ядра сечения $x_{F(я)}$, $y_{F(я)}$ связаны с положением нейтральной оси, т. е. с ее координатами x_0 , y_0 , и определяются по следующим формулам, полученным из (8.5):

$$x_{F(я)} = -\frac{J_y}{Ax_0}; \quad y_{F(я)} = -\frac{J_x}{Ay_0}. \quad (8.7)$$

Формулы (8.7) можно привести к другому виду, более удобному для многократных вычислений, используя такую геометрическую характеристику, как радиус инерции сечения:

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}}; \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}}.$$

Тогда формулы (8.7) примут вид

$$x_{F(я)} = -\frac{i_y^2}{x_0}; \quad y_{F(я)} = -\frac{i_x^2}{y_0}. \quad (8.8)$$

Для построения ядра сечения задаются рядом последовательных положений нейтральной оси, касающейся контура сечения (не пересекая его), вычисляются значения координат этих положений нейтральной оси, а затем координаты точек ядра сечения.

Форму и размеры ядра сечения важно знать при расчете внецентренно нагруженных элементов конструкции, выполненных из хрупкого материала.

Пример 8.4

Стальная полоса прямоугольного поперечного сечения, имеющая выточки (рис. 8.11, а), нагружена растягивающими силами $F = 20$ кН по продольной оси Z .

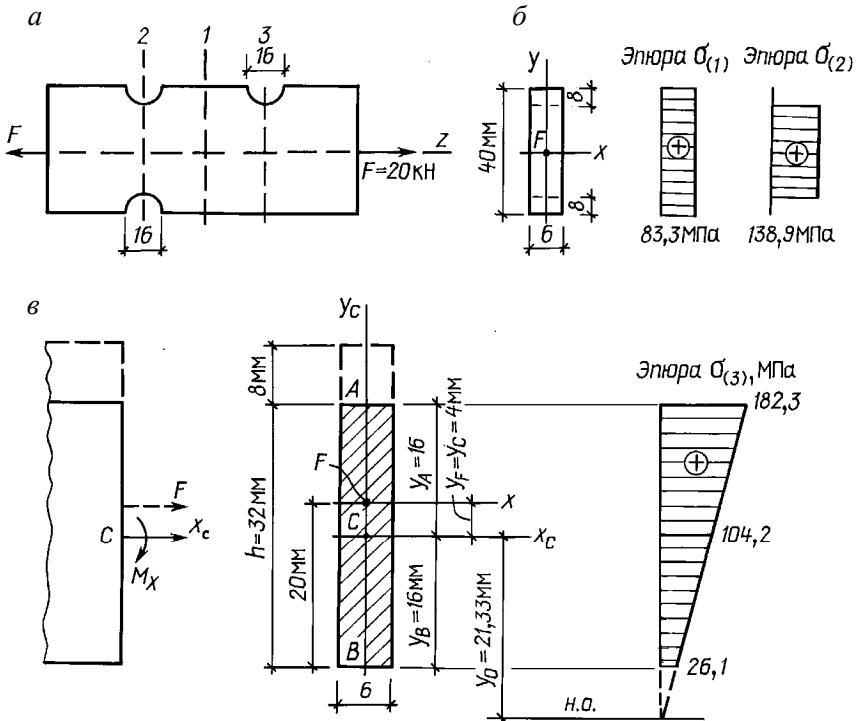


Рис. 8.11

Проверить прочность полосы, если $R = 210$ МПа. Построить эпюры напряжений в характерных сечениях полосы. Концентрацией напряжений у выточек пренебречь.

Решение

На полосе выделяются три характерных сечения. Внешние силы F , действующие по продольной оси полосы, в сечениях, где нет выточки (1) и где они симметричны (2), создают деформацию центрального растяжения, так как линия действия силы F совпадает с центром тяжести этих сечений (рис. 8.11, б), а в сечении с асимметричной выточкой (3) – внецентренное растяжение, так как линия действия силы смещена относительно центра тяжести этого сечения (рис. 8.11, в).

Определим нормальные напряжения в названных сечениях:

сечение 1:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{20 \cdot 10^3}{6 \cdot 40 \cdot 10^{-6}} = 0,0833 \cdot 10^9 \text{ Па} = 83,3 \text{ МПа};$$

сечение 2:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{20 \cdot 10^3}{(6 \cdot 40 - 6 \cdot 8 \cdot 2) \cdot 10^{-6}} = 0,1389 \cdot 10^9 \text{ Па} = 138,9 \text{ МПа}.$$

Для сечения 3 воспользуемся формулой (8.4):

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x.$$

Определим необходимые геометрические характеристики рассматриваемого сечения.

Высота сечения

$$h = 40 - 8 = 32 \text{ мм},$$

ширина $b = 6$ мм, площадь

$$A = 32 \cdot 6 = 192 \text{ мм}^2.$$

Положение центра тяжести сечения (т. C) и положение главных центральных осей (x_c, y_c) очевидны.

Моменты инерции сечения относительно главных центральных осей:

$$J_{x_c} = \frac{bh^3}{12} = \frac{6 \cdot 32^3}{12} = 16\,384 \text{ мм}^4;$$

$$J_{y_c} = \frac{hb^3}{12} = \frac{32 \cdot 6^3}{12} = 576 \text{ мм}^4.$$

Эксцентриситет силы F в рассматриваемом сечении

$$x_F = 0, \quad y_F = 20 - 16 = 4 \text{ мм}.$$

Внутренние силы:

продольная сила $N = F = 20 \text{ кН}$;

изгибающий момент относительно оси X_c

$$M_x = Fy_F = 20 \cdot 4 = 80 \text{ кН} \cdot \text{мм} = 0,08 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

изгибающий момент относительно оси Y_c

$$M_y = Fx_F = 0.$$

Поскольку $x_F = 0$, а следовательно и $M_y = 0$, здесь имеет место частный случай внецентренного растяжения (плоский изгиб).

По формуле (8.5) определим положение нейтральной оси:

$$y_0 = -\frac{J_{x_c}}{Ay_F} = -\frac{16384}{192 \cdot 4} = -21,33 \text{ мм};$$

$$x_0 = -\frac{J_{y_c}}{Ax_F} = -\frac{576}{192 \cdot 0} = \infty \text{ (н.о. проходит параллельно оси } X_c).$$

Заметим, что нейтральная ось располагается по другую сторону от центра тяжести сечения, чем точка приложения силы F (рис. 8.11, в).

Так как нейтральная ось проходит ниже сечения, не пересекая его, нормальные напряжения по всему сечению будут одного знака (растягивающие), но разные по абсолютному значению.

Определим нормальные напряжения в характерных точках сечения 3:

$$\begin{aligned}\sigma_A &= \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} y_A = \frac{20 \cdot 10^3}{192 \cdot 10^{-6}} + \frac{0,08 \cdot 10^3}{16384 \cdot 10^{-12}} \cdot 16 \cdot 10^{-3} = \\ &= (0,1042 + 0,0781) \cdot 10^9 \text{ Па} = 182,3 \text{ МПа};\end{aligned}$$

$$\sigma_C = \frac{20 \cdot 10^3}{192 \cdot 10^{-6}} = 104,2 \text{ МПа (для т. } C \text{ } y_c = 0);$$

$$\sigma_B = \frac{20 \cdot 10^3}{192 \cdot 10^{-6}} - \frac{0,08 \cdot 10^3}{16384 \cdot 10^{-12}} \cdot 16 \cdot 10^{-3} = 26,1 \text{ МПа.}$$

Как видно из результатов вычислений, нормальные напряжения наибольшие в точке, наиболее удаленной от нейтральной оси (точка *A*).

Эпюра нормальных напряжений для третьего сечения показана на рис. 8.11, *в*.

Условие прочности полосы обеспечено, так как $\sigma_{\text{пик}} = 182,3 \text{ МПа} < R$.

Пример 8.5

Короткая бетонная колонна сжимается продольной силой *F*, приложенной в точке *K* (рис. 8.12, *а*).

Определить наибольшее допустимое значение этой силы, если $R_c = 24 \text{ МПа}$, $R_t = 1,6 \text{ МПа}$, положение нейтральной оси. Построить эпюру нормальных напряжений и ядро сечения.

Решение

Внешняя сила *F* действует на колонну параллельно ее продольной оси *Z*, но с эксцентриситетом:

$$x_F = -20 \text{ см}, \quad y_F = -15 \text{ см.}$$

Вследствие этого колонна подвергается внецентренному сжатию.

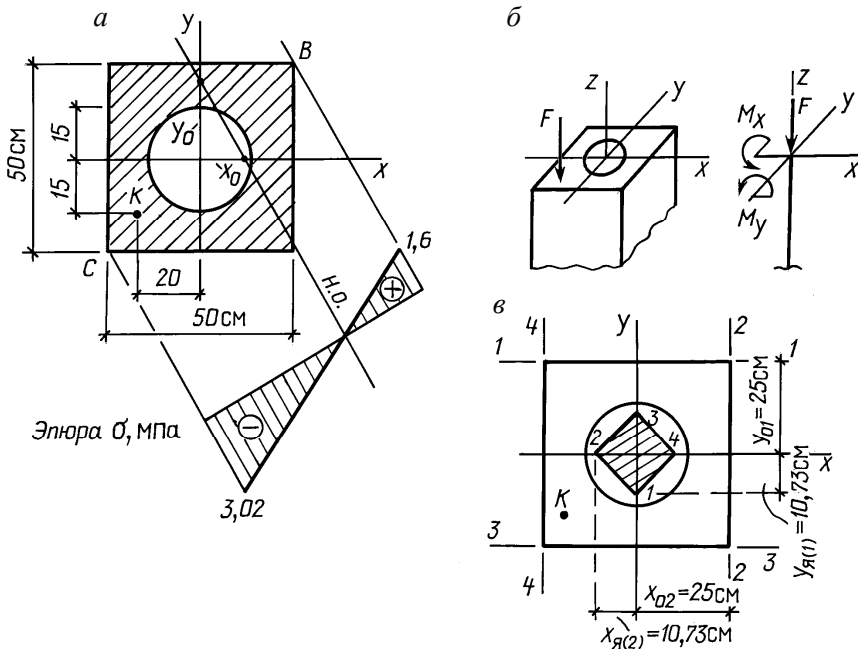


Рис. 8.12

Исходя из формы сечения (две оси симметрии и выступающие углы) условие прочности используем в виде (8.6):

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq R.$$

Определим необходимые геометрические характеристики сечения колонны.

Площадь сечения

$$A = 50 \cdot 50 - \frac{3,14 \cdot 30^2}{4} = 1793 \text{ см}^2.$$

Моменты инерции сечения относительно главных центральных осей

$$J_x = J_y = \frac{50 \cdot 50^3}{12} - \frac{3,14 \cdot 30^4}{64} = 481093 \text{ см}^4.$$

Моменты сопротивления сечения

$$W_x = W_y = \frac{481093}{50/2} = 19244 \text{ см}^3.$$

Определим внутренние силы (усилия), образующиеся в колонне: продольная сила $N = -F$, изгибающие моменты

$$M_x = Fy_F = 15F, \text{ Н} \cdot \text{см}, \quad M_y = Fx_F = 20F, \text{ Н} \cdot \text{см}.$$

Расчетная схема колонны показана на рис. 8.12, б. Изгибающие моменты M_x и M_y направлены согласно с точкой приложения силы F .

Заметим, что в данном случае все сечения колонны равноопасны, так как внутренние силы во всех сечениях одинаковы.

Положение нейтральной оси определим, исходя из формулы (8.5). Отрезки, отсекаемые нейтральной осью на главных центральных осях сечения:

$$x_0 = -\frac{J_y}{Ax_F} = -\frac{481093}{1793 \cdot (-20)} = 13,42 \text{ см};$$

$$y_0 = -\frac{J_x}{Ay_F} = -\frac{481093}{1793 \cdot (-15)} = 17,89 \text{ см}.$$

Положение нейтральной оси показано на рис. 8.12, а, из которого видно, что нейтральная ось не проходит через центр тяжести сечения. Она, пересекая главные центральные оси X и Y , делит сечение на две зоны: сжатую (нижнелевую) и растянутую (верхнеправую), и лежит по другую сторону от центра тяжести сечения, чем точка приложения силы F .

Для хрупких материалов наиболее опасными являются растягивающие напряжения. Максимальные растягивающие напряжения будут в т. *B* сечения, как наиболее удаленной от нейтральной оси в растянутой зоне.

Составим выражение для определения напряжения в т. *B*:

$$\begin{aligned}\sigma_B &= \frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = -\frac{F}{A} + \frac{15F}{W_x} + \frac{20F}{W_y} = \\ &= -\frac{F}{1793 \cdot 10^{-4}} + \frac{15F \cdot 10^{-2}}{19244 \cdot 10^{-6}} + \frac{20F \cdot 10^{-2}}{19244 \cdot 10^{-6}} = 12,6F, \text{ Па.}\end{aligned}$$

Проследим знаки слагаемых в составленном выражении. Первое слагаемое имеет знак «минус», так как действующая сила F сжимает колонну. Это относится к любой точке сечения. Второе и третье слагаемые имеют знак «плюс», так как в т. *B* оба изгибающих момента создают растягивающие напряжения (см. расчетную схему).

Условие прочности для т. *B* будет

$$\sigma_{\max} = \sigma_B = 12,6F \leq R_t = 1,6 \cdot 10^6,$$

откуда наибольшая допустимая нагрузка на колонну, исходя из растягивающих напряжений:

$$F = \frac{1,6 \cdot 10^6}{12,6} = 127,0 \text{ кН.}$$

Вычислим наибольшие сжимающие напряжения, которые будут в т. *C*, как наиболее удаленной от нейтральной оси в сжатой зоне:

$$\begin{aligned}\sigma_C &= -\frac{F}{A} - \frac{M_x}{W_x} - \frac{M_y}{W_y} = -\frac{127,0 \cdot 10^3}{1793 \cdot 10^{-4}} - \frac{15 \cdot 127,0 \cdot 10^3 \cdot 10^{-2}}{19244 \cdot 10^{-6}} - \\ &= -\frac{20 \cdot 127,0 \cdot 10^3 \cdot 10^{-2}}{19244 \cdot 10^{-6}} = -0,302 \cdot 10^7 \text{ Па} = -3,02 \text{ МПа} < R_c.\end{aligned}$$

Таким образом, наибольшая допустимая нагрузка на колонну составит $F = 127,0$ кН, при которой будет обеспечена прочность как по растягивающим, так и по сжимающим напряжениям.

Эпюра нормальных напряжений показана на рис. 8.12, а, из которого видно, что при внецентренной нагрузке нормальные напряжения распределяются по сечению неравномерно.

Заметим, что полюс нагрузки F (точка K) лежит в *большой* по площади зоне напряжений (сжатой). Это постоянная закономерность.

Координаты ядра сечения определим из (8.7), задавшись положениями нейтральной оси, совпадающими со сторонами сечения колонны (рис. 8.12, в).

Нейтральная ось в положении 1–1.

Отрезки, отсекаемые нейтральной осью в системе главных центральных осей, будут

$$y_{01} = 25 \text{ см}, \quad x_{01} = \infty.$$

Координаты ядра сечения

$$x_{F(\text{я})1} = -\frac{J_y}{Ax_0} = -\frac{481093}{1793 \cdot \infty} = 0;$$

$$y_{F(\text{я})1} = -\frac{J_x}{Ay_0} = -\frac{481093}{1793 \cdot 25} = -10,73 \text{ см}.$$

Нейтральная ось в положении 2–2.

$$y_{02} = \infty, \quad x_{02} = 25 \text{ см};$$

$$y_{F(\text{я})2} = 0, \quad x_{F(\text{я})2} = -\frac{481093}{1793 \cdot 25} = -10,73 \text{ см}.$$

Вследствие симметрии сечения:

для положения нейтральной оси 3–3 $y_{F(\text{я})3} = 10,73 \text{ см};$

для положения 4–4 $x_{F(\text{я})4} = 10,73 \text{ см}.$

Ядро сечения показано на рис. 8.12, в.

Обратите внимание, что точка K (полюс силы F) лежит за пределами ядра сечения, отчего нейтральная ось проходит по сечению, разделяя его на две зоны: сжатую и растянутую.

Если т. K будет приближаться к центру тяжести сечения, то нейтральная ось будет удаляться от него. При положении т. K в пределах ядра сечения нейтральная ось уйдет за пределы сечения и напряжения по всему сечению будут одного знака.

Пример 8.6

На поперечном сечении колонны (рис. 8.13, а) определить точку приложения сжимающей силы F , наиболее удаленной от центра тяжести по оси Y , при которой в колонне не будет растягивающих напряжений.

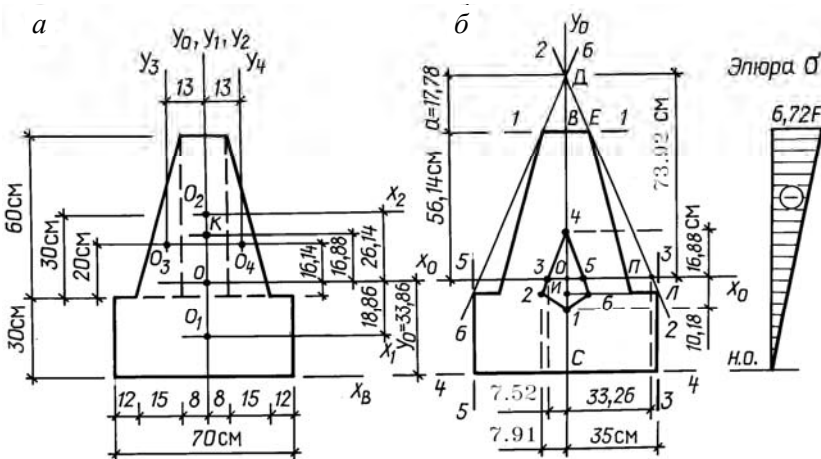


Рис. 8.13

Построить ядро сечения и эпюру напряжений (в долях от F).

Решение

Поскольку сила F должна быть приложена к колонне вне ее центра тяжести сечения, колонна будет подвергаться внецентренному сжатию.

Для отыскания точки приложения силы F воспользуемся формулами (8.8):

$$x_F = -\frac{i_y^2}{x_0}; \quad y_F = -\frac{i_x^2}{y_0}.$$

Для определения необходимых геометрических характеристик рассматриваемое сложное сечение разделим на четыре простые фигуры: два прямоугольника и два треугольника (см. рис. 8.13, а).

Площадь сечения

$$A = 30 \cdot 70 + 16 \cdot 60 + 2 \cdot \frac{15 \cdot 60}{2} = 3960 \text{ см}^2.$$

Ордината центра тяжести сечения (относительно вспомогательной оси X_B)

$$y_0 = \frac{\sum S_{xB}}{\sum A} = \frac{30 \cdot 70 \cdot 15 + 16 \cdot 60 \cdot 60 + 2 \cdot \left(\frac{15 \cdot 60}{2} \cdot 50\right)}{3960} = 33,86 \text{ см}.$$

Оси X_0 и Y_0 являются главными центральными осями сечения, так как Y_0 – ось симметрии.

Моменты инерции относительно главных центральных осей сечения

$$J_{x_0} = \frac{70 \cdot 30^3}{12} + 30 \cdot 70 \cdot 18,86^2 + \frac{16 \cdot 60^3}{12} + 16 \cdot 60 \cdot 26,14^2 + 2 \left(\frac{15 \cdot 60^3}{36} + \frac{15 \cdot 60}{2} \cdot 16,14^2 \right) = 2\,263\,000 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_0} = \frac{30 \cdot 70^3}{12} + \frac{60 \cdot 16^3}{12} + 2 \left(\frac{60 \cdot 15^3}{36} + \frac{15 \cdot 60}{2} \cdot 13^2 \right) = 1\,041\,330 \text{ см}^4.$$

Радиусы инерции сечения относительно главных центральных осей

$$i_{x_0} = \sqrt{\frac{2\,263\,000}{3960}} = 23,91 \text{ см}; \quad i_{y_0} = \sqrt{\frac{1\,041\,330}{3960}} = 16,22 \text{ см}.$$

Точка приложения силы F связана с положением нейтральной оси. Поскольку сила F находится на оси Y_0 , нейтральная ось должна быть ей перпендикулярна.

Для выполнения условия задачи (в сечении не должно возникать растягивающих напряжений) нужно задаться двумя положениями нейтральной оси, совпадающими с верхней и нижней гранями сечения, и определить ординату точки приложения силы F .

В положении нейтральной оси по верхней грани сечения (рис. 8.13, б) ее ордината

$$y_0 = 90 - 33,86 = 56,14 \text{ см},$$

а ордината точки приложения силы F будет

$$y_F = -\frac{i_{x_0}^2}{y_0} = -\frac{23,91^2}{56,14} = -10,18 \text{ см}.$$

При положении н.о. по нижней грани сечения

$$y_0 = y_c = -33,86 \text{ см};$$

$$y_F = -\frac{i_{x_0}^2}{y_0} = -\frac{23,91^2}{(-33,86)} = 16,88 \text{ см}.$$

По условию задачи принимаем положение точки приложения силы F (точка K) выше центральной оси X_0 на расстоянии $y_F = 16,88$ см (см. рис. 8.13, а).

Для построения эпюры напряжений вычислим их значения (в долях от F) для крайних точек сечения:

$$\sigma_B = -\frac{F}{A} - \frac{F y_F}{J_{x_0}} y_B = -\frac{F}{3960 \cdot 10^{-4}} - \frac{F \cdot 16,88 \cdot 10^{-2}}{2263000 \cdot 10^{-8}} \cdot 56,14 \cdot 10^{-2} = -6,72F;$$

$$\sigma_C = -\frac{F}{A} + \frac{F y_F}{J_{x_0}} y_C = -\frac{F}{3960 \cdot 10^{-4}} + \frac{F \cdot 16,88 \cdot 10^{-2}}{2\,263\,000 \cdot 10^{-8}} \cdot 33,86 \cdot 10^{-2} = 0.$$

Условие задачи выполнено – в сечении нет растягивающих напряжений. Эпюра напряжений показана на рис. 8.13, б.

Для построения ядра сечения задаемся рядом последовательных положений нейтральной оси, касающихся контуров сечения и не пересекающих его. Для каждого ее положения вычисляются координаты x_0, y_0 , а затем соответствующие данному положению нейтральной оси координаты точки приложения силы F , которые являются координатами точек ядра сечения ($x_F = x_a, y_F = y_a$).

Для вычисления координат точек ядра сечения воспользуемся формулами (8.8).

Нейтральная ось в положении 1–1: $y_{01} = 56,14$ см, $x_{01} = \infty$,

$$y_{я,1} = -\frac{i_{x_0}^2}{y_0} = -\frac{23,91^2}{56,14} = -10,18 \text{ см};$$

$$x_{я,1} = -\frac{i_{y_0}^2}{x_0} = -\frac{15,57^2}{\infty} = 0.$$

Нейтральная ось в положении 2–2 на главных центральных осях X_0, Y_0 отсекает отрезки, координаты которых (x_{02}, y_{02}) необходимо определить используя подобие образовавшихся треугольников: ДВЕ, ДИЛ, ДОП (см. рис. 8.13, б):

$$\frac{ДВ}{ВЕ} = \frac{ДИ}{ИЛ} = \frac{a}{8} = \frac{60+a}{35},$$

откуда $a = 17,78$ см;

$$y_{02} = 56,14 + 17,78 = 73,92 \text{ см};$$

$$\frac{y_{02}}{x_{02}} = \frac{17,78}{8},$$

откуда

$$x_{02} = \frac{8 \cdot 73,92}{17,78} = 33,26 \text{ см.}$$

Координаты ядра сечения

$$y_{я,2} = -\frac{23,91^2}{73,92} = -7,73 \text{ см;}$$

$$x_{я,2} = -\frac{16,22^2}{33,26} = -7,91 \text{ см.}$$

Нейтральная ось в положении 3–3:

$$y_{03} = \infty; \quad x_{03} = 35,0 \text{ см;}$$

$$x_{я,3} = -\frac{16,22^2}{35} = -7,52 \text{ см;} \quad y_{я,3} = 0.$$

Нейтральная ось в положении 4–4:

$$y_{04} = -33,86 \text{ см;} \quad x_{04} = \infty; \quad x_{я,4} = 0;$$

$$y_{я,4} = -\frac{23,91^2}{-33,86} = 16,88 \text{ см.}$$

Положение нейтральной оси 5–5 симметрично положению 3–3, а положение 6–6 симметрично 2–2.

По полученным значениям $x_{я}$, $y_{я}$ построено ядро сечения (см. рис. 8.13, б).

Как видно по ядру сечения, наиболее удаленной от центра является точка 4. Приложив в этой точке силу F , получим наиболее допустимый ее эксцентриситет ($\max y_F = 16,88$ см), при котором в сечении будут напряжения *одного* знака. Это подтверждает ранее сделанный расчет.

В заключение заметим, что, прикладывая нагрузку F в пределах ядра сечения, по всему сечению получим напряжения одного знака.

8.3. Изгиб с кручением

Элемент конструкции (брус) подвергается деформации изгиба с кручением, когда внешние силы или их составляющие действуют перпендикулярно продольной оси Z в главных плоскостях сечения (т. е. создают изгиб), и пары сил, действующих в плоскости, перпендикулярной продольной оси, с моментом T_e вокруг этой оси (т. е. создают кручение), рис. 8.14, а.

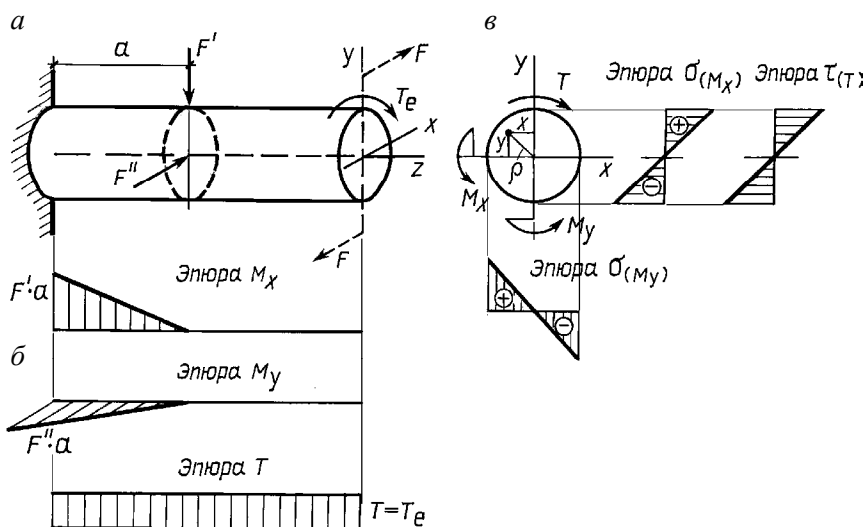


Рис. 8.14

Деформации изгиба с кручением подвергаются в основном детали машин и валы различных механизмов, имеющие преимущественно круглое поперечное сечение, а также элементы пространственных систем.

В поперечном сечении вала при изгибе с кручением образуются следующие внутренние силовые факторы: крутящий момент T , изгибающие моменты M_x , M_y (рис. 8.14, в) и поперечные силы Q_x , Q_y .

Последние на прочность вала существенно не влияют (на рис. 8.14 не показаны).

Определение внутренних сил и построение их эпюр ведется по тем же правилам, что и при простых видах сопротивлений (рис. 8.14, б). По построенным эпюрам M_x , M_y , T устанавливается опасное сечение вала, т. е. сечение, где их сочетание наиболее неблагоприятное.

Изгибающие моменты связаны с нормальными напряжениями, которые в любой точке сечения определяются по формулам

$$\sigma_{(M_x)} = \frac{M_x}{J_x} y, \quad \sigma_{(M_y)} = \frac{M_y}{J_y} x,$$

а крутящие моменты – с касательными напряжениями:

$$\tau_{(T)} = \frac{T}{J_p} \rho.$$

Поскольку в поперечном сечении вала, подвергающегося изгибу с кручением, одновременно возникают нормальные и касательные напряжения, материал вала находится в условиях плоского напряженного состояния, поэтому проверка прочности производится по теориям прочности для точек, лежащих на контуре сечения, где имеется самое неблагоприятное сочетание σ и τ (см. рис. 8.14, в).

Условие прочности, выраженное через внутренние силовые факторы, для вала круглого поперечного сечения имеет вид

$$\sigma_{\text{des}} = \frac{M_{\text{red}}}{W_x} \leq \sigma_{\text{adm}}, \quad (8.9)$$

где σ_{des} – расчетное напряжение;

M_{red} – приведенный момент в опасном сечении вала;

W_x – осевой момент сопротивления сечения;

σ_{adm} – допускаемое напряжение в материале вала, которое зависит от предела текучести σ_y и коэффициента запаса прочности K :

$$\sigma_{\text{adm}} = \sigma_y / K.$$

Для круглого сплошного сечения $W_x = \frac{\pi d^3}{32}$;

для кольцевого сечения

$$W_x = \frac{\pi d_{\text{нар}}^3}{32} (1 - c^4),$$

где $c = d_{\text{вн}} / d_{\text{нар}}$.

По четвертой (энергетической) теории прочности приведенный момент

$$M_{\text{ред}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0,75T^2} \quad \text{или} \quad M_{\text{ред}} = \sqrt{M_u^2 + 0,75T^2},$$

где M_x, M_y – изгибающие моменты;

T – крутящий момент;

$M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$ – суммарный изгибающий момент.

В поисках опасного сечения вала часто приходится просчитывать значение $M_{\text{ред}}$ для нескольких по длине вала сечений, ориентируясь на эпюры внутренних сил.

Приведенное условие прочности применимо и для расчета валов кольцевого сечения.

Пример 8.7

Консольный стальной брус (рис. 8.15, а) круглого поперечного сечения диаметром $d = 40$ мм нагружен системой внешних сил.

В опасном сечении бруса построить эпюры нормальных и касательных напряжений, отыскать его опасную точку.

Проверить прочность стержня, если $\sigma_{\text{adm}} = 140$ МПа.

Решение

Сосредоточенная сила F_1 , действующая перпендикулярно к продольной оси бруса Z , подвергает его плоскому изгибу в вертикальной плоскости, а сила F_2 – в горизонтальной.

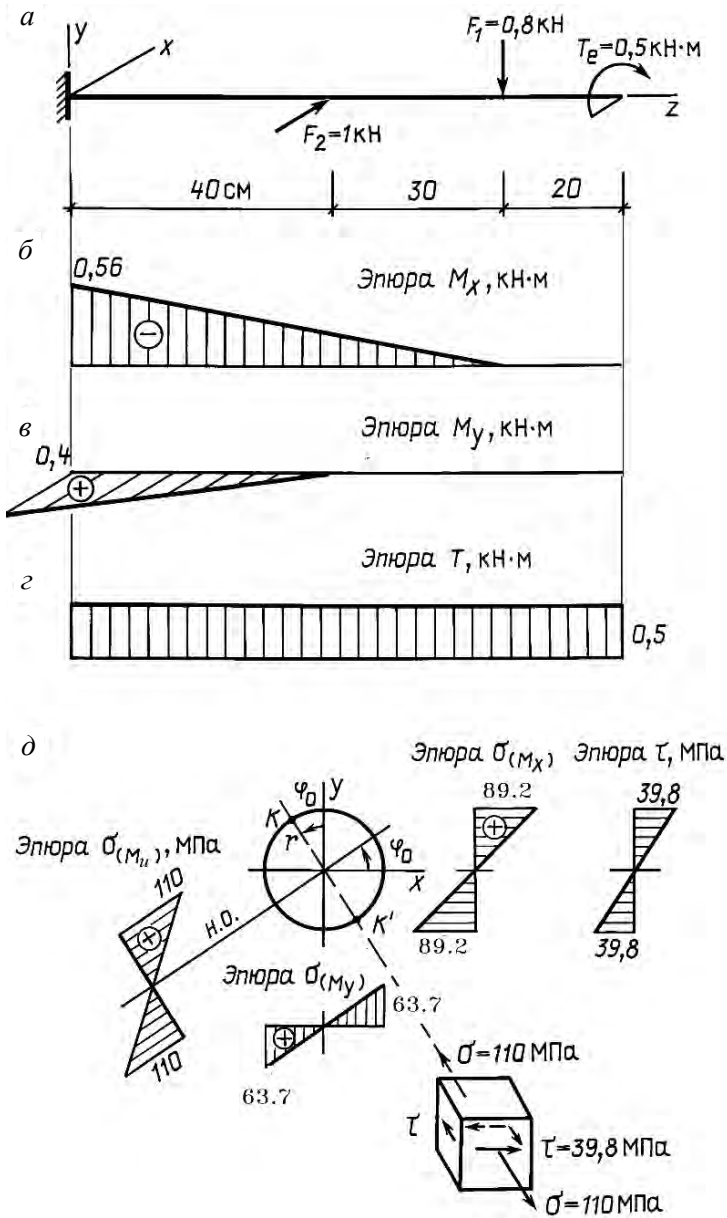


Рис. 8.15

Момент T_e , действующий вокруг продольной оси бруса Z , скручивает его.

Совместное действие всех внешних сил подвергает рассматриваемый брус изгибу с кручением.

В сечениях бруса образуются усилия – изгибающие моменты M_x , M_y и крутящий момент T , эпюры которых приведены на рис. 8.15, б, в, г.

Анализ эпюр показывает, что опасным является опорное сечение (защемление), где все три усилия наибольшие:

$$M_x = 0,56 \text{ кН}\cdot\text{м}, \quad M_y = 0,40 \text{ кН}\cdot\text{м}, \quad T = 0,50 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Для проверки прочности бруса воспользуемся формулой (8.9)

$$\sigma_{\text{des}} = \frac{M_{\text{red}}}{W_x} \leq \sigma_{\text{adm}}.$$

По четвертой теории прочности приведенный момент в опасном сечении бруса

$$\begin{aligned} M_{\text{red}} &= \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0,75T^2} = \\ &= \sqrt{0,56^2 + 0,40^2 + 0,75 \cdot 0,50^2} = 0,813 \text{ кН}\cdot\text{м}. \end{aligned}$$

Осевой момент сопротивления для круглого сплошного сечения

$$W_x = W_y = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{3,14 \cdot 40^3}{32} = 6280 \text{ мм}^3.$$

Расчетное напряжение

$$\sigma_{\text{des}} = \frac{0,813 \cdot 10^3}{6280 \cdot 10^{-9}} = 0,000130 \cdot 10^{12} \text{ Па} = 130 \text{ МПа}.$$

Условие прочности рассматриваемого бруса выполняется, так как

$$\sigma_{\text{des}} = 130 \text{ МПа} < \sigma_{\text{adm}} = 140 \text{ МПа}.$$

Приступим к определению наибольших нормальных и касательных напряжений в опасном сечении бруса.

Нормальные напряжения от изгибающих моментов, действующих в главных плоскостях бруса:

$$\sigma_{(M_x)} = \pm \frac{M_x}{W_x} = \pm \frac{0,56 \cdot 10^3}{6280 \cdot 10^{-9}} = \pm 89,2 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{(M_y)} = \pm \frac{M_y}{W_y} = \pm \frac{0,40 \cdot 10^3}{6280 \cdot 10^{-9}} = \pm 63,7 \text{ МПа}.$$

Наибольшее касательное напряжение от крутящего момента T , действующее в любой точке контура сечения:

$$\tau = \frac{T}{W_p} = \frac{T}{2W_x} = \frac{0,5 \cdot 10^3}{2 \cdot 6280 \cdot 10^{-9}} = 39,8 \text{ МПа}.$$

Положение нейтральной оси определяем по формуле (8.1):

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = -\frac{J_x}{J_y} \cdot \frac{M_y}{M_x} = -\frac{M_y}{M_x} = -\frac{0,40}{-0,56} = 0,714, \quad \varphi_0 = 35,5^\circ.$$

Напомним, что для круглого сечения $J_x = J_y$.

Угол φ_0 откладывается от оси X против хода часовой стрелки.

Суммарный изгибающий момент в опасном сечении бруса

$$M_{\text{и}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = \sqrt{0,56^2 + 0,40^2} = 0,688 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Экстремальные нормальные напряжения от суммарного изгибающего момента

$$\sigma_{(M_{\text{и}})} = \pm \frac{M_{\text{и}}}{W_x} = \pm \frac{0,688 \cdot 10^3}{6280 \cdot 10^{-9}} = \pm 0,000110 \cdot 10^{12} \text{ Па} = \pm 110 \text{ МПа}.$$

Эпюры нормальных σ и касательных τ напряжений показаны на рис. 8.15, д.

Анализ эпюр напряжений показывает, что наиболее напряженная точка лежит на контуре сечения, где нормальное напряжение от суммарного изгибающего момента максимально. Это точка K , лежащая по линии, перпендикулярной нейтральной оси, или ей противоположная K' . Координаты точки K определяются по радиусу r и соответствующей тригонометрической функции.

Напряжения, действующие по граням элементарного прямоугольника, выделенного вокруг точки K , $\sigma_{(M_H)}$ и τ показаны на рис. 8.25, δ . Исходя из $\sigma_{(M_H)}$ и τ , несложно вычислить главные напряжения σ_1 и σ_3 и убедиться, что при изгибе с кручением материал бруса находится в условии плоского напряженного состояния и проверку прочности можно провести, используя главные напряжения.

Пример 8.8

Консольный стальной брус (рис. 8.16, a) круглого поперечного сечения нагружен внешними силами на перпендикулярно присоединенных к нему поперечинах.

Определить диаметр бруса, если $\sigma_{adm} = 180$ МПа.

Решение

Внешние силы не приложены непосредственно к рассматриваемому брусу, поэтому для него нужно составить расчетную схему, перенося внешние силы к продольной оси Z по правилу механики. Образуются вертикально действующие, перпендикулярные оси сосредоточенные силы

$$F_1 = 1 \text{ кН}, \quad F_2 = 4 \cdot 0,3 = 1,2 \text{ кН},$$

изгибающие брус, и моменты относительно оси Z

$$T_{e1} = 1 \cdot 0,1 = 0,10 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$T_{e2} = 4 \cdot 0,3 \cdot \frac{0,3}{2} = 0,18 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

скручивающие брус (рис. 8.16, b).

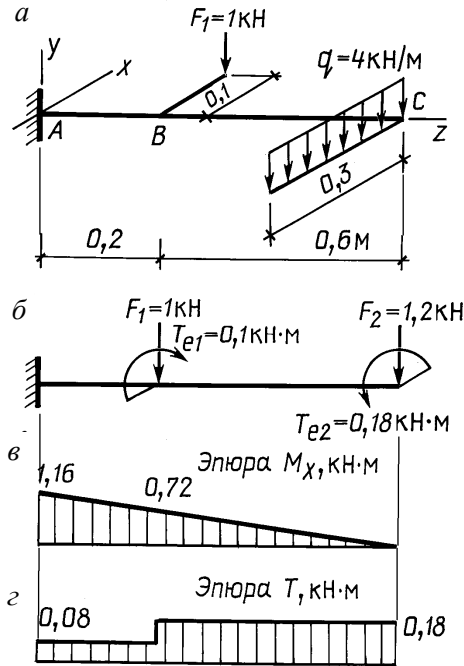


Рис. 8.16

Определим значения изгибающих и крутящих моментов в характерных сечениях бруса:

сечение C:

$$M_x = 0, \quad T = 0,18 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

сечение B:

$$M_x = 1,2 \cdot 0,6 = 0,72 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$T^{\text{II}} = 0,18 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$T^{\text{I}} = 0,18 - 0,1 = 0,08 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

сечение A:

$$M_x = 1,2 \cdot 0,8 + 1 \cdot 0,2 = 1,16 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$T = 0,08 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Эпюры M_x и T показаны на рис. 8.16, в, г.

В данном примере опасное сечение не явно. Это сечение A или B . Приведенные моменты для этих сечений

сечение A :

$$M_{\text{red}} = \sqrt{M_x^2 + 0,75T^2} = \sqrt{1,16^2 + 0,75 \cdot 0,08^2} = 1,162 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

сечение B :

$$M_{\text{red}} = \sqrt{0,72^2 + 0,75 \cdot 0,18^2} = 0,737 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Таким образом, опасным является сечение A , где M_{red} наибольший.

Из условия прочности (8.9) требуемый момент сопротивления сечения

$$W_x \geq \frac{M_{\text{red}}}{\sigma_{\text{adm}}} = \frac{1,162 \cdot 10^3}{180 \cdot 10^6} = 0,00646 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 6,46 \text{ см}^3.$$

Из выражения

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32} = 6,46 \text{ см}^3$$

определяем диаметр бруса:

$$d = \sqrt[3]{\frac{6,46 \cdot 32}{3,14}} = 4,04 \text{ см}.$$

Принимаем диаметр бруса $d = 40$ мм (перенапряжение при этом не превышает 5 %).

8.4. Общий случай сложного сопротивления

В общем случае сложного сопротивления (рис. 8.17, a) внешние силы действуют на элемент конструкции (брус) таким образом, что в его поперечном сечении возникает шесть внутренних силовых факторов: продольная сила N , изгибающие моменты M_x , M_y , крутя-

щий момент T и поперечные силы Q_x, Q_y (рис. 8.17, б). Поперечные силы на прочность бруса существенно не влияют, и их эпюры на рисунке не показаны.

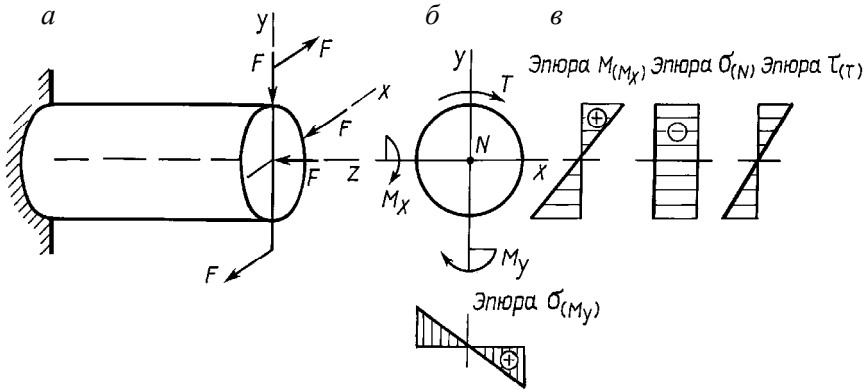


Рис. 8.17

Таким образом, общий случай сложного сопротивления элемента конструкции (стержня) есть сочетание нескольких простых сопротивлений: центрального растяжения-сжатия, плоского изгиба в одной или двух главных плоскостях сечения и кручения.

Продольная сила N и изгибающие моменты M_x, M_y связаны с нормальным напряжением σ , а крутящий момент T – с касательным напряжением τ . Эпюры этих напряжений показаны на рис. 8.17, в.

В общем случае сложного сопротивления материал элемента конструкции находится в условиях сложного напряженного состояния, поэтому условие прочности составляется по теориям прочности для наиболее напряженной точки сечения.

Для элемента с круглым поперечным сечением наиболее напряженная (опасная) точка лежит на контуре сечения.

Для пластичных материалов наиболее приемлема четвертая (энергетическая) теория прочности, по которой условие прочности, выраженное через напряжения, имеет вид

$$\sigma_{\text{des}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq R \text{ (или } \sigma_{\text{adm}}), \quad (8.10)$$

где σ_{des} – расчетное напряжение;

σ – нормальное напряжение от растяжения-сжатия и изгиба;

τ – касательное напряжение от кручения;

R – расчетное сопротивление материала стержня;

σ_{adm} – допустимое напряжение в материале стержня.

Заметим, что касательные напряжения от поперечной силы Q на контуре сечения, где расположена опасная точка, равны нулю.

Пример 8.9

Пространственная система (рис. 8.18, *a*), состоящая из трех стальных стержней круглого поперечного сечения диаметром $d = 4$ см и жестко соединенных между собой под прямым углом, нагружена расчетной нагрузкой.

Расчетные сопротивления для стали $R = 210$ МПа, $R_s = 130$ МПа.

Проверить прочность стержней системы.

Решение

Стержни системы находятся под действием различных видов и направлений нагрузки. Чтобы установить вид сопротивления на каждом стержне системы, необходимо построить эпюры внутренних силовых факторов. Для этого целесообразно рассматривать систему со свободного конца. В таком случае не потребуется определять опорные реакции в закреплении системы и сложность эпюр будет нарастать постепенно.

Для каждого стержня системы, начиная с первого, составляется расчетная схема с использованием локальной системы координат (см. рис. 8.18, *a*). Переходя к последующему стержню, необходимо по правилу механики перенести к нему все силы, действующие на предыдущий стержень.

При переносе сосредоточенной силы F параллельно самой себе образуются сосредоточенная сила F той же величины и направления и момент M , равный произведению силы F на плечо a (расстояние переноса):

$$M = Fa.$$

Сосредоточенный момент M параллельно самому себе «перемещается» по оси, относительно которой он действует.

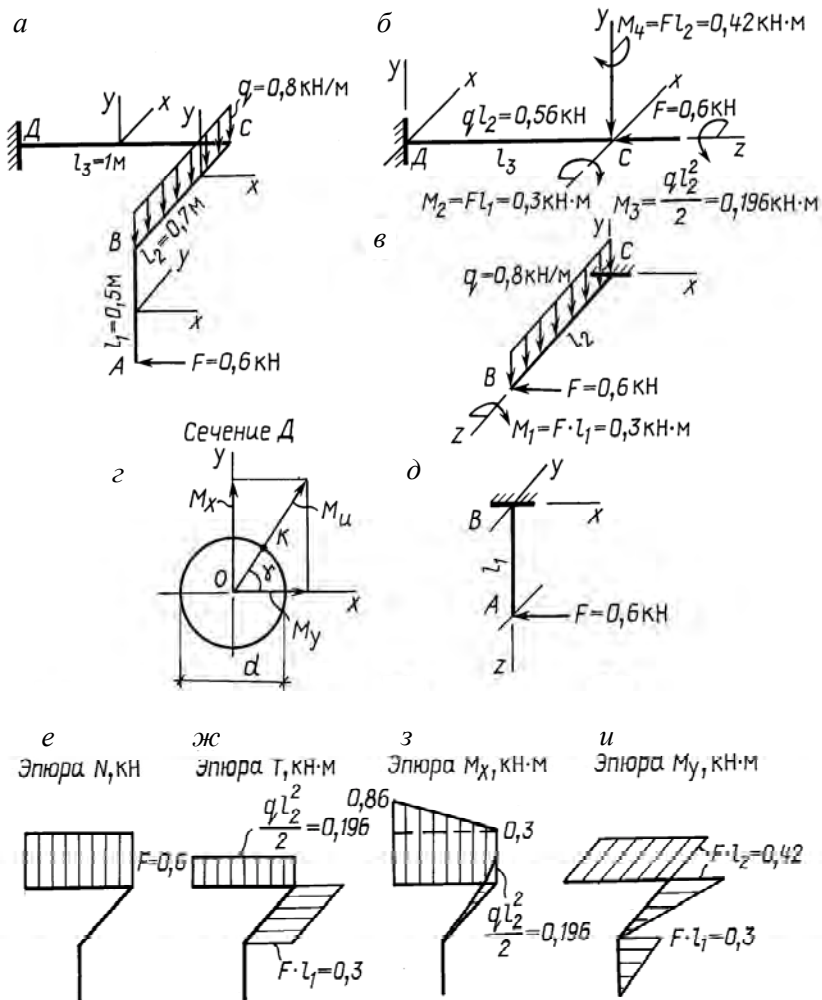


Рис. 8.18

Приступим к составлению расчетных схем, определению внутренних сил в характерных сечениях каждого стержня системы, начиная с первого, и построению их эпюр.

Поперечные силы от изгиба во внимание не принимаются.

Стержень 1 (AB).

Расчетная схема стержня – заземление в точке B (рис. 8.18, δ).

Нагрузкой на стержень является сосредоточенная сила $F = 0,6$ кН, действующая по направлению оси X . Она вызывает изгиб стержня относительно оси Y .

Изгибающие моменты:

$$\text{в т. } A \quad M_y = 0;$$

$$\text{в т. } B \quad M_y = F l_1 = 0,6 \cdot 0,5 = 0,3 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Ординаты момента M_y откладываются по направлению оси X со стороны растянутых волокон стержня, т. е. справа от оси Z (AB) (рис. 8.18, u).

Другие силовые факторы

$$N = 0, \quad T = 0, \quad M_x = 0.$$

Общее правило: в системе взаимно перпендикулярных осей m , n сила F , действующая по направлению оси n , создает изгиб относительно оси m и ордината изгибающего момента M_m откладывается по направлению силы F .

Стержень 2 (BC).

Расчетная схема стержня – заземление в точке C (рис. 8.18, ϵ). Непосредственно на стержень действует распределенная нагрузка q . Нагрузка F , действующая на первый стержень в т. A , будучи приведенной к т. B второго стержня, образует сосредоточенную силу F , направленную параллельно оси X , и момент $M_1 = Fl$ относительно оси Z , направленный по часовой стрелке, если смотреть со стороны сечения стержня.

Распределенная нагрузка q создает изгиб стержня относительно оси X , а сосредоточенная F – изгиб относительно оси Y . Момент M_1 создает кручение относительно оси Z .

Таким образом, второй стержень подвергается изгибу (в двух плоскостях) и кручению.

Определим значения внутренних сил в характерных сечениях.

Крутящий момент

$$T = M_1 = Fl_1 = 0,6 \cdot 0,5 = 0,3 \text{ кН}\cdot\text{м} = \text{const}.$$

Изгибающие моменты:

в т. *B* $M_x = 0$, $M_y = 0$,

в т. *C*

$$M_x = M_x = ql_2 \frac{l_2}{2} = \frac{0,8 \cdot 0,7^2}{2} = 0,196 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_y = M_y = Fl_2 = 0,6 \cdot 0,7 = 0,42 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Ординаты эпюры M_x (параболический треугольник) отложены по оси Y сверху продольной оси Z стержня, а M_y – по оси X справа оси Z , в обоих случаях – со стороны растянутых волокон.

Продольная сила во втором стержне

$$N = 0.$$

Эпюры внутренних сил показаны на рис. 8.18, *ж-и*.

Стержень 3 (СД).

Расчетная схема – защемление в т. *Д* (см. рис. 8.18, *б*). Непосредственно действующих на стержень внешних сил нет. Силы, действующие на предыдущие участки, будучи приведенными к третьему, образуют в т. *C* сосредоточенные силы F и ql_2 и моменты

$$M_3 = \frac{ql_2^2}{2}, \quad M_4 = Fl_2,$$

а также момент $M_2 = Fl_1$ (на предыдущем стержне это M_1).

Сосредоточенная сила F создает в стержне деформацию сжатия. Сосредоточенная сила ql_2 и момент M_2 создают деформацию изгиба относительно оси X (т. е. в вертикальной плоскости), а момент M_4 – изгиб относительно оси Y (т. е. в горизонтальной плоскости). Момент M_3 создает деформацию кручения.

Внутренние силы в стержне.

Изгибающие моменты:

в т. *C*

$$M_x = Fl_1 = 0,6 \cdot 0,5 = 0,3 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_y = Fl_2 = 0,6 \cdot 0,7 = 0,42 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

в т. Д

$$M_x = Fl_1 + ql_2l_3 = 0,3 + 0,8 \cdot 0,7 \cdot 1 = 0,86 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_y = Fl_2 = 0,42 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Крутящий момент

$$T = M_3 = \frac{ql_2^2}{2} = \frac{0,8 \cdot 0,7^2}{2} = 0,196 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Продольная сила

$$N = F = 0,6 \text{ кН}.$$

Эпюры внутренних сил показаны на рис. 7.18, *e-u*.

Ординаты эпюр M_x и M_y отложены со стороны растянутых волокон стержня. Как изгибается стержень, нетрудно представить по расчетной схеме.

Анализ эпюр внутренних сил позволяет установить вид сопротивления каждого стержня системы, выявить опасное сечение и проверить его прочность.

Сначала вычислим необходимые геометрические характеристики сечения (сечение круглое, диаметром $d = 4$ см).

Площадь сечения

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 4^2}{4} = 12,56 \text{ см}^2.$$

Осейвой момент сопротивления

$$W_x = W_y = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{3,14 \cdot 4^3}{32} = 6,28 \text{ см}^3.$$

Полярный момент сопротивления:

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 4^3}{16} = 12,56 \text{ см}^3.$$

В стержне AB возникает лишь изгибающий момент M_y . Значит, он подвергается плоскому изгибу. Опасное сечение B , где $M_{y \max} = 0,3 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Максимальное нормальное напряжение в стержне

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{y \max}}{W_y} = \frac{0,3 \cdot 10^3}{6,28 \cdot 10^{-6}} = 0,0478 \cdot 10^9 \text{ Па} = 47,8 \text{ МПа} < R = 210 \text{ МПа}.$$

Условие прочности удовлетворяется.

Стержень BC подвергается изгибу в двух плоскостях и кручению. Опасное сечение C , где $T = 0,3 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $M_{x \max} = 0,196 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $M_{y \max} = 0,42 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Поскольку изгиб происходит в двух плоскостях, необходимо вычислить суммарный изгибающий момент:

$$M_{\text{и}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = \sqrt{0,196^2 + 0,42^2} = 0,463 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Максимальное касательное напряжение от крутящего момента

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p} = \frac{0,3 \cdot 10^3}{12,56 \cdot 10^{-6}} = 0,0239 \cdot 10^9 \text{ Па} = 23,9 \text{ МПа}.$$

Максимальное нормальное напряжение от суммарного изгибающего момента

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\text{и}}}{W_x} = \frac{0,463 \cdot 10^3}{6,28 \cdot 10^{-6}} = 0,0737 \cdot 10^9 \text{ Па} = 73,7 \text{ МПа}.$$

Так как стержень подвергается изгибу с кручением, проверку прочности следует выполнить по теории прочности (формула (8.10)).

Максимальное расчетное напряжение

$$\sigma_{\text{des}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{73,7^2 + 3 \cdot 23,9^2} = 84,5 \text{ МПа} < R = 210 \text{ МПа}.$$

Условие прочности удовлетворяется.

Стержень *СД* подвергается сжатию, изгибу в двух плоскостях и кручению.

Опасное сечение *Д*, где $N = 0,6$ кН, $M_{x \max} = 0,86$ кН·м, $M_{y \max} = 0,42$ кН·м, $T = 0,196$ кН·м.

Суммарный изгибающий момент

$$M_{из} = \sqrt{0,86^2 + 0,42^2} = 0,957 \text{ кН·м.}$$

Максимальное касательное напряжение от крутящего момента

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p} = \frac{0,196 \cdot 10^3}{12,56 \cdot 10^{-6}} = 0,0156 \cdot 10^9 \text{ Па} = 15,6 \text{ МПа.}$$

Максимальное нормальное напряжение от суммарного момента

$$\sigma_{из \max} = \frac{M_{из}}{W_x} = \frac{0,957 \cdot 10^3}{6,28 \cdot 10^{-6}} = 0,152 \cdot 10^9 \text{ Па} = 152 \text{ МПа.}$$

Максимальное нормальное напряжение от сжимающей продольной силы

$$\sigma_{сж \max} = \frac{N}{A} = \frac{0,6 \cdot 10^3}{12,56 \cdot 10^{-4}} = 0,0477 \cdot 10^7 \text{ Па} = 0,477 \text{ МПа.}$$

Максимальное расчетное напряжение

$$\begin{aligned} \sigma_{des} &= \sqrt{(\sigma_{сж} + \sigma_{из})^2 + 3\tau^2} = \sqrt{(0,477 + 152)^2 + 3 \cdot 15,6^2} = \\ &= 154,9 \text{ МПа} < R = 210 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

Условие прочности удовлетворяется.

В завершение примера установим положение наиболее напряженной точки в опасном сечении *Д*.

Нормальные напряжения от продольной силы N распределяются по сечению равномерно. Касательные напряжения от крутящего момента T максимальны по контуру сечения. Максимальные нормальные напряжения от изгибающих моментов M_x и M_y будут также

на контуре сечения по линии действия суммарного момента M_{Π} . Таким образом, наиболее напряженной является точка K , лежащая на контуре сечения по линии действия M_{Π} (рис. 8.18, ε). Расчетное напряжение в этой точке $\sigma_{des} = 154,9$ МПа.

Координаты точки K легко определить, вычислив значение угла γ ($\operatorname{tg} \gamma = M_x / M_y$).

9. ПРОДОЛЬНЫЙ И ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБЫ

В предыдущих главах пособия рассматривался расчет элементов конструкций, для которых основным являлся вопрос о прочности или жесткости. При этом напряжения и деформации линейно зависели от нагрузки, т. е. с ростом нагрузки они увеличивались постепенно, без резких скачков.

Однако встречаются случаи, когда при постепенном увеличении нагрузки резко изменяется форма равновесия элемента конструкции, вследствие чего может произойти его внезапное разрушение. В таких случаях наряду с проблемой прочности существует проблема *устойчивости*, т. е. сохранения под действием нагрузки первоначальной формы равновесия.

Несущая способность элемента конструкции может быть исчерпана потерей устойчивости задолго до потери прочности. При этом утрачивается первоначальная форма равновесия.

Искривление стержня, вызванное только продольными сжимающими силами, называется *продольным* изгибом.

Продольно-поперечный изгиб стержня происходит в случае действия как продольных сжимающих, так и поперечных изгибающих сил.

9.1. Продольный изгиб (устойчивость сжатых стержней)

В механике твердого тела различают три формы равновесия твердого тела: устойчивая, безразличная и неустойчивая. Эти формы равновесия присущи сжатым гибким (длинным, тонким) стержням (рис. 9.1).

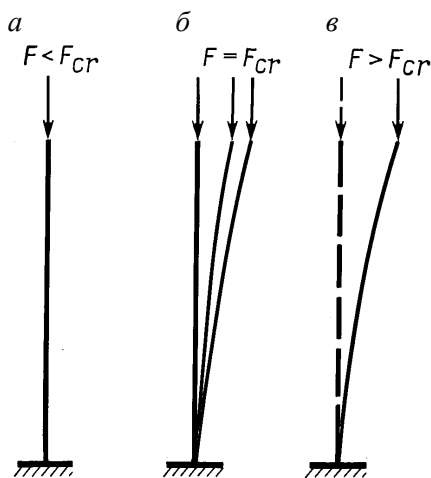


Рис. 9.1

При незначительной сжимающей силе F , меньшей некоторого критического значения F_{cr} , первоначальная прямолинейная форма стержня является устойчивой (рис. 9.1, а).

При $F = F_{cr}$ сжатый стержень находится в состоянии безразличного равновесия, когда возможны как первоначальная прямолинейная форма равновесия, так и несколько близких к ней криволинейных (рис. 9.1, б).

Если $F > F_{cr}$, первоначальная форма стержня становится неустойчивой, происходит интенсивное нарастание деформации изгиба (прогиб), рис. 9.1, в.

Устойчивость – способность стержня под действием сжимающей нагрузки находиться в состоянии упругого равновесия и сохранять первоначальную форму.

Критическая сила – осевая сжимающая сила, при которой стержень будет в состоянии безразличного равновесия (критическое состояние), а малейшее ее превышение приведет к интенсивному росту прогибов (к потере устойчивости).

Критическая нагрузка является опасной и считается разрушающей. Разрушение происходит внезапно.

Допустимая (безопасная) сжимающая нагрузка на стержень составляет некоторую часть критической:

$$F_{adm} = F_{cr} / n_s, \quad (9.1)$$

где F_{adm} – допустимая нагрузка;

F_{cr} – критическая нагрузка;

n_s – коэффициент запаса устойчивости.

Критическая нагрузка для сжатого прямолинейного стержня постоянного поперечного сечения определяется по формуле Эйлера:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\mu l)^2}, \quad (9.2)$$

где E – модуль упругости материала стержня;

J_{\min} – минимальный момент инерции сечения относительно одной из главных центральных осей;

μ – коэффициент приведения действительной длины стержня к расчетной (зависит от способа закрепления концов стержня);

l – длина стержня.

Непосредственно формула Эйлера была получена для случая стержня с шарнирными опорами. Влияние других видов опор Ф. С. Ясинский предложил учитывать коэффициентом μ , значения которого приведены на рис. 9.2. Пунктиром показана ось стержня при потере устойчивости.

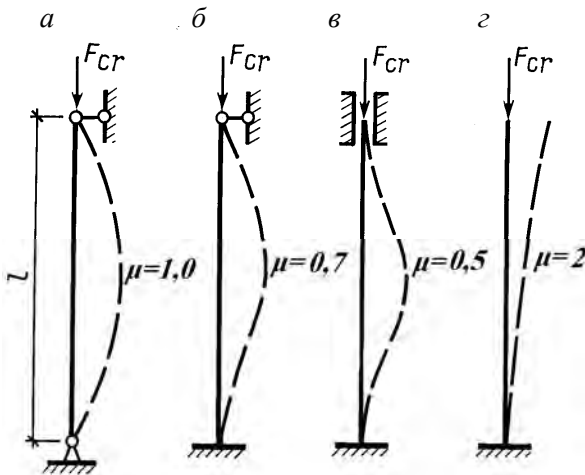


Рис. 9.2

Если моменты инерции сечения относительно главных центральных осей не равны между собой, то продольный изгиб произойдет в плоскости наименьшей жесткости, т. е. стержень будет искривляться перпендикулярно оси, относительно которой момент инерции будет меньшим.

Напряжение, вызванное в стержне действием критической силы, также называется критическим и определяется исходя из формулы Эйлера:

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad (9.3)$$

где $\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}$ – гибкость стержня;

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}} \text{ – минимальный радиус инерции сечения.}$$

Гибкость стержня – геометрическая характеристика, зависящая от способа закрепления его концов, длины, формы и размеров сечения.

Формула Эйлера (9.3) применима при условии, что критическое напряжение не превышает предела пропорциональности материала:

$$\sigma_{кр} \leq \sigma_{пр},$$

т. е. при работе материала в упругой стадии. Обычно это условие выражается через гибкость стержня и записывается в виде

$$\lambda \geq \lambda_{пр} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пр}}},$$

где $\lambda_{пр}$ – предельная гибкость, ниже которой формула Эйлера не применима.

Предельная гибкость зависит от механических свойств материала. Для стали $\lambda_{пр} \cong 100$, для древесины $\lambda_{пр} \cong 70$.

В случаях когда $\lambda < \lambda_{пр}$, потеря устойчивости происходит за пределами упругости материала и расчет на устойчивость ведется по формуле Ясинского:

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda, \quad (9.4)$$

где a и b – коэффициенты, полученные экспериментальным путем и зависящие от механических свойств материала.

Для стали $a = 310$ МПа, $b = 1,14$ МПа;

для древесины $a = 28,7$ МПа, $b = 0,19$ МПа.

Критическая нагрузка в этих случаях

$$F_{cr} = \sigma_{кр} A. \quad (9.5)$$

Различают три категории гибкости стержня (для стали):

1. Стержни большой гибкости ($\lambda \geq 100$), расчет которых ведется на устойчивость по формуле Эйлера.
2. Стержни средней гибкости ($\lambda = 50-100$), расчет которых на устойчивость ведется по формуле Ясинского.
3. Стержни малой гибкости ($\lambda < 50$), рассчитываемые на прочность при сжатии (потеря устойчивости не происходит).

Условие прочности для стержня малой гибкости имеет вид

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq R_c, \quad (9.6)$$

где R_c – расчетное сопротивление материала на сжатие.

Стержни средней и большой гибкости рассчитываются на устойчивость по формуле

$$\sigma = \frac{\sigma_{кр}}{n_s} \leq R_c, \quad (9.7)$$

где n_s – коэффициент запаса устойчивости.

Этот коэффициент кроме чистого изгиба учитывает еще ряд других факторов: возможный небольшой эксцентриситет нагрузки, небольшое начальное искривление стержня, неоднородность материала и др. Для данного материала коэффициент n_s не является постоянной величиной, а зависит от гибкости стержня. Так, для металлов $n_s = 1,5-3$; для древесины $n_s = 2,5-3,2$.

Для удобства проведения расчета сжатых стержней строительных конструкций принят общий вид условия устойчивости

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \varphi R_c, \quad (9.8)$$

где φ – коэффициент уменьшения расчетного сопротивления материала стержня (коэффициент продольного изгиба), зависящий от материала, гибкости стержня, принятого коэффициента запаса устойчивости.

Значения коэффициента φ изменяются от 0 до 1 и для различных материалов в зависимости от значения гибкости λ приводятся в виде таблиц (табл. 9.1, 9.2) или графиков (рис. 9.3).

Т а б л и ц а 9.1

$\varphi = f(\lambda)$ для Ст. 3

λ	φ	λ	φ	λ	φ
0	1,000	80	0,710	160	0,267
10	0,987	90	0,638	170	0,238
20	0,964	100	0,570	180	0,214
30	0,935	110	0,507	190	0,193
40	0,901	120	0,449	200	0,176
50	0,860	130	0,395	210	0,160
60	0,816	140	0,345	220	0,147
70	0,768	150	0,302		

Т а б л и ц а 9.2

$\varphi = f(\lambda)$ для древесины

λ	φ	λ	φ	λ	φ
0	1,000	80	0,469	160	0,117
10	0,992	90	0,370	170	0,104
20	0,968	100	0,300	180	0,093
30	0,927	110	0,248	190	0,083
40	0,872	120	0,208	200	0,075
50	0,800	130	0,178	210	0,068
60	0,712	140	0,153	220	0,062
70	0,608	150	0,133		

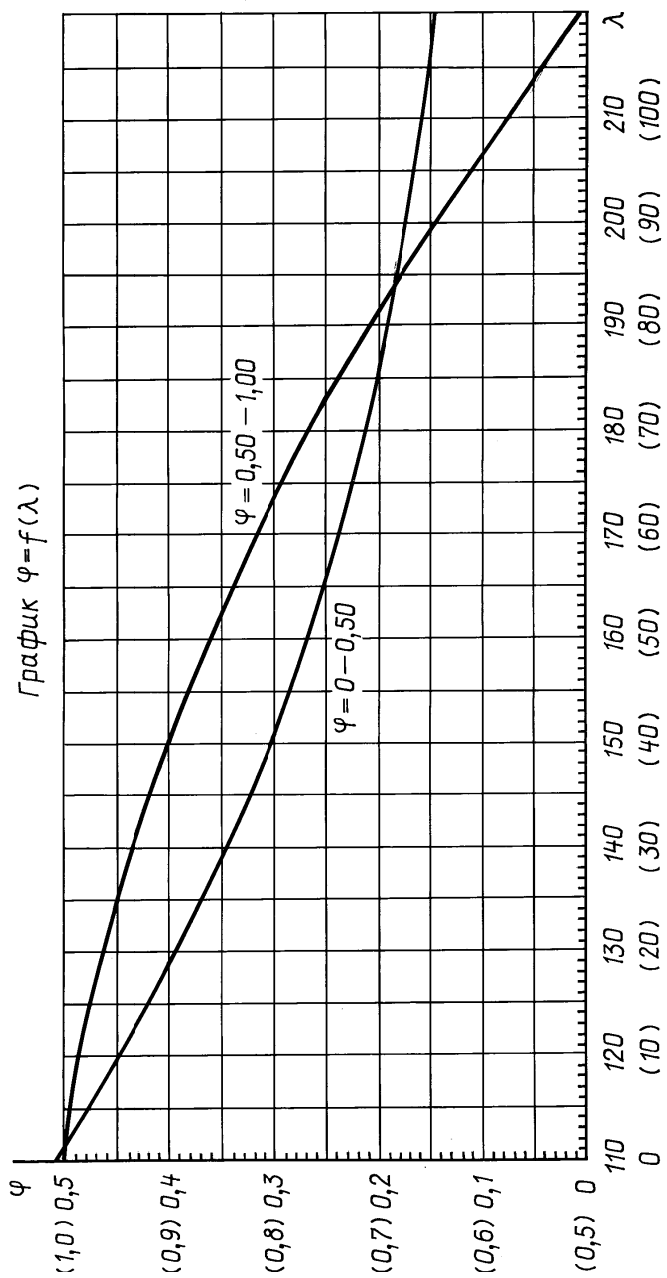


Рис. 9.3. График $\varphi = f(\lambda)$ для Ст. 3

Таким образом, расчет на устойчивость сводится к недопущению потери первоначальной формы равновесия сжатого стержня. Достигается это уменьшением допустимых нормальных напряжений против расчетных значений R_c , причем для каждого значения гибкости стержень будет иметь свое допускаемое напряжение.

Подбор сечения по формуле (9.8) затруднителен тем, что при неизвестной площади сечения A невозможно вычислить гибкость λ и получить значение φ . Поэтому рекомендуется предварительно задаться значением φ (для начала $\varphi = 0,5$ – середина интервала) и из (9.8) определить площадь сечения A , затем λ и φ .

Если выбранный и вычисленный коэффициенты φ близки – проверяют условие (9.8).

Значительное их различие требует продолжение расчета (см. примеры).

Расхождение между σ и φR_c не должно превышать 3–5 %.

Сечение стержня, «работающего» на устойчивость, будет рациональным, если минимальный момент инерции J_{\min} будет возможно большим при возможно меньшей площади сечения A . Этому требованию удовлетворяют трубчатые, коробчатые сечения, а также некоторые сечения, составленные из прокатных профилей (швеллеров, уголков).

Если у сечения главные моменты инерции равны ($J_x = J_y$) – стержень будет равноустойчивым.

Пример 9.1

Стальная стойка квадратного поперечного сечения ($a = 7$ см) длиной $l = 3$ м центрально нагружена сжимающей силой F (рис. 9.4, a). Нижний конец стойки зашцеилен, а верхний в направлении главной центральной оси X – зашцеилен, в направлении оси Y – свободен.

Определить наибольшее допустимое значение силы F , если $R = 210$ МПа, $E = 200$ ГПа, а коэффициент запаса устойчивости $n_s = 2$.

Решение

Поскольку стойка находится под действием сжимающей силы, она должна быть рассчитана на устойчивость, т. е. определено такое значение силы F , при котором не произойдет потери устойчивости (искривление).

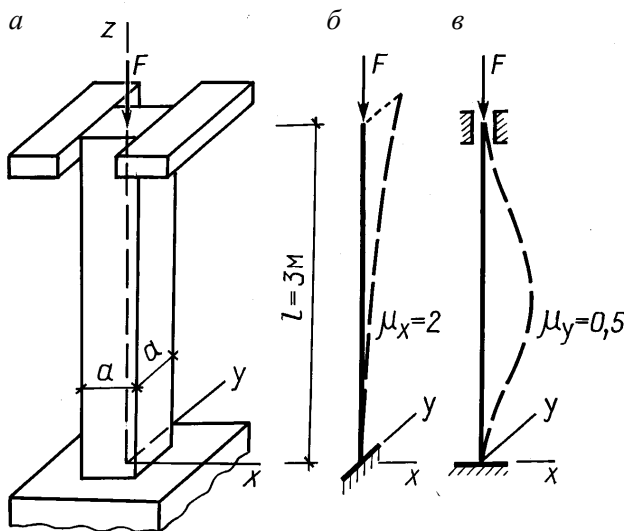


Рис. 9.4

Вычислим необходимые геометрические характеристики сечения стойки:

площадь

$$A = 7 \cdot 7 = 49 \text{ см}^2;$$

моменты инерции относительно главных центральных осей

$$J_x = J_y = \frac{aa^3}{12} = \frac{7^4}{12} = 200 \text{ см}^4;$$

радиусы инерции

$$i_x = i_y = \sqrt{\frac{J_{x(y)}}{A}} = \sqrt{\frac{200}{49}} = 2,02 \text{ см.}$$

По размерам поперечного сечения стойка равноустойчива ($J_x = J_y$), но верхний конец стойки закреплен в направлении главных центральных осей сечения различными способами.

Гибкость стойки определяется по формуле

$$\lambda = \frac{\mu l}{i}$$

Относительно оси Y (в направлении оси X) оба конца стойки зашпелены. В соответствии с закреплением коэффициент приведения длины $\mu_y = 0,5$. Относительно оси X (в направлении оси Y) нижний конец стойки зашпелен, верхний свободный: $\mu_x = 2$.

На рис. 9.4, б и в пунктиром показаны положения оси стойки в случае потери устойчивости.

Гибкость стойки относительно главных центральных осей

$$\lambda_y = \frac{\mu_y l}{i_y} = \frac{0,5 \cdot 300}{2,02} = 74,3;$$

$$\lambda_x = \frac{\mu_x l}{i_x} = \frac{2 \cdot 300}{2,02} = 297.$$

Определим критическую силу для стойки, используя формулы (9.2), (9.4) и (9.5) в зависимости от значений гибкостей. Для стальной стойки формула Эйлера (9.2) применима, когда предельная гибкость $\lambda_{пр} \geq 100$.

Поскольку для данного случая относительно оси X гибкость $\lambda_x > 100$, критическая сила определяется по формуле (9.2):

$$F_{кр(x)} = \frac{\pi^2 EJ_x}{(\mu_x l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 200 \cdot 10^{-8}}{(2 \cdot 3)^2} = 1,0955 \cdot 10^5 \text{ Н} = 109,6 \text{ кН}.$$

Относительно оси Y гибкость $\lambda_y < 100$ – используются формулы Ясинского (9.4), (9.5).

Критическое напряжение

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda = 310 - 1,14 \cdot 74,3 = 225,3 \text{ МПа}.$$

Критическая сила

$$F_{cr(y)} = \sigma_{кр} A = 225,3 \cdot 10^6 \cdot 49 \cdot 10^{-4} = 1104 \text{ кН.}$$

Определим наибольшие допустимые значения сжимающей силы F , используя коэффициент запаса устойчивости.

Относительно оси X

$$F_{x, \text{adm}} = \frac{F_{cr(x)}}{n_s} = \frac{109,6}{2} = 54,8 \text{ кН.}$$

Относительно оси Y

$$F_{y, \text{adm}} = \frac{F_{cr(y)}}{n_s} = \frac{1104}{2} = 552 \text{ кН.}$$

В качестве наибольшей допустимой сжимающей силы принимаем ее наименьшее значение: $F_{\text{adm}} = 54,8 \text{ кН}$.

В случае превышения допустимой нагрузки стойка потеряет устойчивость и искривится в плоскости своей наибольшей гибкости, т. е. относительно оси X (в направлении оси Y).

Действующее напряжение в стойке

$$\sigma = \frac{F_{\text{adm}}}{A} = \frac{54,8 \cdot 10^3}{49 \cdot 10^{-4}} = 1,118 \cdot 10^7 \text{ Па} = 11,18 \text{ МПа} < R.$$

Обратим внимание, что действующее напряжение σ значительно меньше расчетного сопротивления R . Такое уменьшение σ необходимо для достижения устойчивости стойки.

В случае различных значений J_x , J_y , μ_x и μ_y потеря устойчивости стойки всегда произойдет в плоскости *наибольшей* гибкости.

Пример 9.2

Стальная стойка длиной $l = 5 \text{ м}$, составленная из двух швеллеров № 12, центрально нагружена сжимающей силой $F = 190 \text{ кН}$ (рис. 9.5).

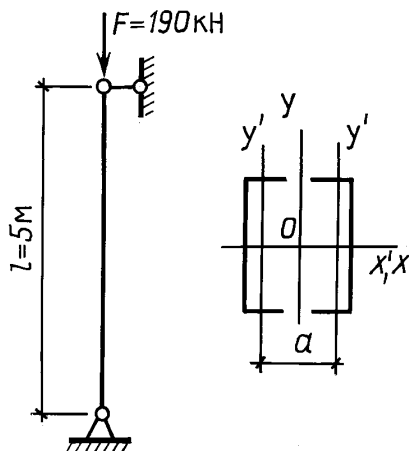


Рис. 9.5

Определить, каким запасом на устойчивость обладает стойка при условии равноустойчивости.

Решение

Необходимые геометрические характеристики для швеллера № 12

$$A' = 13,3 \text{ см}^2, \quad J'_{x'} = 304 \text{ см}^4, \quad J'_{y'} = 31,2 \text{ см}^4.$$

Для сечения стойки:
площадь

$$A = 2A' = 2 \cdot 13,3 = 26,6 \text{ см}^2;$$

момент инерции относительно оси X

$$J_x = 2J'_{x'} = 2 \cdot 304 = 608 \text{ см}^4;$$

условие равноустойчивости

$$J_x = J_y;$$

момент инерции сечения относительно оси Y с учетом равноустойчивости

$$J_y = 2 \left[J'_y + A' \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] = 2 \left[31,2 + 13,3 \cdot \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] = 608 \text{ см}^4,$$

откуда расстояние между осями Y швеллеров $a = 9,06$ см;
радиусы инерции стойки

$$i_x = i_y = \sqrt{J_x / A} = \sqrt{608 / 26,6} = 4,78 \text{ см.}$$

При шарнирном закреплении концов стойки коэффициент приведения длины $\mu = 1$.

Гибкость стойки

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{1 \cdot 500}{4,78} = 104,6.$$

Так как гибкость стойки больше предельного значения для стали ($\lambda = 104,6 > \lambda_{\text{пр}} = 100$), то для определения критической силы используется формула Эйлера (9.2):

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 608 \cdot 10^{-8}}{(1 \cdot 5)^2} = 479,6 \text{ кН.}$$

Коэффициент запаса устойчивости по формуле (9.1)

$$n_s = \frac{F_{\text{кр}}}{F} = \frac{479,6}{190} = 2,52.$$

Пример 9.3

Стальная колонна длиной $l = 6$ м, составленная из четырех равнополочных уголков, загружена сжимающей силой $F = 500$ кН (рис. 9.6).

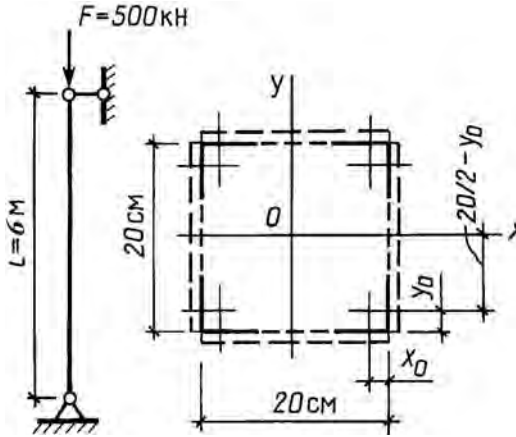


Рис. 9.6

Условия закрепления концов колонны в главных плоскостях сечения одинаковы. Жесткая решетка, соединяющая ветви колонны (показана пунктиром), обеспечивает их совместную работу.

Определить номер уголков и коэффициент запаса устойчивости, если $R = 210$ МПа.

Решение

По условию закрепления концов колонны (шарниры) коэффициент приведения длины $\mu = 1$.

Положение центра тяжести сечения очевидно. Оси XU являются главными центральными осями сечения колонны.

Подбор уголков сечения проведем по формуле (9.8):

$$\sigma = F / A \leq \varphi R_c.$$

Поскольку площадь сечения неизвестна, расчет ведется путем предварительного выбора коэффициента φ с последующим его уточнением.

В первом приближении задаемся $\varphi_1 = 0,5$ (середина интервала значений φ). Тогда из (9.8) площадь сечения колонны

$$A = \frac{F}{\varphi_1 R_c} = \frac{500 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 210 \cdot 10^6} = 4,762 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 47,6 \text{ см}^2.$$

Площадь сечения одного уголка

$$A' = \frac{A}{4} = \frac{47,6}{4} = 11,9 \text{ см}^2.$$

По этому значению выбираем ближайший номер уголка. Проверим сечение из уголков $80 \times 80 \times 8$ мм.

Из таблицы сортамента

$$A' = 12,3 \text{ см}^2, \quad J'_x = J'_y = 73,36 \text{ см}^4, \quad x_0 = y_0 = 2,27 \text{ см}.$$

Для всего сечения:

площадь сечения

$$A = 12,3 \cdot 4 = 49,2 \text{ см}^2;$$

моменты инерции относительно главных центральных осей

$$J_x = J_y = 4 \left[73,36 + 12,3 \left(\frac{20}{2} - 2,27 \right)^2 \right] = 3233 \text{ см}^4;$$

радиус инерции

$$i_x = i_y = \sqrt{\frac{J}{A}} = \sqrt{\frac{3233}{49,2}} = 8,106 \text{ см};$$

гибкость колонны

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{1 \cdot 600}{8,106} = 74,02.$$

Для данного значения гибкости по табл. 9.1 ($\varphi = f(\lambda)$) путем интерполяции вычислим табличное значение φ_1^T , соответствующее $\lambda = 74,02$:

для $\lambda = 70$ $\varphi = 0,768$,

для $\lambda = 80$ $\varphi = 0,710$,

для $\lambda = 74,02$

$$\varphi_1^T = 0,768 - \frac{0,768 - 0,710}{10}(74,02 - 70) = 0,744 .$$

Вычислим напряжение в колонне:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{500 \cdot 10^3}{49,2 \cdot 10^{-4}} = 10,16 \cdot 10^7 = 101,6 \text{ МПа.}$$

Расчетное (допустимое) сопротивление в колонне с учетом устойчивости

$$\varphi_1^T R = 0,744 \cdot 210 = 156,24 \text{ МПа.}$$

При этом сечении колонны недонапряжение составляет

$$\frac{156,24 - 101,6}{156,24} \cdot 100 = 35 \% .$$

Устойчивость колонны будет обеспечена, однако возможности материала полностью не используются. Размеры сечения можно уменьшить.

Рекомендуется последовательное приближение к правильному выбору уголков.

Во второй попытке задаемся значением φ_2 :

$$\varphi_2 = \frac{0,5 + 0,744}{2} = 0,62.$$

Из условия устойчивости для сечения колонны необходима площадь

$$A = \frac{F}{\varphi_2 R} = \frac{500 \cdot 10^3}{0,62 \cdot 210 \cdot 10^6} = 38,4 \text{ см}^2.$$

Для одного уголка

$$A' = \frac{38,4}{4} = 9,6 \text{ см}^2.$$

Проверим сечение из уголков $70 \times 70 \times 7$ мм, для которых

$$A' = 9,42 \text{ см}^2, \quad J'_x = J'_y = 42,98 \text{ см}^4, \quad x_0 = y_0 = 1,99 \text{ см}.$$

Для всего сечения

$$A = 9,42 \cdot 4 = 37,68 \text{ см}^2;$$

$$J_x = J_y = 4 \left(42,98 + 9,42 \left(\frac{20}{2} - 1,99 \right)^2 \right) = 2589 \text{ см}^4;$$

$$i_x = i_y = \sqrt{\frac{2589}{37,68}} = 8,29 \text{ см}; \quad \lambda = \frac{1 \cdot 600}{8,29} = 72,4; \quad \varphi = 0,754.$$

Напряжение в колонне

$$\sigma = \frac{500 \cdot 10^3}{37,68 \cdot 10^{-4}} = 132,7 \text{ МПа}.$$

Расчетное сопротивление

$$\varphi_2^T R = 0,754 \cdot 210 = 158,3 \text{ МПа}.$$

Недонапряжение составляет 16,2 %.

Поскольку площадь сечения уголков от номера к номеру изменяется непоследовательно (см. таблицу сортамента), после нескольких попыток выбора коэффициента φ целесообразно перейти к логическому выбору номера уголка.

После второго приближения действующее напряжение в колонне ниже допустимого. Следовательно, площадь сечения можно уменьшить.

Проверим сечение из уголков $70 \times 70 \times 6$ мм, для которых

$$A' = 8,15 \text{ см}^2, \quad J_x = J_y = 37,58 \text{ см}^4, \quad x_0 = y_0 = 1,94 \text{ см}.$$

Для всего сечения:

$$A = 32,6 \text{ см}^2, \quad J_x = J_y = 2268, \quad i_x = i_y = 8,34 \text{ см},$$

$$\lambda = 71,9, \quad \varphi_3^T = 0,757.$$

Напряжение в колонне $\sigma = 153,4$ МПа, расчетное сопротивление $\varphi_3^T R = 159,0$ МПа – недонапряжение составляет 3,5 %, что приемлемо.

Проверка сечения из уголков $75 \times 75 \times 5$ мм с ближайшей меньшей площадью показала перенапряжение 5,8 %, что недопустимо.

Итак, принимаем сечение колонны из уголков $70 \times 70 \times 6$ мм с приемлемым недонапряжением.

В завершение примера вычислим коэффициент запаса устойчивости принятого сечения колонны.

Так как гибкость колонны $\lambda = 71,9 < \lambda_{\text{пр}} = 100$ МПа, воспользуемся формулами Ясинского.

Критическое напряжение

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda = 310 - 1,14 \cdot 71,9 = 228,03 \text{ МПа}.$$

Критическая сила

$$F_{\text{cr}} = \sigma_{\text{кр}} A = 228,03 \cdot 10^6 \cdot 32,6 \cdot 10^{-4} = 743,4 \text{ кН}.$$

Коэффициент запаса устойчивости

$$n_s = n_{\sigma} = \frac{F_{\text{cr}}}{F} = \frac{743,4}{500} = 1,49.$$

Пример 9.4

Элемент конструкции P , имеющий большую жесткость, укреплен шарнирно в опоре A и поддерживается двумя стержнями длиной $l = 2$ м и диаметром $d = 4$ см (рис. 9.7, a).

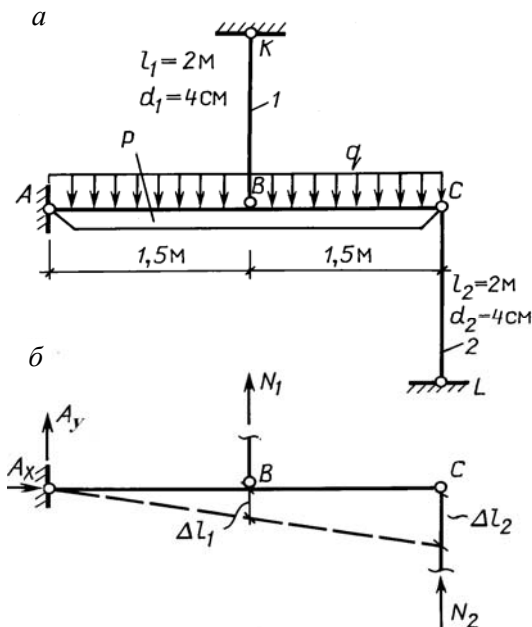


Рис. 9.7

Определить наибольшую допустимую нагрузку q из условия прочности и устойчивости стержней, если $R = 210$ МПа.

Решение

Нагрузка q , приложенная к элементу P , передается непосредственно на опору A и через стержни 1 и 2 на опоры K и L , где в сумме возникают четыре неизвестные реакции. Поскольку для плоской системы можно составить только три уравнения равновесия, рассматриваемая система является один раз статически неопределимой ($4 - 3 = 1$).

Для решения задачи нужно знать усилия в стержнях, выраженные через нагрузку q .

Мысленно рассекаем стержни и показываем продольные силы, направляя их с учетом характера деформации (рис. 9.7, б). Нетрудно понять, что стержень 1 растянут (усилие N_1 направлено от сечения), а стержень 2 сжат (усилие N_2 направлено к сечению).

Вследствие деформации стержней 1 и 2 ось элемента P повернется вокруг опоры A на некоторый угол.

Уравнение равновесия

$$\sum M_A = -N_1 \cdot 1,5 - N_2 \cdot 3 + q \cdot 3 \cdot 1,5 = 0. \quad (9.9)$$

Уравнение деформации имеет вид

$$\frac{\Delta l_1}{1,5} = \frac{\Delta l_2}{3} \quad \text{или} \quad 2\Delta l_1 = \Delta l_2.$$

Используя формулу Гука, получим

$$2 \frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{N_2 l_2}{EA_2} \quad \text{или} \quad 2N_1 = N_2. \quad (9.10)$$

Поскольку стержень 2 подвергается сжатию, допускаемое усилие в нем должно быть определено из условия устойчивости (9.7)

Характеристики стержня:

площадь сечения

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 4^2}{4} = 12,56 \text{ см}^2;$$

момент инерции

$$J_x = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3,14 \cdot 4^4}{64} = 12,56 \text{ см}^4;$$

радиус инерции

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}} = \sqrt{\frac{12,56}{12,56}} = 1 \text{ см};$$

гибкость

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{1 \cdot 200}{1} = 200;$$

коэффициент $\varphi = 0,176$.

Наибольшее допустимое усилие во втором стержне из условия устойчивости

$$N_2 = A\varphi R = 12,56 \cdot 10^{-4} \cdot 0,176 \cdot 210 \cdot 10^6 = 464,2 \cdot 10^2 \text{ Н} = 46,4 \text{ кН.}$$

Из равенства (9.10)

$$2N_1 = 46,4 \text{ кН}$$

усилие в первом стержне $N_1 = 23,2 \text{ кН}$.

Из уравнения (9.9) наибольшая допустимая нагрузка на систему

$$23,2 \cdot 1,5 + 46,4 \cdot 3 = 4,5q,$$

откуда $q = \frac{174}{4,5} = 38,67 \text{ кН/м}$.

Действующие напряжения в стержнях системы и сопоставление с допускаемыми:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{23,2 \cdot 10^3}{12,56 \cdot 10^{-4}} = 1,847 \cdot 10^7 \text{ Па} = 18,47 \text{ МПа} < R;$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A} = \frac{46,4 \cdot 10^3}{12,56 \cdot 10^{-4}} = 3,694 \cdot 10^7 \text{ Па} = 36,96 \text{ МПа} < R.$$

Допускаемое напряжение во втором стержне

$$\sigma_{\text{adm},2} = \varphi R = 0,176 \cdot 210 = 36,94 \text{ МПа.}$$

При нагрузке $q = 38,67 \text{ кН/м}$ прочность и устойчивость стержней обеспечены.

9.2. Продольно-поперечный изгиб

Изгиб прямого стержня называется *продольно-поперечным*, если к нему одновременно приложены продольная и поперечная нагрузки (рис. 9.8, а).

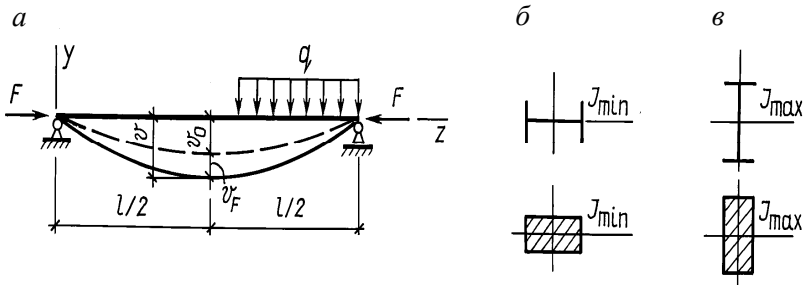


Рис. 9.8

При расчете массивных элементов конструкций, обладающих большой жесткостью, можно использовать принцип независимости действия сил, суммируя отдельно напряжения от изгиба и от сжатия:

$$\sigma = M/W + F/A.$$

Для стержней, обладающих значительной гибкостью, принцип независимости действия сил неприменим. Необходимо рассматривать деформированную схему стержня (см. рис. 9.8, а), у которого v_0 – прогиб от поперечной нагрузки, а v_F – дополнительный прогиб от продольной сжимающей силы F .

Задача определения полного прогиба v и изгибающего момента M является довольно затруднительной (особенно при сложной нагрузке). В таких случаях используются приближенные, более простые, приемы расчета. Принимают, что прогибы v_0 и v_F являются независимыми и что форма упругой линии балки близка к синусоиде.

Исходя из этих допущений получена формула для определения полного прогиба при продольно-поперечном изгибе:

$$v = \frac{v_0}{1 - \frac{F}{F_3}}, \quad (9.11)$$

где $F_3 = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$ – эйлерова сила;

J – момент инерции сечения балки, зависящий от ее положения по отношению к поперечной нагрузке.

Это может быть J_{\min} (рис. 9.8, б) или J_{\max} (рис. 9.8, в).

Если используется J_{\min} – эйлерова сила равна критической:
 $F_3 = F_{\text{кр}}$.

В поперечных сечениях стержня, подвергающегося продольно-поперечному изгибу, возникают изгибающие моменты как от поперечных нагрузок M_0 , определяемых обычным способом, так и дополнительные от продольной:

$$M_F = F\upsilon.$$

Полный изгибающий момент

$$M = M_0 + M_F.$$

В изгибаемых балках с шарнирными опорами максимальный изгибающий момент $M_{0,\max}$ при симметричной нагрузке имеет место посередине пролета и вблизи середины – при несимметричной. В консольной балке $M_{0,\max}$ наблюдается в защемлении.

Максимальный изгибающий момент в балке

$$M_{\max} = M_{0,\max} + F\upsilon. \quad (9.12)$$

Проверка прочности при продольно-поперечном изгибе осуществляется по нормальным напряжениям, возникающим в крайних точках сечения с наибольшим изгибающим моментом, по формуле

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} + \frac{M_{\max}}{W} \leq R. \quad (9.13)$$

Формулу (9.13) можно представить в развернутом виде:

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} + \frac{M_{0,\max}}{W} + \frac{F\upsilon_0}{W} \cdot \frac{1}{1 - \frac{F}{F_3}} \leq R.$$

Следует заметить, что нормальные напряжения σ нелинейно связаны с продольной силой F , и при приближении ее величины к эй-

леровой силе F , напряжения будут стремительно возрастать, достигая опасных значений. Поэтому продольная сжимающая нагрузка должна быть в пределах $F \leq 0,8F_3$.

При большой продольно-сжимающей силе F необходима проверка стержня на устойчивость по условию (9.8) в направлении, свободном от поперечных нагрузок.

Пример 9.5

Стальная стойка из двутавра № 22 нагружена сосредоточенной продольной силой F и равномерно распределенной нагрузкой q (рис. 9.9, а).

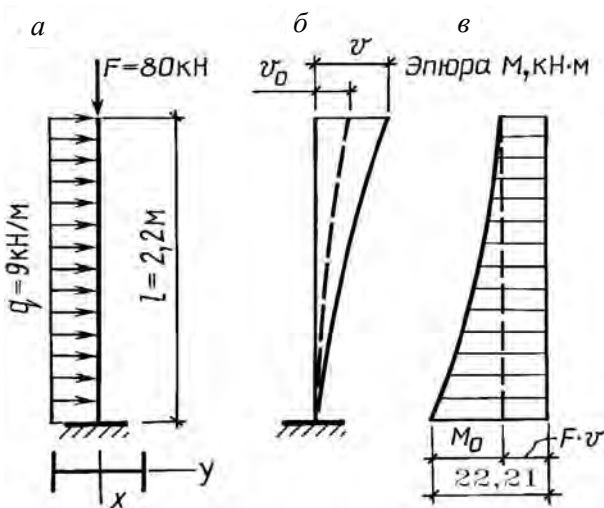


Рис. 9.9

Проверить прочность и устойчивость стойки, если $R = 210 \text{ МПа}$.

Решение

Проанализируем характер действия нагрузок. Продольная сила F создает центральное сжатие стойки, а распределенная q – изгиб. Значит, стержень подвергается продольно-поперечному изгибу.

Геометрические характеристики сечения двутавра № 22

$$A = 30,6 \text{ см}^2, W_x = 232 \text{ см}^3, J_x = 2550 \text{ см}^4, J_y = 157 \text{ см}^4,$$

$$i_x = 9,13 \text{ см}, i_y = 2,27 \text{ см}.$$

Проверим устойчивость стойки от действия сосредоточенной силы F . По условию закрепления концов стойки коэффициент приведения длины $\mu = 2$.

Гибкость стойки относительно главных центральных осей

$$\lambda_x = \frac{\mu l}{i_x} = \frac{2 \cdot 2,2 \cdot 10^2}{9,13} = 48,2;$$

$$\lambda_y = \frac{\mu l}{i_y} = \frac{2 \cdot 2,2 \cdot 10^2}{2,27} = 194.$$

Проверку устойчивости следует проводить в плоскости *большой* гибкости, т. е. относительно оси Y .

Для $\max \lambda_y = 194$ по таблице $\varphi = f(\lambda)$ коэффициент продольного изгиба $\varphi = 0,186$.

Наибольшая допустимая нагрузка F по условию устойчивости (9.8)

$$F_{\text{adm}} = A\varphi R = 30,6 \cdot 10^{-4} \cdot 0,186 \cdot 210 \cdot 10^6 = 119,5 \text{ кН},$$

что превышает действующую нагрузку в $119,5/80 = 1,49$ раза – устойчивость стойки обеспечена.

Для проведения расчета стойки на прочность необходимо рассмотреть ее деформированное состояние (рис. 9.9, б).

Прогиб от поперечной нагрузки q (консольная балка с равномерно распределенной нагрузкой) происходит относительно оси X , в направлении оси Y

$$v_0 = \frac{ql^4}{8EJ_x} = \frac{9 \cdot 10^3 \cdot 2,2^4}{8 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 2550 \cdot 10^{-8}} = 0,00517 \text{ м}.$$

Полный прогиб стойки определяется по формуле (9.11):

$$\upsilon = \frac{\upsilon_0}{1 - \frac{F}{F_3}},$$

в которой эйлерова сила

$$F_3 = \frac{\pi^2 EJ_x}{(\mu l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 2550 \cdot 10^{-8}}{(2 \cdot 2,2)^2} = 2597 \text{ кН}.$$

Заметим, что при вычислении эйлеровой силы момент инерции берется относительно главной центральной оси сечения, *перпендикулярной* действию нагрузки q , т. е. относительно оси X .

Полный прогиб конца стойки

$$\upsilon = \frac{\upsilon_0}{1 - \frac{F}{F_3}} = \frac{0,00517}{1 - \frac{80}{2597}} = 0,00534 \text{ м}.$$

В сечениях стойки возникает изгибающий момент как от поперечной нагрузки M_0 , так и от продольной M_F (рис. 9.9, в).

В опасном сечении (защемлении) полный изгибающий момент

$$\begin{aligned} M_{\max} &= M_{0,\max} + F\upsilon = \frac{ql^2}{2} + F\upsilon = \frac{9 \cdot 2,2^2}{2} + 80 \cdot 0,00534 = \\ &= 21,78 + 0,427 = 22,21 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Проверка прочности осуществляется по формуле (9.13):

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{F}{A} + \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{80 \cdot 10^3}{30,6 \cdot 10^{-4}} + \frac{22,21 \cdot 10^3}{232 \cdot 10^{-6}} = \\ &= 26,1 \text{ МПа} + 95,7 \text{ МПа} = 121,8 \text{ МПа} < R. \end{aligned}$$

Следовательно, прочность и устойчивость стойки обеспечены.

Пример 9.6

Стальная балка, шарнирно опертая на концах, нагружена поперечной и продольной нагрузками (рис. 9.10, а).

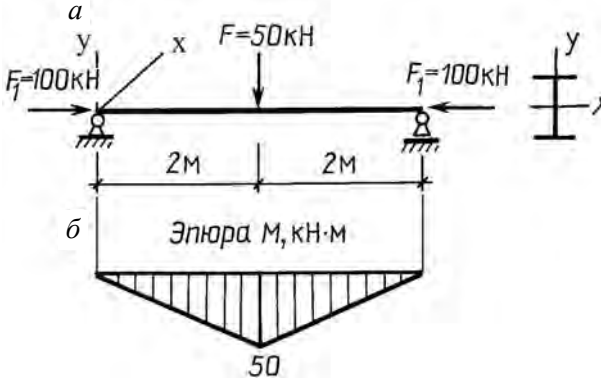


Рис. 9.10

Определить номер двутавра, если $R = 210 \text{ МПа}$.

Решение

Рассматриваемая балка подвергается продольно-поперечному изгибу. Сначала надо учесть воздействие поперечной нагрузки, а затем – дополнительно от продольной.

Определим номер двутавра от воздействия поперечной силы $F = 50 \text{ кН}$, вызывающей плоский изгиб балки. Эпюра изгибающих моментов показана на рис. 9.10, б.

Максимальный изгибающий момент в середине пролета

$$M_{\max} = \frac{Fl}{4} = \frac{50 \cdot 4}{4} = 50 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Из условия прочности по нормальным напряжениям требуемый момент сопротивления сечения

$$W_x = \frac{M_{\max}}{R} = \frac{50 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 0,238 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 238 \text{ см}^3.$$

Наметим предварительно двутавр № 22, для которого

$$A = 30,6 \text{ см}^2, W_x = 232 \text{ см}^3, J_x = 2550 \text{ см}^4, J_y = 157 \text{ см}^4,$$

$$i_x = 5,13 \text{ см}, i_y = 2,27 \text{ см}.$$

Прогиб в середине пролета балки v_0 от поперечной нагрузки F в плоскости ее действия определяется по формуле (см. справочник)

$$v_0 = \frac{Fl^3}{48EJ_x} = \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 4^3}{48 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 2550 \cdot 10^{-8}} = 0,0131 \text{ м}.$$

Проверим намеченный номер двутавра на воздействие продольной нагрузки F_1 , создающей дополнительный прогиб и дополнительный изгибающий момент.

Вычислим полный прогиб v от поперечной и продольной сил по формуле (9.11) в плоскости действия поперечной силы, т. е. в вертикальной плоскости:

$$v = \frac{v_0}{1 - \frac{F_1}{F_3}} = \frac{0,0131}{1 - \frac{100}{3143}} = 0,0135 \text{ м},$$

где эйлерова сила

$$F_3 = \frac{\pi^2 EJ_x}{(\mu l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 2550 \cdot 10^{-8}}{(1 \cdot 4)^2} = 3143 \text{ кН}.$$

Еще раз заметим, что при вычислении F_3 использовалось значение момента инерции относительно оси, перпендикулярной плоскости действия поперечной нагрузки, т. е. значение J_x .

Максимальный изгибающий момент в опасном сечении балки по (9.12)

$$M_{\max} = M_{0,\max} + F_1 v = 50 + 100 \cdot 0,0135 = 51,35 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Проверку прочности предварительно намеченного двутавра проведем по формуле (9.13):

$$\begin{aligned}\sigma_{\max} &= \frac{F_1}{A} + \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{100 \cdot 10^3}{30,6 \cdot 10^{-4}} + \frac{51,35 \cdot 10^3}{232 \cdot 10^{-6}} = \\ &= (32,7 + 221) \text{ МПа} = 253,7 \text{ МПа} > R.\end{aligned}$$

Перенапряжение составляет 20,8 %.

Проверим пригодность ближайшего номера двутавра с большими геометрическими характеристиками – это № 24. Его характеристики

$$\begin{aligned}A &= 34,8 \text{ см}^2, \quad W_x = 289 \text{ см}^3, \quad J_x = 3460 \text{ см}^4, \quad J_y = 198 \text{ см}^4, \\ i_x &= 9,97 \text{ см}, \quad i_y = 2,37 \text{ см}.\end{aligned}$$

Повторим вычисления расчетных параметров в установленном ранее порядке.

Прогиб от поперечной нагрузки

$$v_0 = \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 4^3}{48 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 3460 \cdot 10^{-8}} = 0,00963 \text{ м}.$$

Эйлерова сила

$$F_3 = \frac{3,14^2 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 3460 \cdot 10^{-8}}{(1 \cdot 4)^2} = 4264 \text{ кН}.$$

Полный прогиб балки

$$v = \frac{0,00963}{1 - \frac{100}{4264}} = 0,01 \text{ м}.$$

Максимальный изгибающий момент

$$M_{\max} = 50 + 100 \cdot 0,01 = 51 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Максимальное нормальное напряжение

$$\sigma_{\max} = \frac{100 \cdot 10^3}{34,8 \cdot 10^{-4}} + \frac{51 \cdot 10^3}{289 \cdot 10^{-6}} = 28,7 + 176,5 = 205,2 < R.$$

Условию прочности двутавр № 24 удовлетворяет.

Проверим устойчивость балки из двутавра № 24 в горизонтальной плоскости (плоскости наибольшей гибкости, так как $J_y < J_x$).

Гибкость балки

$$\lambda_y = \mu l / i_y = 1 \cdot 4 \cdot 10^2 / 2,37 = 168,8;$$

коэффициент $\varphi = 0,241$.

Допускаемая продольная сила

$$F_1' = \varphi R A = 0,241 \cdot 210 \cdot 10^6 \cdot 34,8 \cdot 10^{-4} = 176,1 \text{ кН} > F_1 = 100 \text{ кН}.$$

Принимаем окончательно двутавр № 24.

Пример 9.7

Балка длиной $l = 6$ м с шарнирными опорами, выполненная из двух швеллеров № 22, нагружена поперечной равномерно распределенной нагрузкой $q = 5$ кН/м и продольной силой F (рис. 9.11, а).

Определить наибольшую допустимую продольную нагрузку F , расположив сечение швеллеров рационально (вариант 1, 2 или 3).

Проверить прочность и жесткость балки при принятом варианте, если $R = 210$ МПа, $v_{\text{adm}} = l / 300$.

Решение

Балка подвергается продольно-поперечному изгибу.

Сначала надо выявить рациональное положение сечения балки по отношению к поперечной нагрузке, т. е. при изгибе. Затем определить наибольшую допустимую продольную нагрузку из условия устойчивости балки при различных вариантах расположения ее се-

чения и только после этого принять рациональное положение сечения балки и проверить ее прочность и жесткость.

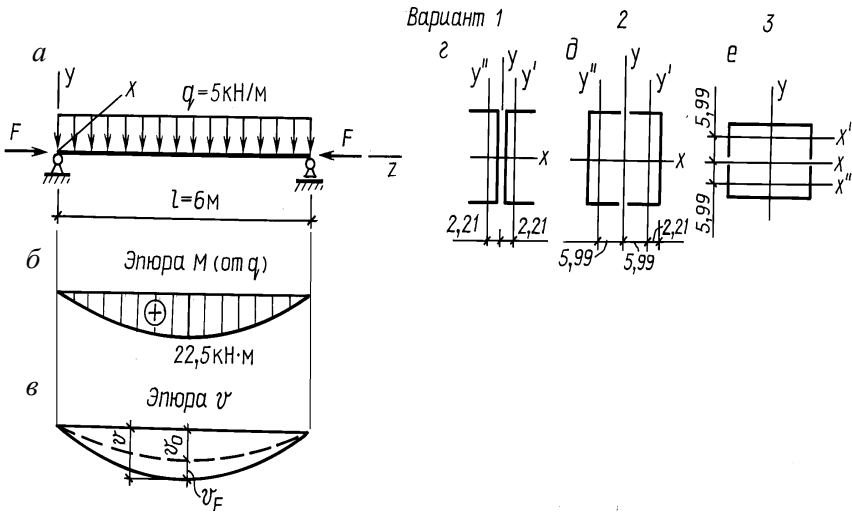


Рис. 9.11

Геометрические характеристики швеллера № 22

$$A = 26,7\text{ см}^2, W_x = 192\text{ см}^3, W_y = 25,1\text{ см}^3, J_x = 2110\text{ см}^4,$$

$$J_y = 151\text{ см}^4, h = 22\text{ см}, b = 8,2\text{ см}, x_c = 2,21\text{ см}.$$

Эпюра изгибающих моментов от поперечной силы показана на рис. 9.11, б. Максимальная ордината эпюры в середине пролета

$$M_q = \frac{ql^2}{8} = \frac{5 \cdot 6^2}{8} = 22,5\text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Деформированная схема балки показана на рис. 9.11, в.

Рассмотрим первый вариант расположения сечения (рис. 9.11, з).

Вычислим геометрические характеристики сечения относительно главных центральных осей:

площадь

$$A = 2 \cdot 26,7 = 53,4 \text{ см}^2;$$

момент сопротивления

$$W_x = 2 \cdot 192 = 384 \text{ см}^4;$$

моменты инерции

$$J_x = 2 \cdot 2110 = 4220 \text{ см}^4,$$

$$J_y = 2 (151 + 26,7 \cdot 2,21^2) = 562,8 \text{ см}^4;$$

радиусы инерции

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}} = \sqrt{\frac{4220}{53,4}} = 8,89 \text{ см};$$

$$i_y = \sqrt{\frac{562,8}{53,4}} = 3,246 \text{ см};$$

гибкость балки

$$\lambda_x = \frac{\mu l}{i_x} = \frac{1 \cdot 6 \cdot 10^2}{8,89} = 67,5;$$

$$\lambda_y = \frac{\mu l}{i_y} = \frac{1 \cdot 6 \cdot 10^2}{3,246} = 184,8.$$

Заметим, что по условию закрепления концов балки коэффициент $\mu = 1$.

Анализируя значения гибкостей балки (можно также и моментов инерции сечения) видим, что гибкость относительно оси Y больше, чем относительно оси X . Значит, потеря устойчивости возможна относительно оси Y , в направлении оси X .

Для $\lambda_{\max} = \lambda_y = 184,8$ по таблице $\varphi = f(\lambda)$ коэффициент продольного изгиба $\varphi_y = 0,204$.

Наибольшее допустимое значение сжимающей продольной силы из условия устойчивости (9.8) будет

$$F_{\text{adm}} = A\varphi R = 53,4 \cdot 10^{-4} \cdot 0,204 \cdot 210 \cdot 10^6 = 228,8 \text{ кН.}$$

Рассмотрим второй вариант расположения сечения (рис. 9.11, д).
Геометрические характеристики сечения:

$$A = 53,4 \text{ см}^2, \quad W_x = 2 \cdot 192 = 384 \text{ см}^3, \quad J_x = 4220 \text{ см}^4;$$

$$J_y = 2 (151 + 26,7 (8,2 - 2,21)^2) = 2218 \text{ см}^4;$$

$$i_x = \sqrt{\frac{4220}{53,4}} = 8,89 \text{ см};$$

$$i_y = \sqrt{\frac{2218}{53,4}} = 6,44 \text{ см};$$

$$\lambda_x = \frac{1 \cdot 6 \cdot 10^2}{8,89} = 67,5;$$

$$\lambda_y = \frac{1 \cdot 6 \cdot 10^2}{6,44} = 93,2.$$

Для $\lambda_{\max} = \lambda_y = 93,2$ коэффициент $\varphi = 0,616$.
Наибольшая допустимая продольная сила

$$F_{\text{adm}} = \varphi AR = 53,4 \cdot 10^{-4} \cdot 0,616 \cdot 210 \cdot 10^6 = 690,8 \text{ кН.}$$

Рассмотрим третий вариант расположения сечения (рис. 9.11, е).
Геометрические характеристики сечения:

$$A = 53,4 \text{ см}^2, \quad J_y = 2 \cdot 2110 = 4220 \text{ см}^4;$$

$$J_x = 2 (151 + 26,7 (8,2 - 2,21)^2) = 2218 \text{ см}^4;$$

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}} = \frac{2218}{8,2} = 270,5 \text{ см}^3;$$

$$i_x = 6,44 \text{ см}, \quad i_y = 8,89 \text{ см};$$

$$\lambda_x = 93,2, \quad \lambda_y = 67,5.$$

Для $\lambda_{\max} = \lambda_x = 93,2$ коэффициент $\varphi = 0,616$.

Наибольшая допустимая продольная сила

$$F_{\text{adm}} = 53,4 \cdot 10^{-4} \cdot 0,616 \cdot 210 \cdot 10^6 = 690,8 \text{ кН}.$$

Из результатов вычислений следует, что:

для продольной сжимающей силы F рациональными будут варианты 2 и 3, так как допускаемая нагрузка для них большая, чем в варианте 1;

для поперечной силы q рациональным будут варианты 1 и 2, поскольку момент сопротивления W_x в этих случаях больший, чем в варианте 3;

для дальнейшего расчета принимаем расположение сечения балки по варианту 2, при котором будет наибольшая сопротивляемость как поперечному, так и продольному изгибу.

Проверим жесткость балки в принятом варианте расположения сечения.

Максимальный прогиб будет в середине пролета балки (см. рис. 9.11, в).

Прогиб от поперечной нагрузки

$$v_0 = \frac{5}{384} \cdot \frac{q l^4}{E J_x} = \frac{5}{384} \cdot \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 6^4}{200 \cdot 10^9 \cdot 4220 \cdot 10^{-8}} = 0,999 \text{ см}.$$

Эйлерова сила

$$F_3 = \frac{\pi^2 E J_x}{(\mu l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 4220 \cdot 10^{-8}}{(1 \cdot 6)^2} = 2312 \text{ кН}.$$

Полный прогиб балки

$$v = \frac{v_0}{1 - \frac{F}{F_3}} = \frac{0,999}{1 - \frac{690,8}{2312}} = 1,425 \text{ см.}$$

Так как полный прогиб 1,425 см меньше допустимого

$$v_{\text{adm}} = 600/300 = 2 \text{ см,}$$

жесткость балки обеспечена.

Проверим прочность балки от совместного действия поперечной и продольной нагрузок.

Максимальный изгибающий момент в балке

$$\begin{aligned} M_{\text{max}} &= M_q + Fv = 22,5 + 690,8 \cdot 1,425 \cdot 10^{-2} = \\ &= 22,5 + 9,84 = 32,34 \text{ кН}\cdot\text{м.} \end{aligned}$$

Максимальное нормальное напряжение в балке

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{F}{A} + \frac{M_{\text{max}}}{W_x} = \frac{690,8 \cdot 10^3}{53,4 \cdot 10^{-4}} + \frac{32,34 \cdot 10^3}{384 \cdot 10^{-6}} = 213,6 \text{ МПа} > R.$$

Перенапряжение в балке составляет 1,71 %, что допустимо.

Таким образом, положение сечения балки по варианту 2 удовлетворяет требованиям по жесткости и прочности.

Пример 9.8

Деревянная консольная балка длиной $l = 2$ м прямоугольного поперечного сечения ($h = 20$ см, $b = 12$ см) нагружена сосредоточенной силой $F = 5$ кН в точке K под углом $\alpha = 60^\circ$ к оси Z (рис. 9.12, a).

Проверить прочность и устойчивость балки, если $R = 12$ МПа, $E = 10$ ГПа.

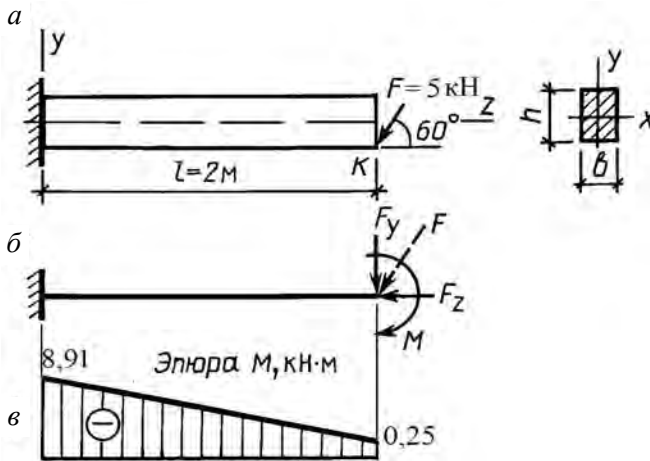


Рис. 9.12

Решение

Составим расчетную схему балки.

Разложив действующую силу F на составляющие по направлению координатных осей, получим

$$F_z = F \cos 60^\circ = 5 \cdot 0,5 = 2,5 \text{ кН},$$

$$F_y = F \sin 60^\circ = 5 \cdot 0,866 = 4,33 \text{ кН}.$$

Перенесем составляющие F_z и F_y к центру тяжести поперечного сечения балки, т. е. к оси Z . В результате образуются продольно сжимающая сила $F_z = 2,5$ кН, поперечно изгибающая сила $F_y = 4,33$ кН и поперечно изгибающий момент

$$M = -F_z h / 2 = -2,5 \cdot 10 \cdot 10^{-2} = -0,25 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Расчетная схема балки показана на рис. 9.12, б, а эпюра изгибающих моментов – на рис. 9.12, в. Опасное сечение – защемление.

Максимальный изгибающий момент

$$M_{\max} = -F_y \cdot 2 - M = -4,33 \cdot 2 - 0,25 = -8,91 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Анализ расчетной схемы показывает, что балка подвергается продольно-поперечному изгибу.

Вычислим геометрические характеристики балки:
площадь сечения

$$A = 20 \cdot 12 = 240 \text{ см}^2;$$

главные моменты инерции сечения

$$J_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{12 \cdot 20^3}{12} = 8000 \text{ см}^4;$$

$$J_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{20 \cdot 12^3}{12} = 2880 \text{ см}^4;$$

момент сопротивления сечения

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{12 \cdot 20^2}{6} = 800 \text{ см}^3;$$

радиусы инерции сечения

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}} = \sqrt{\frac{8000}{240}} = 5,774 \text{ см};$$

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}} = \sqrt{\frac{2880}{240}} = 3,464 \text{ см};$$

гибкости балки

$$\lambda_x = \frac{\mu l}{i_x} = \frac{2 \cdot 200}{5,774} = 69,3;$$

$$\lambda_y = \frac{\mu l}{i_y} = \frac{2 \cdot 200}{3,464} = 115,5.$$

Проверка устойчивости ведется в плоскости наибольшей гибкости ($\lambda_{y\max} = 115,5$), т. е. относительно оси Y от продольно сжимающей силы F_z .

При гибкости $\lambda = 115,5$ коэффициент $\varphi = 0,226$.
 Наибольшая допустимая продольная сила из (9.8)

$$F_{\text{adm}} = A\varphi R = 240 \cdot 10^{-4} \cdot 0,226 \cdot 12 \cdot 10^6 = 65,09 \text{ кН} > F_z = 2,5 \text{ кН}.$$

Устойчивость балки обеспечена.

Приступим к расчету на поперечный изгиб с учетом прогибов балки.

Прогиб балки в вертикальной плоскости, т. е. относительно оси X , от силы F_y и момента M (формулы взяты из справочника):

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{F_y l^3}{3EJ_x} + \frac{Ml^2}{2EJ_x} = \frac{4,33 \cdot 10^3 \cdot 2^3}{3 \cdot 10 \cdot 10^9 \cdot 8000 \cdot 10^{-8}} + \\ &+ \frac{0,25 \cdot 10^3 \cdot 2^2}{2 \cdot 10 \cdot 10^9 \cdot 8000 \cdot 10^{-8}} = 0,015 \text{ м}. \end{aligned}$$

Эйлера сила относительно оси X

$$F_3 = \frac{\pi^2 EJ_x}{(\mu l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 10 \cdot 10^9 \cdot 8000 \cdot 10^{-8}}{(2 \cdot 2)^2} = 493 \text{ кН}.$$

Полный прогиб балки от продольной и поперечной нагрузки

$$v = \frac{v_0}{1 - \frac{F_y}{F_3}} = \frac{0,015}{1 - \frac{4,33}{493}} = 0,015 \text{ м}.$$

Полный изгибающий момент

$$M = M_{\text{max}} + F_z v = 8,91 + 2,5 \cdot 0,015 = 8,95 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Максимальное нормальное напряжение в балке

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{F_z}{A} + \frac{M}{W_x} = \frac{2,5 \cdot 10^3}{240 \cdot 10^{-4}} + \frac{8,95 \cdot 10^3}{800 \cdot 10^{-6}} = 11,29 \text{ МПа} < R = 12 \text{ МПа}.$$

10. РАСЧЕТЫ ПРИ ДЕЙСТВИИ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗОК

В предыдущих разделах рассмотрены расчеты на *статическую* нагрузку, величина которой остается постоянной или изменяется во времени медленно, плавно, и ускорениями точек элемента конструкции можно пренебречь. Однако часто приходится сталкиваться с нагрузками, воздействующими на конструкцию с большими и неравномерными скоростями, а также нагрузками внезапного кратковременного действия. Такие нагрузки называются *динамическими*. При действии динамических нагрузок появляются большие инерционные силы, которые необходимо учитывать в расчетах.

Физические условия работы элемента конструкции при динамическом действии нагрузки являются более сложными, чем при статическом. Для выработки расчетных условий требуется привлечение более сложных математических методов. Многие факторы еще недостаточно изучены. Поэтому на практике пользуются упрощенными методами расчета, основанными на ряде допущений. В частности, допускается, что в пределах упругих деформаций при динамических нагрузках верен закон Гука, т. е. напряжения и деформации связаны линейной зависимостью ($\sigma = E\varepsilon$).

Установлено, что практически во всех случаях силы динамического воздействия *пропорциональны* статическим. Поэтому расчеты на прочность при динамических нагрузках выполняются по методам, разработанным для статических нагрузок, но с введением *динамического* коэффициента.

Различают следующие виды расчета на динамическую нагрузку:

- 1) расчет на действие сил инерции;
- 2) расчет на ударную нагрузку;
- 3) расчет на колебательную (вибрационную) нагрузку.

10.1. Расчет на действие сил инерции

Инерционной нагрузке подвержены элементы подъемников, лифтов, транспортеров, деталей машин и механизмов, движение которых происходит с ускорением (рис. 10.1, а).

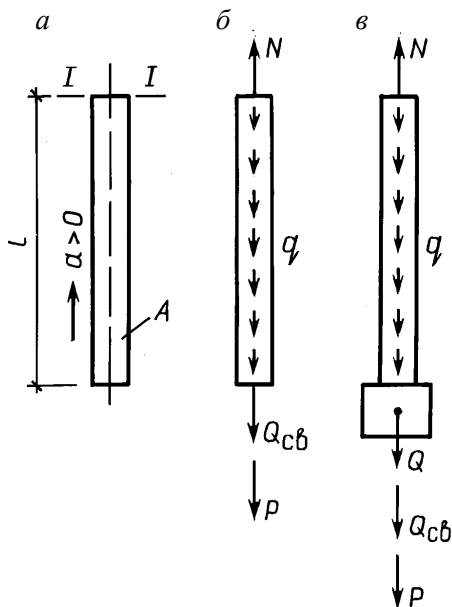


Рис. 10.1

Согласно принципу Даламбера, всякое движущееся тело можно считать находящимся в состоянии мгновенного равновесия, если к действующим на него внешним силам добавить силу инерции, направив ее в сторону, противоположную ускорению (рис. 10.1, а, б).

Сила инерции P численно равна произведению массы движущегося элемента m на ускорение движения a :

$$P = ma.$$

Для случая, показанного на рис. 10.1, б, на отсеченную часть стержня действуют собственный вес этой части

$$Q_{св} = ql,$$

где q – вес погонного метра стержня (линейная плотность),
и сила инерции

$$P = ma,$$

где m – масса части стержня.

В случае наличия груза Q (рис. 10.1, в) на рассматриваемую часть стержня действуют вес груза Q , собственный вес части стержня $Q_{св}$ и сила инерции

$$P = m'a,$$

где m' – масса груза и части стержня.

Напряжение в стержне, движущимся с ускорением:

$$\sigma_d = \sigma_{ст}K_d,$$

где σ_d – динамическое напряжение;

$\sigma_{ст}$ – напряжение от статического действия собственного веса (груза);

K_d – динамический коэффициент, показывающий, во сколько раз увеличится статическое напряжение от воздействия сил инерции.

Для случая на рис. 10.1, б

$$\sigma_{ст} = \frac{Q_{св}}{A} = \frac{ql}{A}.$$

Для случая на рис. 10.1, в

$$\sigma_{ст} = \frac{Q + Q_{св}}{A} = \frac{Q + ql}{A}.$$

Динамический коэффициент определяется по формуле

$$K_d = 1 + \frac{a}{g}, \quad (10.1)$$

где a – ускорение движения;

g – ускорение силы тяжести (свободного падения).

Условие прочности при учете сил инерции имеет вид

$$\sigma_d = \sigma_{ст}K_d \leq R.$$

При значительном весе груза Q и небольшой длине стержня (троса) собственным весом троса можно пренебречь.

Пример 10.1

Груз массой $m = 1,5$ т при помощи троса поднимается на высоту $H = 30$ м (рис. 10.2). В первые три секунды подъема с постоянным ускорением груз проходит путь $s = 22,5$ м.

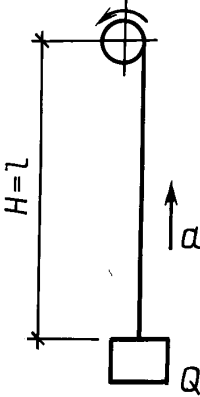


Рис. 10.2

Определить площадь сечения троса, если его расчетное сопротивление $R = 190$ МПа, модуль продольной упругости $E = 100$ ГПа, объемная плотность $\gamma = 7,4$ т/м³.

Задачу решить без и с учетом массы троса.

Решение

В момент разгона ускорение подъема груза составляет

$$a = 2s / t^2 = 2 \cdot 22,5 / 3^2 = 5 \text{ м/с}^2.$$

Приведем данные в единицы, требуемые системой СИ:
вес груза

$$Q = mg = 1,5 \cdot 9,81 = 14,72 \text{ кН};$$

плотность троса

$$\gamma = 7,4 \cdot 9,81 = 72,6 \text{ кН/м}^3.$$

Решение без учета массы троса.

Усилие в тросе от статического действия груза

$$N_{\text{ст}} = Q = 14,72 \text{ кН}.$$

Динамический коэффициент по формуле (10.1)

$$K_d = 1 + \frac{a}{g} = 1 + \frac{5}{9,81} = 1,51.$$

Усилие в тросе от динамического действия груза

$$N_d = N_{\text{ст}} K_d = 14,72 \cdot 1,51 = 22,23 \text{ кН}.$$

Условие прочности троса

$$\sigma_d = \frac{N_d}{A} = \frac{22,23 \cdot 10^3}{A} \leq 190 \cdot 10^6,$$

откуда площадь сечения троса

$$A = \frac{22,23 \cdot 10^3}{190 \cdot 10^6} = 0,117 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 1,17 \text{ см}^2.$$

Определим максимальное напряжение в тросе с учетом его массы.

Вес троса

$$Q_{\text{св}} = Al\gamma = 0,117 \cdot 10^{-3} \cdot 30 \cdot 72,6 \cdot 10^3 = 254,8 \text{ Н.}$$

Статическое усилие в тросе

$$N_{\text{ст}} = Q + Q_{\text{св}} = 14,72 \cdot 10^3 + 254,8 = 14,97 \text{ кН.}$$

Динамическое усилие в тросе

$$N_d = N_{\text{ст}} K_d = 14,97 \cdot 1,51 = 22,6 \text{ кН.}$$

Динамическое напряжение в тросе

$$\sigma_d = \frac{N_d}{A} = \frac{22,6 \cdot 10^3}{0,117 \cdot 10^{-3}} = 193,2 \cdot 10^6 \text{ Па} = 193,2 \text{ МПа} > R.$$

Перенапряжение составляет 1,68 %, что допустимо.

Заметим, что влияние массы троса на напряжение в нем в данном случае незначительное (небольшая длина троса).

Вычислим удлинение троса.

Удлинение от статического действия груза

$$\Delta l_{\text{ст}} = \frac{Ql}{EA} = \frac{14,72 \cdot 10^3 \cdot 30}{100 \cdot 10^9 \cdot 0,117 \cdot 10^{-3}} = 37,74 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 3,77 \text{ см.}$$

Удлинение от динамического воздействия груза

$$\Delta l_d = \Delta l_{\text{ст}} K_d = 3,77 \cdot 1,51 = 5,69 \text{ см.}$$

Решение с учетом массы троса

$$\Delta l_{\text{ст}} = \frac{Ql}{EA} + \frac{Q_{\text{св}}l}{2EA} = \frac{14,72 \cdot 10^3 \cdot 30}{100 \cdot 10^9 \cdot 0,117 \cdot 10^{-3}} + \frac{254,8 \cdot 30}{2 \cdot 100 \cdot 10^9 \cdot 0,117 \cdot 10^{-3}} =$$
$$= 37,74 \cdot 10^{-3} + 327 \cdot 10^{-6} = (37,74 + 0,327) \cdot 10^{-3} = 38,1 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 3,81 \text{ см.}$$

$$\Delta l_d = \Delta l_{\text{ст}} K_d = 3,81 \cdot 1,51 = 5,75 \text{ см.}$$

Учет массы троса показал незначительное увеличение удлинения (на 1,05 %). Поэтому при небольшой длине троса его собственным весом при вычислении напряжений и деформаций можно пренебречь.

Пример 10.2

Швеллер № 20 при помощи тросов, каждый сечением $A = 0,5 \text{ см}^2$, поднимается вверх с ускорением $a = 7 \text{ м/с}^2$ (рис. 10.3, а).

Определить нормальные напряжения в тросе и швеллере.

Собственный вес тросов не учитывать.

Решение

Геометрические характеристики для швеллера № 20, уложенного плашмя, $J_x = 113 \text{ см}^4$, $W_x = 20,5 \text{ см}^3$. Линейная плотность $\rho = 18,4 \text{ кг/м}$. Вес погонной длины 1 м швеллера в системе СИ

$$q = \rho g = 18,4 \cdot 9,81 = 181 \text{ Н/м.}$$

Сначала определим напряжения в швеллере. Его собственный вес является равномерно распределенной нагрузкой $q = 181 \text{ Н/м}$. Расчетная схема поднимаемого швеллера показана на рис. 10.3, б.

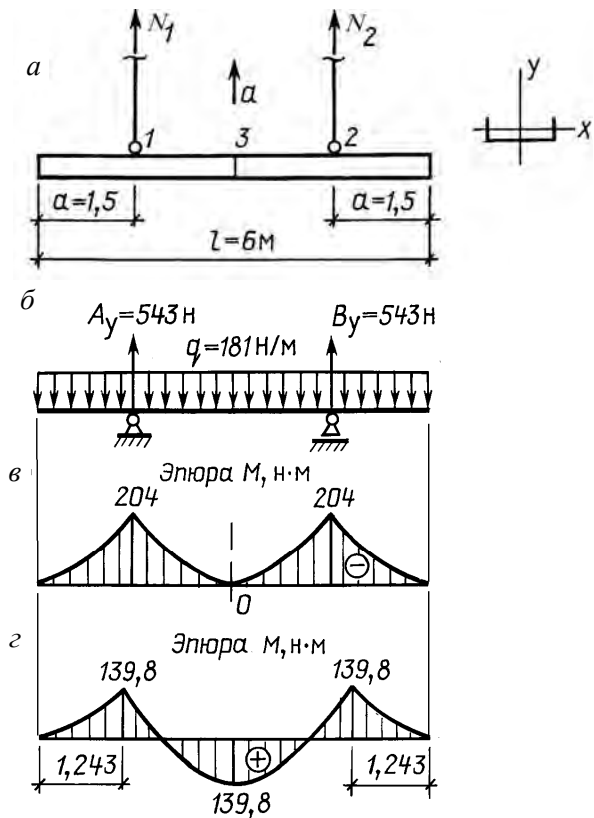


Рис. 10.3

Определение опорных реакций и построение эпюры изгибающих моментов (рис. 10.3, в) выполняются обычными методами.

Напряжение в швеллере от статического действия собственного веса

$$\sigma_{\text{ст}} = \frac{M_{\text{max}}}{W_x} = \frac{204}{20,5 \cdot 10^{-6}} = 9,95 \cdot 10^6 \text{ Па} = 9,95 \text{ МПа.}$$

Динамический коэффициент

$$K_d = 1 + \frac{a}{g} = 1 + \frac{7}{9,81} = 1,71.$$

Динамическое напряжение в швеллере

$$\sigma_d = \sigma_{ст} K_d = 9,95 \cdot 1,71 = 17,0 \text{ МПа.}$$

Вес швеллера ($Q = ql = 181 \cdot 6 = 1086$ Н) является нагрузкой на тросы.

Продольная сила в тросах

$$N_1 = N_2 = \frac{Q}{2} = \frac{1086}{2} = 543 \text{ Н.}$$

Напряжение в тросах от статического действия веса швеллера

$$\sigma_{ст} = \frac{N}{A} = \frac{543}{0,5 \cdot 10^{-4}} = 1086 \cdot 10^4 \text{ Па} = 10,86 \text{ МПа.}$$

Динамическое напряжение в тросе

$$\sigma_d = \sigma_{ст} K_d = 10,86 \cdot 1,71 = 18,57 \text{ МПа.}$$

При подъеме элементов строительных конструкций, особенно длинных и большого веса, а иногда в непроектном положении, важно, чтобы монтажные напряжения были возможно меньшими. Это достигается по крайней мере двумя методами: малым ускорением в начале и окончании подъема (определяется характеристикой двигателя подъемного устройства) и рациональным местом строповки (закрепление подъемных канатов).

Анализ эпюры M (см. рис. 10.3, *в*) показывает, что места строповки выбраны недостаточно рационально, так как в середине длины швеллера изгибающий момент равен нулю.

Нетрудно понять, что изменение расстояния a приведет к появлению изгибающего момента в сечении 3 швеллера. Причем увеличение расстояния a приведет к повышению M_{\max} , а уменьшение его – к уменьшению M_{\max} . Рациональным будет следующее соотношение изгибающих моментов (рис. 10.3, *з*):

$$M_1 = M_2 = M_3.$$

Определим оптимальное значение расстояния a . По расчетной схеме

$$M_1 = M_2 = \frac{qa^2}{2} = \frac{181a^2}{2} = 90,5a^2;$$

$$M_3 = A_y \left(\frac{6}{2} - a \right) - q \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{6}{4} = 543(3 - a) - 181 \cdot 3 \cdot 1,5 = 841,5 - 543a.$$

Условие рациональности

$$M_1 = M_3; \quad 90,5a^2 = 841,5 - 543a \quad \text{или} \quad a^2 + 6,0a - 9,0 = 0.$$

Решив квадратное уравнение, получим $a = 1,243$ м.

При $a = 1,243$ м

$$M_1 = M_2 = M_3 = 90,5a^2 = 90,5 \cdot 1,243^2 = 139,8 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

что на 45,9 % меньше, чем при $a = 1,5$ м. На столько же процентов уменьшится и напряжение в швеллере.

Напряжение в тросе не изменится.

Пример 10.3

На балке, состоящей из двух двутавров № 20, установлена лебедка массой $m_1 = 0,4$ т для подъема груза массой $m_2 = 5$ т на тросе сечением $A = 4 \text{ см}^2$ (рис. 10.4, a).

Для данной конструкции определить максимально допустимое ускорение подъема, если расчетное сопротивление для двутавра $R = 210$ МПа, для троса $R = 150$ МПа.

Собственный вес балки и троса не учитывать.

Решение

Момент сопротивления двутавра № 20 $W_x = 184 \text{ см}^3$.

Нагрузкой на трос является вес поднимаемого груза:

$$Q_2 = m_2g = 5000 \cdot 9,81 = 49050 \text{ Н} = 49,05 \text{ кН}.$$

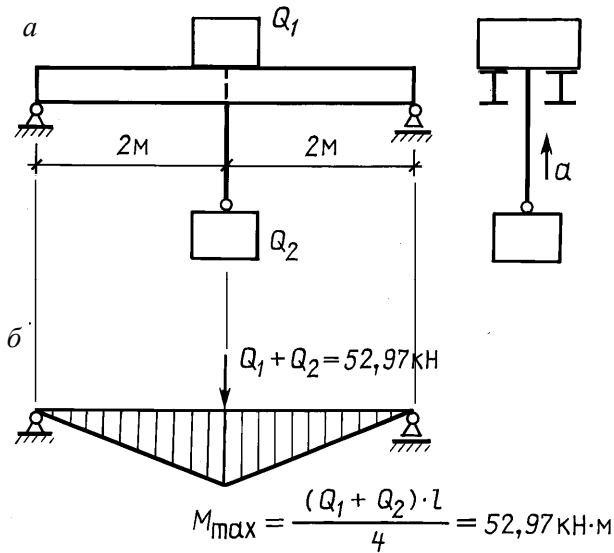


Рис. 10.4

Напряжение в тросе от статического действия груза весом Q_2

$$\sigma_{\text{ст}} = \frac{Q_2}{A} = \frac{49,05 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^{-4}} = 12,26 \cdot 10^7 \text{ Па} = 122,6 \text{ МПа.}$$

Максимальное допускаемое напряжение в тросе $\sigma_{\max} = R = 150 \text{ МПа}$.
Максимальный допускаемый коэффициент динамичности для троса

$$K_d = \frac{R}{\sigma_{\text{ст}}} = \frac{150}{122,6} = 1,223.$$

По формуле (10.1)

$$K_d = 1 + \frac{a}{g} = 1,223,$$

откуда максимальное допустимое ускорение подъема груза

$$a = (1,223 - 1) 9,81 = 2,19 \text{ м/с}^2.$$

Нагрузкой для балки являются:
вес лебедки

$$Q_1 = m_1 g = 400 \cdot 9,81 = 3924 \text{ Н} = 3,924 \text{ кН};$$

вес поднимаемого груза

$$Q_2 = 49,05 \text{ кН}.$$

Расчетная схема балки и эпюра изгибающих моментов показаны на рис. 10.4, б.

Напряжение в балке от статического действия нагрузки

$$\sigma_{\text{ст}} = \frac{M_{\text{max}}}{W_x} = \frac{52,97 \cdot 10^3}{184 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} = 0,1439 \cdot 10^9 \text{ Па} = 143,9 \text{ МПа}.$$

Для балки максимальный допустимый коэффициент динамичности

$$K_d = \frac{R}{\sigma_{\text{ст}}} = \frac{210}{143,9} = 1,459.$$

Из формулы (10.1) максимальное допустимое ускорение подъема груза

$$a = (1,459 - 1) 9,81 = 4,50 \text{ м/с}^2.$$

Для конструкции, исходя из прочности троса, принимаем наибольшее допустимое ускорение подъема груза $a = 2,19 \text{ м/с}^2$.

10.2. Расчет на ударную нагрузку

Ударной называется нагрузка, которая за короткий промежуток времени достигает значительной величины.

Поскольку продолжительность удара измеряется долями секунды, образующиеся большие ускорения приводят к большой инерционной силе, воздействующей на элемент конструкции, воспринимающий удар.

В зависимости от характера взаимодействия соударяющихся тел различают продольный (сжимающий или растягивающий), поперечный (изгибающий) и скручивающий удары. Во всех этих случаях степень воздействия ударной нагрузки зависит от массы и скоростей (в момент удара) обоих соударяющихся тел. Массой ударяемого элемента можно пренебречь, если она значительно меньше массы ударяющего тела.

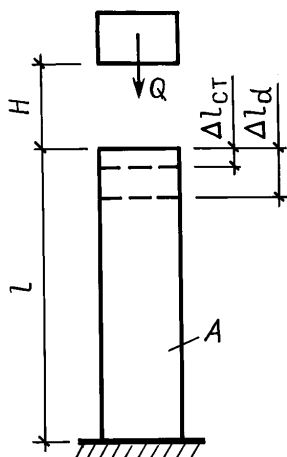


Рис. 10.5

A – площадь поперечного сечения;

E – модуль продольной упругости материала стержня.

В случае изгибающего удара (рис. 10.6) динамический коэффициент определяется по формуле

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{v_{ст}}}, \quad (10.3)$$

где H – высота падения груза;

$v_{ст}$ – прогиб балки в ударяемом сечении от статического действия ударяющей силы.

В случае продольного удара (рис. 10.5) коэффициент динамичности определяется по формуле

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta l_{ст}}}, \quad (10.2)$$

где H – высота падения груза;

$\Delta l_{ст}$ – деформация стержня от статического действия ударяющей силы:

$$\Delta l_{ст} = \frac{Fl}{EA};$$

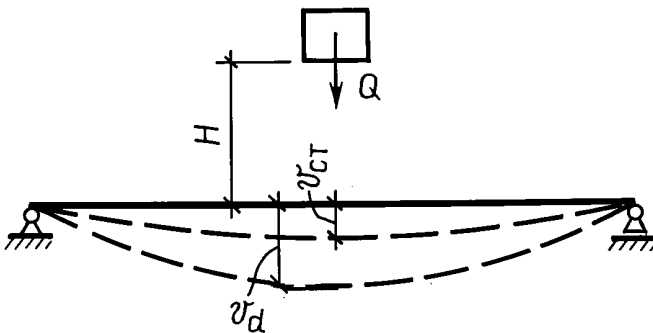


Рис. 10.6

Например, при ударе посередине длины балки прогиб

$$v_{ст} = \frac{Fl^3}{48EJ},$$

при ударе на конце консоли

$$v_{ст} = \frac{Fl^3}{3EJ}.$$

Анализ формул для определения K_d показывает, что при внезапном приложении нагрузки ($H = 0$) коэффициент динамичности $K_d = 2$. Если высота падения груза H значительно больше $\Delta l_{ст}$ ($v_{ст}$), то в формулах (10.2), (10.3) единицей под корнем можно пренебречь.

Если известна скорость падения груза V в начале удара, то коэффициент динамичности можно определить по формуле

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{V^2}{g\delta_{ст}}}, \quad (10.4)$$

где $\delta_{ст} = \Delta l_{ст}$ или $v_{ст}$ в зависимости от вида удара (продольный или поперечный).

Условие прочности по методу предельных состояний при ударном действии нагрузки имеет вид

$$\sigma_{d \max} = \sigma_{\text{ст} \max} K_d \leq R, \quad (10.5)$$

где $\sigma_{d \max}$ – максимальное динамическое напряжение;

$\sigma_{\text{ст} \max}$ – максимальное статическое напряжение;

K_d – динамический коэффициент, зависящий от вида динамического воздействия (10.2), (10.3).

Деформация элемента конструкции

$$\delta_d = \delta_{\text{ст}} K_d, \quad (10.6)$$

где δ_d – деформация от динамического действия силы ($\Delta l_d, v_d$);

$\delta_{\text{ст}}$ – деформация от статического действия силы ($\Delta l_{\text{ст}}, v_{\text{ст}}$).

В теории доказывается, что величина динамических напряжений зависит от объема подвергающегося удару элемента конструкции (стержня, балки, вала) и качества его материала.

Чем *больше* объем и чем *меньше* модуль упругости, тем *меньше* динамические напряжения в элементе конструкции.

Для снижения динамических напряжений нужно увеличить податливость (деформативность) элемента путем увеличения, например, его длины или замены на материал с более низким модулем упругости. Применимы и амортизирующие устройства (прокладки, пружины).

Изложенный выше способ расчета на действие ударной нагрузки не учитывает массу элемента конструкции, который подвергается удару. Вследствие этого формулы (10.2)–(10.6) дают несколько преувеличенное значение определяемых параметров, что идет в запас прочности и жесткости.

Приведем формулу для вычисления динамического коэффициента с учетом массы ударяемого элемента конструкции:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta l_{\text{ст}}} \cdot \frac{1}{1 + \alpha \frac{Q_{\text{св}}}{Q}}}, \quad (10.7)$$

где α – коэффициент приведения массы ударяемого элемента к месту удара;

$Q_{св}$ – собственный вес ударяемого элемента;

Q – вес ударяющего груза.

Пример 10.4

На стальной стержень длиной $l = 1$ м квадратного поперечного сечения ($a = 5$ см), рис. 10.7, с высоты $H = 10$ см падает груз массой $m = 30,6$ кг.

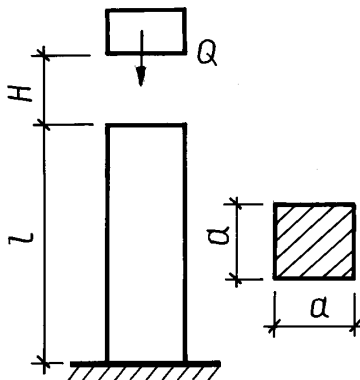


Рис. 10.7

Проверить прочность стержня без и с учетом его массы, если допускаемое напряжение из расчета на устойчивость составляет $R = 74,1$ МПа.

Для материала стержня $E = 200$ ГПа, плотность $\rho = 8,0$ т/м³.

Решение

В системе СИ:

плотность

$$\rho = 8,0 \cdot 9,81 = 78,5 \text{ кН/м}^3;$$

вес груза

$$Q = 30,6 \cdot 9,81 = 300 \text{ Н.}$$

Решение без учета массы стержня.

Статическое напряжение в стержне от груза весом Q

$$\sigma_{\text{ст}} = \frac{Q}{A} = \frac{300}{5 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 12 \cdot 10^4 = 0,12 \text{ МПа.}$$

Статическая деформация стержня от груза весом Q

$$\Delta l_{\text{ст}} = \frac{Ql}{EA} = \frac{300 \cdot 1}{200 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 0,06 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 0,06 \cdot 10^{-3} \text{ см.}$$

Коэффициент динамичности (по формуле (10.2))

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta l_{\text{ст}}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 10}{0,06 \cdot 10^{-3}}} = 578.$$

Динамическое напряжение

$$\sigma_d = K_d \sigma_{\text{ст}} = 578 \cdot 0,12 = 69,4 \text{ МПа} < R.$$

Решение с учетом массы ударяемого стержня.

Собственный вес ударяемого стержня

$$Q_{\text{св}} = \gamma Al = 78,5 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \cdot 1 = 196,3 \text{ Н.}$$

Динамический коэффициент (по выражению (10.7))

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta l_{\text{ст}}} \cdot \frac{1}{1 + \alpha \frac{Q_{\text{св}}}{Q}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 10}{0,06 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{196,3}{300}}} = 524.$$

Для призматического стержня коэффициент приведения массы к месту удара $\alpha = 1/3$.

Динамическое напряжение

$$\sigma_d = K_d \sigma_{\text{ст}} = 524 \cdot 0,12 = 62,9 \text{ МПа} < R.$$

Динамическая деформация (укорочение)

$$\Delta l_d = \Delta l_{ст} K_d = 0,06 \cdot 10^{-3} \cdot 524 = 31,42 \cdot 10^{-3} \text{ см} = 0,314 \text{ мм.}$$

Анализ полученных значений напряжений позволяет сделать заключение, что при продольном ударе учет массы ударяемого элемента конструкции небольшой длины мало влияет на величину напряжения.

Пример 10.5

На стальную балку, состоящую из двух двутавров № 22 длиной $l = 5 \text{ м}$ с абсолютно жесткими опорами (рис. 10.8, а), посередине пролета падает с высоты $H = 1 \text{ см}$ груз массой $m = 510 \text{ кг}$.

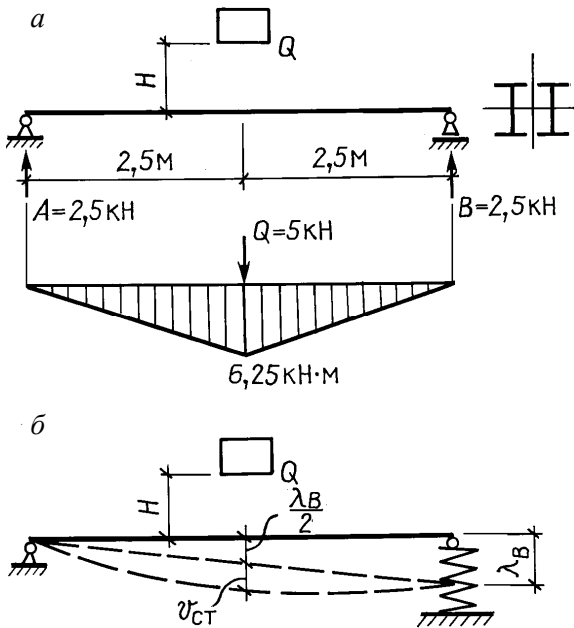


Рис. 10.8

В опасном сечении балки определить максимальное нормальное напряжение и прогиб.

Как изменятся искомые величины, если одна из опор балки будет упругой (цилиндрическая пружина с податливостью $\beta = 1,6 \cdot 10^{-4}$ см/Н), рис. 10.8, б?

Решение

Для двутавра № 22 $J_x = 2550 \text{ см}^4$, $W_x = 232 \text{ см}^3$.
Нагрузка на балку

$$Q = mg = 510 \cdot 9,81 = 5000 \text{ Н} = 5 \text{ кН.}$$

Расчет при жестких опорах без учета массы балки.

Опасным будет сечение посередине пролета балки, поскольку здесь изгибающий момент наибольший:

$$M_{\max} = \frac{Ql}{4} = \frac{5 \cdot 5}{4} = 6,25 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Напряжение и прогиб от статического действия груза весом Q

$$\sigma_{\text{ст}} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{6,25 \cdot 10^3}{232 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} = 0,01347 \cdot 10^9 \text{ Па} = 13,5 \text{ МПа};$$

$$v_{\text{ст}} = \frac{Ql^3}{48EJ_x} = \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 5^3}{48 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 2550 \cdot 2 \cdot 10^{-8}} = 0,00127 \text{ м} = 0,127 \text{ см.}$$

Динамический коэффициент, напряжение и прогиб

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 1}{0,127}} = 5,09;$$

$$\sigma_d = \sigma_{\text{ст}} K_d = 13,5 \cdot 5,09 = 68,7 \text{ МПа};$$

$$v_d = v_{\text{ст}} K_d = 0,127 \cdot 5,09 = 0,646 \text{ см.}$$

Рекомендуется самостоятельно провести расчет с учетом массы балки ($\rho = 24 \text{ кг/м}$, $\alpha = 17/35$).

Результаты будут несколько меньшими ($\sigma_d = 66,0 \text{ МПа}$, $v_d = 0,618 \text{ м}$).

Расчет при одной упругой (податливой) опоре.

Осадка пружины на опоре B от статического действия груза

$$\lambda_B = \beta B = 1,6 \cdot 10^{-4} \cdot 2,5 \cdot 10^3 = 0,4 \text{ см.}$$

Статический прогиб в точке удара

$$v'_{\text{ст}} = \frac{\lambda_B}{2} + \vartheta_{\text{ст}} = \frac{0,4}{2} + 0,127 = 0,327 \text{ см.}$$

Динамические параметры

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 1}{0,327}} = 3,67;$$

$$\sigma'_d = 13,5 \cdot 3,67 = 49,5 \text{ МПа,}$$

$$v'_d = 0,327 \cdot 3,67 = 1,20 \text{ см.}$$

Заметим, что при наличии амортизатора на опоре балки динамическое напряжение в ней уменьшается.

Пример 10.6

К деревянной консольной балке прямоугольного поперечного сечения ($h = 20 \text{ см}$, $b = 10 \text{ см}$), рис. 10.9, на свободном конце внешне приложен груз массой $m = 200 \text{ кг}$.

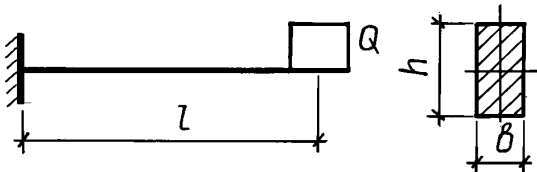


Рис. 10.9

Определить предельную длину балки, если $R = 11$ МПа.
Массу балки не учитывать.

Решение

Вес груза

$$Q = 200 \cdot 9,81 = 1962 \text{ Н.}$$

Момент сопротивления сечения балки

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{10 \cdot 20^2}{6} = 667 \text{ см}^3.$$

При внезапном приложении груза принимается $H = 0$. Тогда из формулы (10.2) динамический коэффициент $K_d = 2$.

Из условия прочности балки $\sigma_d = \sigma_{ст} K_d \leq R$ максимально допустимое статическое напряжение

$$\sigma_{ст} = \frac{R}{K_d} = \frac{11}{2} = 5,5 \text{ МПа.}$$

Исходя из схемы балки и вида нагрузки, максимальный изгибающий момент будет в защемлении и определится выражением

$$M_{\max} = Ql.$$

Максимальное нормальное напряжение в защемлении

$$\sigma_{ст} = \frac{Ql}{W_x} \leq 5,5 \text{ МПа,}$$

откуда наибольшая допустимая длина балки

$$l = \frac{5,5 \cdot 10^6 \cdot 667 \cdot 10^{-6}}{1962} = 1,87 \text{ м.}$$

При этой длине прочность балки обеспечена.

Возникает вопрос: как взаимосвязаны динамические напряжения с длиной балки при внезапном приложении груза и почему? (Пропорционально, так как $K_d = \text{const}$).

10.3. Расчет на колебательную (вибрационную) нагрузку

Всякий упругий элемент конструкции (балка, вал, пружина) определенной массы m под действием внезапно приложенной нагрузки Q способен около положения равновесия совершать собственные (свободные) непериодические колебания с частотой ω_0 и, благодаря наличию внутренних упругих сил, постепенно затухающей амплитудой v до восстановления равновесия (рис. 10.10).

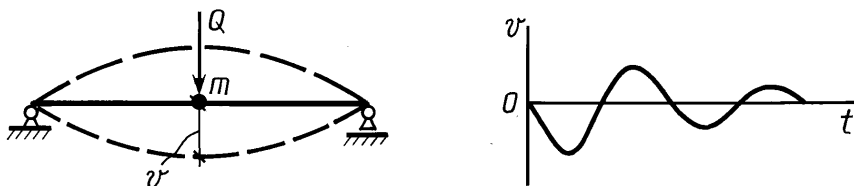


Рис. 10.10

Если на балку действует один груз Q и ее собственная масса m значительно меньше, чем масса груза, то такая балка обладает одной степенью свободы и перемещения всех ее точек в любой момент времени можно выразить через перемещение одной точки (под грузом). Балка, несущая n сосредоточенных грузов, имеет n степеней свободы.

По виду деформации элемента конструкции различают продольные (при растяжении-сжатии стержня, пружины), поперечные (при изгибе балки) и крутильные (при кручении вала) колебания.

Частота собственных колебаний для любого элемента конструкции с одной степенью свободы независимо от вида совершаемых колебаний – линейных (при растяжении-сжатии, изгибе), угловых (при кручении) – определяется по формуле

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{\text{ст}}}}, \quad (10.8)$$

где ω_0 – частота собственных колебаний;

$\Delta_{ст}$ – статическое перемещение под действием веса колеблющегося груза;

g – ускорение силы тяжести.

Для консольной балки с грузом на ее конце

$$\Delta_{ст} = v = \frac{Ql^3}{3EJ}.$$

Для двухопорной балки с грузом посередине пролета

$$\Delta_{ст} = v = \frac{Ql^3}{48EJ}.$$

При определении частоты собственных колебаний силами сопротивления в опорах конструкции, а часто и ее собственным весом, пренебрегают.

Если на элемент конструкции кроме постоянного груза Q будет действовать периодически изменяющаяся возмущающая сила с амплитудой P и частотой ω_1 , то этот элемент станет совершать *вынужденные* колебания с частотой возмущающей силы (рис. 10.11).

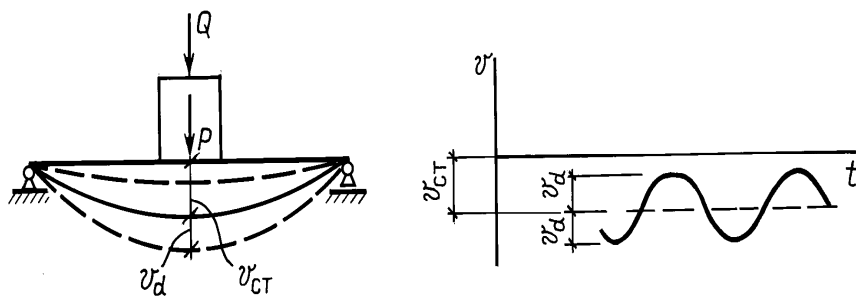


Рис. 10.11

Возмущающую силу (вибрацию) создают механизмы с вращающимися, не вполне уравновешенными частями за счет возникающей центробежной силы инерции (электродвигатели, лебедки, валы механизмов).

В отличие от собственных колебаний, которые быстро затухают, вынужденные остаются постоянными, так как энергия со стороны возмущающей силы подводится непрерывно.

Расчет ведется по вертикальной амплитуде центробежной силы P , совпадающей с направлением постоянного груза Q .

От соотношения частот вынужденных и собственных колебаний зависит степень силового воздействия на элемент конструкции, которая оценивается динамическим коэффициентом

$$K_d = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2}, \quad (10.9)$$

где ω_1 – частота вынужденных колебаний;

ω_0 – частота собственных колебаний.

Из формулы (10.9) следует, что если частота вынужденных колебаний ω_1 приближается к частоте собственных колебаний ω_0 , то динамический коэффициент, а следовательно, деформации и напряжения в элементе конструкции неограниченно возрастают.

Если $\omega_1 = \omega_0$, коэффициент K_d возрастает до бесконечности – наступает явление *резонанса*, представляющего собой опасность для элемента конструкции. Соответствующая частота возмущающей силы называется критической. Нецелесообразно допускать эксплуатацию конструкции в зоне резонанса, так как обеспечение прочности потребует значительного расхода материала. Частота собственных колебаний должна быть примерно на 30 % больше частоты вынужденных.

Деформации и напряжения в элементе конструкции от возмущающей силы P определяются с использованием динамического коэффициента:

$$\Delta_d = \Delta_{ст} K_d, \quad \sigma_d = \sigma_{ст} K_d, \quad \tau_d = \tau_{ст} K_d. \quad (10.10)$$

Суммарные деформации и напряжения слагаются из статических и динамических:

$$\Delta = \Delta_{ст} + \Delta_d, \quad \sigma = \sigma_{ст} + \sigma_d, \quad \tau = \tau_{ст} + \tau_d. \quad (10.11)$$

Пример 10.7

Электродвигатель весом $Q = 1,5$ кН установлен на консольных деревянных балках прямоугольного поперечного сечения при соотношении сторон $h / b = 1,5$ (рис. 10.12, а).

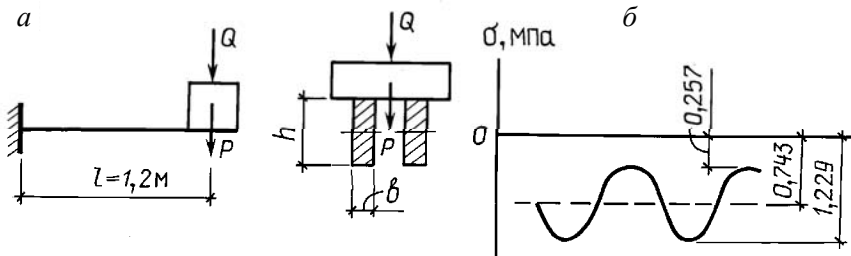


Рис. 10.12

Электродвигатель делает $n = 1400$ об/мин. Вертикальная амплитуда возмущающей силы $P = 0,4$ кН.

Определить размеры поперечного сечения балок, чтобы частота собственных колебаний балок была на 30 % больше частоты возмущающей силы. Для древесины $R = 10$ МПа, $E = 12$ ГПа.

Собственным весом балок пренебречь.

Решение

Консольные балки воспринимают вес двигателя Q как статическую нагрузку и дополнительную P – как динамическую, вызванную работой двигателя.

Обе нагрузки вызывают плоский изгиб балок.

Частота вынужденных колебаний балок

$$\omega_1 = \frac{n}{60} 2\pi = \frac{1400}{60} \cdot 2 \cdot 3,14 = 146,5 \text{ с}^{-1}.$$

Согласно условию задачи частота собственных колебаний балок

$$\omega_0 = 1,3\omega_1 = 1,3 \cdot 146,5 = 190,5 \text{ с}^{-1}.$$

Используя формулу (10.8), запишем

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{v_{\text{ст}}}} = 190,5,$$

откуда статический прогиб балок

$$v_{\text{ст}} = \frac{g}{\omega_0^2} = \frac{9,81}{190,5^2} = 0,0270 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

С другой стороны, статический прогиб двух консольно закрепленных балок

$$v_{\text{ст}} = \frac{Ql^3}{3E2J_x},$$

откуда момент инерции сечения одной балки

$$J_x = \frac{Ql^3}{3E2v_{\text{ст}}} = \frac{1,5 \cdot 10^3 \cdot 1,2^3}{3 \cdot 12 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 0,0270 \cdot 10^{-2}} = 1,333 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4 = 13\,330 \text{ см}^4.$$

Поскольку момент инерции для прямоугольного сечения $J_x = \frac{bh^3}{12}$, с учетом $h/b = 1,5$ получим

$$J_x = \frac{b(1,5b)^3}{12} = 13330 \text{ см}^4,$$

откуда $b = 14,75$ см, $h = 22,1$ см.

Конструктивно принимаем $h = 22$ см, $b = 15$ см. Момент инерции принятого сечения $J_x = 13310 \text{ см}^4$.

Для принятых размеров сечения балки частота собственных колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{v_{\text{ст}}}} = \sqrt{\frac{g3E2J_x}{Ql^3}} = \sqrt{\frac{9,81 \cdot 3 \cdot 12 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 13310 \cdot 10^{-8}}{1,5 \cdot 10^3 \cdot 1,2^3}} = 190,4 \text{ с}^{-1},$$

что соответствует требованию расчета.

Вычислим динамические напряжения в балке.

Для сечений балок

$$W_x = \frac{bh^2}{6} \cdot 2 = \frac{15 \cdot 22^2}{6} \cdot 2 = 2420 \text{ см}^3.$$

Нормальное напряжение в балках от статического действия силы Q

$$\sigma_{\text{ст}} = \frac{M_{\text{max}}}{W_x} = \frac{Ql}{W_x} = \frac{1,5 \cdot 10^3 \cdot 1,2}{2420 \cdot 10^{-6}} = 0,743 \text{ МПа}.$$

Значение динамического коэффициента по формуле (10.9)

$$K_d = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{146,5}{190,4}\right)^2} = 2,45.$$

Напряжения от возмущающей силы

$$\sigma_d = \frac{M_{(p)}}{W_x} K_d = \frac{Pl}{W_x} K_d = \frac{0,4 \cdot 10^3 \cdot 1,2}{2420} \cdot 2,45 = 0,486 \text{ МПа}.$$

Напряжение в крайних точках опасного сечения балок (в защемлении) будет меняться (по формуле (10.10)) в следующих пределах (рис. 10.12, б):

$$\sigma_{\text{max}} = \sigma_{\text{ст}} + \sigma_d = 0,743 + 0,486 = 1,229 \text{ МПа} < R,$$

$$\sigma_{\text{min}} = \sigma_{\text{ст}} - \sigma_d = 0,743 - 0,486 = -0,257 \text{ МПа}.$$

Максимальное напряжение составляет небольшую часть расчетного сопротивления. Это вызвано необходимостью обеспечения работы конструкции вне зоны резонанса.

Вычислим динамический прогиб балок.

Статический прогиб от веса Q

$$v_{\text{ст}} = \frac{Fl^3}{3E2J_x} = \frac{1,5 \cdot 10^3 \cdot 1,2^3}{3 \cdot 12 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 13310 \cdot 10^{-8}} = 0,027 \text{ см}.$$

Амплитуда вынужденных колебаний от возмущающей силы P

$$A = v_d = v_{\text{ст}}^{(p)} K_d = \frac{Pl^3 K_d}{3EJ_x 2} = \frac{0,4 \cdot 10^3 \cdot 1,2^3 \cdot 2,45}{3 \cdot 12 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 13310 \cdot 10^{-8}} = 0,0177 \text{ см.}$$

Максимальный прогиб конца балки (по выражению (10.11))

$$v_{\text{max}} = v_{\text{ст}} + v_d = 0,027 + 0,0177 = 0,0447 \text{ см.}$$

Максимальный относительный прогиб

$$\frac{v_{\text{max}}}{l} = \frac{0,0447}{120} = \frac{1}{2685}.$$

Пример 10.8

Электродвигатель весом $Q = 4$ кН установлен в середине пролета двухопорной балки, выполненной из двух прокатных швеллеров № 20 (рис. 10.13).

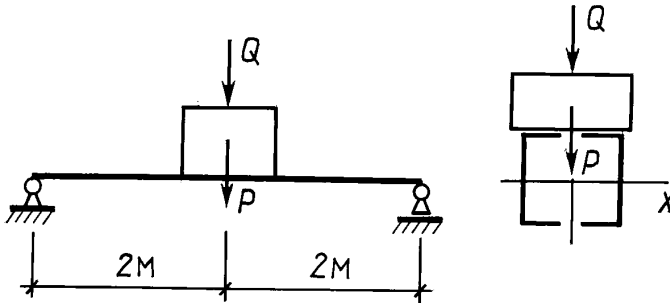


Рис. 10.13

Электродвигатель делает $n = 800$ об/мин. Вертикальная амплитуда возмущающей силы $P = 1$ кН.

Проверить прочность балки, если $R = 210$ МПа.

Собственным весом швеллеров пренебречь.

Решение

Из таблицы сортамента прокатных швеллеров для № 20 следует

$$J_x = 1520 \text{ см}^4, \quad W_x = 152 \text{ см}^3.$$

Прогиб балки в середине пролета от статического действия груза Q

$$v_{\text{ст}} = \frac{Ql^3}{48EJ_x} = \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 4^3}{48 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 1520 \cdot 2 \cdot 10^{-8}} = 0,087 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Частота собственных колебаний балки

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{v_{\text{ст}}}} = \sqrt{\frac{9,81}{0,087 \cdot 10^{-2}}} = 106,2 \text{ с}^{-1}.$$

Частота вынужденных колебаний балки

$$\omega_1 = \frac{n}{60} 2\pi = \frac{800}{60} \cdot 2 \cdot 3,14 = 83,7 \text{ с}^{-1}.$$

Заметим, что отношение

$$\frac{\omega_0}{\omega_1} = \frac{106,2}{83,7} = 1,27,$$

т. е. эксплуатация конструкции будет происходить вне опасной резонансной зоны.

Напряжение от веса двигателя (опасное сечение посередине пролета балки)

$$\sigma_{\text{ст}} = \frac{M_{\text{max}}}{W_x} = \frac{Ql}{4W_x} = \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 4}{4 \cdot 152 \cdot 10^{-6} \cdot 2} = 13,2 \text{ МПа}.$$

Динамический коэффициент

$$K_d = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{83,7}{106,2}\right)^2} = 2,64.$$

Напряжение от возмущающей силы

$$\sigma_d = \sigma_{ст}^{(p)} K_d = \frac{M_{\max}^{(p)}}{W_x} K_d = \frac{Pl}{4W_x} K_d = \frac{1 \cdot 10^3 \cdot 4}{4 \cdot 152 \cdot 10^{-6} \cdot 2} \cdot 2,64 = 8,68 \text{ МПа.}$$

Максимальное напряжение в балке

$$\sigma_{\max} = \sigma_{ст} + \sigma_d = 13,2 + 8,68 = 21,9 \text{ МПа} < R.$$

Условие прочности удовлетворяется.

Амплитуда вынужденных колебаний от возмущающей силы P

$$A = \upsilon_{ст}^{(p)} K_d = \frac{Pl^3}{48EJ_x} K_d = \frac{1 \cdot 10^3 \cdot 4^3 \cdot 2,64}{48 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 1520 \cdot 10^{-8}} = 0,057 \text{ см.}$$

Максимальный прогиб в середине пролета балки

$$\upsilon_{\max} = \upsilon_{ст} + A = 0,087 + 0,057 = 0,144 \text{ см.}$$

Максимальный относительный прогиб

$$\frac{\upsilon_{\max}}{l} = \frac{0,144}{400} = \frac{1}{2778},$$

что соответствует большой жесткости балки.

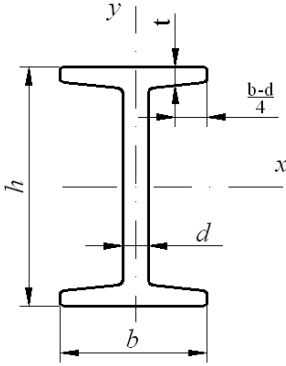
ЛИТЕРАТУРА

1. Заяц, В. Н. Сопротивление материалов / В. Н. Заяц, М. К. Балыкин, И. А. Голубев. – Минск : Вышэйшая школа, 1997.
2. Александров, А. В. Сопротивление материалов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин. – М., 1995.
3. Сопротивление материалов / А. Ф. Смирнов [и др.]. – М., 1975.
4. Никифоров, С. Н. Сопротивление материалов / С. Н. Никифоров. – М., 1966.
5. Дарков, А. В. Сопротивление материалов / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – М., 1975.
6. Сборник задач по сопротивлению материалов / А. В. Александров [и др.]. – М., 1977.
7. Сборник задач по сопротивлению материалов / В. К. Качурин [и др.]. – М., 1970.
8. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов / И. Н. Миролубов [и др.]. – М., 1962.
9. Сопротивление материалов : пособие по выполнению лабораторных работ для студентов строительных специальностей : в 2 ч. / О. Л. Вербицкая, С. И. Зиневич, Л. И. Шевчук. – Минск : БНТУ, 2013. – Ч. 1. – 108 с.
10. Сборник задач для расчетно-проектировочных работ по дисциплине «Сопротивление материалов» для студентов строительных специальностей / С. И. Зиневич [и др.]. – Минск : БНТУ, 2012. – 108 с.
11. Евсеева, Е. А. Задачи с решениями по сопротивлению материалов / Е. А. Евсеева, С. И. Зиневич, С. В. Соболевский. – Минск : БНТУ, 2013. – 108 с.
12. Сопротивление материалов (примеры и задачи) : учебно-методическое пособие для студентов строительных специальностей / М. К. Балыкин [и др.]. – Минск : БНТУ, 2012. – 365 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Сталь горячекатаная. Балки двутавровые (по ГОСТ 8239–89*)

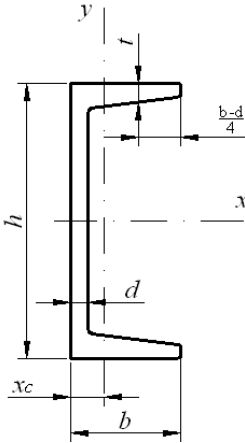


I – момент инерции
 W – момент сопротивления
 S – статический момент площади
 полусечения
 i – радиус инерции

Номер профиля	Размеры, мм				Площадь сечения A , см ²	Линейная плотность ρ , кг/м	Геометрические характеристики относительно осей						
	h	b	d	t			x				y		
							I_{x^2} , см ⁴	W_{x^3} , см ³	i_{x^2} , см	S_{x^3} , см ³	I_{y^2} , см ⁴	W_{y^3} , см ³	i_{y^2} , см
10	100	55	4,5	7,2	12,0	9,46	198	39,7	4,06	23	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	14,7	11,5	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	17,4	13,7	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	160	81	5	7,8	20,2	15,9	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,7
18	180	90	5,1	8,1	23,4	18,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
20	200	100	5,2	8,4	26,8	21	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
22	220	110	5,4	8,7	30,6	24	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
24	240	115	5,6	9,5	34,8	27,3	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
27	270	125	6	9,8	40,2	31,5	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
30	300	135	6,5	10,2	46,5	36,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
33	330	140	7	11,2	53,8	42,2	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	360	145	7,5	12,3	61,9	48,6	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	400	155	8,3	13	72,6	57	19062	953	16,2	545	667	86	3,03
45	450	160	9	14,2	84,7	66,5	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	500	170	10	15,2	100	78,5	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	550	180	11	16,5	118	92,6	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39
60	600	190	12	17,8	138	108	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Сталь горячекатаная. Швеллерная (по ГОСТ 8240–89)

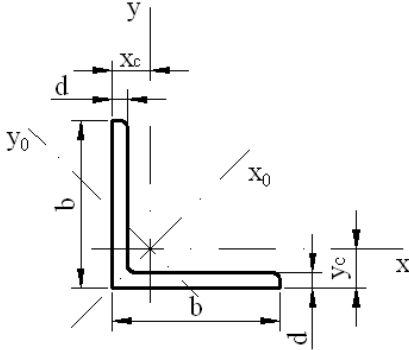


I – момент инерции
 W – момент сопротивления
 S – статический момент площади
 полусечения
 i – радиус инерции

Номер профиля	Размеры, мм				Площадь сечения A , см ²	Линейная плотность ρ , кг/м	Геометрические характеристики относительно осей							x_c , см
	h	b	d	t			x			y				
							I_{x^4} , см ⁴	W_{x^3} , см ³	i_x , см	S_{x^3} , см ³	I_{y^4} , см ⁴	W_{y^3} , см ³	i_y , см	
5	50	32	4,4	7	6,16	4,84	22,8	9,1	1,92	5,59	5,6	2,75	0,95	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	5,9	48,6	15	2,54	9	8,7	3,68	1,08	1,24
8	80	40	4,5	7,4	8,98	7,05	89,4	22,4	3,16	23,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	100	46	4,5	7,6	10,9	8,59	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	120	52	4,8	7,8	13,3	10,4	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	140	58	4,9	8,1	15,6	12,3	491	70,2	5,6	40,8	45,4	11	1,7	1,67
16	160	64	5	8,4	18,1	14,2	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,8
16а	160	68	5	9	19,5	15,3	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2
18	180	70	5,1	8,7	20,7	16,3	1090	121	7,24	69,8	86	17	2,04	1,94
18а	180	74	5,1	9,3	22,2	17,4	1190	132	7,32	76,1	105	20	2,18	2,13
20	200	76	5,2	9	23,4	18,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,2	2,07
22	220	82	5,4	9,5	26,7	21	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
24	240	90	5,6	10	30,6	24	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,6	2,42
27	270	95	6	10,5	35,2	27,7	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	300	100	6,5	11	40,5	31,8	5810	387	12	224	327	43,6	2,84	2,52
33	330	105	7	11,7	46,5	36,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	360	110	7,5	12,6	53,4	41,9	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,1	2,68
40	400	115	8	13,5	61,5	48,3	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Рекомендуемый сортамент равнополочных уголков (по ГОСТ 8509–86)



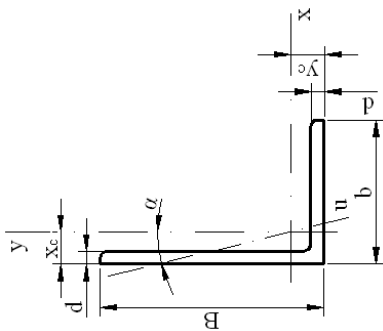
I – момент инерции
 W – момент сопротивления
 S – статический момент площади
 полусечения
 i – радиус инерции

Номер профиля	Размеры, мм		Площадь сечения A , см ²	Линейная плотность ρ , кг/м	Геометрические характеристики относительно осей							x_c , y_c , см
	b	d			x		x_0		y_0		J_{y_0} , см ⁴	
					I_{x_0} , см ⁴	i_{x_0} , см	I_{x_0} , см ⁴	i_{x_0} , см	I_{y_0} , см ⁴	i_{y_0} , см		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	20	3	1,13	0,89	0,4	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,23	0,6
		4	1,46	1,15	0,5	0,58	0,78	0,73	0,22	0,38	0,28	0,64
3	30	3	1,74	1,36	1,45	0,91	2,3	1,15	0,6	0,59	0,85	0,85
		4	2,27	1,78	1,84	0,9	2,92	1,13	0,77	0,58	1,08	0,89
4	40	3	2,35	1,85	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	2,08	1,09
		4	3,08	2,42	4,58	1,22	7,26	1,53	1,9	0,78	2,68	1,13
		5	3,79	2,98	5,53	1,21	8,75	1,52	2,3	0,78	3,22	1,17
5	50	3	2,96	2,32	7,11	1,55	11,27	1,95	2,95	1	4,16	1,33
		4	3,89	3,05	9,21	1,54	14,63	1,94	3,8	0,99	5,42	1,38
		5	4,8	3,77	11,2	1,53	17,77	1,92	4,63	0,98	6,57	1,42
		6	5,69	4,47	13,07	1,52	20,72	1,91	5,43	0,98	7,65	1,46
6,3	63	4	4,96	3,9	18,86	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	11	1,69
		5	6,13	4,81	23,1	1,94	36,8	2,44	9,52	1,25	13,7	1,74
		6	7,28	5,72	27,06	1,93	42,91	2,43	11,18	1,24	15,9	1,78

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
7	70	5	6,86	5,38	31,94	2,16	50,67	2,72	13,22	1,39	18,7	1,9
		6	8,15	6,39	37,58	2,15	59,64	2,71	15,52	1,38	22,1	1,94
		7	9,42	7,39	42,98	2,14	68,19	2,69	17,77	1,37	25,2	1,99
		8	10,67	8,37	48,16	2,12	76,35	2,68	19,97	1,37	28,2	2,02
7,5	75	5	7,39	5,8	39,53	2,31	62,65	2,91	16,41	1,49	23,1	2,02
		6	8,78	6,89	46,57	2,3	73,87	2,9	19,28	1,48	27,3	2,06
		7	10,15	7,97	53,34	2,29	84,61	2,89	22,07	1,47	31,2	2,1
		8	11,5	9,02	59,84	2,28	94,89	2,87	24,8	1,47	35	2,15
		9	12,83	10,07	66,1	2,27	104,72	2,86	27,48	1,46	38,6	2,18
8	80	6	9,38	7,36	56,97	2,47	90,4	3,11	23,54	1,58	33,4	2,19
		7	10,85	8,51	65,31	2,45	103,6	3,09	26,97	1,58	38,3	2,23
		8	12,3	9,65	73,36	2,44	116,3	3,08	30,32	1,57	43	2,27
9	90	6	10,61	8,33	82,1	2,78	130	3,5	33,97	1,79	48,1	2,43
		7	12,28	9,64	94,3	2,77	149,6	3,49	38,94	1,78	55,4	2,47
		8	13,93	10,93	106,1	2,76	168,4	3,48	43,8	1,77	62,3	2,51
		9	15,6	12,2	118	2,75	186	3,46	48,6	1,77	68	2,55
10	100	7	13,75	10,79	130,5	3,08	207	3,88	54,16	1,98	76,4	2,71
		8	15,6	12,25	147,1	3,07	233	3,87	60,92	1,98	86,3	2,75
		10	19,24	15,1	178,9	3,05	283	3,84	74,08	1,96	110	2,83
		12	22,8	17,9	208,9	3,03	330	3,81	86,84	1,95	122	2,91
		14	26,28	20,63	237,1	3,00	374	3,78	99,32	1,94	138	2,99
12,5	125	8	19,69	15,46	294	3,87	466	4,87	121,9	2,49	172	3,36
		9	22	17,3	327	3,86	520	4,86	135,8	2,48	192	3,4
		10	24,33	19,1	359	3,85	571	4,84	148,5	2,47	211	3,45
		12	28,89	22,68	422	3,82	670	4,82	174,4	2,46	248	3,53
		14	33,37	26,2	481	3,8	763	4,78	199,6	2,45	282	3,61
		16	37,77	29,65	538	3,78	852	4,75	224,2	2,44	315	3,68
14	140	9	24,72	19,41	465	4,34	739	5,47	192	2,79	274	3,78
		10	27,33	21,45	512	4,33	813	5,46	210	2,78	301	3,82
		12	32,49	25,5	602	4,31	956	5,43	248	2,76	354	3,9

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
16	160	10	31,43	24,67	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	455	4,3
		11	34,42	27,02	844	4,95	1340	6,24	347	3,18	496	4,35
		12	37,39	29,35	912	4,94	1450	6,23	375	3,17	537	4,39
		14	43,57	33,97	1046	4,92	1662	6,2	430	3,16	615	4,47
		16	49,07	38,52	1175	4,89	1865	6,17	484	3,14	690	4,55
		18	54,79	43,01	1290	4,87	2061	6,13	537	3,13	771	4,63
		20	60,4	47,44	1418	4,85	2248	6,1	589	3,12	830	4,7
20	200	12	47,1	36,97	1822	6,22	2896	7,84	749	3,99	1073	5,37
		13	50,85	39,92	1960	6,21	3116	7,83	805	3,98	1156	5,42
		14	54,6	42,8	2097	6,2	3333	7,81	861	3,97	1236	5,46
		16	61,98	48,65	2362	6,17	3755	7,78	969	3,96	1393	5,54
		20	76,54	60,08	2871	6,12	4560	7,72	1181	3,93	1689	5,7
		25	94,29	74,02	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	2028	5,89
		30	111,54	87,56	4019	6	6351	7,55	1698	3,89	2332	6,07
25	250	16	78,4	61,55	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	2775	6,75
		18	87,72	68,86	5247	7,73	8336	9,75	2157	4,96	3089	6,83
		20	96,96	76,11	5764	7,71	9159	9,72	2370	4,94	3395	6,91
		22	106,12	83,31	6270	7,09	9961	9,69	2579	4,93	3691	7
		25	119,71	93,97	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	4119	7,11
		28	133,12	104,5	7716	7,61	12243	9,59	3189	4,9	4527	7,23
		30	141,96	111,44	8176	7,59	12964	9,56	3388	4,89	4788	7,31

Рекомендуемый сортмент неравнополочных уголков (по ГОСТ 8510–86)



B – ширина большой полки

b – ширина малой полки

d – толщина полки

I – момент инерции

i – радиус инерции

x_c, y_c – расстояние от центра тяжести до наружных граней полок

α – угол наклона главной центральной оси

Номер профиля	Размеры, мм		Площадь сечения $A, \text{см}^2$	Линейная плотность $\rho, \text{кг/м}$	Геометрические характеристики относительно осей						$x_c, \text{см}$	$y_c, \text{см}$	$I_{xy}, \text{см}^4$	$\text{tg}\alpha$	
	B	b			d	x		y_0		u					
						$I_{x^2}, \text{см}^4$	$i_{x^2}, \text{см}$	$I_{y^2}, \text{см}^4$	$i_{y^2}, \text{см}$	$I_{u^2}, \text{см}^4$					$i_{u^2}, \text{см}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2,5/1,6	25	16	3	1,16	0,91	0,70	0,78	0,22	0,44	0,13	0,34	0,42	0,86	0,22	0,392

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
3,2/2	32	20	3	1,49	1,17	1,52	1,01	0,46	0,55	0,28	0,43	0,49	1,08	0,47	0,382
			4	1,94	1,52	1,93	1	0,57	0,54	0,35	0,43	0,53	0,53	1,12	0,59
4/2,5	40	25	3	1,89	1,48	3,06	1,27	0,93	0,70	0,56	0,54	0,59	1,32	0,96	0,385
			4	2,47	1,94	3,93	1,26	1,18	0,69	0,71	0,54	0,54	0,63	1,37	1,22
5/3,2	50	32	5	3,03	2,37	4,73	1,25	1,41	0,68	0,86	0,53	0,66	1,41	1,44	0,374
			3	2,42	1,9	6,18	1,6	1,99	0,91	1,18	0,7	0,72	0,72	1,60	2,01
6,3/4,0	63	40	4	3,17	2,4	7,98	1,59	2,56	0,9	1,52	0,69	0,76	1,65	2,59	0,401
			4	4,04	3,17	16,33	2,01	5,16	1,13	3,07	0,87	0,87	0,91	2,03	5,25
7,5/5	75	60	5	4,98	3,91	19,91	2	6,26	1,12	3,73	0,86	0,95	2,08	6,41	0,396
			6	5,9	4,63	23,31	1,99	7,29	1,11	4,36	0,86	0,86	0,99	2,12	7,44
9/5,6	90	56	8	7,68	6,03	29,6	1,96	9,15	1,09	5,58	0,85	1,07	2,2	9,27	0,386
			5	6,11	4,79	34,81	2,39	12,47	1,43	7,24	1,09	1,17	1,17	2,39	12
10/6,3	100	63	6	7,25	5,69	40,92	2,38	14,6	1,42	8,48	1,08	1,21	2,44	14,1	0,435
			7	8,37	6,57	46,77	2,36	16,61	1,41	9,69	1,08	1,08	1,25	2,48	16,18
9/5,6	90	56	8	9,47	7,43	52,38	2,35	18,52	1,4	10,87	1,07	1,29	2,52	17,8	0,43
			5,5	7,86	6,17	65,28	2,88	19,67	1,58	11,77	1,22	1,26	1,26	2,92	20,54
10/6,3	100	63	6	8,54	6,7	70,58	2,88	21,22	1,58	12,7	1,22	1,28	2,95	22,23	0,384
			8	11,18	8,77	90,87	2,85	27,08	1,56	16,29	1,21	1,36	1,36	3,04	28,33
10/6,3	100	63	6	9,58	7,53	98,29	3,2	30,58	1,79	18,2	1,38	1,42	3,23	31,5	0,393
			7	11,09	8,7	112,86	3,19	34,99	1,78	20,83	1,37	1,46	1,46	3,28	36,1
10/6,3	100	63	8	12,57	9,87	126,96	3,18	39,21	1,77	23,38	1,36	1,5	3,32	40,5	0,391
			10	15,47	12,14	153,95	3,15	47,18	1,75	28,34	1,35	1,58	1,58	3,4	48,6

1																		
	12,5/8	125	80															
	16/10	160	100															
	20/12,5	200	125															

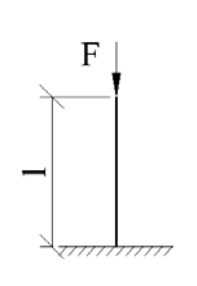
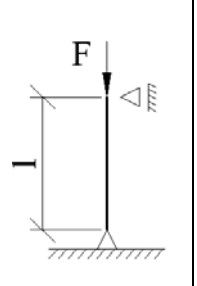
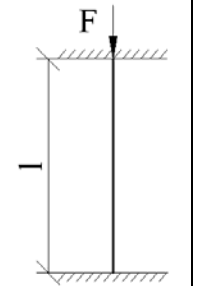
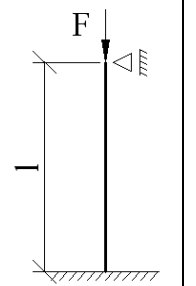
ПРИЛОЖЕНИЕ 5

Коэффициент φ продольного изгиба центрально-сжатых элементов

Гибкость, λ	Значения φ для элементов из							
	стали с расчетным сопротивлением R , МПа						чугуна	древесины
	200	240	280	320	360	400		
0	1	1	1	1	1	1	1	1
10	0,988	0,987	0,985	0,984	0,983	0,982	0,97	0,992
20	0,967	0,962	0,959	0,955	0,952	0,949	0,91	0,968
30	0,939	0,931	0,924	0,917	0,911	0,905	0,81	0,928
40	0,906	0,894	0,883	0,873	0,863	0,854	0,69	0,872
50	0,869	0,852	0,836	0,822	0,809	0,796	0,57	0,8
60	0,827	0,805	0,785	0,766	0,749	0,721	0,44	0,712
70	0,782	0,754	0,724	0,687	0,654	0,623	0,34	0,608
80	0,734	0,686	0,641	0,602	0,566	0,532	0,26	0,469
90	0,665	0,612	0,565	0,522	0,483	0,447	0,2	0,37
100	0,599	0,542	0,493	0,448	0,408	0,369	0,16	0,3
110	0,537	0,478	0,427	0,381	0,338	0,306	–	0,248
120	0,479	0,419	0,366	0,321	0,287	0,26	–	0,208
130	0,425	0,364	0,313	0,276	0,247	0,223	–	0,178
140	0,376	0,315	0,272	0,24	0,215	0,195	–	0,153
150	0,328	0,276	0,239	0,211	0,189	0,171	–	0,133
160	0,29	0,244	0,212	0,187	0,167	0,152	–	0,117
170	0,259	0,218	0,189	0,167	0,15	0,136	–	0,104
180	0,233	0,196	0,17	0,15	0,135	0,123	–	0,093
190	0,21	0,177	0,154	0,136	0,122	0,111	–	0,083
200	0,191	0,161	0,14	0,124	0,111	0,101	–	0,075
210	0,174	0,147	0,128	0,113	0,102	0,093	–	0,068
220	0,16	0,135	0,118	0,104	0,094	0,086	–	0,062

ПРИЛОЖЕНИЕ 6

Влияние условий закрепления концов стержня
на величину критической силы

Схема стойки				
μ	2	1	0,5	0,7

Значение коэффициентов a и b в формуле Ясинского

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda$$

Материал	λ _{пред}	a, МПа	b, МПа
Ст.2, Ст.3	100	310	1,14
Ст.5	100	464	3,26
Сталь 40	90	321	1,16
Кремнистая сталь	100	589	3,82
Дерево	110	29,3	0,194
Чугун	80	776	12
Для чугуна $\sigma_{кр} = a - b\lambda + c\lambda^2$, где $c = 0,53$			

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие.....	3
Введение. Основные понятия.....	4
1. Растяжение и сжатие.....	12
1.1. Внутренние силы.....	12
1.2. Напряжения. Условие прочности.....	14
1.3. Деформации. Условие жесткости.....	15
1.4. Статически определяемые системы.....	17
1.5. Статически неопределимые системы.....	33
2. Сдвиг.....	43
2.1. Расчет заклепочных соединений.....	44
2.2. Расчет сварных соединений.....	51
2.3. Расчет врубок.....	55
3. Геометрические характеристики плоских сечений.....	60
4. Кручение.....	75
4.1. Внутренние силы при кручении.....	75
4.2. Кручение стержней круглого поперечного сечения.....	76
4.3. Кручение стержней прямоугольного поперечного сечения.....	81
5. Прямой изгиб.....	94
5.1. Внутренние силы. Эпюры.....	95
5.2. Напряжения при изгибе. Условия прочности.....	118
5.3. Деформации при изгибе. Проверка на жесткость.....	144
6. Статически неопределимые балки.....	176
7. Анализ напряженного состояния в точке.....	201
7.1. Линейное напряженное состояние.....	202
7.2. Плоское напряженное состояние.....	206
8. Сложное сопротивление.....	214
8.1. Косой изгиб.....	216

8.2. Внецентренное растяжение-сжатие	232
8.3. Изгиб с кручением	250
8.4. Общий случай сложного сопротивления	258
9. Продольный и продольно-поперечный изгибы	267
9.1. Продольный изгиб (устойчивость сжатых стержней).....	267
9.2. Продольно-поперечный изгиб.....	287
10. Расчеты при действии динамических нагрузок	305
10.1. Расчет на действие сил инерции	305
10.2. Расчет на ударную нагрузку	315
10.3. Расчет на колебательную (вибрационную) нагрузку	325
Литература	334
Приложения	335

Учебное издание

ЗИНЕВИЧ Сергей Иванович
ПЕНЬКЕВИЧ Владимир Александрович
ЮГОВА Марина Викторовна и др.

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Учебно-методическое пособие
для студентов строительных специальностей

В 2 частях

Часть 1

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ. ПРИМЕРЫ

Редактор *Т. Н. Микулик*
Компьютерная верстка *Н. А. Школьниковой*

Подписано в печать 09.03.2016. Формат 60×84 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Ризография.

Усл. печ. л. 20,17. Уч.-изд. л. 15,77 . Тираж 300. Заказ 1046.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.