Министерство образования Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Высшая математика № 2»

Матвеева Л.Д.   Бань Л.В.   Рудый А.Н.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. Часть 3».

Электронный учебный материал

М и н с к   2 0 1 6

УДК 519.85 (075.8)

ББК 18.87я7

М 54

Авторы: Л.Д. Матвеева, Бань Л.В., А.Н. Рудый

Рецензент: Г.М.Заяц

Настоящее издание является продолжением пособий [9],[10] «Математический анализ.1 семестр», «Математический анализ. Часть 2» . В пособии излагается теоретический материал и разбираются примеры по темам «Определенный интеграл», «Несобственные интегралы», «Эйлеровы интегралы» ,«Приложения определенного интеграла».
По всем темам приводятся примеры решения типовых задач.
Издание содержит список рекомендуемой литературы. Пособие предназначено для студентов 1 курса энергетического факультета БНТУ. Оно может быть также полезно преподавателям, ведущим практические занятия по данному курсу.

Белорусский национальный технический университет
пр-т Независимости, 65, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.(017) 292-77-52 факс (017) 292-91-37
Регистрационный № БНТУ/ЭФ41-1.2016

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.

В курсе Высшей математики важно развивать у студентов умение самостоятельно решать задачи и работать с литературой. Это помогает будущему инженеру принимать правильные решения в стоящих перед ним задачах.

В пособии изложены лекции, читаемые авторами на 1-ом курсе Энергетического факультета БНТУ. Для закрепления теоретического материала в каждом параграфе приводятся практические примеры. В конце каждого параграфа приводятся упражнения, что важно при самостоятельной проработке курса. Материал разделен на разделы:

1) Определенные интегралы;
2) Несобственные интегралы;
3) Эйлеровы интегралы;
4) Приложения определенных интегралов.

Номерация параграфов является продолжением номерации пособий [9],[10].
Авторы благодарят Е.Л.Бохан за помощь при работе над рукописью.

§ 24. Определенный интеграл.

Определение 1. Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$. Разобьем $[a, b]$ на n частичных отрезков точками $x_0 = a,\ x_1,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_n = b;\ x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n$ и обозначим это разбиение τ_n. Пусть $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ - длина k – ого частичного отрезка $[x_{k-1}, x_k],\ k = 1, 2, \ldots, n$.

Число $\Delta = \max\limits_k \Delta x_k$ - диаметр разбиения. Выбираем на каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ точку c_k и составим сумму

$$\sigma(\tau_n,\ f) = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\Delta x_n. \qquad (1)$$

$\sigma(\tau_n,\ f)$ называется n – й интегральной суммой Римана.

Функция $y = f(x)$ называется интегрируемой по Риману, если $\exists \lim\limits_{\Delta\to 0}\sigma(\tau_n,\ f) = I$, то есть $\exists\, I \in R, \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall\tau_n$, такого, что $\Delta < \delta$ и $\forall$ набора точек $(c_1, c_2, \ldots, c_n) \Rightarrow \left|\sigma(\tau_n,\ f) - I\right| < \varepsilon$. (2)

При этом $I = \lim\limits_{\Delta\to 0}\sigma(\tau_n,\ f)$ называется определенным интегралом от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$. Таким образом

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta\to 0}\sigma(\tau_n,\ f)\ . \qquad (3)$$

Будем считать, что $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$ и $\int\limits_b^a f(x)dx = -\int\limits_a^b f(x)dx$.

Пример 1. $\int\limits_a^b 1dx = \lim\limits_{\Delta\to 0}\sum\limits_{k=1}^n f(c_k)\Delta x_k = \lim\limits_{\Delta\to 0}\sum\limits_{k=1}^n \Delta x_k = \lim\limits_{\Delta\to 0}(b-a) = b - a$.

Пример 2. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, $f(x) \geq 0,\ \forall x \in [a, b]$. Рассмотрим фигуру Φ на плоскости:

$\Phi = \left\{(x, y)\middle| a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\right\}$ - криволинейную трапецию:

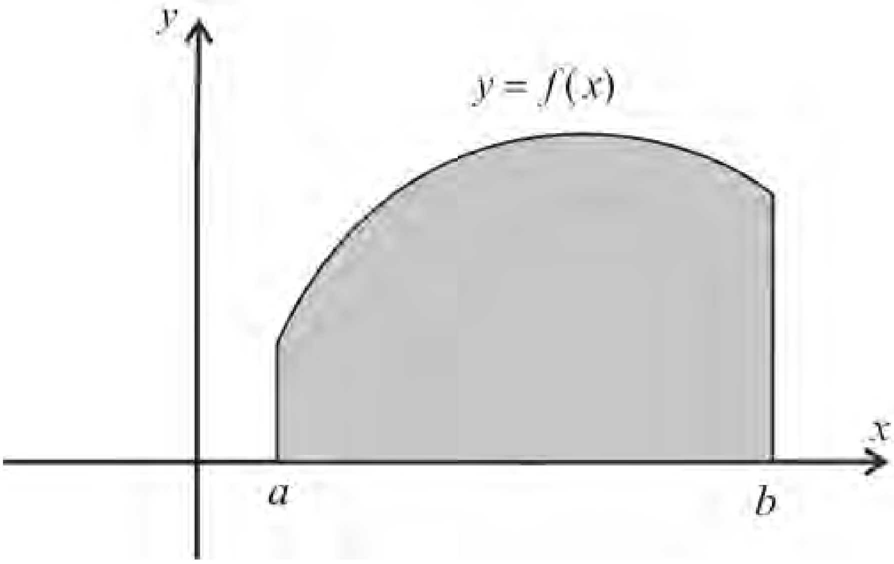


Рис.1 $\Phi = \{(x, y) | a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\}$.

Пусть S_Φ - ее площадь. Из (1) следует, что $\sigma(\tau_n, f)$ равна площади ступенчатой фигуры, составленной из прямоугольников с основаниями $[x_{k-1}, x_k]$ и высотами $f(c_k)$:

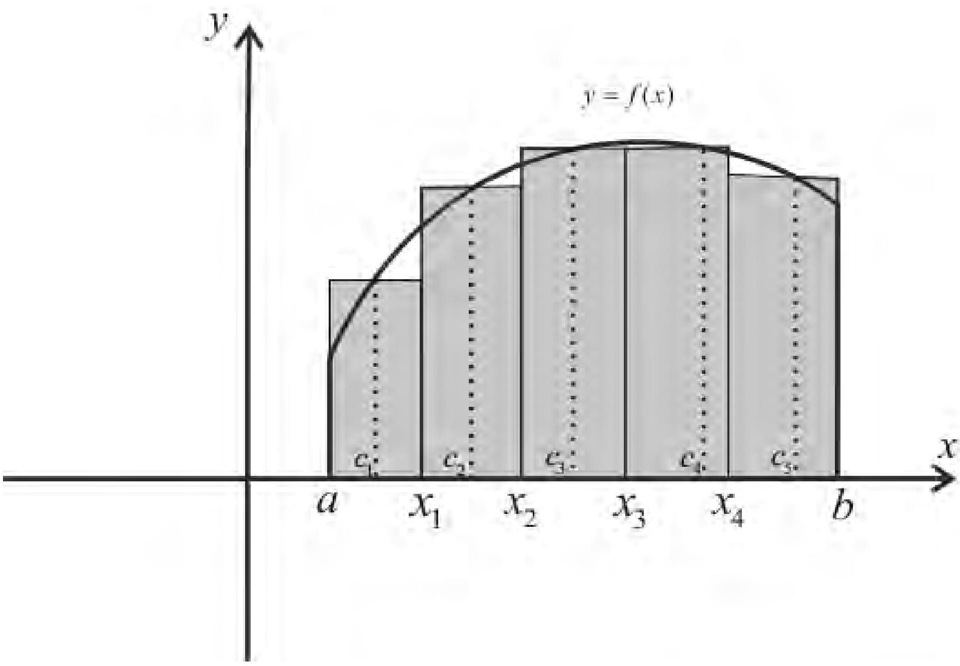


Рис.2. Интегральная сумма $\sigma(\tau_5, f)$.

Тогда $S_\Phi = \lim\limits_{\Delta \to 0} \sigma(\tau_n, f) = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Теорема 1. (необходимое условие интегрируемости функции).

Пусть $y = f(x)$ - интегрируема на отрезке $[a, b]$, тогда $f(x)$ - ограничена на $[a, b]$.

Доказательство. Предположим, что $f(x)$ - неограничена на $[a, b]$. Пусть $\int_a^b f(x)dx = I$ и пусть $\varepsilon > 0$. Из (2) следует, что $\exists\, \delta = \delta(\varepsilon)$, такое что

$$I - \varepsilon < \sigma(\tau_n,\ f) < I + \varepsilon \ \text{-} \tag{4}$$

для любой $\sigma(\tau_n,\ f)$ у которой $\Delta < \delta$, то есть эти интегральные суммы $\sigma(\tau_n,\ f)$ - ограничены. Причем неравенство (4) выполнено при любом выборе точек $c_1, c_2, \ldots, c_n$ из соответствующих отрезков. Пусть $C_0 = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ - один из таких наборов точек. Так как $f(x)$ - неограничена на $[a, b]$, то она неограниченна по крайней мере на одном из частичных отрезков. Пусть, например, это будет отрезок $[x_0, x_1]$. Рассмотрим наборы $C_0 = (c_1^{(m)}, c_2, \ldots, c_n),\ m = 1, 2, \ldots,$ где $\lim\limits_{m\to\infty} f(c_1^m) = \infty$, тогда, так как $c_2, \ldots, c_n$ - фиксированы, то, начиная с какого-то номера $m = M$,суммы (1) будут выходить за пределы промежутка (4). Противоречие.

Замечание. Условие теоремы 1 необходимо, но не достаточно для интегрируемости функции.

Пример 3. Рассмотрим функцию Дирихле

$D(x) = \begin{cases} 1,\ x \in Q \\ 0,\ x \in R - Q \end{cases}$ (см. пример 3 §5) на отрезке $[a, b]$.

Тогда $\forall\, \tau_n$ сумма $\sigma(\tau_n, D) = 0$, если числа $c_1, c_2, \ldots, c_n$ - иррациональные, и $\sigma(\tau_n, D) = b - a$, если $c_1, c_2, \ldots, c_n$ - рациональные. Поэтому $\lim\limits_{\Delta\to 0} \sigma(\tau_n, D)$ - не существует и функция $D(x)$ - неинтегрируема.

Определение 2. Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и ограничена на этом отрезке. Пусть τ_n - разбиение отрезка $[a, b]$.

Пусть $m_k = \inf\limits_{x\in[x_{k-1}, x_k]} f(x), M_k = \sup\limits_{x\in[x_{k-1}, x_k]} f(x)$, тогда

$$\underline{s}(\tau_n) = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x_k \ \text{ и } \ \overline{s}(\tau_n) = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta x_k \tag{5}$$

называются нижней и верхней суммой Дарбу для функции $y = f(x)$.

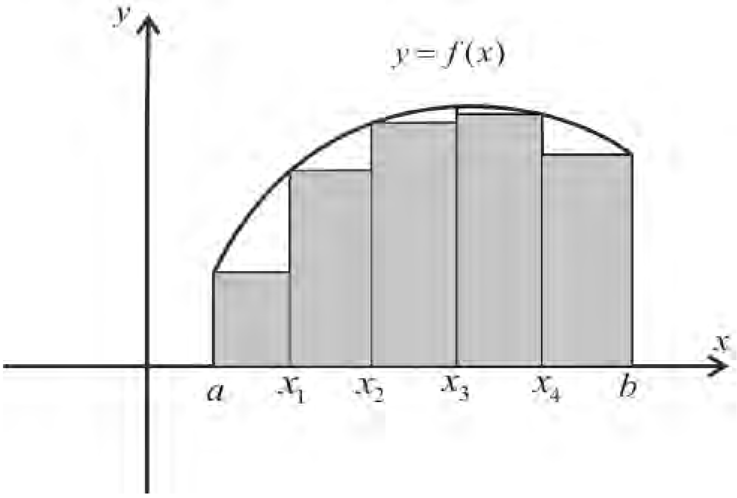


Рис.3.Нижняя сумма Дарбу $\underline{s}(\tau_5)$.

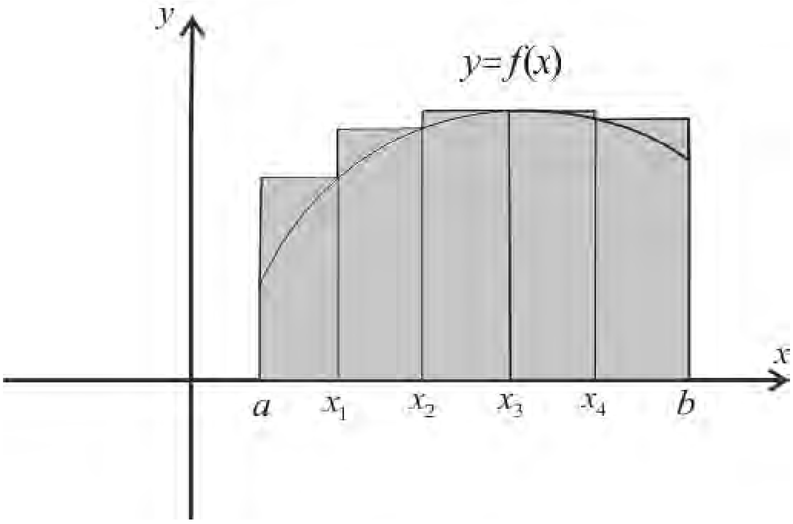


Рис.4.Верхняя сумма Дарбу $\overline{s}(\tau_5)$.

Суммы Дарбу являются функциями, определенными на множестве всех разбиений τ отрезка $[a,b]$.

Свойства сумм Дарбу.

1. $\underline{s}(\tau_n) \le \sigma(\tau_n, f) \le \overline{s}(\tau_n)$.

2. Если измельчить разбиение τ_n до τ_{n_1} добавляя новые точки, то $\underline{s}(\tau_n) \le \underline{s}(\tau_{n_1})$ и $\overline{s}(\tau_{n_1}) \le \overline{s}(\tau_n)$.

3. Если $\tau^{(1)}$ и $\tau^{(2)}$ - два произвольных разбиения отрезка $[a,b]$, то $\underline{s}(\tau^{(1)}) \le \overline{s}(\tau^{(2)})$.

4. Для того, чтобы ограниченная на отрезке $[a,b]$ функция $y = f(x)$ была интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \tau_n : \overline{s}(\tau_n) - \underline{s}(\tau_n) < \varepsilon, \qquad (6)$$

и при выполнении (6):

$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\Delta\to 0}\sigma(\tau_n, f)$, где $\sigma(\tau_n, f)$ - любая последовательность интегральных сумм, у которой $\Delta \to 0$.

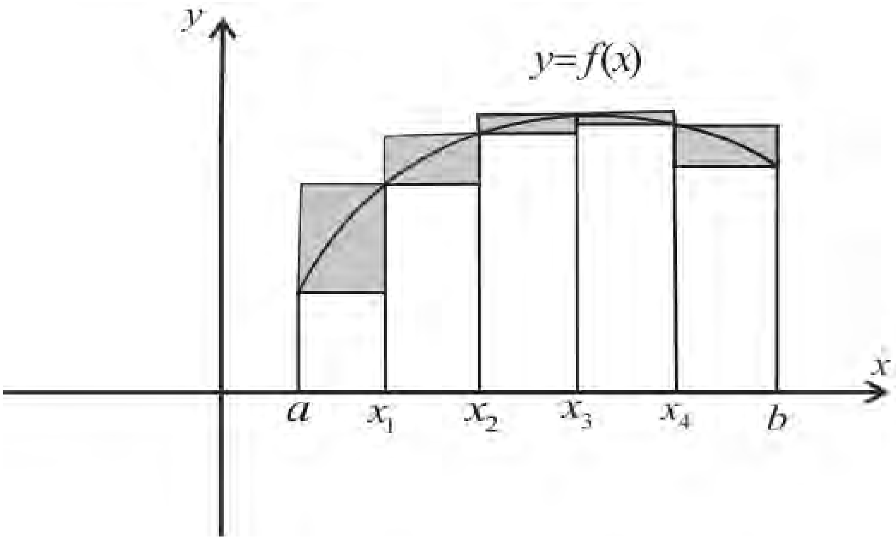


Рис.5. $\overline{s}(\tau_5) - \underline{s}(\tau_5)$.

Пример 4. Доказать, что функция $y = x^3$ интегрируема на отрезке $[2, 3]$ и найти $\int\limits_2^3 x^3 dx$.

Решение. Разобьем отрезок $[2, 3]$ на n равных отрезков точками:

$2,\ 2+\frac{1}{n},\ 2+\frac{2}{n},\ \dots,\ 2+\frac{n}{n}$.

Тогда $\overline{s}(\tau_n) = \frac{1}{n}\left(\left(2+\frac{1}{n}\right)^3 + \left(2+\frac{2}{n}\right)^3 + \dots + \left(2+\frac{n}{n}\right)^3\right) =$

$$= \frac{1}{n^4}\left((2n+1)^3 + (2n+2)^3 + \dots + (2n+n)^3\right).$$

Воспользуемся формулой: $s(n) = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1+2+\dots+n)^2$. Тогда

$$\overline{s}(\tau_n) = (s(3n) - s(2n))\frac{1}{n^4} = \frac{1}{n^4}((1+2+\dots\ +3n)^2 - (1+2+\dots+2n)^2) =$$

$$= \frac{1}{n^4}\left(\frac{(3n\cdot(3n+1))^2}{4} - \frac{((2n+1)\cdot 2n)^2}{4}\right) = \frac{1}{4n^2}(65n^2 + 38n + 5).$$

$$\underline{s}(\tau_n) = \frac{1}{n}\left(2^3 + \left(2+\frac{1}{n}\right)^3 + \dots + \left(2+\frac{n-1}{n}\right)^3\right) = \frac{1}{4n^2}(65n^2 - 38n + 5)$$

$\bar{s}-\underline{s}=\dfrac{19}{n}$. Пусть $\varepsilon>0$, тогда если $n>\left[\dfrac{19}{\varepsilon}\right]+1$, то соотношение (6) выполняется, поэтому $y=f(x)$ интегрируема.

$$\int_2^3 x^3dx=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4n^2}(65n^2-38n+5)\right)=\frac{65}{4}.$$

Теорема 2. *а*) Пусть функция $y=f(x)$ - непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда $y=f(x)$ - интегрируема на этом отрезке.

б) Пусть функция $y=f(x)$ - кусочно-непрерывна на отрезке $[a,b]$ (имеет на отрезке конечное число точек разрыва 1- ого рода). Тогда $y=f(x)$ - интегрируема на этом отрезке. При этом $\int_a^b f(x)dx$ не зависит от значений функции в точках разрыва.

в) Пусть $y=f(x)$ - монотонна на отрезке $[a,b]$, тогда $y=f(x)$ - интегрируема на этом отрезке.

Пример 5. Найти интеграл $\int_1^3 \frac{1}{x}dx$, рассматривая его как предел интегральных сумм.

Решение. Разобьем отрезок $[1,3]$ на n отрезков так, чтобы точки образовывали геометрическую прогрессию:

$x_0=1, x_1=q, x_2=q^2, \dots, x_n=q^n=3 \Rightarrow q=3^{\frac{1}{n}}$,

$\Delta x_1=q-1, \Delta x_2=q^2-q, \Delta x_3=q^3-q^2, \dots, \Delta x_n=q^n-q^{n-1}$,

$f(x)=\dfrac{1}{x}$ - монотонно убывает, $f(x_0)=1, f(x_1)=1/q, f(x_2)=1/q^2, \dots, f(x_n)=1/q^n$.

Тогда $\bar{s}(\tau_n)=1\cdot(q-1)+\dfrac{1}{q}(q^2-q)+\dfrac{1}{q^2}(q^3-q^2)+\dots+\dfrac{1}{q^{n-1}}(q^n-q^{n-1})=n(q-1)$, и

$$\int_1^3 \frac{dx}{x}=\lim_{n\to\infty} n(q-1)=\lim_{n\to\infty} n\cdot(3^{\frac{1}{n}}-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\left|\textit{см.формулу}(5)\ \S 4\right|=\ln 3.$$

Упражнение 1. $y=x^3,\ x\in[0;1]$. Найти $\underline{s}$ и $\bar{s}$, разбивая отрезок на n равных отрезков. Найти $\int_0^1 x^3dx$. Указание. Использовать формулу: $1^3+2^3+\dots+n^3=(1+2+\dots+n)^2$.

Упражнение2. Найти интегралы $\int_0^1(1+x)dx;\ \int_2^3(1+x)dx$ рассматривая их как пределы интегральных сумм.

Свойства определенного интеграла.

1. $\int_a^b dx = b - a$ (см. пример 1).

2. Пусть функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ - интегрируемы на $[a, b]$, $\alpha, \beta \in R$, тогда $y = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)$ - также интегрируема на $[a, b]$ и

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx \text{(линейность интеграла).} \qquad (7)$$

Доказательство. По формуле (1):

$$\sigma(\tau_n, \alpha \cdot f + \beta \cdot g) = \sum_{k=1}^{n} (\alpha f(c_k) + \beta g(c_k))\Delta x_k = \alpha \sum_{k=1}^{n} f(c_k) + \beta \sum_{k=1}^{n} g(c_k) =$$

$= \alpha \cdot \sigma(\tau_n, f) + \beta \cdot \sigma(\tau_n, g)$, $\forall\ \tau_n$. По формуле (3):

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \lim_{\Delta \to 0} \sigma(\tau_n, \alpha f + \beta g) = \lim_{\Delta \to 0} (\alpha \cdot \sigma(\tau_n, f) + \beta \cdot \sigma(\tau_n, g)) =$$

$= \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$, что и требовалось доказать.

3. Аддитивность интеграла. Если функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и $a < c < b$, то $f(x)$ интегрируема на $[a, c]$ и $[c, b]$ и

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \qquad (8)$$

Верно и наоборот.

Доказательство. Так как $y = f(x)$ - интегрируема на $[a, b]$, то она ограничена на $[a, b]$(теорема 1) и, следовательно, ограничена на отрезке $[a, c]$ и $[c, b]$.

Пусть $\varepsilon > 0$ и τ_n разбиение $[a, b]$ такое , что $\overline{s}(\tau_n) - \underline{s}(\tau_n) < \varepsilon$ (см. формулу (6)). В разбиение τ_n можно добавить точку c, если ее там нет, при этом полученное разбиение также будет удовлетворять неравенству (6). Тогда

$\overline{s}(\tau_n) - \underline{s}(\tau_n)\Big|_{на\ [a,\, b]} = \overline{s}(\tau_n) - \underline{s}(\tau_n)\Big|_{на\ [a,\, c]} + \overline{s}(\tau_n) - \underline{s}(\tau_n)\Big|_{на\ [c,\, b]} < \varepsilon$, поэтому и ограничение разбиения τ_n на $[a, c]$ и $[c, b]$ будут удовлетворять неравенству (6) и, следовательно (см. соотношение (6)) , $y = f(x)$ будет интегрируема на $[a, c]$ и $[c, b]$. Будем измельчать разбиение τ_n так, чтобы $\Delta \to 0$:

$$\sigma(\tau_n, f)\Big|_{на\ [a,\, b]} = \sigma(\tau_n, f)\Big|_{на\ [a,\, c]} + \sigma(\tau_n, f)\Big|_{на\ [c,\, b]} \Rightarrow \lim_{\Delta \to 0} \sigma(\tau_n, f)\Big|_{на\ [a,\, b]} =$$

$= \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ что и требовалось доказать.

4. Пусть $y = f(x)$ - интегрируема на $[a, b]$ и $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$, тогда $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Доказательство. $\sigma(\tau_n,\ f)\ge 0\ \ \forall\tau_n \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\Delta\to 0}\sigma(\tau_n,\ f)\ge 0$.

5. Пусть $y=f(x)$ и $y=g(x)$ - интегрируемы на $[a,b]$ и удовлетворяют неравенству $f(x)\ge g(x),\ \forall x\in[a,b]$, тогда $\int\limits_a^b f(x)dx\ge\int\limits_a^b g(x)dx$.

Доказательство.

$$f(x)-g(x)\ge 0,\ \forall x\in[a,b]\Rightarrow\int\limits_a^b (f(x)-g(x))dx\ge 0\Rightarrow\int\limits_a^b f(x)dx-\int\limits_a^b g(x)dx\ge 0.$$

6. Пусть $y=f(x)$ - интегрируема на $[a,b]$, тогда $y=|f(x)|$ - также интегрируема на $[a,b]$ и

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right|\le\int\limits_a^b |f(x)|dx.$$

Доказательство следует из неравенства $\big||f(x_1)|-|f(x_2)|\big|\le|f(x_1)-f(x_2)|$.

7. Пусть $y=f(x)$ - интегрируема на $[a,b]$, $m=\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x),\ M=\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, тогда $m(b-a)\le\int\limits_a^b f(x)dx\le M(b-a)$. (9)

Доказательство. $m\le f(x)\le M,\ \forall x\in[a,b]\Rightarrow$ по свойству 5:

$$\int\limits_a^b mdx\le\int\limits_a^b f(x)dx\le\int\limits_a^b Mdx\Rightarrow m(b-a)\le\int\limits_a^b f(x)dx\le M(b-a).$$

8. Пусть $y=f(x)$ - непрерывна на $[a,b]$, тогда $\exists$ точка $c\in[a,b]$ такая, что

$$\int\limits_a^b f(x)dx=f(c)(b-a). \qquad (10)$$

Доказательство. Так как $y=f(x)$ - непрерывна, то она достигает на $[a,b]$ своей точной верхней M и нижней m граней (теорема 1 §11). Тогда из формулы (9) следует, что

$$m\le\frac{\int\limits_a^b f(x)dx}{b-a}\le M.$$

Так как $f(x)$ - непрерывна, то из т.2 § 11 следует, $\exists\ c\in[a,b]$ такая, что

$$f(c)=\frac{\int\limits_a^b f(x)dx}{b-a},$$ что и требовалось доказать.

Замечание. Число $f(c)$ называется интегральным средним значением функции $y=f(x)$ на отрезке $[a,b]$. Если $y=f(x)\ge 0$, то согласно примеру 2 $\int\limits_a^b f(x)dx$ равен площади S_Φ фигуры $\Phi=\{(x,\ y)|\,a\le x\le b,\ 0\le y\le f(x)\}$.

Из формулы (10) следует, что эта площадь равна площади прямоугольника высотой $f(c)$ с основанием $[a, b]$:

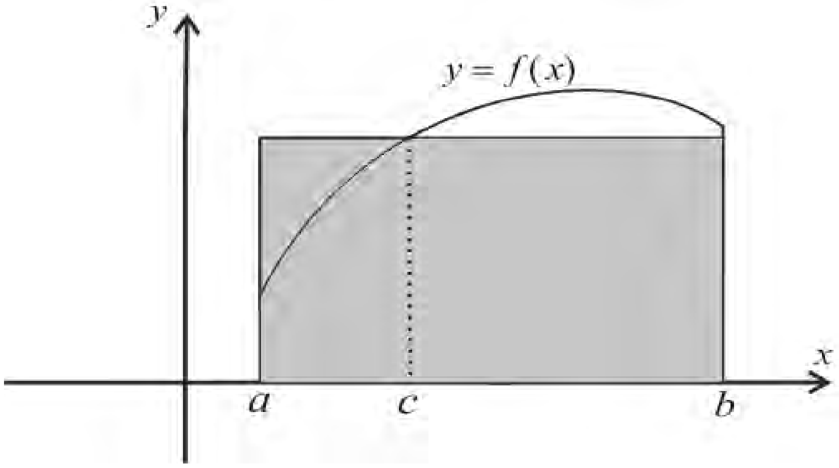


Рис.6. $\Phi = \{(x, y) | a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\}$, $S_\Phi = \int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

Упражнения к § 24.

24.1. Для функции $y = x$, $x \in [0,1]$ найти

а) $\underline{s}$ и $\overline{s}$, разбивая отрезок на n равных частей;

б) доказать, что $y = x$ интегрируема на этом отрезке;

в) вычислить $\int_0^1 xdx$ как предел соответствующих интегральных сумм.

24.2. Для функции $y = x^2$, $x \in [0,1]$ найти

а) $\underline{s}$ и $\overline{s}$, разбивая отрезок на n равных частей;

б) доказать, что $y = x^2$ интегрируема на этом отрезке;

в) вычислить $\int_0^1 x^2dx$ как предел соответствующих интегральных сумм.

Указание. Использовать формулу: $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

24.3. Пусть $y = f(x)$ - прямая, проходящая через точки $(1,1), (3,3)$, $x \in [1,3]$.

а) написать уравнение прямой;

б) найти $c \in [1,3]$, удовлетворяющую уравнению (10);

в) сделать чертеж.

Ответы на упражнения к § 24.

24.1. а) $\overline{s} = \frac{n+1}{2n}$, $\underline{s} = \frac{n-1}{2n}$; в) $\int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$.

24.1. а) $\overline{s} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$, $\underline{s} = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$; в) $\int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}$.

24.3. $c = 2$.

§ 25. Формула Ньютона –Лейбница.

Теорема 1. Пусть функция $y = f(x)$ - непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда функция

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \tag{1}$$

является первообразной для функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$, то есть $F'(x) = f(x), \forall x \in [a, b]$.

Доказательство. Пусть $x_0 \in [a, b]$.

$$F'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_a^{x_0+\Delta x} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x} = \left| \text{\textit{по свойству} } 8 \text{ \textit{из параграфа} } 24 \right| =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c) = \left| c \in [x_0, x_0 + \Delta x], f(x) - \text{\textit{непрерывна}} \right| = f(x_0),$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Аналогично можно доказать, что для функции $G(x) = \int_x^b f(t)dt$ верна формула: $G'(x) = -f(x)$.

Теорема 2. (основная теорема интегрального исчисления).

Пусть функция $y = f(x)$ - непрерывна на отрезке $[a, b]$. $\Phi(x)$ - ее первообразная на $[a, b]$.Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a) \text{ -} \tag{2}$$

формула Ньютона-Лейбница.

Доказательство. Рассмотрим функцию $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. По теореме 1 $F(x)$ - первообразная для *f(x)*. По теореме 1 § 18: $F(x) = \Phi(x) + C$, то есть

$\int_a^x f(t)dt = \Phi(x) + C, \forall x \in [a, b]$. В частности при $x = a$: $\int_a^a f(t)dt = 0 = \Phi(a) + C$ $\Rightarrow C = -\Phi(a)$, то есть:

$\int_a^x f(t)dt = \Phi(x) - \Phi(a), \forall x \in [a, b] \Rightarrow$ при $x = b$:

$\int\limits_a^b f(t)dt = \Phi(b) - \Phi(a)$, что и требовалось доказать.

Пример 1. Найти площадь фигуры Φ, ограниченной линиями $y = 3x^2,\ y = 0,\ x = 1,\ x = 2$.

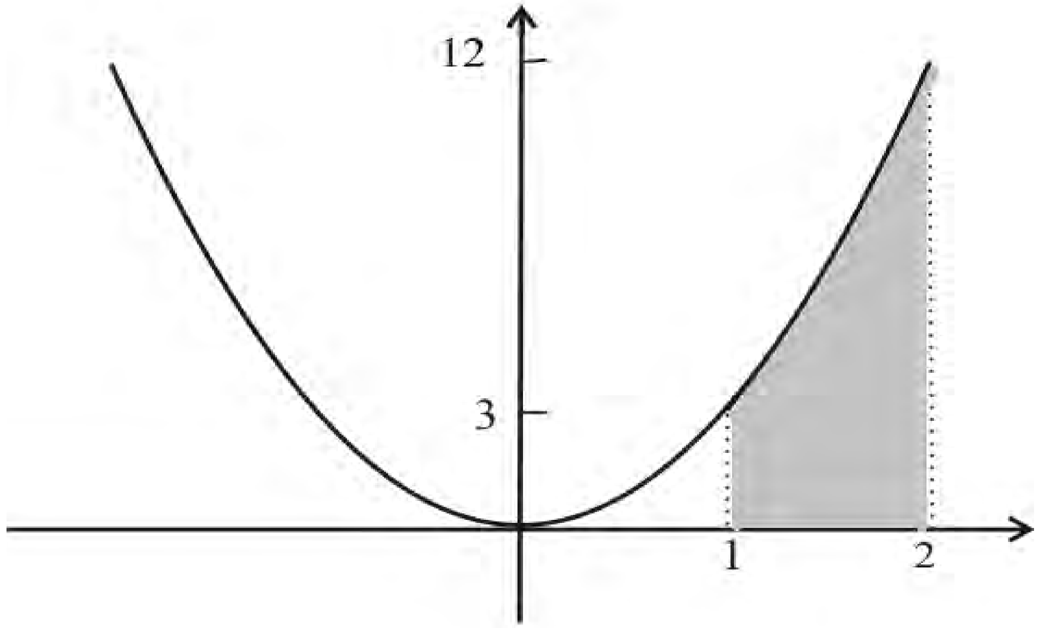


Рис.1. График функции $y = 3x^2$.

$$S_\Phi = \int\limits_1^2 3x^2 dx = x^3\Big|_1^2 = 8 - 1 = 7.$$

Если функция $y = f(x)$ - кусочно-непрерывна на $[a, b]$, то формула (2) – также верна в случае, когда $\Phi(x)$ - непрерывна на $[a, b]$.

Пример 2. $f(x) = \begin{cases} 1 + x, & x \in [-1; 0) \\ \dfrac{1}{2}, & x = 0 \\ x, & x \in (0; 1] \end{cases}$.

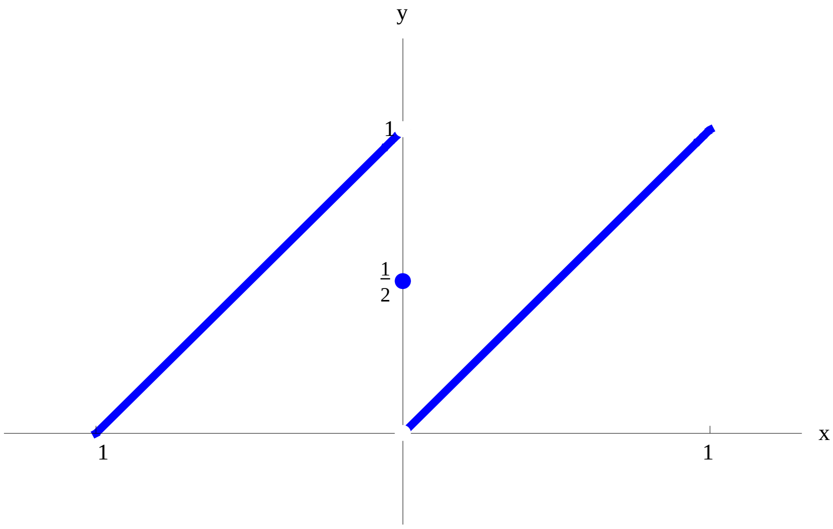


Рис.2. График функции $f(x)=\begin{cases}1+x,\ x\in[-1;\,0)\\ \dfrac{1}{2},\ x=0\\ x,\ x\in(0;\,1]\end{cases}$.

Функция $F(x)=\begin{cases}x+\dfrac{x^2}{2}+C_1\\ \dfrac{x^2}{2}+C_2\end{cases}$ - первообразная для $f(x)$ при $x\in(-1;\,0)\cup(0;\,1)$.

И, если $C_1=C_2=C$, то $F(x)$ - непрерывна и

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=F(x)\Big|_{-1}^{1}=\left(1+\frac{1}{2}+C\right)-\left(\frac{1}{2}+C\right)=1.$$

Если же $C_1\neq C_2$, то $F(x)$ разрывна в точке x_0, и формула (2) не выполняется.

Замечание. Если $y=f(x)$ - кусочно-непрерывна на $[a,b]$, то при вычислении $\int_a^b f(x)dx$ проще разбить отрезок $[a,b]$ на отрезки непрерывности $y=f(x)$ и применить формулу (2) на каждом из отрезков, используя свойство аддитивности интеграла.

Например, для $y=f(x)$ из примера 2:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{0}(1+x)dx+\int_{0}^{1}xdx=\left(x+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{0}+\frac{x^2}{2}\Bigg|_{0}^{1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

Пример 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int\limits_0^x \sin(t^2)dt}{x^3}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\int\limits_0^x \sin(t^2)dt\right)'}{\left(x^3\right)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$.

Упражнение 1. Найти а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int\limits_0^x e^{t^2}dt}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int\limits_0^x e^{-t^2}dt}{x^2}$.

Пример 4. Вычислить $\int\limits_0^2 \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+1}}dx=\int\limits_0^2 \dfrac{x-1}{|x-1|}dx$. Подинтегральная функция имеет на промежутке $[0;\,2]$ точку разрыва первого рода: $x_0=1$.поэтому:

$$\int\limits_0^2 \frac{x-1}{|x-1|}dx=\int\limits_0^1 \frac{x-1}{1-x}dx+\int\limits_1^2 \frac{x-1}{x-1}dx=\int\limits_0^1 -1dx+\int\limits_1^2 1dx=-x\Big|_0^1+x\Big|_1^2=(-1+0)+(2-1)=0\,.$$

Упражнение 2. $\Phi_1(x)=\int\limits_0^x \sin(t^2)dt,\ \Phi_2(x)=\int\limits_0^{\sqrt{x}} \sin(t^2)dt,\ \Phi_3(x)=\int\limits_{\sqrt{x-\pi}}^{\sqrt{x}} \sin(t^2)dt$.

Найти $\Phi_1'(x),\ \Phi_2'(x), \Phi_3'(x)$.

Пример 5. Вычислить $\int\limits_0^{\pi}\dfrac{dx}{1+\cos^2 x}$.

$\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)$ - первообразная для $f(x)=\dfrac{1}{1+\cos^2 x}$ на любом отрезке не содержащем точек $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n=0, \pm 1, \ldots$, (см. пример 3 § 23).

$x=\dfrac{\pi}{2}\in[0,\,\pi]$, $\Phi(x)$ имеет разрыв в точке $x=\dfrac{\pi}{2}$ и не является первообразной для $f(x)$ на этом промежутке.

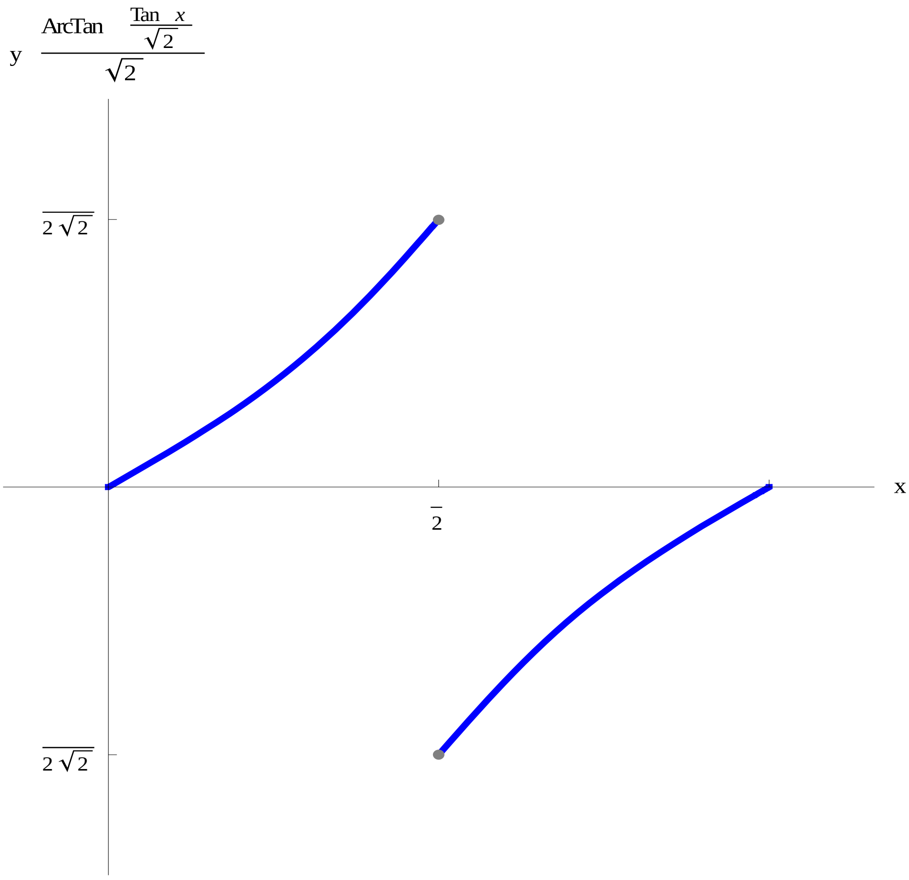


Рис.3. График функции $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)$

Поэтому $\int\limits_0^{\pi}\frac{dx}{1+\cos^2 x}\neq\Phi(\pi)-\Phi(0)=0$.

Для вычисления интеграла разобьем отрезок $[0;\pi]$ на отрезки $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ и $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ и доопределим функцию $\Phi(x)$ в точке $\frac{\pi}{2}$ до непрерывной на первом и втором интервале: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\Phi(x)=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\Phi(x)=-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

Тогда $\int\limits_0^{\pi}\frac{dx}{1+\cos^2 x}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\cos^2 x}+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{dx}{1+\cos^2 x}=\Phi_1(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\Phi_2(x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=$

$=\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}-0\right)+\left(0+\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Где $\Phi_1(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}\right), & x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right)\\ \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}, & x=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$, $\Phi_2(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}\right), & x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right]\\ -\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}, & x=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$.

Искомый интеграл можно также вычислить, найдя первообразную $F(x)$ для $f(x)$ на всем промежутке $[0;\pi]$:

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}\right), & x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right)\\ \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}, & x=\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}\right)+\pi\right), & x\in\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right]\end{cases}.$$

(см. графики $\Phi(x)$ и $F(x)$).

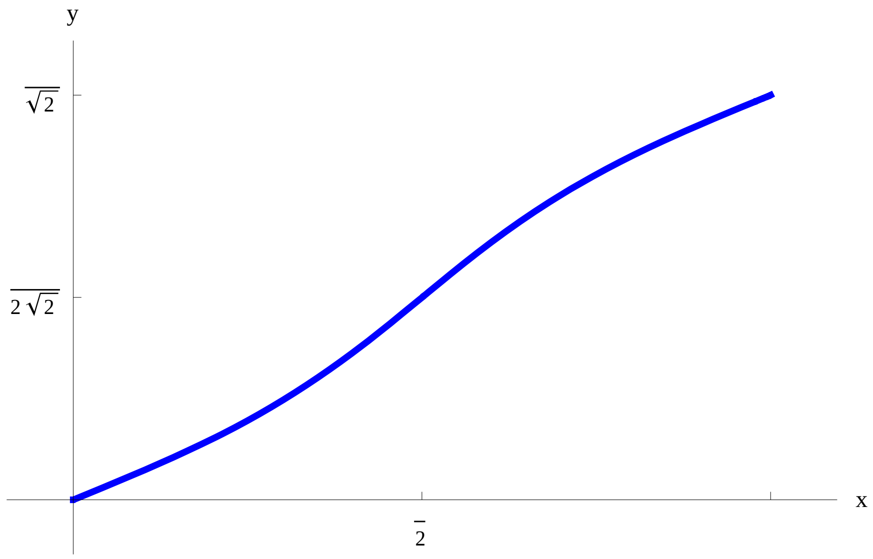


Рис .4. График функции $F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}\right), & x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right)\\ \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}, & x=\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}\right)+\pi\right), & x\in\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right]\end{cases}$

И тогда $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+\cos^2 x}=F(\pi)-F(0)=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Упражнения к § 25.

Вычислить определенные интегралы:

25.1. $\int_1^8 \left(4\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt{2x}}+3\right)dx$; **25.2.** $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}$; **25.3.** $\int_{-1}^1 \frac{x^3dx}{x^2+1}$;

25.4. $\int_{-1}^1 \frac{x^2dx}{x^2+1}$; **25.5.** $\int_1^2 \frac{2+3x}{x^3}dx$; **25.6.** $\int_{-1}^1 |x|dx$;

25.7. $\int_0^{\pi/4} \frac{3+\sin^2 x}{\cos^2 x}dx$; **25.8.** $\int_{-2}^2 \left(\left|1-x^2\right|+1-x^2\right)dx$; **25.9.** $\int_0^{\pi/2} \cos^2\frac{x}{2}dx$;

25.10. $\int_{-2}^1 \frac{\left|1-x^2\right|}{1-x^2}\cdot dx$; **25.11.** $\int_0^1 \left(\frac{2^x}{2}+\frac{3}{4^{-x}}\right)dx$; **25.12.** $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}}$;

25.13. Найти непрерывные первообразные для единичной функции Хевисайда $\eta(x)=\begin{cases}1, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$; (см. пример 4 § 5)

25.14. $y=\begin{cases}x, & x<-1\\ 1-x^2, & -1\le x\le 1;\\ x-1, & x>1\end{cases}$ (см. пример 9 § 5);

найти непрерывные первообразные. Найти $\int_{-2}^2 y(x)dx$

1) по формуле Ньютона-Лейбница на промежутке $[-2;2]$

2) разбивая вычисления на промежутки $[-2;-1]$; $[-1;1]$; $[1;2]$

25.15. $y=\begin{cases}1, & x\le 1\\ x, & 1<x\le 2,\\ 3, & x>2\end{cases}$ найти непрерывные первообразные;

25.16. Найти интегралы: а) $\int_0^\pi \frac{dx}{2\sin^2 x+6\cos^2 x-1}$; б) $\int_0^\pi \frac{dx}{3\sin^2 x+\cos^2 x}$

25.17. Найти а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin(t^2)dt}{x^3}$;

б) $\lim\limits_{x\to +0}\int_0^{\sqrt{x}}\frac{\sin(t^2)dt}{\sqrt{x^3}}$;

в) $\lim\limits_{x\to +0}\frac{\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{\pi-x}}\sin(x^2)dx-\int_0^{\pi}\sin(x^2)dx}{\sqrt{x^3}}$.

Ответы на упражнения к § 25.

25.1. 1; **25.2.** $\frac{1}{2}\ln 3$; **25.3.** 0; **25.4.** $2-\frac{\pi}{2}$;

25.5. $\frac{9}{4}$; **25.6.** 1; **25.7.** $4-\frac{\pi}{4}$; **25.8.** $\frac{8}{3}$;

25.9. $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$; **25.10.** 1; **25.11.** $\frac{10}{\ln 4}$;

25.12. Определенный интеграл не существует, т.к. функция не ограничена на промежутке $[0;1]$;

25.13. $F(x)=\begin{cases} x+c, & x\ge 0 \\ c, & x<0 \end{cases}$;

25.14. $F(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{2}-\frac{7}{6}+c, & x<-1 \\ x-\frac{1}{3}x^3+c, & -1\le x\le 1 \\ \frac{1}{2}x^2-x+\frac{7}{6}+c, & x>1 \end{cases}$;

25.15. $F(x)=\begin{cases} x+c, & x\le 1 \\ \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}+c, & 1<x\le 2 \\ 3x-\frac{7}{2}+c, & x>2 \end{cases}$;

25.16. а) $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$; **б)** $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

25.17. а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $-\frac{1}{3}$.

§ 26. Замена переменной, интегрирование по частям в определенном интеграле.

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ - непрерывна на промежутке $[a,b]$ и функция $x=\varphi(t)$ - непрерывно-дифференцируема на промежутке $[\alpha,\beta]$, $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b,\ \varphi([\alpha,\beta])\subset\varphi([a,b])$, тогда

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt \text{ -} \qquad (1)$$

формула замены переменной.

Доказательство. Пусть $y=F(x)$ - первообразная для $f(x)$ на промежутке $[a,b]$, тогда (см. теорему 1 § 19) $y=F(\varphi(x))$ - первообразная для $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$ на промежутке $[\alpha,\beta]\Rightarrow\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx$, что и требовалось доказать.

Пример 1. $$\int_0^3\frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}=\left|\begin{array}{c}x+1=t^2;\ t=\sqrt{x+1}\\ x=t^2-1;\ dx=2tdt\\ x=0\Rightarrow t=1\\ x=3\Rightarrow t=2\end{array}\right|=\int_1^2\frac{2tdt}{1+t}=$$

$$=2\int_1^2\frac{(t+1)-1}{t+1}dt=2\int_1^2 dt-2\int_1^2\frac{dt}{t+1}=2t\Big|_1^2-2\ln|t+1|\Big|_1^2=2-2\ln3+2\ln2=2-2\ln\left(\frac{3}{2}\right).$$

Упражнение 1. Вычислить $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{3+\cos x};\ \int_0^{\pi}\frac{dx}{3+\cos x};\ \int_0^{2\pi}\frac{dx}{3+\cos x}$.

Теорема 2. Пусть функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ непрерывно-дифференцируемы на промежутке $[a,b]$, тогда

$$\int_a^b udv=u\cdot v\Big|_a^b-\int_a^b vdu \text{ -} \qquad (2)$$

формула интегрирования по частям.

Доказательство. $d(u\cdot v)=udv+vdu$ (см. § 6). Поэтому $\int_a^b d(uv)=\int_a^b udv-\int_a^b vdu$,

но $\int_a^b d(uv)=(u\cdot v)\big|_a^b$ (см. формулу(3) § 18) и теорема доказана.

Пример 2. $\int\limits_{\frac{1}{e}}^{e} x\cdot|\ln x|dx = -\int\limits_{\frac{1}{e}}^{1} x\cdot\ln x dx + \int\limits_{1}^{e} x\cdot\ln x dx = \left| \begin{matrix} u=\ln x \Rightarrow du=\frac{1}{x}dx \\ dv = xdx \Rightarrow v=\frac{1}{2}x^2 \end{matrix} \right| =$

$$= -\left(\frac{1}{2}x^2\cdot\ln x\Big|_{\frac{1}{e}}^{1} - \int\limits_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{1}{2}xdx \right) + \left(\frac{1}{2}x^2\cdot\ln x\Big|_{1}^{e} - \int\limits_{1}^{e}\frac{1}{2}xdx \right) =$$

$$= -\frac{1}{2e^2} + \frac{1}{4}x^2\Big|_{\frac{1}{e}}^{1} + \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}x^2\Big|_{1}^{e} = -\frac{1}{2e^2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4e^2} + \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(e^2 + \frac{1}{e^2}\right) + \frac{1}{2}\left(e^2 - \frac{1}{e^2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{ch}2 + \operatorname{sh}2.$$

Упражнения к § 26.

26.1. $\int\limits_{1}^{e}\frac{1-\ln x}{x}dx$; **26.2.** $\int\limits_{2}^{3}\frac{(x^3+x)dx}{x^4+2x^2-3}$; **26.3.** $\int\limits_{-2}^{1}\frac{x+1}{x^2+4x+7}dx$;

26.4. $\int\limits_{0}^{1}\frac{x^3dx}{x^2+4}$; **26.5.** $\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\frac{x+\cos 2x}{x^2+\sin 2x}dx$; **26.6.** $\int\limits_{0}^{\pi/6}\frac{\cos x-\sin 3x}{(3\sin x+\cos 3x)^2}dx$;

26.7. $\int\limits_{1}^{2}\frac{1}{x(1+x^2)}\cdot dx$; **26.8.** $\int\limits_{1}^{4}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}+x}{2\sqrt{x}+x^2}\cdot dx$; **26.9.** $\int\limits_{0}^{1}\frac{xdx}{x^2+1}$;

26.10. $\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{\cos x+\sin 2x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\cdot dx$; **26.11.** $\int\limits_{0}^{1/2}\frac{arctg\,2x+1}{1+4x^2}dx$; **26.12.** $\int_0^1\frac{x-x^3}{\sqrt{4-x^4}}\cdot dx$;

26.13. $\int\limits_{\sqrt{5}}^{\sqrt{12}}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$; **26.14.** $\int\limits_{0}^{1/2}\frac{\arcsin x+x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; **26.15.** $\int\limits_{1}^{3}\frac{arctg\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)}dx$;

26.16. $\int\limits_{\sqrt{8}}^{4}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$; **26.17.** $\int\limits_{0}^{1}\frac{x^3+\ln(x+1)}{x+1}dx$; **26.18.** $\int\limits_{0}^{\sqrt{5}}\frac{xdx}{\sqrt{x^2+4}}$;

26.19. $\int\limits_{0}^{\pi/4} tgx\cdot\ln\cos x\,dx$; **26.20.** $\int\limits_{0}^{\pi/4}\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}dx$; **26.21.** $\int\limits_{0}^{1}(4-3x)e^{-3x}dx$;

26.22. $\int\limits_{0}^{1}\operatorname{arctg}\sqrt{x}dx$; **26.23.** $\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}(4x-2)\cos 2xdx$; **26.24.** $\int\limits_{0}^{1}\ln(x^2+1)dx$;

26.25. $\int\limits_{0}^{\pi/4}(4x-1)\sin 4xdx$; **26.26.** $\int\limits_{-1/4}^{0}e^{-x}(3-4x)dx$; **26.27.** $\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{xdx}{\cos^2\frac{x}{2}}$;

26.28. $\int\limits_{0}^{1/3}\operatorname{arctg}(3x)dx$.

Ответы на упражнения к § 26.

26.1. 0,5;

26.2. $\frac{1}{4}\ln\frac{32}{7}$;

26.3. $\ln 2-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$;

26.4. $\frac{1}{2}-2\ln\frac{5}{4}$;

26.5. $\ln 2$;

26.6. $\frac{1}{9}$;

26.7. $\ln\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$;

26.8. $\frac{1}{2}\ln\frac{20}{3}$;

26.9. $\frac{\ln 2}{2}$;

26.10. $\ln(1+\sqrt{2})+2\sqrt{2}-2$;

26.11. $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi^2}{64}$;

26.12. $\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1$;

26.13. $\frac{1}{2}\ln\frac{7}{4}$;

26.14. $\frac{\pi^2}{72}-\frac{\sqrt{3}}{2}+1$;

26.15. $\frac{7\pi^2}{144}$;

26.16. $\frac{\pi}{24}$;

26.17. $\frac{5}{6}-\ln 2+\frac{1}{2}\ln^2 2$;

26.18. 1;

26.19. $-\frac{\ln^2 2}{8}$;

26.20. $-\frac{1}{2}\cdot\ln 2$;

26.21. 1;

26.22. $\frac{\pi}{2}-1$;

26.23. $-\sqrt{3}$**;**

26.24. $-2+\ln 2+\frac{\pi}{2}$;

26.25. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$;

26.26. 1.

26.27. $\pi-\ln 4$.

26.28. $\frac{\pi}{12}-\frac{\ln 2}{6}$.

§ 27. Несобственные интегралы первого рода.

Несобственный интеграл первого рода – обобщение понятия интеграла Римана на бесконечный промежуток. Для бесконечного промежутка Δ составить суммы Римана вида (1) § 24 нельзя.

Определение 1. Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке $\Delta = [a; +\infty)$ и интегрируема на любом конечном отрезке $[a, b]$, $a < b$. Несобственным интегралом 1-го рода функции $y = f(x)$ на промежутке Δ называется $\lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx$. Несобственный интеграл обозначается $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Таким образом:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Если предел (1) существует, то интеграл называется сходящимся, в противном случае – расходящимся.

Аналогично:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx \quad , \qquad (2)$$

для функции $y = f(x)$, определенной на промежутке $(-\infty; b]$ и интегрируемой на любом конечном промежутке $[a,b]$, и

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)\,dx \quad , \qquad (3)$$

где c – промежуточная точка , и интегралы в правой части формулы (3) вычисляются по формулам (1) и (2).

Пример 1. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{4+x^2} = \lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_0^b \frac{dx}{4+x^2} = \lim\limits_{b \to +\infty} \frac{1}{2} arctg \frac{x}{2} \Big|_0^b = \lim\limits_{b \to +\infty} \frac{1}{2} arctg \frac{b}{2} = \frac{\pi}{4}$.

Пример 2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{4+x^2} = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{4+x^2} + \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{4+x^2} = \lim\limits_{a \to -\infty} \int\limits_a^0 \frac{dx}{4+x^2} + \lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_0^b \frac{dx}{4+x^2} =$

$$= \lim_{a \to -\infty} \frac{1}{2} arctg \frac{x}{2} \Big|_a^0 + \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{2} arctg \frac{x}{2} \Big|_0^b = \lim_{a \to -\infty} \left(-\frac{1}{2} arctg \frac{a}{2} \right) + \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{2} arctg \frac{b}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Пример 3. Исследовать на сходимость $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$; $\alpha > 0$.

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{b\to+\infty}\begin{cases}\displaystyle\int_1^b\frac{dx}{x^\alpha}=\left.\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_1^b, \alpha\neq1\\ \ln|x|\Big|_1^b, \quad \alpha=1\end{cases}=\lim_{b\to+\infty}\begin{cases}\dfrac{b^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}-\dfrac{1}{-\alpha+1}, \ \alpha\neq1\\ \ln|b|, \ \alpha=1\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha-1}, \quad \alpha>1\\ \infty, \quad \alpha\le1\end{cases}$$

.

Таким образом, интеграл сходится, если $\alpha>1$ и расходится, если $\alpha\le1$.

Теорема 1 (признак сравнения). Пусть функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ определены на промежутке $\Delta=[a;+\infty)$, интегрируемы на любом конечном промежутке $[a,b]$ и пусть $0\le f(x)\le g(x), \ \forall\ x\in[a;+\infty)$.

Тогда из сходимости $\int\limits_a^{+\infty}g(x)\,dx$ следует сходимость $\int\limits_a^{+\infty}f(x)\,dx$, а из расходимости $\int\limits_a^{+\infty}f(x)\,dx$ следует расходимость $\int\limits_a^{+\infty}g(x)\,dx$.

Доказательство следует из неравенства:

$$0\le\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b g(x)\,dx.$$

Теорема 2 (предельный признак сравнения). Пусть $y=f(x)$ и $y=g(x)$ - положительны $\forall x\in[a;+\infty)$, удовлетворяют условиям определения 1 на этом промежутке и $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A, \ A\neq0, \ A\neq\infty$. Тогда $\int\limits_a^{+\infty}f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^{+\infty}g(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Пусть $\varepsilon>0$ и такое, что $A-\varepsilon>0$, тогда из определения предела $\exists\ a_1>a$ такое, что

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-A\right|<\varepsilon, \Leftrightarrow \ A-\varepsilon<\frac{f(x)}{g(x)}<A+\varepsilon \ \Leftrightarrow g(x)(A-\varepsilon)<f(x)<g(x)(A+\varepsilon), \ \forall x\in[a_1;+\infty).$$

И далее доказательство следует из теоремы 1.

На практике, при исследовании на сходимость по предельному признаку в качестве $g(x)$ часто используют функцию $g(x)=\dfrac{1}{x^\alpha}$.

Пример 4. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{x+1}{(x^2+2)\sqrt[3]{x+5}}dx$.

$$f(x)=\frac{x+1}{(x^2+2)\sqrt[3]{x+5}}\sim\frac{x}{x^2x^{1/3}}=\frac{1}{x^{4/3}}$$ при $x\to+\infty$; $\alpha=\dfrac{4}{3}>1$, следовательно,

(см. пример 3), интеграл сходится.

Определение 2. Несобственный интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ называется абсолютно-сходящимся, если сходится интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} |f(x)|\,dx$.

Несобственный интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ называется условно-сходящимся, если $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ - сходится, а интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ - расходится.

Теорема 3. Пусть $\int\limits_{a}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ - сходится, тогда $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ - также сходится.

Доказательство. Пусть $\int\limits_{a}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ - сходится, тогда по критерию Коши (см. теорему 5 § 3) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists c > a, \forall a_1, a_2 > c$ выполняется неравенство $\left| \int\limits_{a_1}^{a_2} |f(x)|\,dx \right| < \varepsilon \Rightarrow$ по свойству 4 § 24: $\left| \int\limits_{a_1}^{a_2} f(x)dx \right| \le \left| \int\limits_{a_1}^{a_2} |f(x)|\,dx \right| < \varepsilon$ и по критерию Коши $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ - сходится.

Пример 5. Исследовать на абсолютную и условную сходимость $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos x}{4+x^2}dx$.

$0 \le \left| \frac{\cos x}{4+x^2} \right| \le \frac{1}{4+x^2}$; $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{4+x^2}$ - сходится, (см. пример 1), тогда по признаку сравнения $\int\limits_{0}^{+\infty} \left| \frac{\cos x}{4+x^2} \right| dx$ - сходится и, следовательно, $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos x}{4+x^2}dx$ - сходится абсолютно.

Пример 6. Исследовать на абсолютную и условную сходимость интегралы $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ и $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$.

п.1. Исследуем интегралы на сходимость.

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx=\lim_{b\to+\infty}\left(-\int_1^b\frac{d(\cos x)}{\sqrt{x}}\right)=\left|\begin{matrix}u=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\Rightarrow du=-\dfrac{1}{2x^{3/2}}dx\\ dv=d(\cos x)\Rightarrow v=\cos x\end{matrix}\right|=$$

$$\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\Bigg|_1^b-\int_1^b\frac{\cos x}{2x^{3/2}}dx\right)=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{\cos 1}{1}-\frac{1}{2}\int_1^b\frac{\cos x}{x^{3/2}}dx\right)=-\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^{3/2}}dx+\cos 1,$$

$0\le\left|\dfrac{\cos x}{x^{3/2}}\right|\le\dfrac{1}{x^{3/2}},\ \forall x\in[1;+\infty);$ $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{3/2}}-$ сходится, $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^{3/2}}dx$ сходится и, следовательно, сходится $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$.

Аналогично: $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx-$ сходится.

п.2. Исследуем интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ на абсолютную сходимость:

$$\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right|\ge\frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}}=\frac{1}{2}\frac{(1-\cos 2x)}{\sqrt{x}},\forall x\in[1;+\infty)$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{1-\cos 2x}{\sqrt{x}}dx=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}-\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{\sqrt{x}}dx.$$

$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}-$ расходится, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{\sqrt{x}}dx\ -$ сходится (согласно п. 1), поэтому $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}}dx-$ расходится, $\Rightarrow$ по признаку сравнения $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right|dx\ -$ расходится, поэтому $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ сходится условно.

Аналогично: $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$ -сходится условно.

Пример 7. Исследовать на абсолютную и условную сходимость интегралы

$\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin x^2\,dx$ и $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos x^2\,dx\ -$ интегралы Френеля.

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2\, dx = \int_0^1 \sin x^2 dx + \int_1^{+\infty} \sin x^2 dx$$. Рассмотрим

$$\int_1^{+\infty} \sin x^2\, dx = \left| \begin{matrix} x^2 = t; \quad x = \sqrt{t} \\ dx = \dfrac{1}{2\sqrt{t}} dt \end{matrix} \right| = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt$$ – сходится условно (см. пример 6), поэтому

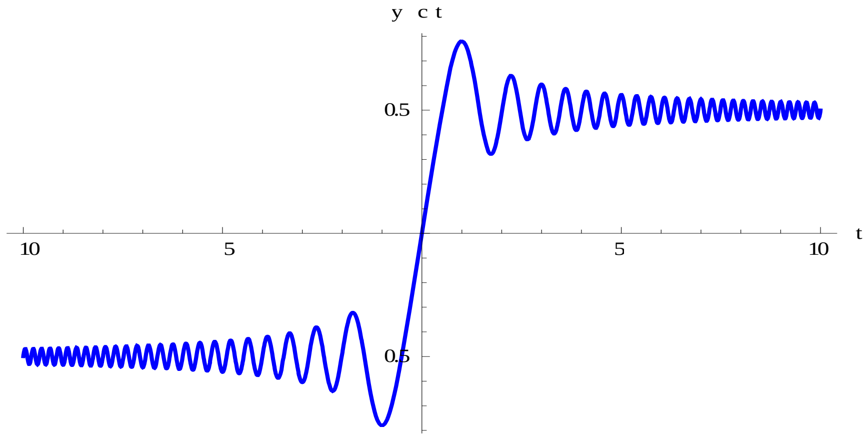
и $\int_0^{+\infty} \sin x^2\, dx$ сходится условно.

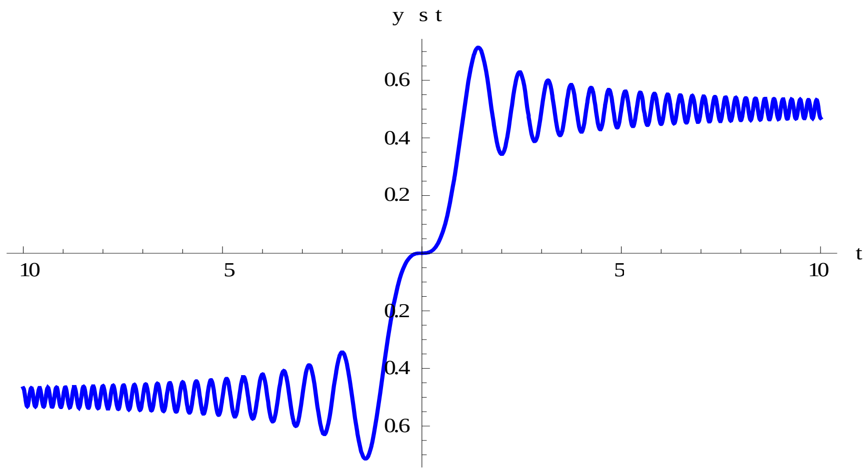
Аналогично $\int_0^{+\infty} \cos x^2\, dx$ – сходится условно.

Значения интегралов: $\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\, dx = \int_0^{+\infty} \cos(x^2)\, dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$.

Замечание. Функции $s(t) = \int_0^t \sin(x^2)\, dx$ и $c(t) = \int_0^t \cos(x^2)\, dx$ также называемые интегралами Френеля используются в оптике; $c(t)$ и $s(t)$ через элементарные функции не выражаются.

Упражнение 1. Графики функций $c(t)$, $s(t)$:

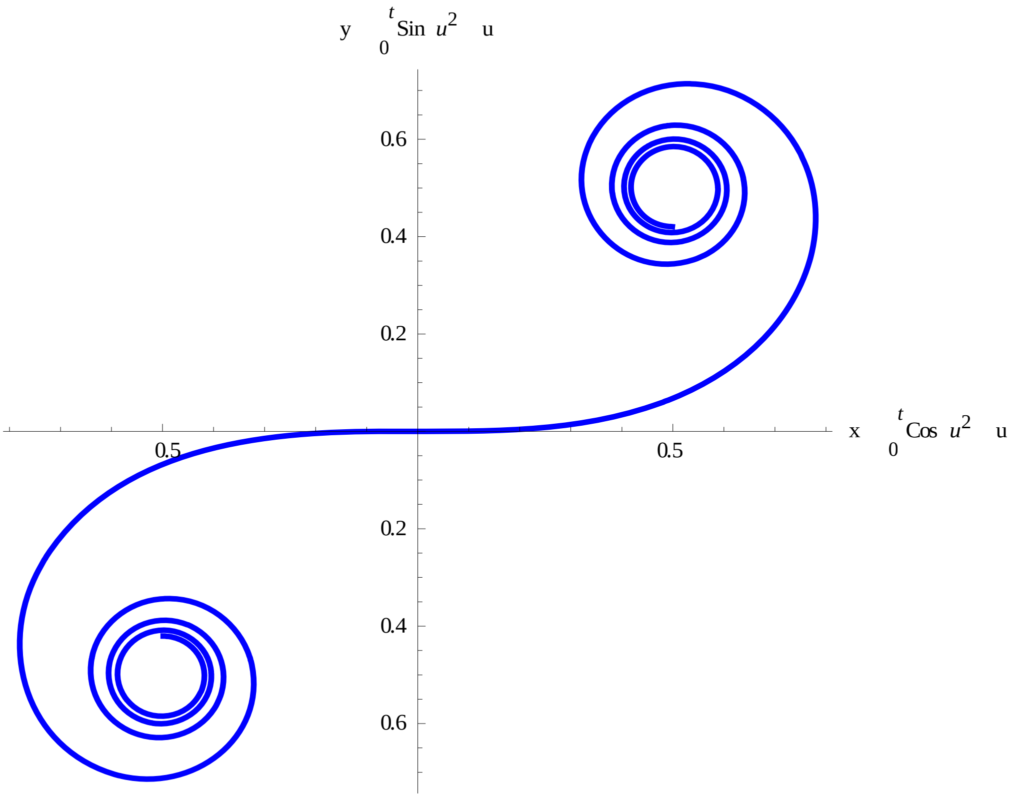




Построить графики функций $c(t)$, $s(t)$, используя пакет Mathematica (рассмотреть стандартные функции FresnelC[x], FresnelS[x]).

Замечание. Кривая, заданная параметрически в виде: $\begin{cases} x = c(t) \\ y = s(t) \end{cases}$ – называется клотоидой (спиралью Корню). Используется при проектировании и строительстве дорог и транспортных развязок (угловое ускорение машины, движущейся по кривой с постоянной скоростью, равно нулю).

Упражнение 2. График клотоиды $(-4 < t < 4)$:



Построить график клотоиды: $\begin{cases} x = c(t) \\ y = s(t) \end{cases}$, $0 \le t < 5$ в пакете Mathematica.

Упражнение 3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость интегралы $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$, $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\cos x}{x}dx$ и $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$.

Замечание. $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ называется интегралом Дирихле; $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$.

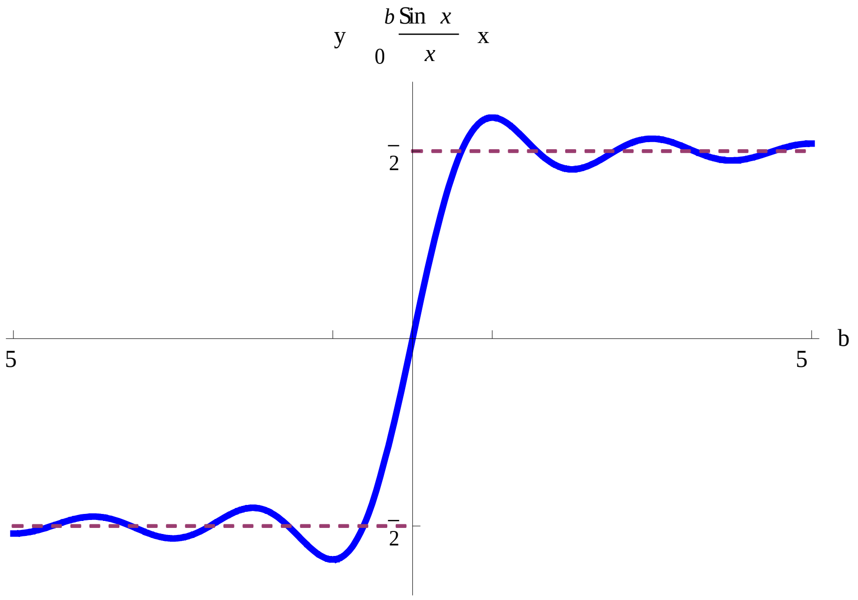


Рис.1. График функции $y=\int\limits_{0}^{b}\frac{\sin x}{x}dx$, $-5\pi\le b\le 5\pi$.

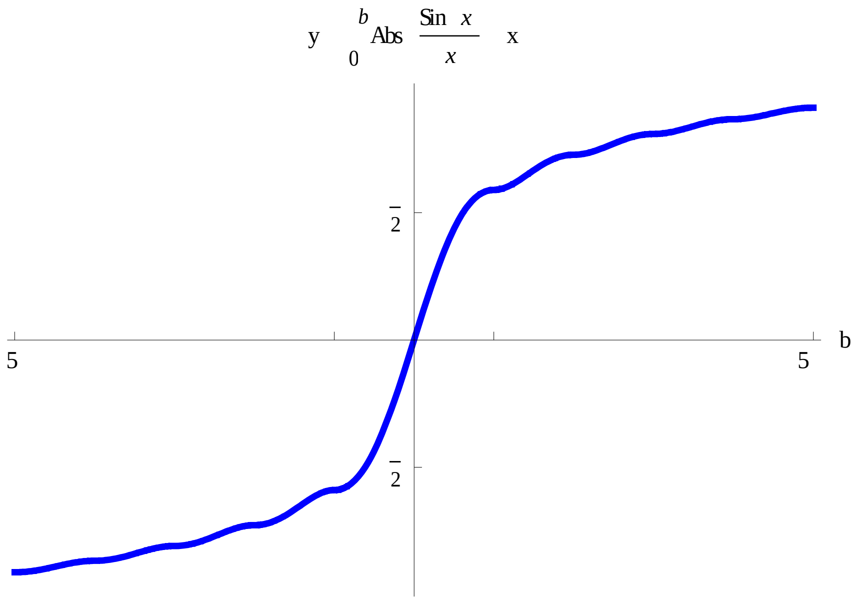


Рис.2. График функции $y=\int\limits_{0}^{b}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$, $-5\pi\le b\le 5\pi$.

Интегралы Дирихле и Френеля являются примерами интегралов от функций, первообразные которых не выражаются через элементарные функции.

Еще один такой пример – интеграл Пуассона (Эйлера-Пуассона или Гауссов интеграл): $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$. Интеграл сходится и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

Упражнения к § 27.

27.1. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

27.1.1 $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{4x^2+4x+2}$; **27.1.2.** $\int\limits_0^{+\infty} \frac{arctg\,2x}{\pi(1+4x^2)}dx$; **27.1.3.** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+3}}$;

27.1.4. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt[5]{(4+x^2)^3}}$; **27.1.5.** $\int\limits_2^{+\infty} \frac{4dx}{\pi(x^2-2x+2)}$; **27.1.6.** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(x^3+5)^4}}dx$;

27.1.7. $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{16x^2-1}}$; **27.1.8.** $\int\limits_{-2}^{+\infty} \frac{xdx}{x^2+2x+3}$; **27.1.9.** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{(2x+3)dx}{\sqrt{x^2-6x+5}}$;

27.1.10. $\int\limits_2^{+\infty} \frac{xdx}{x^2+4}$; **27.1.11.** $\int\limits_3^{+\infty} \frac{4xdx}{4x^2-1}$; **27.1.12.** $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{2x^2-4x+1}$;

27.1.13. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{x^2+4}$; **27.1.14.** $\int\limits_0^{+\infty} 5x\sin 2xdx$; **27.1.15.** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{2dx}{x(1+\ln x)^3}$;

27.1.16. $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-5x}dx$; **27.1.17.** $\int\limits_{-\infty}^{0} \left(\frac{x^2}{x^2-1} - \frac{x}{1+x^2}\right)dx$;**27.1.18.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{arctg^2 x}{4x^2+4}dx$;

27.1.19. $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x-3)^3}$; **27.1.20.** $\int\limits_{-\infty}^{2} \frac{dx}{x^2-4x+5}$; **27.1.21.** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x}$;

27.1.22. $\int\limits_0^{+\infty} 4x\cos 8xdx$.

27.2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость интегралы.

27.2.1. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$; **27.2.2.** $\int\limits_0^{+\infty} \cos x^2\,dx$.

27.3. Исследовать на сходимость интегралы.

27.3.1. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$; **27.3.2.** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{2-\sin^2 x}{\sqrt{x}}dx$; **27.3.3.** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{arctgx}{x}dx$;

27.3.4. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{arctgx}{x^2}dx$; **27.3.5.** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x+\sin x}dx$; **27.3.6.** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+\sin x}dx$;

27.3.7. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\cdot\sqrt{3x+2}}dx$; **27.3.8.** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x}{1+x^2+x^3}dx$; **27.3.9.** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x+arctgx}{1+x^2}dx$;

27.3.10. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1+\sin(1/x)}{\sqrt{x}}\,dx$ **27.3.11.** $\int\limits_2^{+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x\ln x}dx$.

27.4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x}dx$.

27.5.Вычислить интегралы.

27.5.1. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x}dx$. **27.5.2.** $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$.

27.6. Для клотоиды $\begin{cases} x = c(t) \\ y = s(t) \end{cases}$ найти $\sqrt{\left(c'(t)\right)^2 + \left(s'(t)\right)^2}$.

Ответы на упражнения к § 27.

27.1.1. $\frac{\pi}{8}$; **27.1.2.** $\frac{\pi}{16}$; **27.1.3.** Расходится;

27.1.4. Расходится; **27.1.5.** 1; **27.1. 6.** $\frac{1}{\sqrt[3]{6}}$

27.1.7. Расходится; **27.1.8.** Расходится; **27.1.9.** Расходится;

27.1.10. Расходится; **27.1.11.** Расходится; **27.1.12.** $\frac{\ln(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}}$;

27.1.13. Расходится; **27.1.14.** Расходится; **27.1.15.** 0;

27.1.16. $\frac{1}{25}$; **27.1.17.** Расходится; **27.1.18.** $\frac{\pi^3}{16}$;

27.1.19. $\frac{1}{2\ln^2\frac{2}{e^3}}$; **27.1.20.** $\frac{\pi}{2}$; **27.1.21.** $\frac{1}{2}\cdot\ln 3$;

27.1.22. Расходится.

27.2.1. Сходится условно. **27.2.2**. Сходится условно.

27.3.1. Сходится; **27.3.2.** Расходится; **27.3.3.** Расходится;
27.3.4. Сходится; **27.3.5.** Расходится; **27.3.6.** Сходится;

27.3.7. Сходится; **27.3.8.** Сходится; **27.3.9.** Расходится;
27.3.10. Расходится; **27.3.11.** Расходится;

27.4. Сходится условно.

27.5.1. $\dfrac{\pi}{4}$. **27.5.2.** $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

27.6.1. 1**.**

§ 28. Несобственные интегралы второго рода.

Несобственный интеграл второго рода – обобщение понятия интеграла Римана на случай, когда подинтегральная функция – неограниченна. Согласно необходимому условию интегрируемости функции (см. теорему 1 § 24) интегрируемая на промежутке $\Delta = [a, b]$ функция ограничена на этом промежутке.

Определение 1. а) Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке $\Delta = [a; b)$, интегрируема на отрезке $[a, b-\varepsilon]$, $\forall \varepsilon > 0$ и $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = \infty$.

Несобственным интегралом 2-го рода $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ называется $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$. Таким образом:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \tag{1}$$

Если предел (1) существует, то интеграл называется сходящимся, в противном случае – расходящимся.

б) Аналогично

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx \tag{2}$$

для функции $y = f(x)$ определенной на промежутке $\Delta = (a, b]$, интегрируемой на отрезке $[a+\varepsilon, b]$, $\forall \varepsilon > 0$ и такой, что $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$.

в) Если же $c \in (a, b)$ и $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \infty$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \to +0} \int\limits_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \to +0} \int\limits_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx. \tag{3}$$

Если хотя бы один из пределов не существует, то интеграл расходится.

Пример 1. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{x} + \int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{\varepsilon_1 \to +0} \int\limits_{-1}^{-\varepsilon_1} \frac{dx}{x} + \lim\limits_{\varepsilon_2 \to +0} \int\limits_{\varepsilon_2}^{1} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{\varepsilon_1 \to +0} \ln|x| \Big|_{-1}^{-\varepsilon_1} +$

$+ \lim\limits_{\varepsilon_2 \to +0} \ln|x| \Big|_{\varepsilon_2}^{1} = \lim\limits_{\varepsilon_1 \to +0} \ln|\varepsilon_1| - \lim\limits_{\varepsilon_2 \to +0} \ln|\varepsilon_2|$. Так как оба предела равны $-\infty$, то интеграл расходится.

Пример 2. Исследовать на сходимость $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$; $a < b,\ \alpha > 0$.

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon}\frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to+0}\begin{cases}\left.\dfrac{(b-x)^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right|_a^{b-\varepsilon}, \alpha\neq 1\\ -\ln|b-x|\Big|_a^{b-\varepsilon}, \alpha=1\end{cases} = \begin{cases}\dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \alpha<1\\ \infty, \quad \alpha\geq 1\end{cases}.$$

Таким образом интеграл сходится, если $0<\alpha<1$ и расходится, если $\alpha\geq 1$.

Теорема 1. (признак сравнения). Пусть $y=f(x)$ и $y=g(x)$ такие, как в определении 1а) , и пусть

$$0\leq f(x)\leq g(x), \quad \forall x\in[a,\ b) \tag{4}$$

Тогда из сходимости несобственного интеграла $\int_a^b g(x)dx$ следует сходимость несобственного интеграла $\int_a^b f(x)dx$, а из расходимости несобственного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ следует расходимость несобственного интеграла $\int_a^b g(x)dx$.

Теорема 2. (предельный признак сравнения). Пусть $y=f(x)$ и $y=g(x)$ – положительны $\forall x\in[a;b)$, удовлетворяют условиям определения 1а) , и пусть $\lim\limits_{x\to b-0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A,\ \ A\neq 0,\ \ A\neq\infty$. Тогда интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство теорем 1 и 2 аналогично доказательству теорем 1 и 2 § 27.

На практике, при исследовании на сходимость по предельному признаку в качестве $g(x)$ часто используют функцию $y=\dfrac{1}{(b-x)^\alpha}$ (см. пример 2).

Пример 3. Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^2 \dfrac{(x+3)^3}{\sqrt[4]{4-x^2}}dx$.

Решение. $f(x)=\dfrac{(x+3)^3}{\sqrt[4]{4-x^2}}=\dfrac{(x+3)^3}{\sqrt[4]{2-x}\sqrt[4]{2+x}}\sim\dfrac{125}{\sqrt{2}(2-x)^{1/4}}$ при $x\to 2;\ \ \alpha=\dfrac{1}{4}<1 \quad\Rightarrow$ интеграл сходится.

Упражнение 1. Исследовать на сходимость $\int_0^1 \dfrac{dx}{\ln x}$.

Пример 4. Исследовать на сходимость $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)dx$ (интеграл Эйлера).

Решение. Проверим сходимость. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx = \Big|$ проинтегрируем по частям$\Big| = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left(x\cdot\ln(\sin x)\Big|_{\varepsilon}^{\pi/2} - \int\limits_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\cdot\cos x}{\sin x}dx \right)$.

$$\lim_{x\to+0} x\cdot\ln(\sin x) = \lim_{x\to+0}\frac{\ln(\sin x)}{x^{-1}} = \lim_{x\to+0}\frac{\left(\ln(\sin x)\right)'}{\left(x^{-1}\right)'} = \lim_{x\to+0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-x^{-2}} = -\lim_{x\to+0}\frac{x^2\cdot\cos x}{\sin x} = 0.$$

Таким образом $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx = -\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\cdot\cos x}{\sin x}dx$; $\quad \lim\limits_{x\to+0}\frac{x\cdot\cos x}{\sin x} = 1$ и можно доопределить подинтегральную функцию до непрерывной на отрезок $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, поэтому интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\cdot\cos x}{\sin x}dx$ существует и $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx$ – сходится.

Вычислим интеграл. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx = \begin{vmatrix} x = 2t \\ dx = 2dt \end{vmatrix} = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin 2t)dt = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(2\sin x\cdot\cos x)dt =$

$$= 2\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2dt + \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin t)dt + \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t)dt \right) =$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{4}\cdot\ln 2 + \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin t)dt + \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t)dt \right) = \begin{vmatrix} \textit{заменим переменную} \\ \textit{в третьем слагаемом} \\ t = \frac{\pi}{2} - u \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\ln 2 + 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin t)dt - 2\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin u)du = \frac{\pi}{2}\cdot\ln 2 + 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)dt.$$

Таким образом $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)dt = \frac{\pi}{2}\cdot\ln 2 + 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)dt \Rightarrow \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)dt = -\frac{\pi}{2}\cdot\ln 2$.

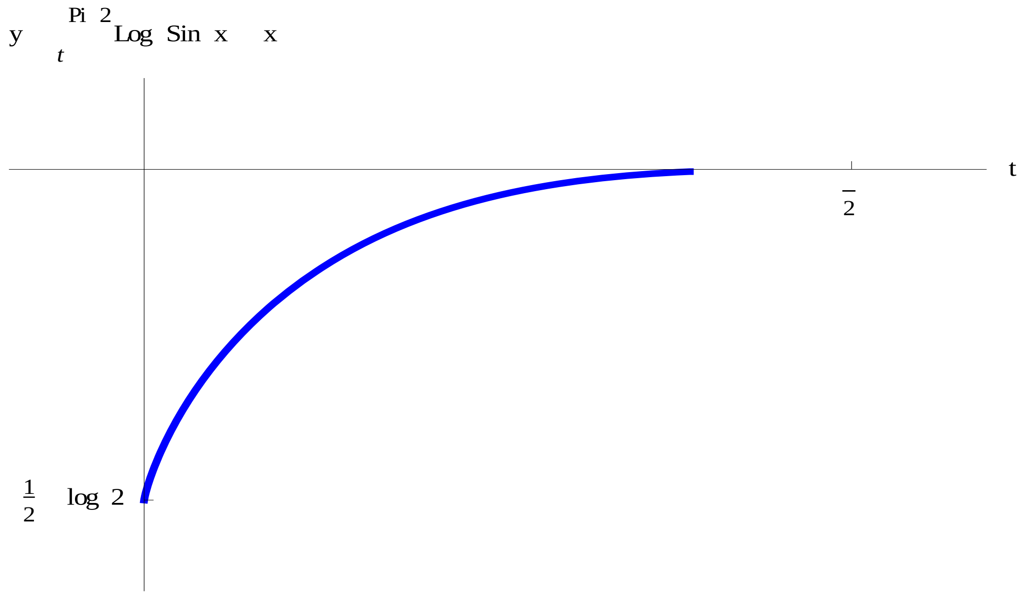


Рис.1. График функции $y=\int\limits_{t}^{\pi/2}\ln(\sin x)dx$ $,0\le t\le \pi/2$.

Упражнения к § 28.

Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

28.1. $\int\limits_{1/2}^{1}\frac{dx}{\sqrt[5]{1-2x}}$; **28.2.** $\int\limits_{0}^{1}\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^6}}$; **28.3.** $\int\limits_{0}^{1}\frac{x^2dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}$;

28.4. $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{4x^2-4x}$; **28.5.** $\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{2\cos^3 xdx}{\sqrt{\sin x}}$; **28.6.** $\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$;

28.7. $\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\frac{\sin xdx}{\sqrt[5]{\cos^2 x}}$; **28.8.** $\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[5]{4x-x^2-4}}$; **28.9.** $\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{e^{tgx}}{\cos^2 x}dx$;

28.10. $\int\limits_{-1/3}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}}$; **28.11.** $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos 3x}{\sqrt[3]{(1-\sin 3x)^2}}dx$; **28.12.** $\int\limits_{0}^{1}\frac{xdx}{1-x^2}$;

28.13. $\int\limits_{1/2}^{1}\frac{\ln(2x-1)}{2x-1}dx$; **28.14.** $\int\limits_{0}^{1}\frac{e^{\frac{5}{x}+4}}{x^2}dx$; **28.15.** $\int\limits_{0}^{2}\frac{dx}{4x^2-8x}$;

28.16. $\int\limits_{0}^{3}\frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+9}}$; **28.17.** $\int\limits_{1}^{3}\frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^4}}$; **28.18.** $\int\limits_{1/2}^{1}\frac{dx}{(1-x)\ln^3(1-x)}$;

28.19. $\int\limits_{0}^{1/2}\frac{dx}{\sqrt[5]{2-4x}}$; **28.20.** $\int\limits_{1}^{3}\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-1}$; **28.21.** $\int\limits_{0}^{3}\frac{dx}{\sqrt{6-2x}}$;

28.22. $\int\limits_{0}^{4}\frac{xdx}{\sqrt[4]{(16-x^2)^3}}$; **28.23.** $\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\frac{e^{tgx}}{\cos^2 x}dx$.

28.24. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot ctgx\,dx$; **б)** $\int\limits_0^1 \frac{\arcsin x}{x}dx$; **в)** $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Исследовать на сходимость интегралы:

28.25. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^6}}$; **28.26.** $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{1-x^8}$; **28.27.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-x^2}}$;

28.28. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-\cos x}}$; **28.29.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^2}}$; **28.30.** $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{\sin\sqrt{x}}$;

28.31. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sin\sqrt{x}-\sqrt{x}}$; **28.32.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sin\sqrt{x}}$; **28.33.** $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x\cdot dx}{\sqrt{1-\sin^3 x}}$;

28.34. $\int\limits_0^1 \frac{(1-x^2)dx}{\ln^2 x}$; **28.35.** $\int\limits_0^1 \frac{\sin(1/x)dx}{\sqrt{x}}$.

Ответы на упражнения к § 28.

28.1. $-\frac{5}{8}$; **28.2.** $\frac{\pi}{6}$; **28.3.** $\frac{1}{2}$;

28.4. Расходится; **28.5.** $\frac{16}{5}$; **28.6.** $\ln(2+\sqrt{3})$;

28.7. $\frac{5}{3}$; **28.8.** $\frac{5}{3}$; **28.9.** Расходится;

28.10. $\frac{1}{2}$; **28.11.** 1; **28.12.** Расходится;

28.13. Расходится; **28.14.** Расходится; **28.15.** Расходится;

28.16. Расходится; **28.17.** Расходится; **28.18.** Расходится;;

28.19. $\sqrt[5]{16}\cdot\frac{5}{16}$; **28.20.** Расходится; **28.21.** $\sqrt{6}$;

28.22. 4; **28.23.** 1.

28.24. **а)** $\frac{\pi}{2}\cdot\ln 2$; **б)** $\frac{\pi}{2}\cdot\ln 2$; **в)** $-\frac{\pi}{2}\cdot\ln 2$.

28.25. Сходится; **28.25.** Расходится; **28.27.** Сходится;

28.28. Сходится; **28.29.** Расходится; **28.30.** Сходится;

28.31. Расходится; **28.32.** Сходится; **28.33.** Сходится;

28.34. Расходится; **28.35.** Сходится.

§ 29. Эйлеровы интегралы.

Определение 1. Эйлеровым интегралом 1-го рода или бета-функцией называется интеграл

$$B(a,b)=\int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx,\ \ a>0,\ b>0 \qquad (1)$$

Эйлеровым интегралом 2-го рода или гамма-функцией называется интеграл

$$\Gamma(a)=\int\limits_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx,\quad a>0 \qquad (2)$$

Теорема 1. При $a>0\ \ и\ \ b>0$ интеграл (1) сходится.

Доказательство. $\int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx=\int\limits_0^{1/2} x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx+\int\limits_{1/2}^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$.

Если $x\in\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$, то функция $(1-x)^{b-1}$ – ограничена, при $a>0$ $\int\limits_0^{1/2} x^{a-1}dx$ – сходится, поэтому $\int\limits_0^{1/2} x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$ - сходится .

Если $x\in\left[\dfrac{1}{2};1\right]$, то функция x^{a-1} – ограничена, при $b>0$ $\int\limits_{1/2}^1 (1-x)^{b-1}dx$ – сходится, поэтому $\int\limits_{1/2}^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$ - сходится.

Таким образом $\int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$ – сходится.

Теорема 2. При $a>0$ интеграл (2) – сходится.

Доказательство. $\int\limits_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx=\int\limits_0^1 x^{a-1}e^{-x}dx+\int\limits_1^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$.

Если $x\in[0,1]$, то функция e^{-x} ограничена, при $a>0$ $\int\limits_0^1 x^{a-1}dx$ – сходится, поэтому $\int\limits_0^1 x^{a-1}e^{-x}dx$ -сходится.

Если $x\in[1;+\infty)$, то $x^{a-1}\cdot e^{-x}=x^{a-1}\cdot e^{-\frac{x}{2}}\cdot e^{-\frac{x}{2}}$, функция $x^{a-1}\cdot e^{-\frac{x}{2}}$ – ограничена, $\int\limits_1^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}}dx$ – сходится, поэтому $\int\limits_1^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$ -сходится.

Следовательно $\int\limits_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$ – сходится.

Свойства функций *B(a,b), Г(a)*.

1) $B(a,b)=B(b,a)$

2) $B(a+1,b)=\dfrac{a}{a+b}\cdot B(a,b),\ a>0,\ b>0$ (3)

3) $\Gamma(a+1)=a\cdot\Gamma(a),\ \ a>0$ (4)

4) $B(a,b)=\dfrac{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ (5)

п.1. Докажем формулу (3).

$$B(a+1,b)=\int_0^1 x^a(1-x)^{b-1}dx=-\int_0^1 x^a d\left(\frac{(1-x)^b}{b}\right)=\Big|\text{ интегрируем по частям}\Big|=$$

$$=-x^a\cdot\frac{(1-x)^b}{b}\Bigg|_0^1+\int_0^1\frac{(1-x)^b}{b}\cdot a\cdot x^{a-1}dx=\frac{a}{b}\int_0^1 x^{a-1}\cdot(1-x)^b\,dx=\frac{a}{b}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)(1-x)^{b-1}dx=$$

$$=\frac{a}{b}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx-\frac{a}{b}\int_0^1 x^a(1-x)^{b-1}dx=\frac{a}{b}\cdot B(a,\,b)-\frac{a}{b}\cdot B(a+1,\,b)\,.$$

Из полученного уравнения:

$$B(a+1,b)\cdot\left(1+\frac{a}{b}\right)=\frac{a}{b}\cdot B(a,b)\Rightarrow B(a+1,b)=\frac{a}{a+b}\cdot B(a,\,b),\ \text{что и требовалось.}$$

п.2. Докажем формулу (4).

$$\Gamma(a)=\int_0^{+\infty}x^{a-1}e^{-x}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b x^{a-1}e^{-x}dx=\left|\begin{matrix}u=e^{-x}\Rightarrow du=-e^{-x}dx\\ dv=x^{a-1}dx\Rightarrow v=\dfrac{x^a}{a}\end{matrix}\right|=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{a}\cdot x^a\cdot e^{-x}\Bigg|_0^b+\frac{1}{a}\cdot\int_0^b x^a\cdot e^{-x}dx\right)=\frac{1}{a}\cdot\Gamma(a+1),\ \text{что и требовалось.}$$

Так как *Г(1)=1*, то из формулы (4) следует, что $\Gamma(2)=1\cdot\Gamma(1)=1$, $\Gamma(3)=2\cdot\Gamma(2)=2\cdot1=2!,\ \Gamma(4)=3\cdot\Gamma(3)=3!,\ \ldots,\ \Gamma(n)=(n-1)\cdot\Gamma(n-1)=(n-1)!,$ то есть

$$\Gamma(n)=(n-1)!,\quad n\in N \qquad (6)$$

Аналогично, из формулы (3):

$$B(m,n)=\frac{(m-1)!\cdot(n-1)!}{(m+n-1)!};\quad m,n\in N \qquad (7)$$

п.3. Преобразуем формулу (1):

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx=\int_0^1\left(\frac{x}{1-x}\right)^{a-1}\cdot(1-x)^{a+b-2}dx=\int_0^1\left(\frac{x}{1-x}\right)^{a-1}\cdot(1-x)^{a+b}d\left(\frac{1}{1-x}\right)=$$

$$= \left| \begin{array}{l} y = \dfrac{x}{1-x} \\ 1+y = \dfrac{1}{1-x} \end{array} \right| = \int\limits_0^{+\infty} \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}} dy -$$ другое представление функции $B(a,b)$.

Пусть $0 < a < 1$, и пусть $b = 1-a$, тогда

$$B(a,1-a) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{y^{a-1}}{1+y} dy. \qquad (8)$$

Можно показать, что интеграл в правой части формулы (8) сходится и его значение равно $\dfrac{\pi}{\sin(a\pi)}$. Таким образом

$$B(a,1-a) = \frac{\pi}{\sin(a\pi)} \qquad (9)$$

В частности, $B\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right) = \pi$, а из формулы (5):

$\pi = B\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \Gamma^2\left(\dfrac{1}{2}\right)$,то есть

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,. \qquad (10)$$

Далее, используя формулу (4):

$$\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdot\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right) =$$

$$= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\cdot\sqrt{\pi}, \quad \text{где } n \in N \qquad (11)$$

Из формул (9) и (5) следует:

$$B(a,1-a) = \Gamma(a)\cdot\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin(a\pi)} \qquad (13)$$

Пример 1. Найти $\Gamma\left(3\dfrac{1}{2}\right)$.

Решение. По формуле (11): $\Gamma\left(3\dfrac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\dfrac{7}{2}\right) = \dfrac{5!!}{2^3}\sqrt{\pi} = \dfrac{1\cdot3\cdot5}{8}\cdot\sqrt{\pi} = \dfrac{15}{8}\sqrt{\pi}$.

п.4. Перепишем формулу (4) в виде: $\Gamma(a) = \dfrac{\Gamma(a+1)}{a}$, (14)

что позволяет доопределить функцию $\Gamma(a)$ для отрицательных значений a:

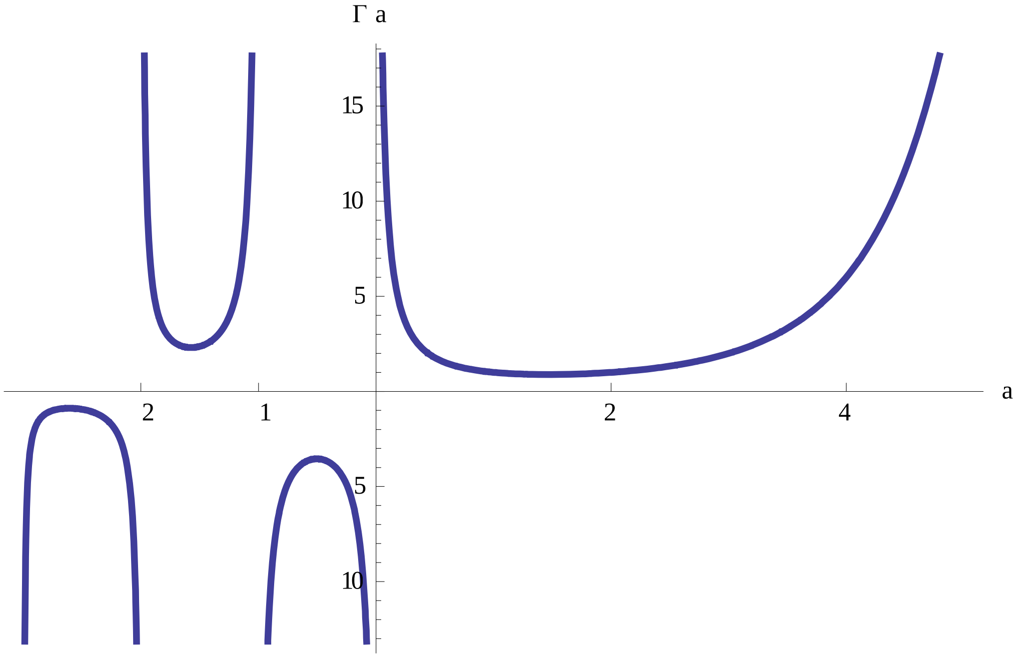


Рис. 1. График функции $\Gamma(a)$.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{a\to -1}(a+1)\cdot\Gamma(a)$.

Решение.

$$\lim_{a\to -1}(a+1)\cdot\Gamma(a)=\lim_{a\to -1}(a+1)\cdot\frac{\Gamma(a+1)}{a}=\lim_{a\to -1}(a+1)\cdot\frac{\Gamma(a+2)}{a\cdot(a+1)}=\lim_{a\to -1}\frac{\Gamma(a+2)}{a}=-1$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int\limits_1^2\sqrt[4]{(2-x)^3(x-1)}dx$.

Решение. $$\int\limits_1^2\sqrt[4]{(2-x)^3(x-1)}dx=\int\limits_1^2\sqrt[4]{(1-(x-1))^3(x-1)}d(x-1)=\left|x-1=t\right|=$$

$$=\int\limits_0^1(1-t)^{\frac{3}{4}}t^{\frac{1}{4}}dt=B\left(\frac{5}{4};\frac{7}{4}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)}{\Gamma(3)}=\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\Gamma\left(1+\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(2)}=\frac{\frac{1}{4}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{3}{4}\cdot\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{2}=$$

$$=\frac{3}{32}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{32}\cdot B\left(\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right)=\left|\text{по формуле}\,(9)\right|=\frac{3}{32}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{3\sqrt{2}}{32}\pi\,.$$

Упражнение 1. Вычислить $\int\limits_0^1 t^{\frac{1}{4}}(1-t)^{\frac{3}{4}}dt$, используя подстановки Чебышева (см.п.2, §22) .

п.5. Рассмотрим $\int\limits_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\left|\begin{matrix}x^2=t\\ x=t^{\frac{1}{2}};\ dx=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Поэтому $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ – значение интеграла Пуассона.

Упражнения к § 29.

29.1. Вычислить 1) $\Gamma\left(\dfrac{1}{\alpha}+1\right)$; 2) $\Gamma\left(\dfrac{2}{\alpha}+1\right)$, если а) $\alpha = 0,2$; б) $\alpha = 0,4$.

29.2. Вычислить а) $\lim\limits_{x\to -2}(x+2)\cdot\Gamma(x)$; б) $\lim\limits_{x\to -3}(x+3)\cdot\Gamma(x)$.

29.3. Вычислить

1. $\int\limits_0^1 x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}dx$; 2. $\int\limits_0^1 (1-x^{\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}}dx$; 3. $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{dx}{1+x^3}$;

4. $\int\limits_1^3 \sqrt[3]{(3-x)^2(x-1)}dx$; 5. $\int\limits_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx$.

29.4. Вычислить 1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}dx$; 2. $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-\frac{x^2}{2}}dx$.

Ответы на упражнения к § 29.

29.1. 1) а) 120; б) $\dfrac{15}{8}\sqrt{\pi}$.

29.1.2) а) 10!=3628800; б) 120.

29.2. а) $\dfrac{1}{2}$; б) $-\dfrac{1}{6}$.

29.3. 1. $\dfrac{\pi}{8}$; 2. $\dfrac{3\pi}{4}$; 3. $\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$; 4. $\dfrac{8\pi}{9\sqrt{3}}$; 5. π.

29.4. 1. 0; 2. 1.

§ 30. Вычисление площадей плоских фигур.

Определение 1. Пусть Φ – фигура на плоскости. Рассмотрим множество $\underline{\Phi}$ – составленное из конечного числа многоугольников, содержащихся в Φ ,и $\overline{\Phi}$ - составленное из многоугольников и покрывающее фигуру Φ:

$$\underline{\Phi} \subset \Phi \subset \overline{\Phi}$$

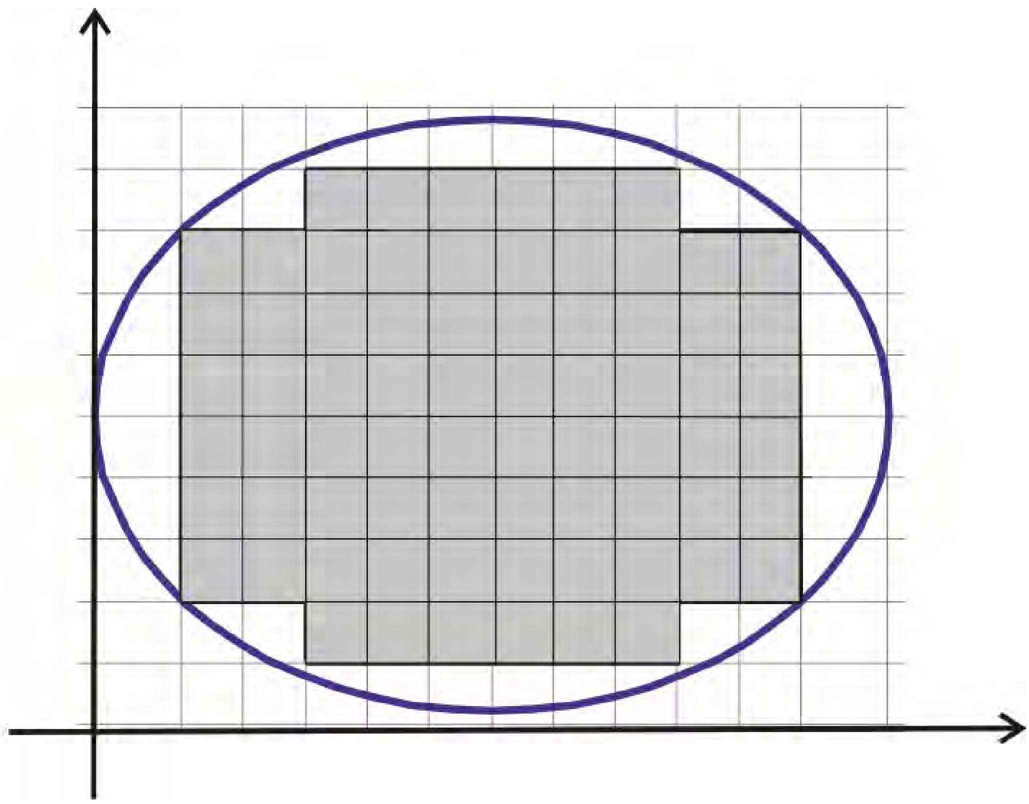


Рис.1. $\underline{\Phi} \subset \Phi$

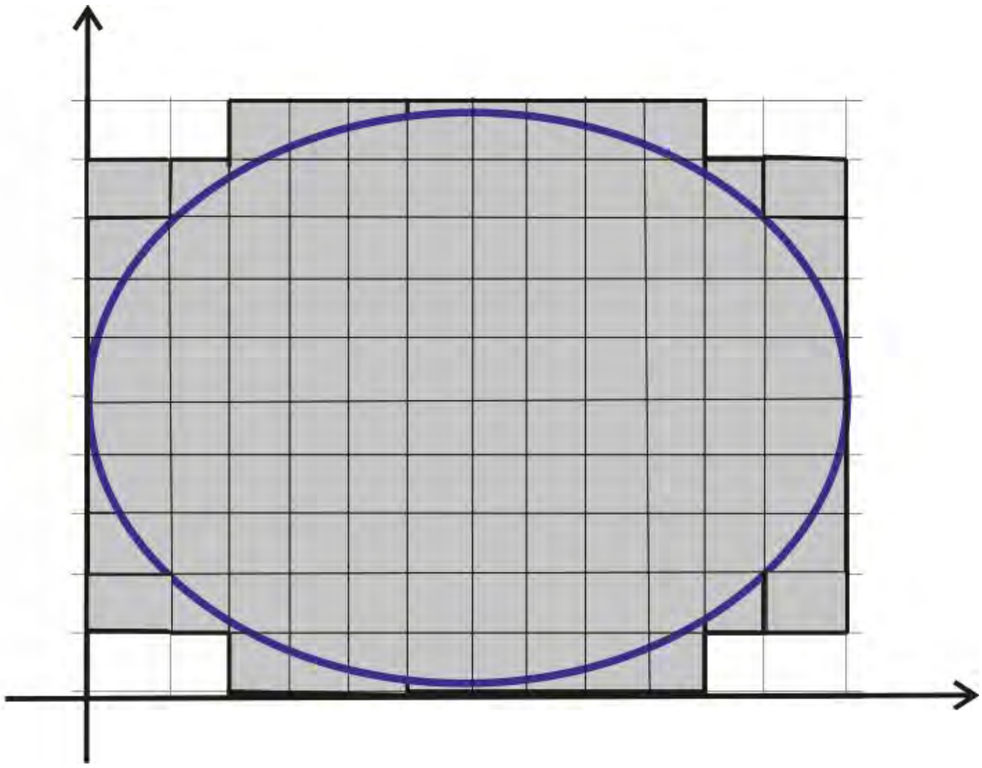


Рис.2. $\Phi \subset \overline{\Phi}$.

Пусть $\underline{s} = \sup\limits_{\underline{\Phi}}(s(\underline{\Phi}))$ и $\overline{s} = \inf\limits_{\overline{\Phi}}(s(\overline{\Phi}))$, где $s(\underline{\Phi})$ и $s(\overline{\Phi})$ - площади фигур $\underline{\Phi}$ и $\overline{\Phi}$. Фигура Φ называется квадрируемой, если $\overline{s} = \underline{s}$. При этом число

$$\overline{s} = \underline{s} = s(\Phi) \qquad (1)$$

называется площадью фигуры Φ (по Жордану).

Замечание. Для квадрируемости фигуры Φ необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \underline{\Phi}$ и $\overline{\Phi}$ такие, что $s(\overline{\Phi}) - s(\underline{\Phi}) < \varepsilon$

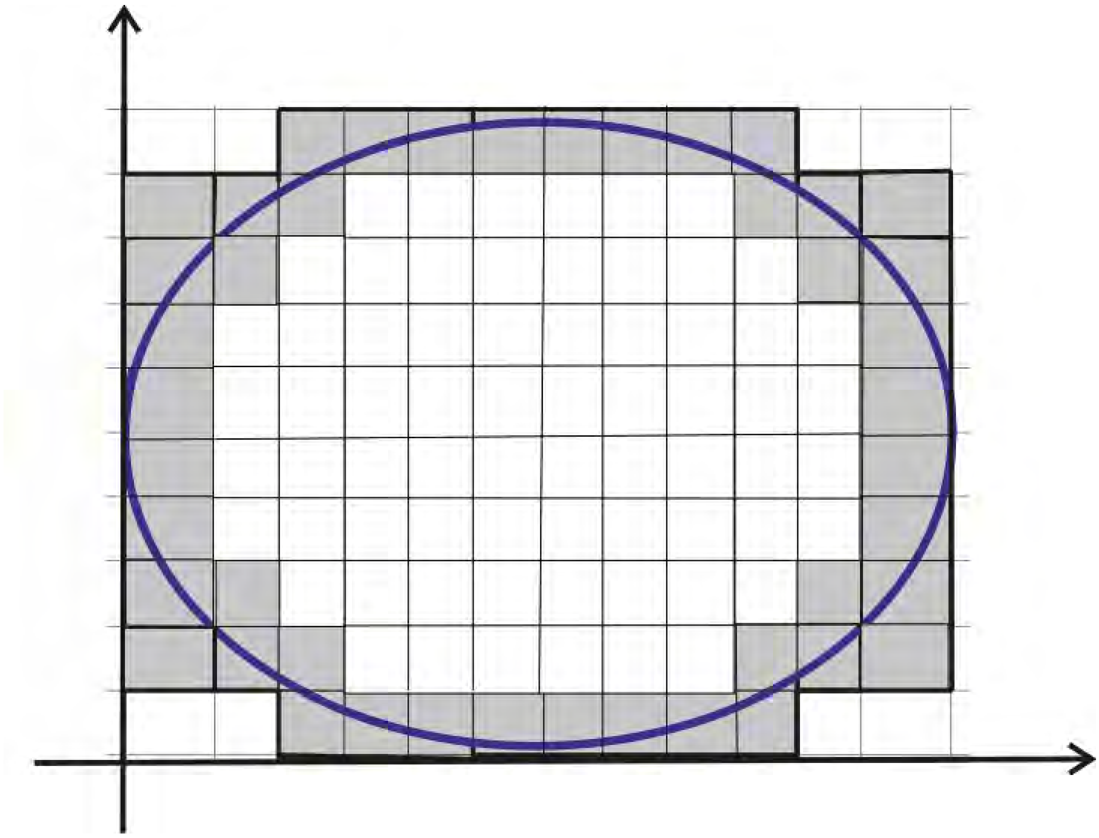


Рис.3. $s(\overline{\Phi}) - s(\underline{\Phi})$.

В частности, для криволинейной трапеции Φ: $\Phi = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}$ (см. § 24) в качестве $\underline{\Phi}$ и $\overline{\Phi}$ можно рассматривать нижние и верхние суммы Дарбу (см. рис. 3, 4, 5 из § 24). И тогда, с учетом § 24, из (1) следует, что

$$s(\Phi) = \int_a^b f(x)dx \qquad (2)$$

Пусть $y = f(x)$ и $y = g(x)$ - непрерывны на $[a, b]$ и $g(x) \le f(x),\ \forall x \in [a, b]$. Тогда из (2) следует, что для фигуры Φ_1: $\Phi_1 = \{(x, y) \mid a \le x \le b,\ g(x) \le y \le f(x)\}$

$$s(\Phi_1) = \int_a^b \big(f(x) - g(x) \big) dx \qquad (3)$$

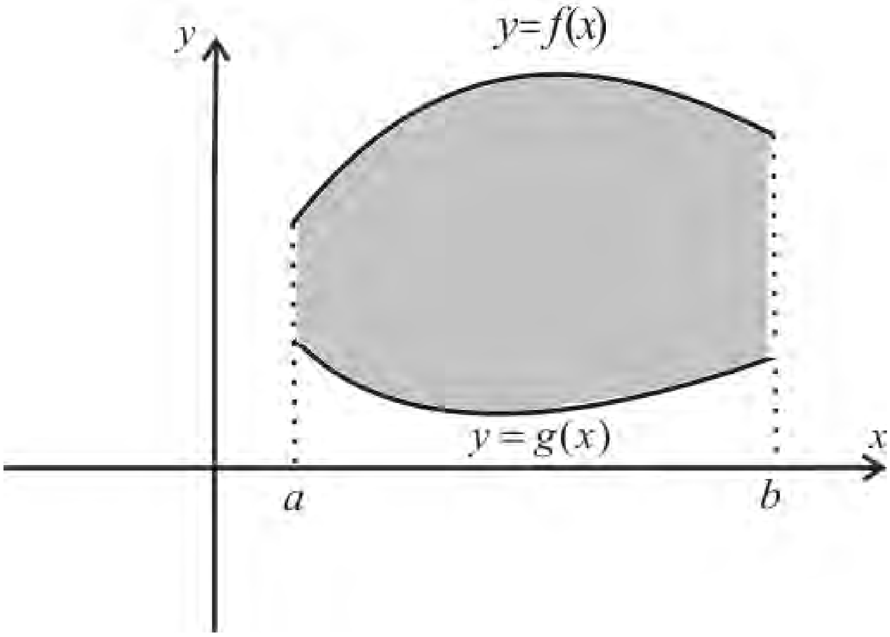


Рис.4. $s(\Phi_1)=\int_a^b \big(f(x)-g(x)\big)dx$

Пример 1. Найти площадь фигуры *Ф*, ограниченной линиями $y=2x^2,\ x+y=3$.

Решение.

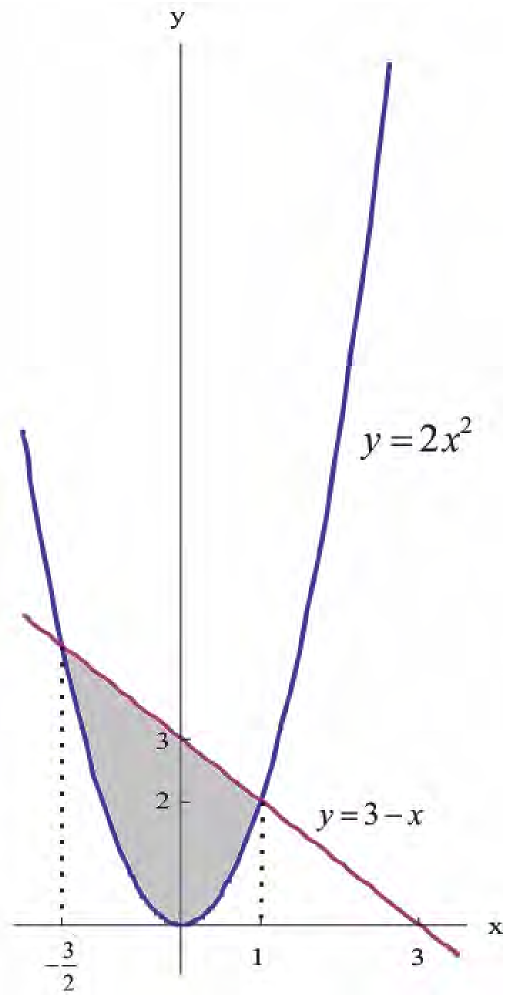


Рис.5. Фигура *Ф*.

Точки пересечения линий $y = 2x^2$, $y = 3 - x$ найдем, решив систему:

$$\begin{cases} y = 2x^2 \\ y = 3 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = -\frac{3}{2};\ x_2 = 1 \\ y_1 = \frac{9}{2};\ y_2 = 2 \end{matrix}$$

Сверху фигура ограничена прямой $y = 3 - x$, снизу – параболой $y = 2x^2$. Поэтому по формуле (3):

$$s = \int_{-3/2}^{1} \left((3 - x) - 2x^2\right) dx = \left(3x - \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x^3\right)\Bigg|_{-\frac{3}{2}}^{1} = 5\frac{5}{24}.$$

Пример 2. Найти площадь фигуры *Ф*, ограниченной линиями $y = 2x^2,\ x + y = 3,\ \ y = x^2 - 3x,\ x \geq 0$.

Решение.

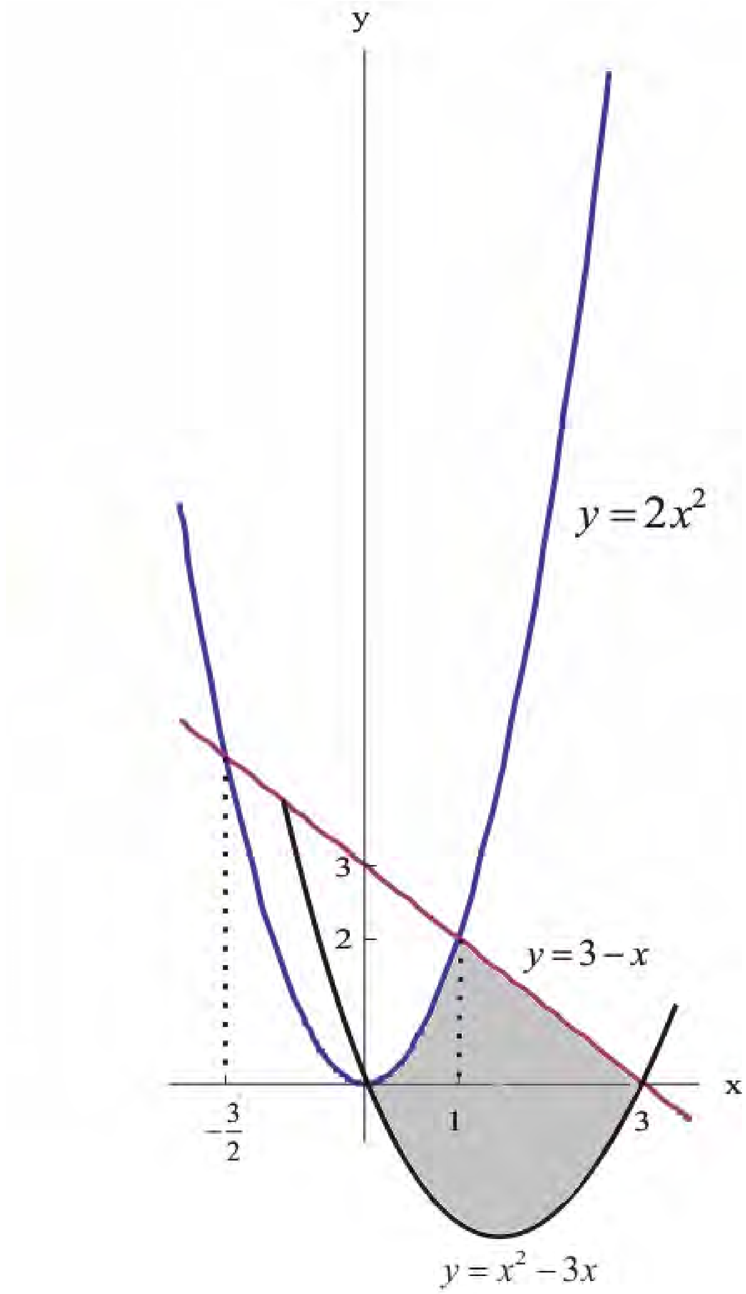


Рис.6. Фигура *Ф*.

Снизу фигура ограничена параболой $y = x^2 - 3x$, сверху – кривой $y = \begin{cases} 2x^2, & x \in [0, 1] \\ 3 - x, & x \in (1, 3] \end{cases}$, заданной двумя аналитическими выражениями.

Поэтому разобьем отрезок интегрирования $[0, 3]$ на два: $[0, 1]$ *и* $[1, 3]$, и

$$s = \int_0^1 \left(2x^2 - (x^2 - 3x)\right)dx + \int_1^3 \left((3 - x) - (x^2 - 3x)\right)dx = \int_0^1 \left(x^2 + 3x\right)dx +$$

$$+\int_1^3 \left(-x^2 + 2x + 3\right)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right)\Bigg|_0^1 + \left(-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x\right)\Bigg|_1^3 = 7\frac{1}{6}.$$

Пример 3. Найти площадь фигуры *Ф*, ограниченной линиями $x = 2y^2,\ x + y = 3$.

Решение.

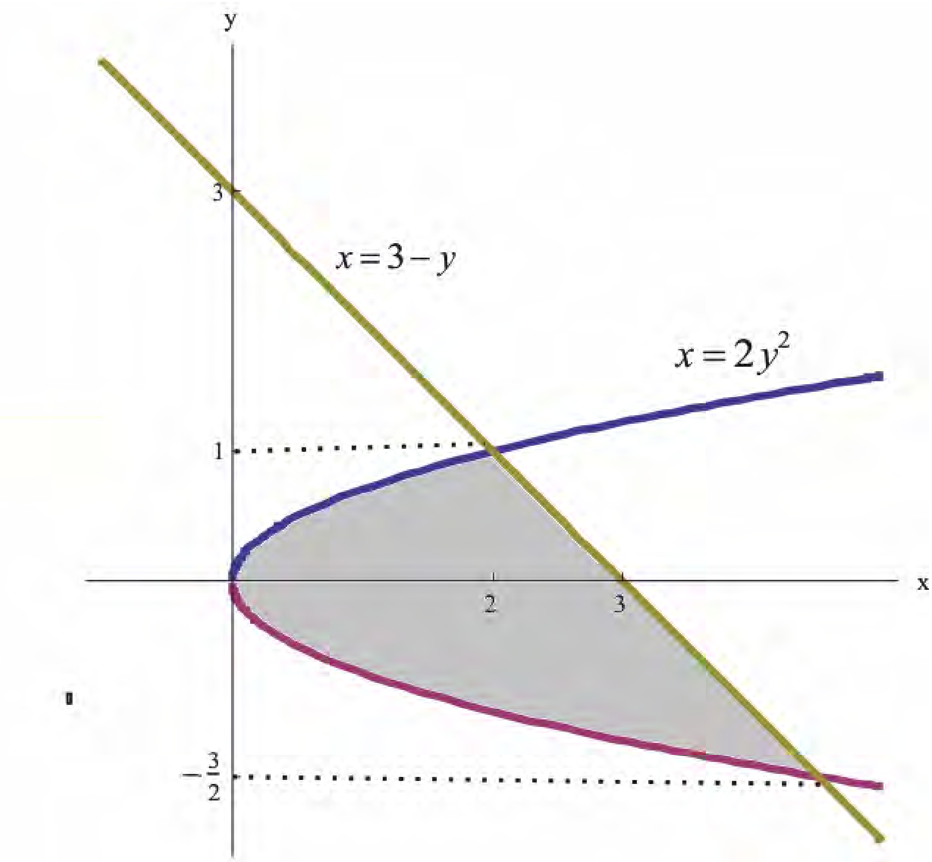


Рис.7. Фигура *Ф*.

Точки пресечения линий $x = 2y^2$ *и* $x = 3 - y$ найдем, решив систему:

$$\begin{cases} x = 2y^2 \\ x = 3 - y \end{cases} \quad \begin{matrix} y_1 = -\frac{3}{2}; & y_2 = 1 \\ x_1 = \frac{9}{2}; & x_2 = 2 \end{matrix}$$

За независимую переменную в данном случае удобно считать y, а x – функцией от *y*.

Справа фигура ограничена прямой $x = 3 - y$, слева – параболой $x = 2y^2$. По формуле (3): $S = \int\limits_{-3/2}^{1} \left((3-y) - 2y^2 \right) dy = 5\frac{5}{24}$ (см. пример 1).

Замечание. Необходимо помнить, что $\int\limits_a^b f(x)dx$, когда функция $y = f(x)$ не является знакопостоянной, равен алгебраической сумме площадей криволинейных трапеций, расположенных выше оси *Ox* (со знаком «+») и ниже оси *Ox* (со знаком «-»).

Пример 4. $\int\limits_0^{\pi} \sin x\, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = 2$.

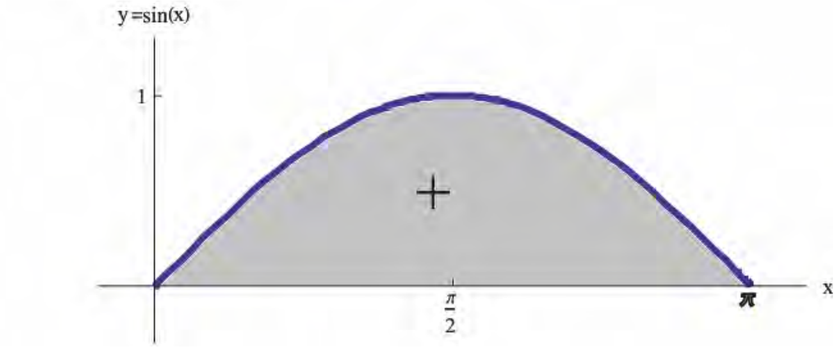


Рис.8. $y = \sin(x),\ 0 \le x \le \pi$.

$\int\limits_0^{2\pi} \sin x\, dx = -\cos x \Big|_0^{2\pi} = 0$

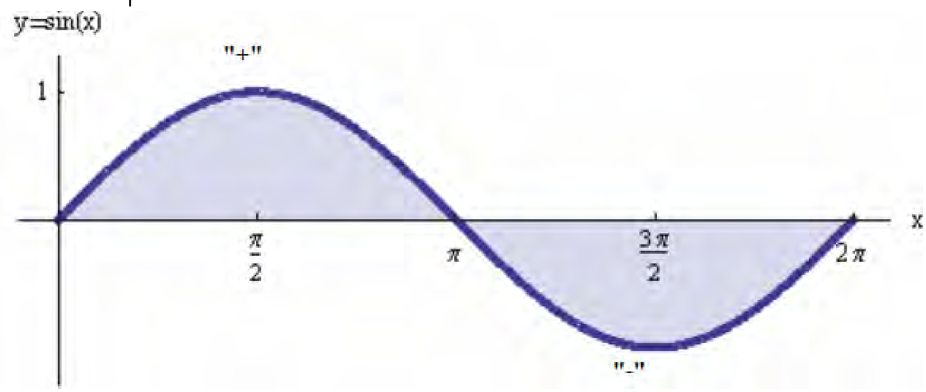


Рис.9. $y = \sin(x),\ 0 \le x \le 2\pi$.

Рассмотрим кривую на плоскости, заданную параметрически в виде $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t_1 \le t \le t_2$, где $x(t)$ и $y(t)$ - непрерывны при $t \in [t_1, t_2]$. Предположим вначале, что кривая не имеет точек самопересечения (**простая кривая**) или образует петлю (если $x(t_1) = x(t_2)$, $y(t_1) = y(t_2)$ - **простая замкнутая кривая**).

Пример 5. а) График любой непрерывной функции

$y = f(x),\ x \in [a; b]$ – простая кривая: $\begin{cases} y = f(x) \\ x = x \end{cases},\ x \in [a, b]$ (в качестве параметра берем x).

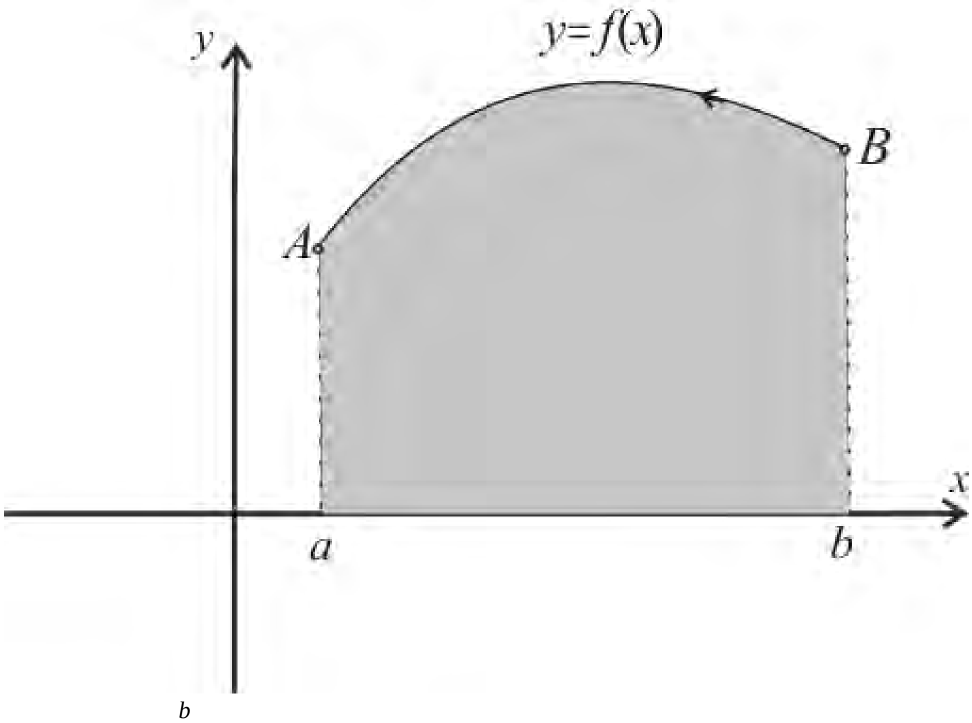
б) График любой непрерывной функции $x = f(y),\ y \in [c; d]$ – простая кривая: $\begin{cases} x = f(y) \\ y = y \end{cases},\ y \in [c, d]$ (в качестве параметра берем y).

в) Эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ – простая замкнутая кривая:

$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases},\ 0 \le t \le 2\pi$ (см. пример 8 § 17).

г) Кривая $\begin{cases} x = \cos 2\varphi \cdot \cos\varphi \\ y = \cos 2\varphi \cdot \sin\varphi \end{cases},\ \varphi \in [0, 2\pi]$ (см. пример 10 §17) не является простой (имеет точки самопересечения при $\varphi = \dfrac{\pi}{4}(2k-1),\ k = 1, 2, 3, 4$).

Рассмотрим криволинейную трапецию $\Phi = \{(x, y) \mid a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}$



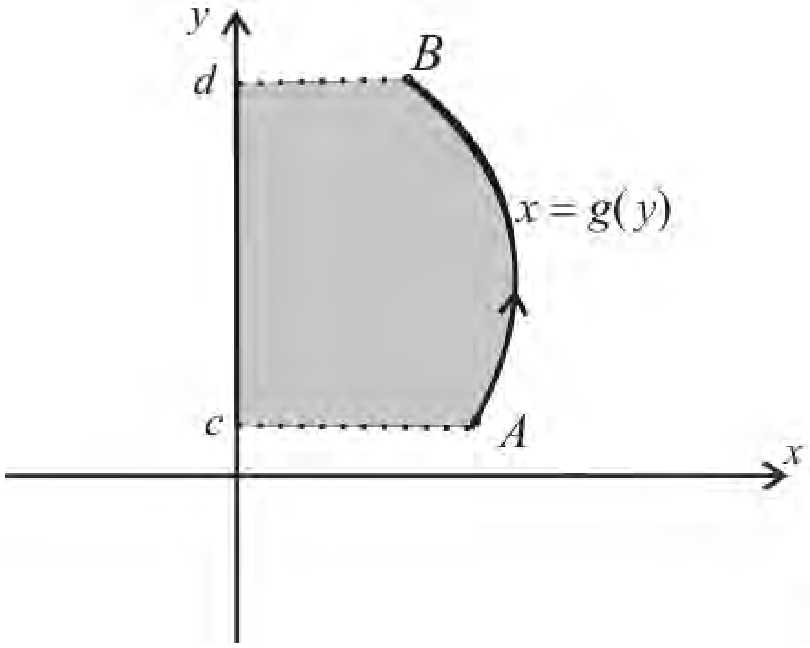
Площадь трапеции $S_\Phi = \int\limits_a^b f(x)dx$. Пусть $x = x(t),\ t_A \le t \le t_B$, где $x(t)$ – непрерывно-дифференцируема на промежутке $[t_A, t_B]$. Тогда по формуле (1) § 26:

$$S_\Phi = \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{t_A}^{t_B} f(x(t)) \cdot x'(t)dt = \int\limits_{t_A}^{t_B} y(t) \cdot x'(t)dt, \tag{4}$$

где $\begin{cases} x = x(t) \\ y = f(x(t)) = y(t) \end{cases}$, $t_A \le t \le t_B$. Таким образом

$$S_\Phi = -\int_{t_B}^{t_A} y(t)\cdot x'(t)dt \qquad (5)$$

(кривую удобно обходить так, чтобы область *Φ* оставалась слева).
Аналогично, для криволинейной трапеции $\Phi_1 = \{(x,y) \mid c \le y \le d,\, 0 \le x \le g(y)\}$



$S_{\Phi_1} = \int_c^d g(y)dy$, $\begin{cases} x = g(y) \\ y = y \end{cases}$, $y \in [c,\, d]$.И если $y = y(t),\, t_A \le t \le t_B$,где $y(t)$ - непрерывно-дифференцируемая на промежутке $[t_A, t_B]$ функция, то

$$S_{\Phi_1} = \int_{t_A}^{t_B} g(y(t))\cdot y'(t)dt = \int_{t_A}^{t_B} x(t)\cdot y'(t)dt \qquad , \qquad (6)$$

где $\begin{cases} x = g(y(t)) = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t_A \le t \le t_B$. При движении от *A* к *B* область остается слева.

Рассмотрим простую замкнутую кривую $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t_1 \le t \le t_2$, $x(t_1) = x(t_2), y(t_1) = y(t_2)$. Площадь Ф, которую она ограничивает можно находить как по формуле (5), так и по формуле (6):

$$S_\Phi = -\int_{t_1}^{t_2} y(t)\cdot x'(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} x(t)\cdot y'(t)dt,$$

а также по формуле:

$$S_\Phi = \frac{1}{2}\cdot\int_{t_1}^{t_2} \left(-y(t)\cdot x'(t) + x(t)\cdot y'(t)\right)dt, \qquad (7)$$

и при изменении параметра t от t_1 до t_2 полный обход контура проходит против часовой стрелки (область остается слева).

Пример 6. $y = \dfrac{1}{1+\sqrt{x+1}}, \quad x \in [0,3]$.

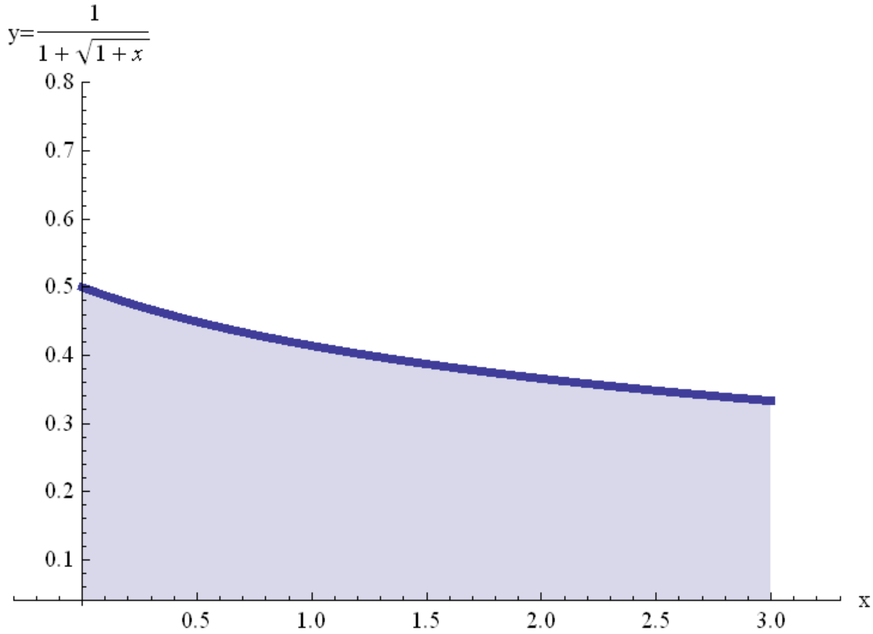


Рис.10. График функции $y = \dfrac{1}{1+\sqrt{x+1}}, \quad x \in [0,3]$.

Найдем площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции и прямыми $x = 0$ и $x = 3$.

$S = \int_0^3 \dfrac{dx}{1+\sqrt{x+1}} = 2 - 2\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$ (см. пример 1 § 26).

С другой стороны кривая задается параметрически в виде:

$$\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = \dfrac{1}{1+t} \end{cases}, \quad t_A \le t \le t_B, \quad t_A = 1, \ t_B = 2 \ .$$

Поэтому, по формуле (5) $\qquad S = -\int_2^1 \dfrac{1}{1+t} \cdot 2t dt = 2 - 2\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

Упражнение 1. В условиях примера 6 найти ту же площадь по формуле (6).

Пример 7. Найдем площадь ограниченную эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

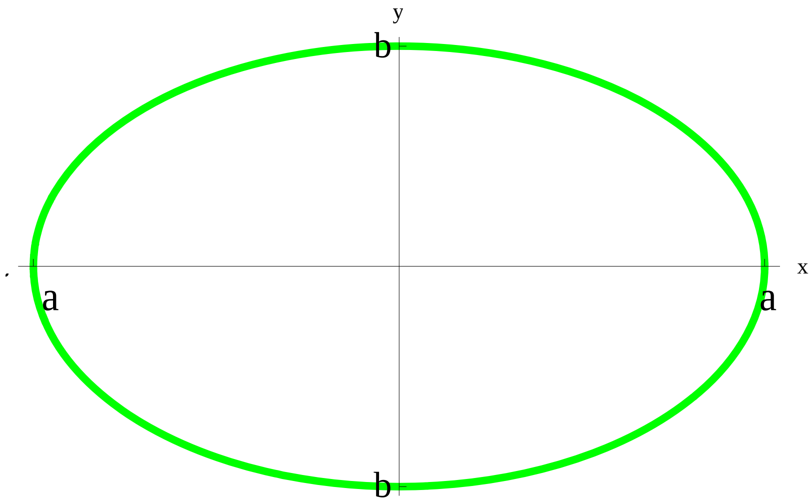


Рис.11. Эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$ - параметрическое уравнение эллипса.

Решение. Найдем площадь по формуле (7)

$$x' = -a\sin t;\ y' = b\cos t;\ t_1(A) = 0;\ t_2(A) = 2\pi$$

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left((-b\sin t)(-a\sin t) + a\cos t\cdot b\cos t\right)dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} abdt = \frac{1}{2}ab\cdot t\Big|_0^{2\pi} = \pi ab$$

Пример 8. Найти площадь петли кривой: $\begin{cases} x = t(1-t^2) \\ y = t^2 \end{cases}$.

Решение: $y = t^2 -$ четная относительно t функция, $x = t(1-t^2) -$ нечетная, поэтому кривая симметрична относительно оси Oy.

$$x = t(1-t^2) = 0 \Rightarrow t = 0,\ t = \pm 1.$$

$\left(x(1);\ y(1)\right) = \left(x(-1);\ y(-1)\right) = (0,1) -$ точка самопересечения кривой.

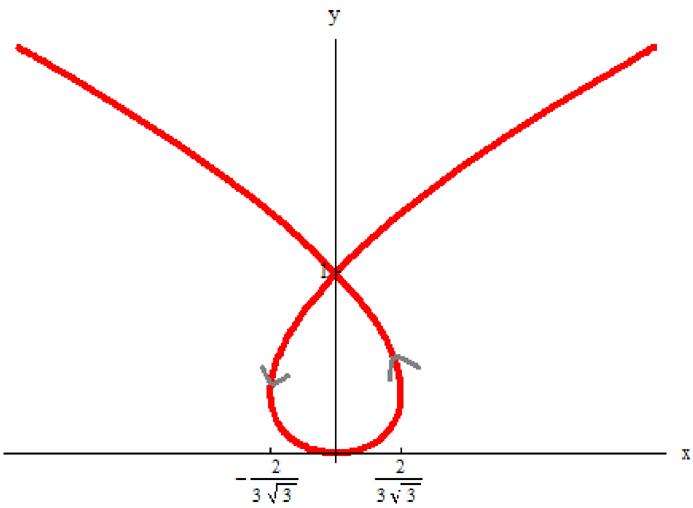


Рис.12. Кривая $\begin{cases} x = t(1-t^2) \\ y = t^2 \end{cases}$.

При изменении t от -1 до 1 обход контура проходит против часовой стрелки.

По формуле (6): $S = \int\limits_{-1}^{1} t\left(1-t^2\right)\cdot 2tdt = 2\int\limits_{-1}^{1}\left(t^2-t^4\right)dt = 2\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = 4\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) = \frac{8}{15}$.

Рассмотрим замкнутую кривую, имеющую точки самопересечения. В этом случае, проинтегрировав по всему контуру в формулах (5) – (7), мы получим алгебраическую сумму площадей фигур, ограниченных каждой пройденной петлей взятых со знаком «+», если петля проходится против часовой стрелки, и со знаком «-», если петля проходится по часовой стрелке.

Пример 9. Рассмотрим кривую $\begin{cases} x = \cos 2\varphi\cdot\cos\varphi \\ y = \cos 2\varphi\cdot\sin\varphi \end{cases}$, $\varphi \in [0,\, 2\pi]$.

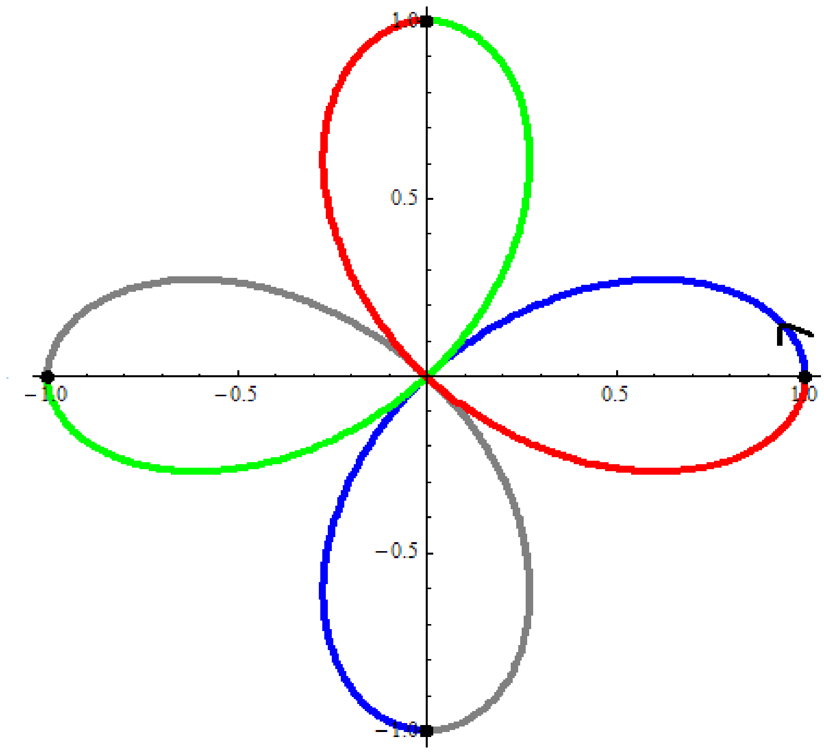


Рис.13. Кривая $\begin{cases} x = \cos 2\varphi \cdot \cos\varphi \\ y = \cos 2\varphi \cdot \sin\varphi \end{cases}, \quad \varphi \in [0,\ 2\pi].$

$A\big(x(0), y(0)\big) = (1,0)$. При изменении φ от 0 до 2π каждый лепесток кривой проходится против часовой стрелки, поэтому $\int\limits_0^{2\pi} x(t)\cdot y'(t)dt = \frac{\pi}{2}$ - площадь ограниченная четырьмя лепестками.

Площадь одного лепестка: $2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x(t)\cdot y'(t)dt = \frac{\pi}{8}$. Вычисления проводим в пакете Mathematica:

Ячейка Input:

```
x[t_] := Cos[2t]*Cos[t]
y[t_] := Cos[2t]*Sin[t]
   2 Pi
          x t   y' t     t
  0
```

Ячейка Output:

$\frac{\pi}{2}$

Иногда удобнее найти площадь одного лепестка и результат умножить на количество лепестков.

Пример 10. Рассмотрим кривую $\begin{cases} x = \sin 3\varphi \cdot \cos\varphi \\ y = \sin 3\varphi \cdot \sin\varphi \end{cases}, \quad \varphi \in [0,\ 2\pi].$

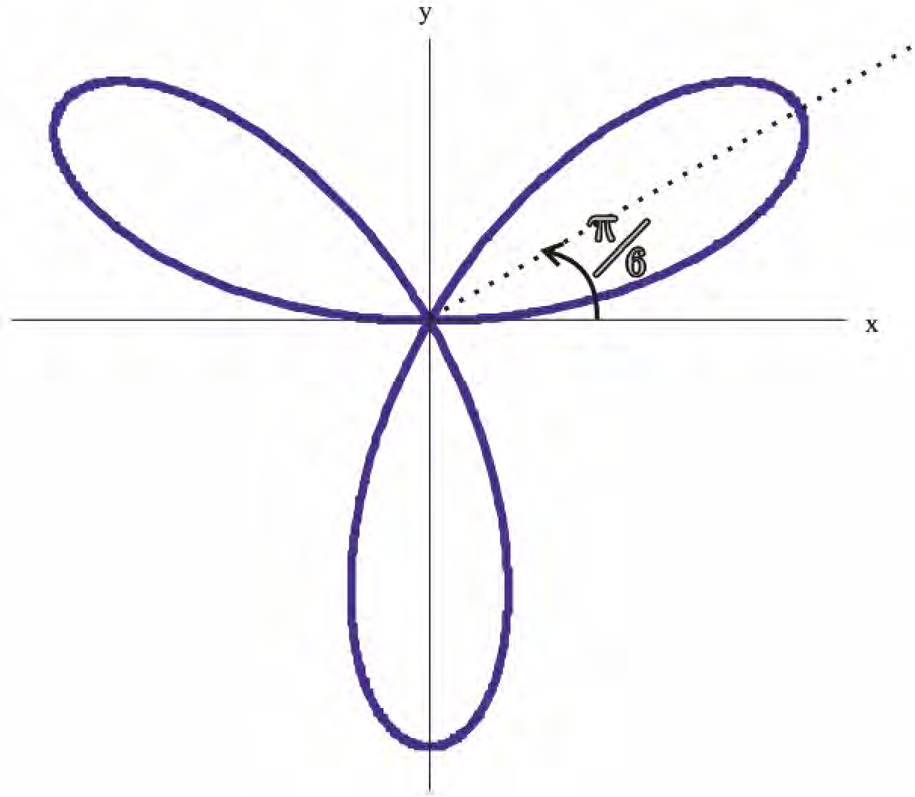


Рис.14. Кривая $\begin{cases} x = \sin 3\varphi \cdot \cos\varphi \\ y = \sin 3\varphi \cdot \sin\varphi \end{cases}$, $\varphi \in [0,\, 2\pi]$.

При изменении φ от 0 до 2π каждый лепесток проходится дважды (и оба раза против часовой стрелки); $\int\limits_0^{2\pi} x(t) \cdot y'(t)dt = \frac{\pi}{2}$. Площадь одного лепестка : $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} x(t) \cdot y'(t)dt = \frac{\pi}{12}$, площадь всей фигуры равна $\frac{\pi}{4}$.

Пример 11. Рассмотрим кривую $\begin{cases} x = \left(\cos\varphi + \frac{1}{2}\right) \cdot \cos\varphi \\ y = \left(\cos\varphi + \frac{1}{2}\right) \cdot \sin\varphi \end{cases}$, $\varphi \in [0,\, 2\pi]$.

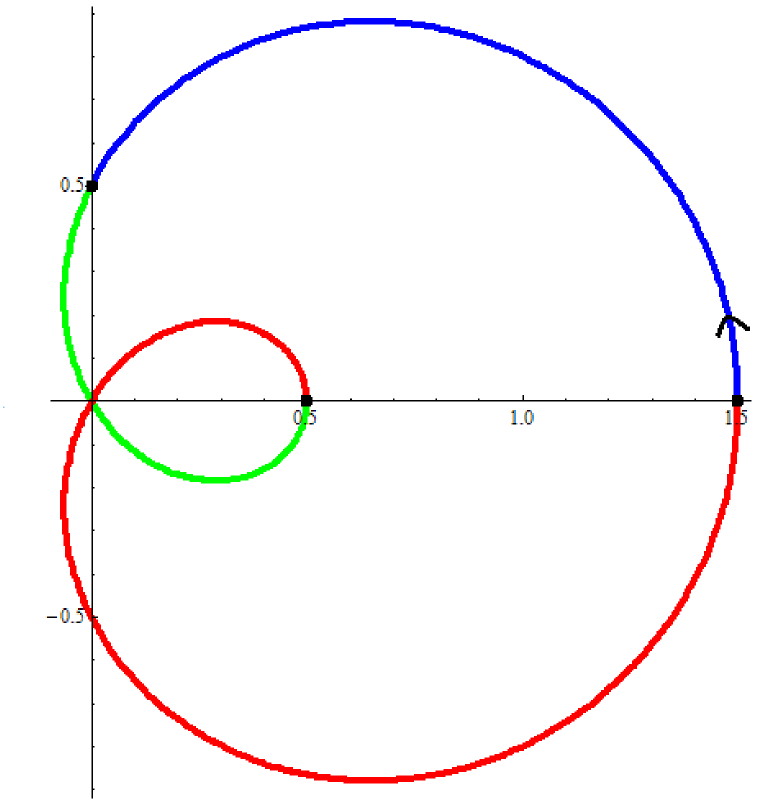


Рис.15. Кривая $\begin{cases} x=\left(\cos\varphi+\dfrac{1}{2}\right)\cdot\cos\varphi \\ y=\left(\cos\varphi+\dfrac{1}{2}\right)\cdot\sin\varphi \end{cases}$, $\varphi\in[0,\,2\pi]$

Фигура, ограниченная малой петлей обходится дважды (и оба раза против часовой стрелки). Площадь, ограниченная внешним контуром:

$S_{\Phi}=2\int\limits_0^{\frac{2\pi}{3}}x(t)\cdot y'(t)dt=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{3}{8}\sqrt{3}$.Площадь ограниченная внутренним контуром:

$S_{\Phi_1}=\int\limits_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}}x(t)\cdot y'(t)dt=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{3}{8}\sqrt{3}$; $\quad\int\limits_0^{2\pi}x(t)\cdot y'(t)dt=\dfrac{3\pi}{4}=S_{\Phi}+S_{\Phi_1}$.

Пример 12. Рассмотрим кривую

$$(x,y)=\begin{cases}(\sin 2\varphi\cdot\cos\varphi,\ \sin 2\varphi\cdot\sin\varphi),\ \varphi\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]\\ (-\sin 2\varphi\cdot\cos\varphi,\ \sin 2\varphi\cdot\sin\varphi),\ \varphi\in\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]\end{cases}.$$

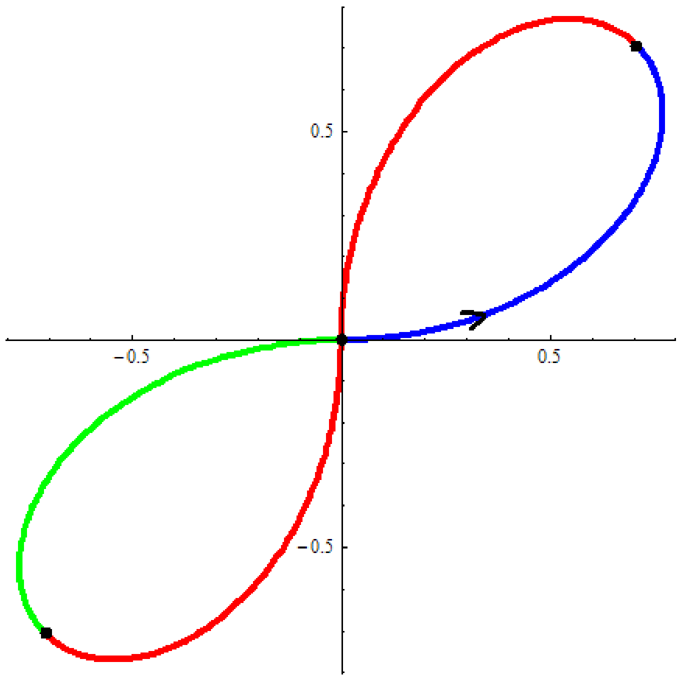


Рис.16. Кривая $(x,y)=\begin{cases}(\sin 2\varphi\cdot\cos\varphi,\ \sin 2\varphi\cdot\sin\varphi),\ \varphi\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]\\(-\sin 2\varphi\cdot\cos\varphi,\ \sin 2\varphi\cdot\sin\varphi),\ \varphi\in\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]\end{cases}$.

Один лепесток проходится по часовой стрелке, второй – против: $\int\limits_0^{\pi} x(t)\cdot y'(t)dt=0$. Площадь одного лепестка: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x(t)\cdot y'(t)dt=\dfrac{\pi}{8}$.

Упражнения к § 30.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной указанными линиями.

30.1. $y=\dfrac{x}{2}+1,\ y=\cos x,\ y=0$;

30.2. $y=2^x-1,\ y=2x-x^2,\ x=2$;

30.3. $y=\cos^3 t,\ x=\sin^3 t$;

30.4. $y^2=2x,\ x=\dfrac{16}{y^2+4}$;

30.5. $yx\ge 6,\ x+y-7=0,\ x+y-5=0$;

30.6. $x=y^2,\ x=2y-y^2$;

30.7. $\begin{cases}x=2(\cos t+t\sin t)\\ y=2(\sin t-t\cos t)\end{cases}\quad 0\le t\le 2\pi,\quad \begin{cases}x=2\\-4\pi\le y\le 0\end{cases}$;

30.8. $y^2=3x,\ x^2=3y$;

30.9. $y\ge\sqrt{x},\ y\le x^2, x+y=6$;

30.10. $x=5\cos^3 t,\ y=5\sin^3 t$;

30.11. $y=x,\ y=2x,\ x+y-6=0$;

30.12. $y=x^2,\ x=0,\ x+y-2=0, x\ge 0$;

30.13. $y=x^2,\ y=0,\ x+y-2=0$;

30.14. $xy=4,\ y=2, y=4, x=0$;

30.15. $y=(x+2)^2,\ \ x+y-4=0$;

30.16. $y=-x^2,\ \ x-y=2$;

30.17. $y=\left|\log_2 x\right|,\ y=0, x=8, x=\dfrac{1}{8}$.

30.18. $x=t-\sin t,\ \ y=1-\cos t,\ \ y=0,\ (0\le t\le 2\pi)$;

30.19. $y=x\cdot\ln x,\ \ y=x\cdot\ln^2 x$;

Найти площадь петли кривой. Построить график кривой в системе Mathematica:

30.20. $\begin{cases} x=2t+t^2 \\ y=2t^2+t^3 \end{cases}$; **30.21.** $\begin{cases} x=3t^2 \\ y=t(3-t^2) \end{cases}$;

30.22; $\begin{cases} x=4t-t^3 \\ y=4t^2 \end{cases}$; **30.23.** $\begin{cases} x=t^2-1 \\ y=t(t^2-4) \end{cases}$.

30.20. Даны кривые

а) $\begin{cases} x=2\sin 2\varphi\cdot\cos\varphi \\ y=2\sin 2\varphi\cdot\sin\varphi \end{cases}$, **б)** $\begin{cases} x=3\cos 5\varphi\cdot\cos\varphi \\ y=3\cos 5\varphi\cdot\sin\varphi \end{cases}$, $0\le\varphi\le 2\pi$.

1) Построить графики кривых в системе Mathematica;

2) Вычислить в системе Mathematica $\int\limits_0^{2\pi} x(t)\cdot y'(t)\cdot dt$,(см.пример 9);

3) Найти площадь ограниченную одним лепестком и площадь ограниченную всей кривой.

Ответы на упражнения к § 30.

30.1. 2; **30.2.** $\dfrac{2}{\ln 2}-\dfrac{5}{3}$; **30.3.** $\dfrac{3\pi}{8}$;

30.4. $4\pi-\dfrac{8}{3}$; **30.5.** $15-6\ln 4$; **30.6.** 1/3;

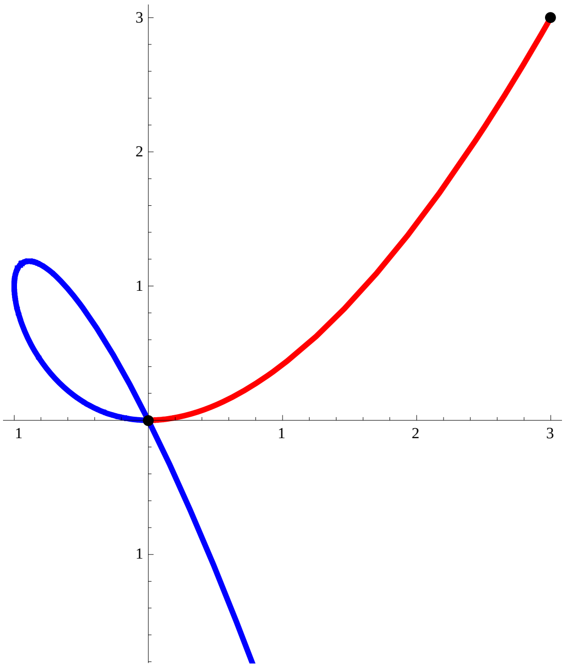
30.7. $4\pi+\dfrac{16\pi^3}{3}$; **30.8.** 3; **30.9.** 11/3;

30.10. $\dfrac{75\pi}{8}$. **30.11.** 6; **30.12.** $\dfrac{7}{6}$;

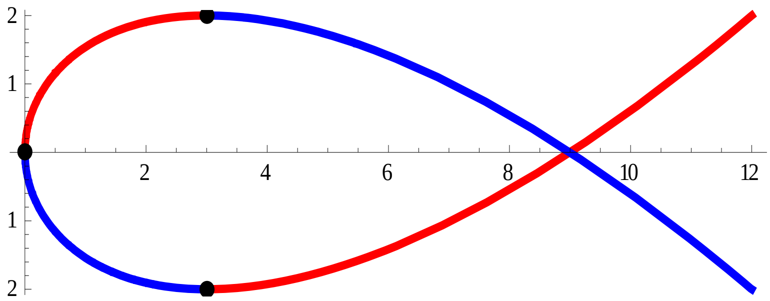
30.13. $\frac{5}{6}$; **30.14.** $4\cdot\ln 2$; **30.15.** $\frac{125}{6}$;

30.16. $\frac{27}{6}$; **30.17.** $\frac{189}{8}-\frac{49}{8\ln 2}$; **30.18.** 3π;

30.19. 0.5.

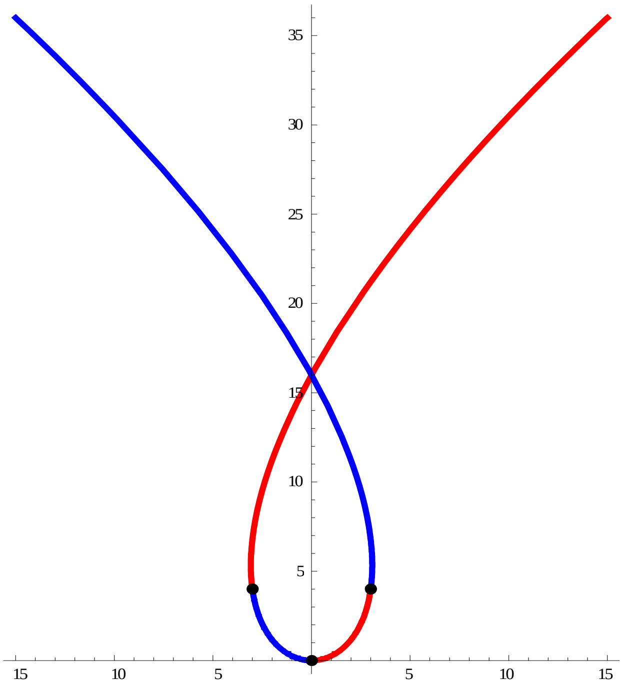


30.20. $S=\frac{8}{15}$



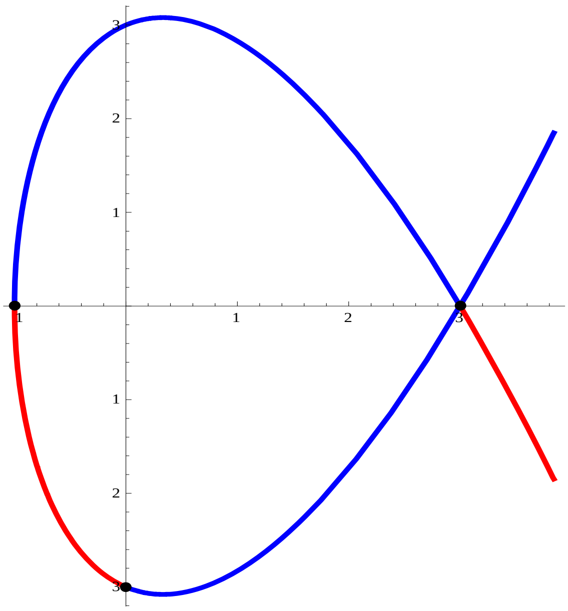
30.21. $S=\frac{72}{5}\sqrt{3}$

30.22.



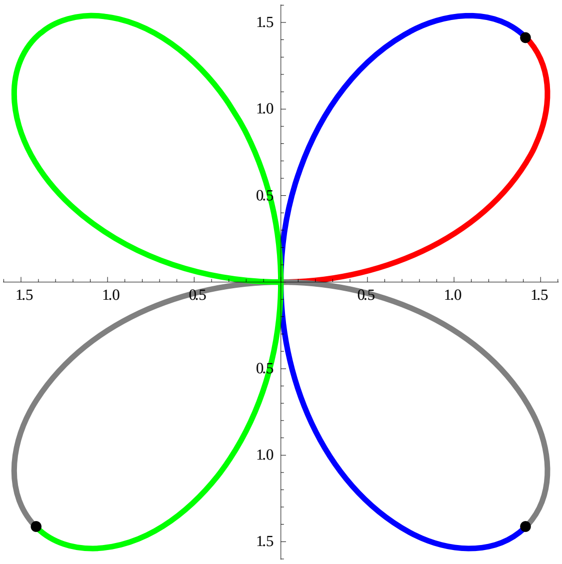
$$S = \frac{1024}{15};$$

30.23.



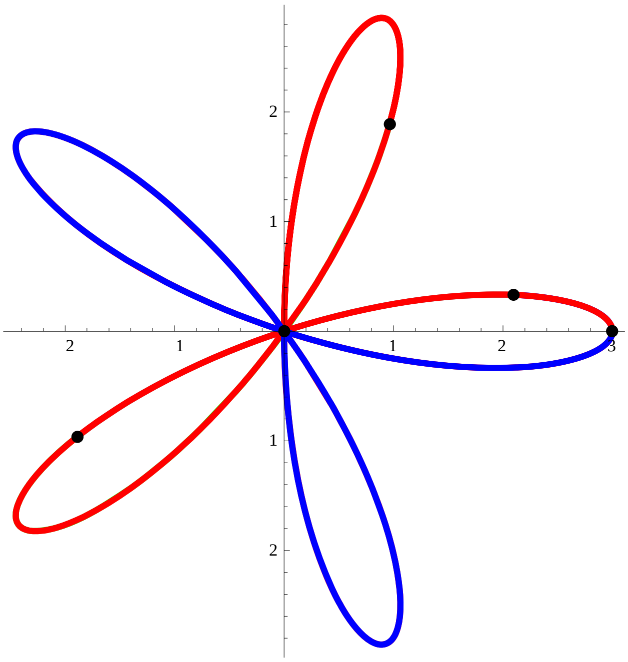
$$S = \frac{128}{15}$$

30.24.



$2\pi;\ \dfrac{\pi}{2};\ 2\pi$

30.25.



$\dfrac{9\pi}{2},\ \dfrac{9\pi}{20},\ \dfrac{9\pi}{4}$.

§ 31. Полярная система координат.

Определение 1. Рассмотрим плоскость с прямоугольной декартовой системой координат *Oxy*. Пусть *M(x, y)* – точка на плоскости, $M \neq 0$. Полярными координатами точки *M* называются числа $r -$ длина ее радиус-вектора (полярный радиус) и $\varphi -$ угол, образованный радиус-вектором с положительным направлением оси *Ox* (полярный угол), $0 \leq \varphi < 2\pi$. Точка *O* при этом называется полюсом, а полуось *Ox* – полярной осью.

Замечание. Зависимость между прямоугольными *(x, y)* и полярными (φ, r) координатами точки *M* задается в виде:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\varphi \\ y = r \cdot \sin\varphi \end{cases} \qquad (1)$$

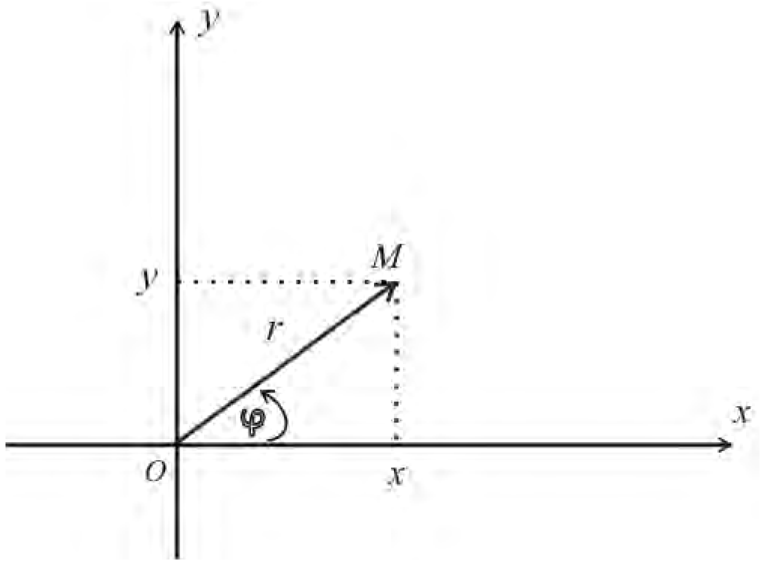
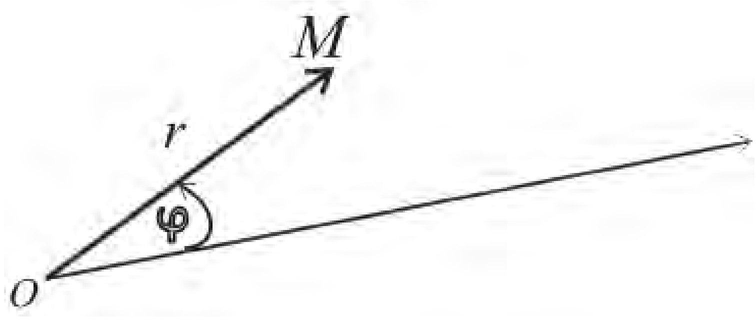


Рис.1. Полярные координаты точки.

Полярный полюс *O* и полярную ось можно выбрать на плоскости и не вводя прямоугольную систему координат:



Пример 1. Построим на плоскости линию, заданную уравнением:

$r^2 = a^2 \cos 2\varphi,\ a > 0 -$ лемниската.

Решение. $r^2 \geq 0 \Rightarrow \cos 2\varphi \geq 0 \Rightarrow \varphi \in \left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right]$.

Вычислим значения r при различных значениях φ:

φ	0	$\pm\frac{\pi}{6}$	$\pm\frac{\pi}{8}$	$\pm\frac{\pi}{4}$	$\pm\frac{\pi}{12}$
r	a	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{\sqrt[4]{2}}$	0	$\frac{a\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}$

Проводим лучи из начала координат под углами φ к оси Ox и на них откладываем отрезки длины r, получим :

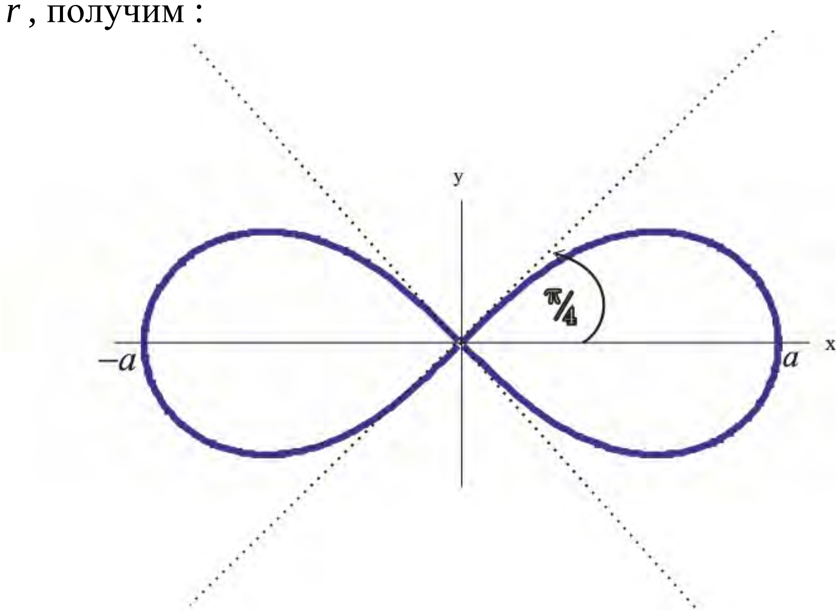


Рис.3. Лемниската $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

Пример 2. а) Построим кривую $r = a(1+\cos\varphi) -$ кардиоида. Рассуждая, как в примере 1 получим:

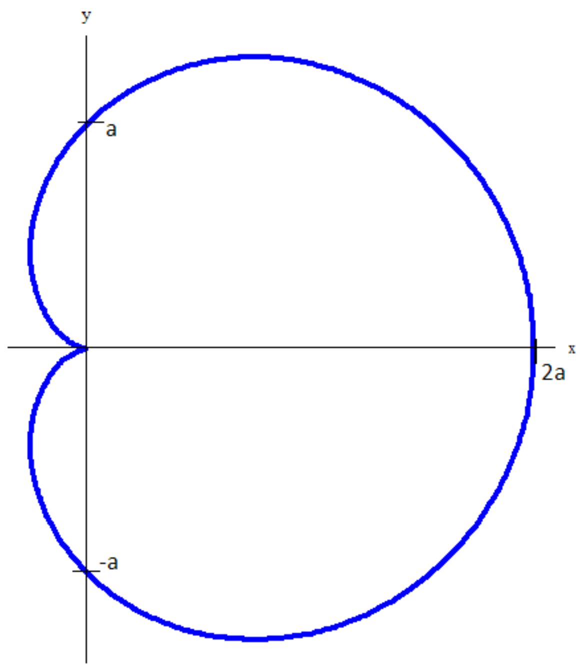


Рис.4. Кардиоида $r = a(1+\cos\varphi)$.

б) $r = a-$ окружность.

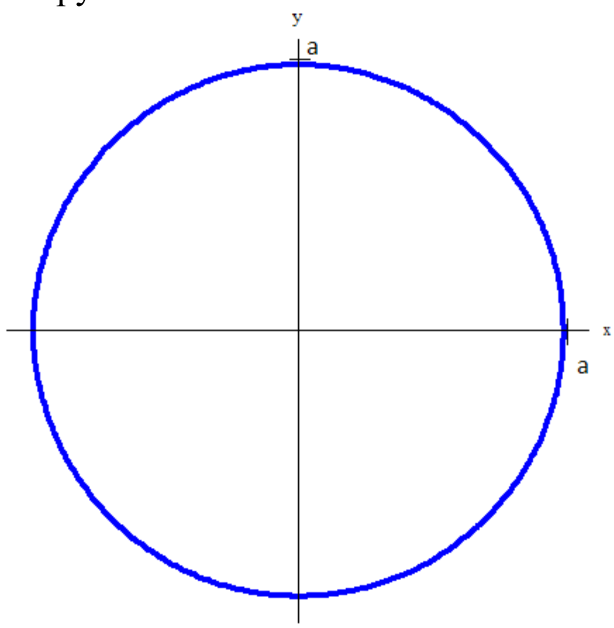


Рис.5. Окружность $r = a$.

в) $r = a\cdot\varphi-$ спираль Архимеда.

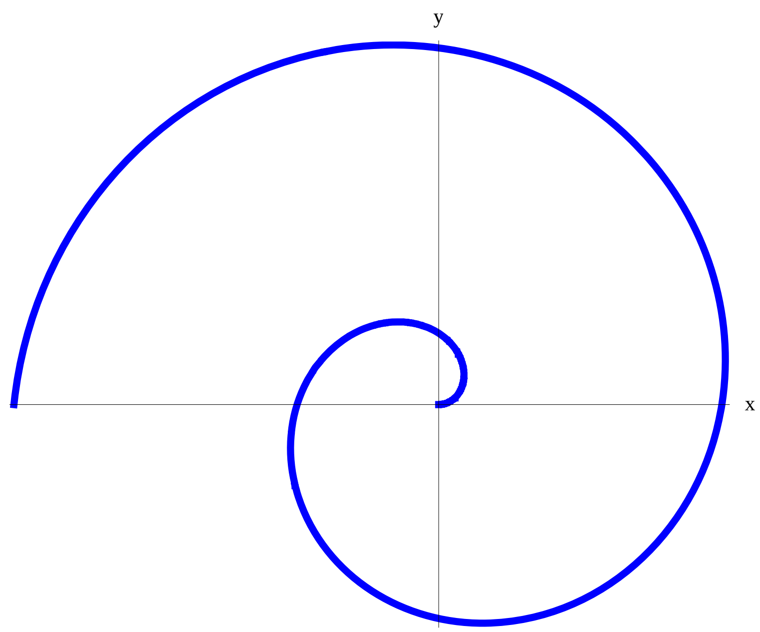


Рис.6. Спираль Архимеда $r = a \cdot \varphi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$.

г) $r = a\sin 3\varphi -$ трехлепестковая роза.

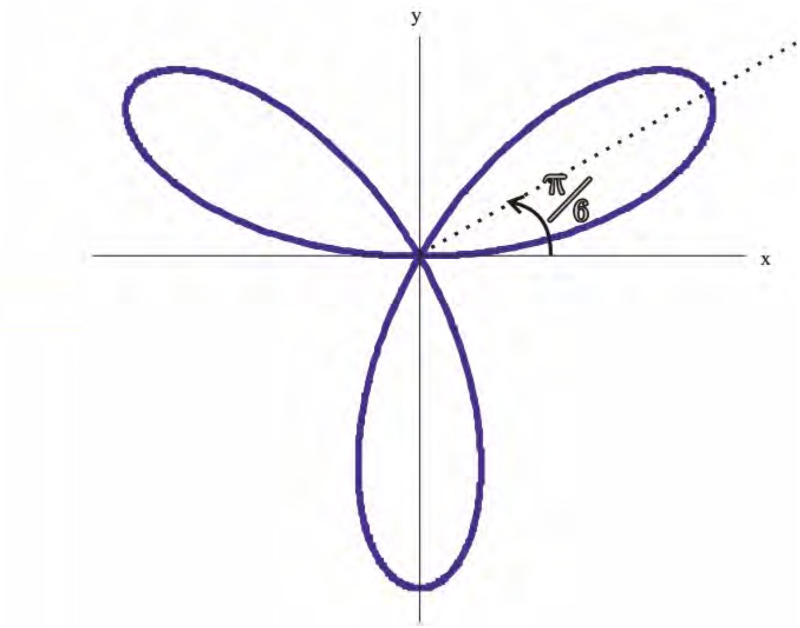
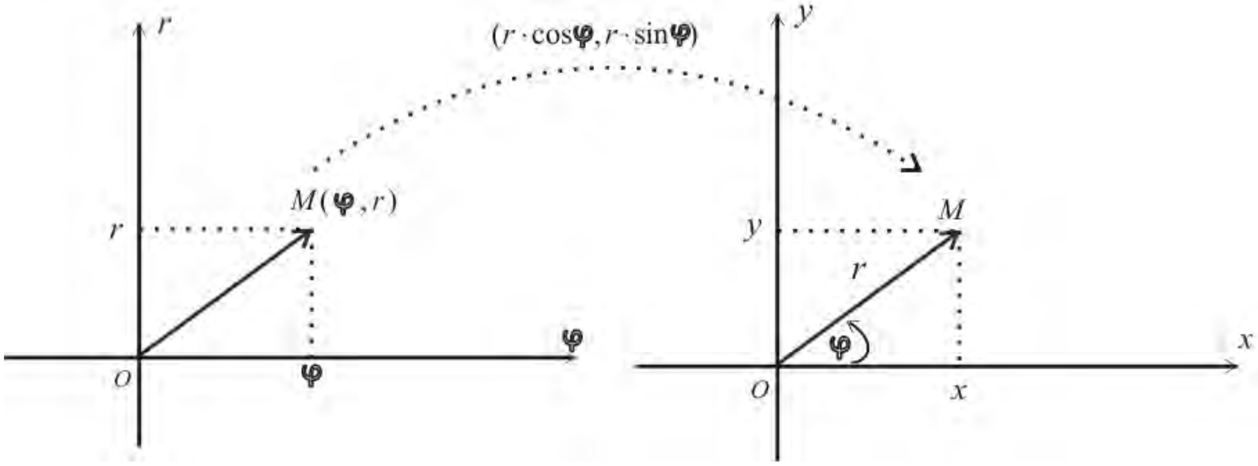


Рис.7. Трехлепестковая роза $r = a\sin 3\varphi$.

Упражнение 1. Построить графики из примеров 1 и 2 в системе Mathematica (использовать функцию PolarPlot, см.пример 10 § 17).

Замечание. Если в определении 1 отбросить требование $0 \le \varphi < 2\pi$ и не требовать $r > 0$, то формулы (1) будут задавать непрерывное отображение точек плоскости (φ, O, r) на точки плоскости (x, O, y).



При этом, если $r > 0$, то векторы $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ и $(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ сонаправлены, если $r < 0$, то – противоположно направлены:

Тогда, с учетом (1), кривую $r = r(\varphi)$ можно рассматривать как заданную параметрически в виде: $\begin{cases} x = r(\varphi) \cdot \cos\varphi \\ y = r(\varphi) \cdot \sin\varphi \end{cases}$, $\varphi -$ параметр.

В этом случае на кривой $r = \cos 2\varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ получаются два дополнительных лепестка, когда $\varphi \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ и $\varphi \in \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$, соответствующие случаю $r < 0$

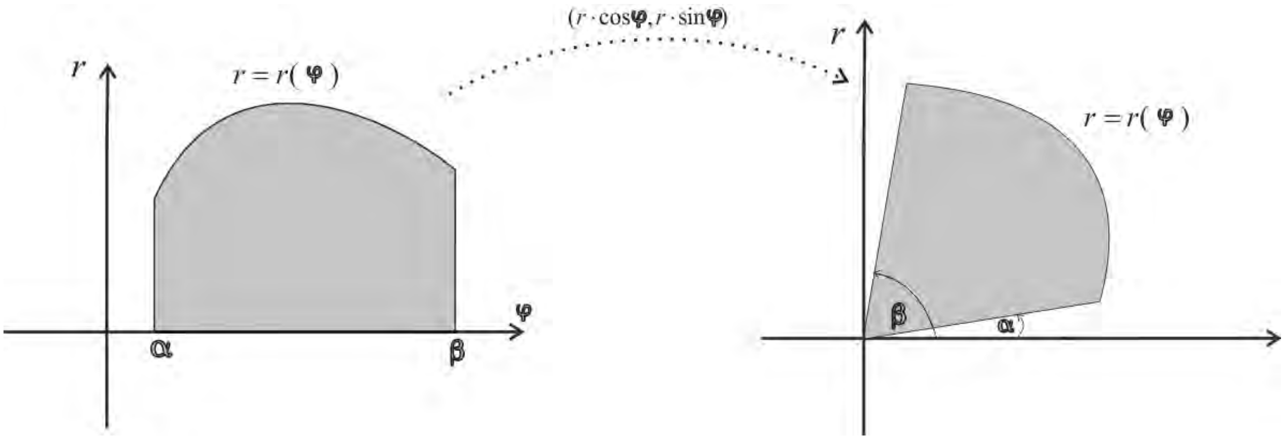
(см.пример 10 § 17). Фактически, такая кривая – это параметрическая кривая: $\begin{cases} x = \cos 2\varphi \cdot \cos\varphi \\ y = \cos 2\varphi \cdot \sin\varphi \end{cases}$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ (см.пример 9 § 30).

На кривой $r = \sin 3\varphi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$ каждый из лепестков проходится дважды и задается параметрически формулами:

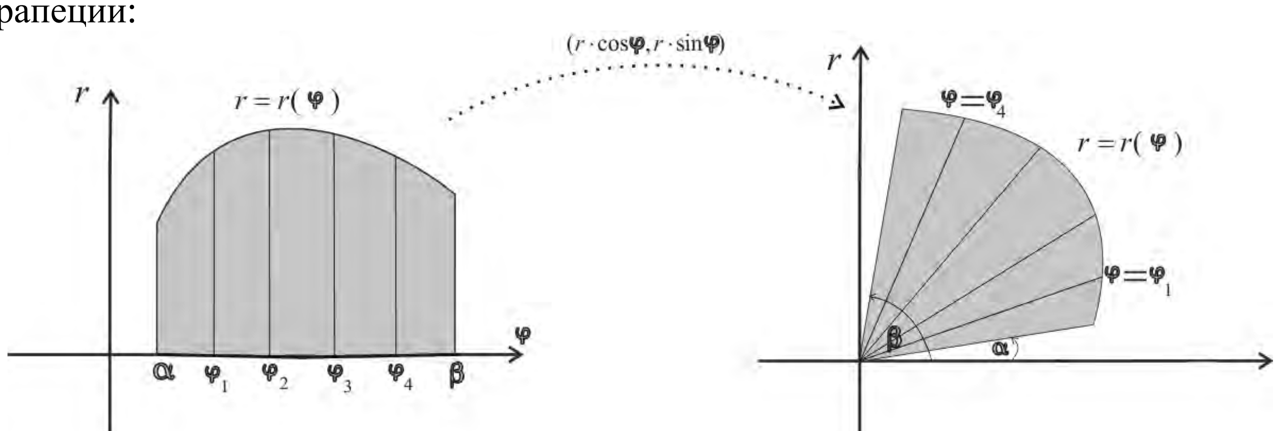
$$\begin{cases} x = \sin 3\varphi \cdot \cos\varphi \\ y = \sin 3\varphi \cdot \sin\varphi \end{cases}, \quad \varphi \in [0, 2\pi] \text{ (см.пример 10 § 30).}$$

Упражнение 2. Используя команду PolarPlot построить графики $r = \cos 2\varphi$, $r = \sin 3\varphi$, $r = \frac{1}{2} + \cos\varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ (сравни с примерами 9 – 11 § 30).

Пусть $r = r(\varphi)$ – кривая в полярной системе координат, $r(\varphi)$ – непрерывна при $\varphi \in [\alpha, \beta] \subset [0, 2\pi)$. Рассмотрим на плоскости (x, O, y) криволинейный сектор $\Phi = \{(\varphi, r) \mid \alpha \le \varphi \le \beta,\ 0 \le r \le r(\varphi)\}$. Найдем его площадь. Заметим, что сектору Φ соответствует обычная криволинейная трапеция на плоскости (φ, O, r)



Разобьем фигуру Φ на n частичных фигур лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \varphi_1$, …, $\varphi = \varphi_{n-1}$, $\varphi = \beta$, $\alpha < \varphi_1 < ... < \varphi_{n-1} < \beta$. На плоскости (φ, O, r) получаем обычное разбиение трапеции:



Рассмотрим, например, нижние суммы Дарбу:

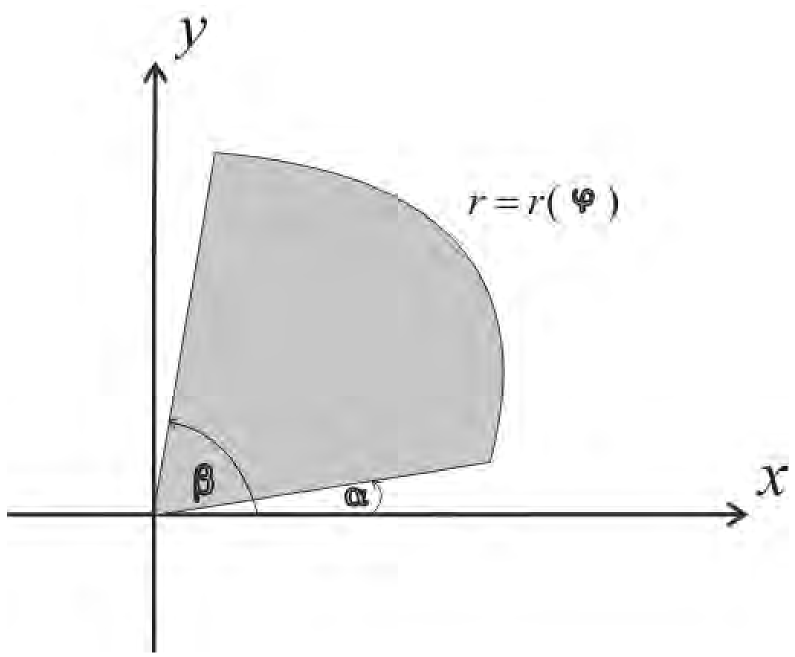


Рис.8. Нижняя сумма Дарбу $\underline{s}(\tau_5)$.

Каждое слагаемое в нижней сумме $\underline{S}$ равно площади ΔS_k обычного кругового сектора радиуса $r_k = \inf\limits_{\varphi\in[\varphi_{k-1},\,\varphi_k]} r(\varphi)$; $\Delta S_k = \dfrac{\pi r_k^2}{2\pi}\Delta\varphi_k = \dfrac{1}{2}r_k^2\cdot\Delta\varphi_k$, где $\Delta\varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$; таким образом,

$$\underline{s} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}r_k^2\Delta\varphi_k - \qquad (2)$$

для нижних сумм и

$$\bar{s} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}R_k^2\Delta\varphi_k - \qquad (3)$$

для верхних сумм Дарбу, где $R_k = \sup\limits_{\varphi\in[\varphi_{k-1},\,\varphi_k]} r(\varphi)$. Суммы (2) и (3) – суммы Дарбу для функции $\dfrac{1}{2}r^2(\varphi)$ (см.формулы (5) § 24), поэтому

$$S_\Phi = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi \qquad (4)$$

Пример 3. Найти площадь ограниченную лемнискатой $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ (см.пример 1).

Решение. По формуле (4):

$S = \dfrac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r^2(\varphi)d\varphi = \dfrac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\varphi d\varphi = \dfrac{a^2}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \dfrac{a^2}{2} -$ площадь одного лепестка.

Поэтому $S(\Phi) = a^2$.

Пример 4. Найти площадь фигуры ограниченной линиями: $r = a(1+\cos\varphi)$ и $r = \frac{3}{2}a$ (вне круга).

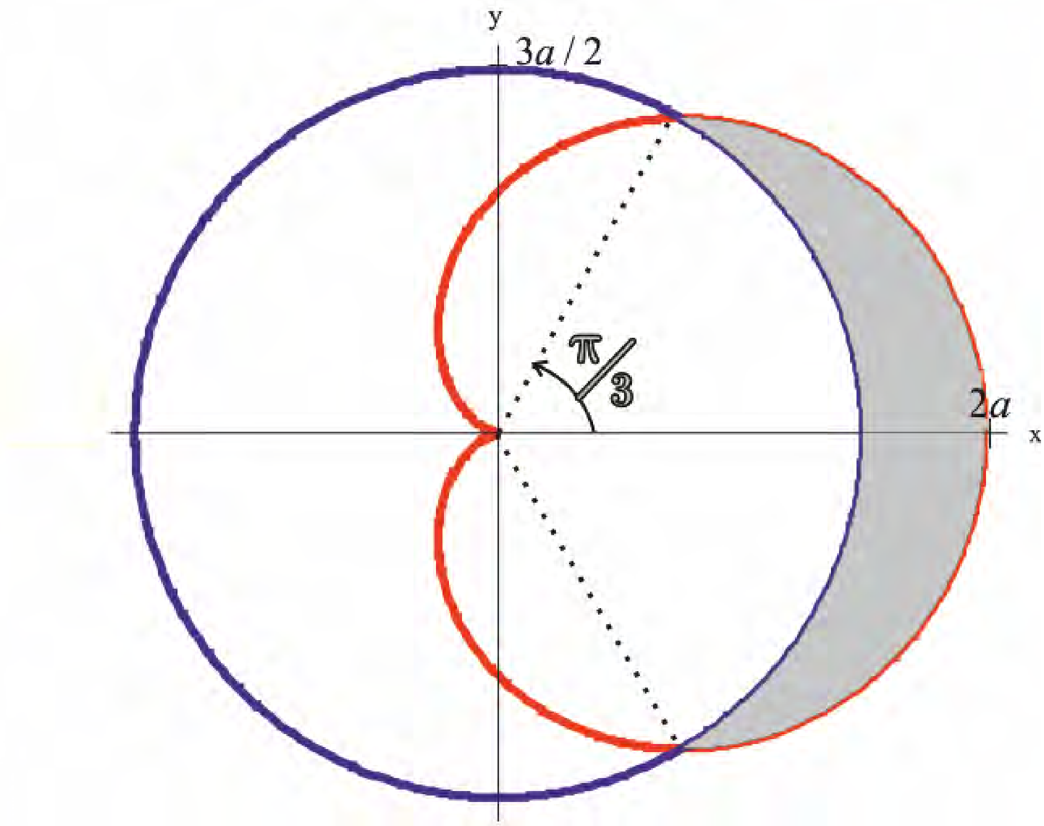


Рис.8. Фигура $\Phi = \left\{(\varphi, r) \middle| -\frac{\pi}{3} \le \varphi \le \frac{\pi}{3},\ \frac{3}{2}a \le r \le a(1+\cos\varphi)\right\}$.

Решение. Найдем точки пересечения кривых: $a(1+\cos\varphi) = \frac{3}{2}a$;

$\cos\varphi = \frac{1}{2}$; $\varphi = \pm\frac{\pi}{3}$. По формуле (4):

$$S = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left(r_1^2(\varphi) - r_2^2(\varphi)\right)d\varphi = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left(a^2(1+\cos\varphi)^2 - \frac{9}{4}a^2\right)d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}(2\cos\varphi +$$

$$+\cos^2\varphi - \frac{5}{4})d\varphi = \left|\cos^2\varphi = \frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi)\right| = \frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left(2\cos\varphi + \frac{1}{2}\cos 2\varphi - \frac{3}{4}\right)d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi - \frac{3}{4}\varphi\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = \left(\frac{9}{8}\sqrt{3} - \frac{\pi}{4}\right)a^2 .$$

Пример 3. $r = 2\cos\varphi$. Вычислим $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2(\varphi)d\varphi$;

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 4\cos^2\varphi d\varphi = 2\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi = \int_0^{2\pi}(1+\cos 2\varphi)d\varphi = \left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 2\pi .$$

Преобразуем уравнение $r = 2\cos\varphi \iff r^2 = 2r\cos\varphi \iff x^2 + y^2 = 2x \iff$

$(x-1)^2 + y^2 = 1-$ окружность радиуса 1 с центром в точке (1; 0).

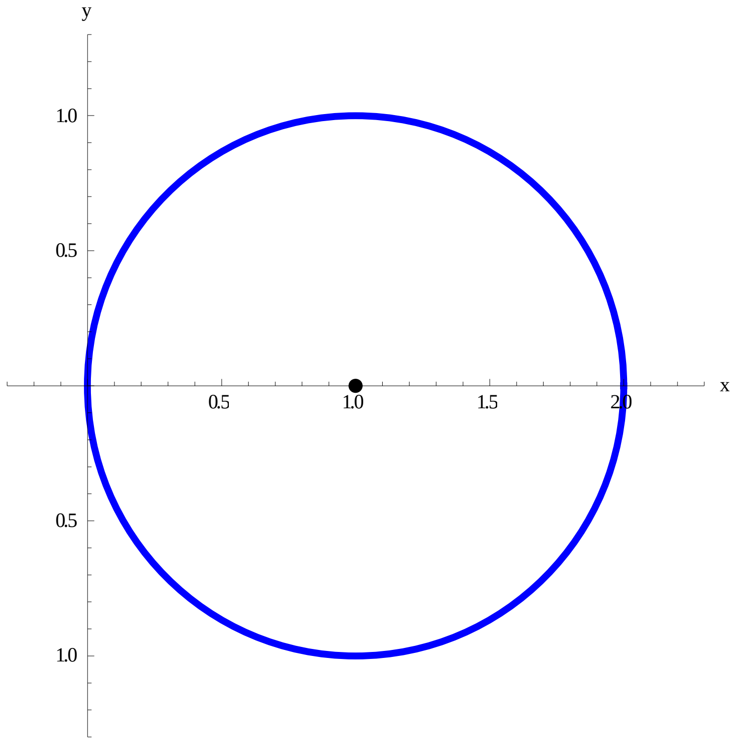


Рис.9. Окружность $r = 2\cos\varphi$.

При изменении φ от 0 до 2π окружность проходится дважды и оба раза против часовой стрелки, поэтому (см. § 30) найденное значение интеграла задает удвоенную площадь круга.

Упражнение 3. Пусть $\begin{cases} x = r(\varphi)\cdot\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\cdot\sin\varphi \end{cases}$, $\alpha \le \varphi \le \beta$.

Проверить, что (см. (7) § 30): $\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left(-y\cdot x'_{\varphi} + x\cdot y'_{\varphi}\right)d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi$

Упражнение 4. Используя формулу (4), найти площади фигур, ограниченных линиями: $r = \cos 2\varphi$, $r = \sin 3\varphi$, $r = \frac{1}{2} + \cos\varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi]$

(сравнить с примерами 9 – 11 § 30).

Упражнение 5. Найти площадь петли кривой $x^3 + y^3 + 3xy = 0$ – (Декартов лист).

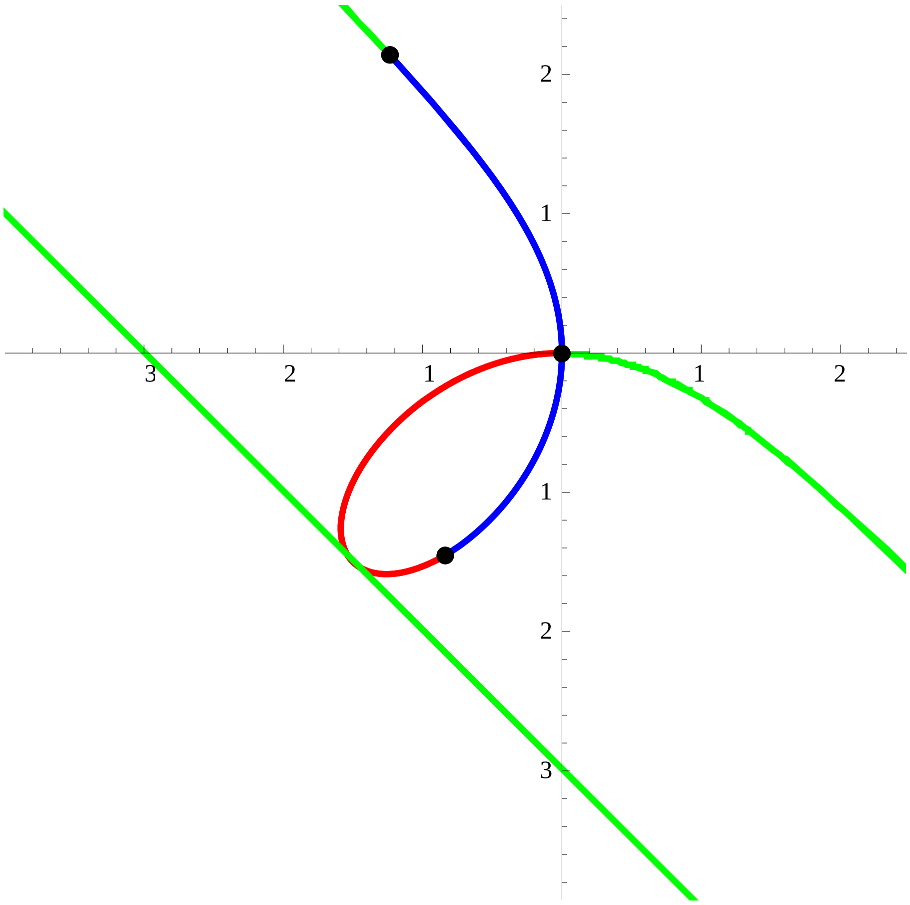


Рис.10. Кривая $x^3 + y^3 + 3xy = 0$ и наклонная асимптота $y = -x + 1$.

Указание. Перейти в полярную систему координат.

Упражнения к § 31.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной указанными линиями. Построить линии в системе Mathematica.

31.1. $r = 2\sin 4\varphi$;

31.2. $r = \sin^2\varphi$;

31.3. $r = tg\varphi, \quad r = \dfrac{1}{\cos\varphi}, \quad \varphi \in \left[0; \pi/2\right)$;

31.4. $r = 2\sqrt{\cos 2\varphi}$;

31.5. $r = 3(1 - \cos\varphi)$;

31.6. $r = 2 + \cos 2\varphi$;

31.7. $r = \dfrac{1}{2} + \cos 2\varphi$;

31.8. $r = 3 + \sin 2\varphi$;

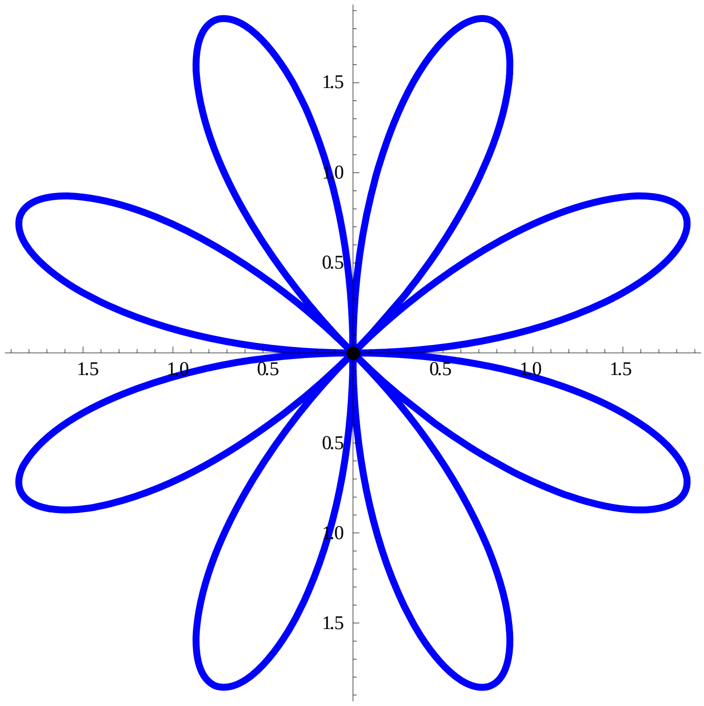
31.9. $r = tg\varphi, \quad r = \dfrac{\sqrt{3}}{2\cos\varphi}, \quad \varphi \in \left[0; \dfrac{\pi}{3}\right]$;

31.10. $r = 1 + 2\sin\varphi$;

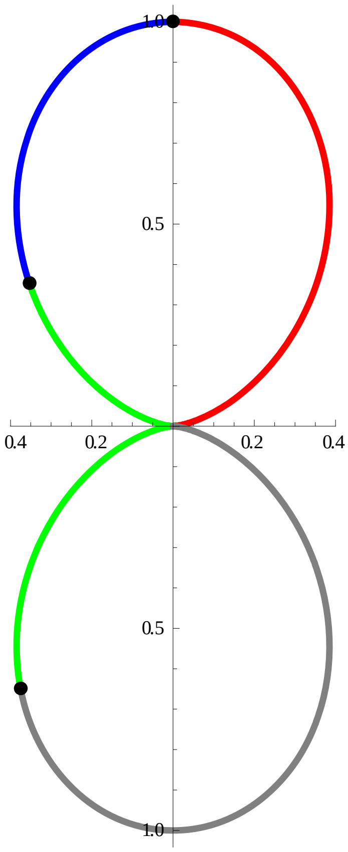
31.11. $r \geq 3(1 - \cos\varphi), \quad r \leq 3$;

31.12. $r = \dfrac{3}{2} + \cos\varphi$;

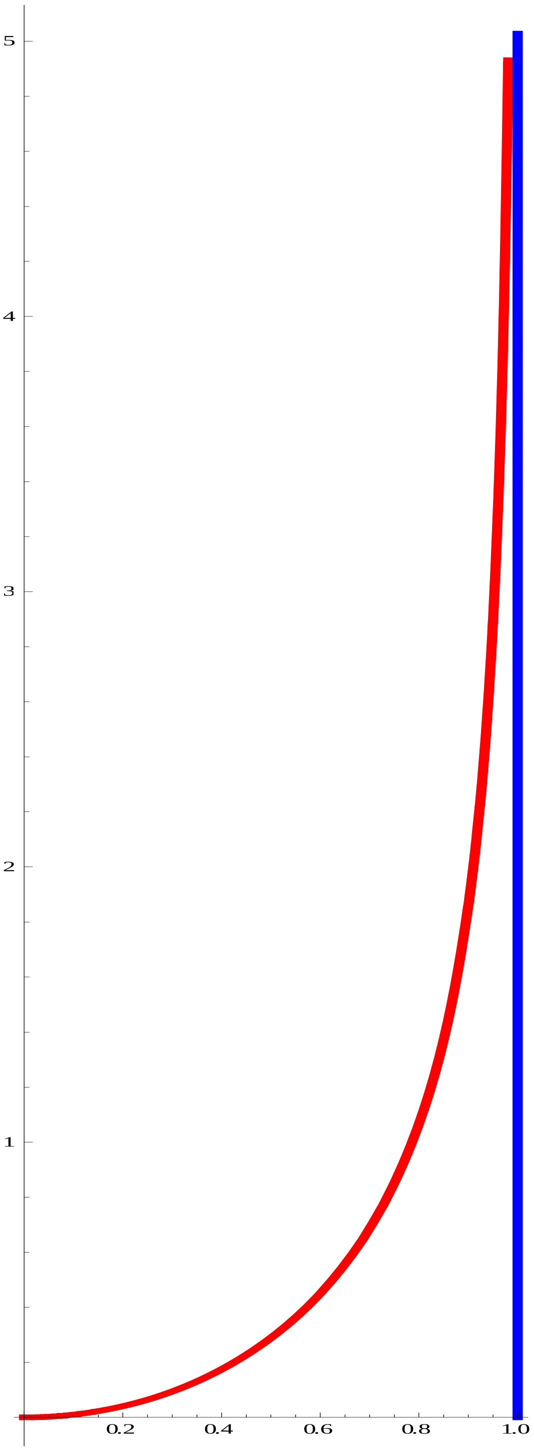
Ответы на упражнения к § 31.



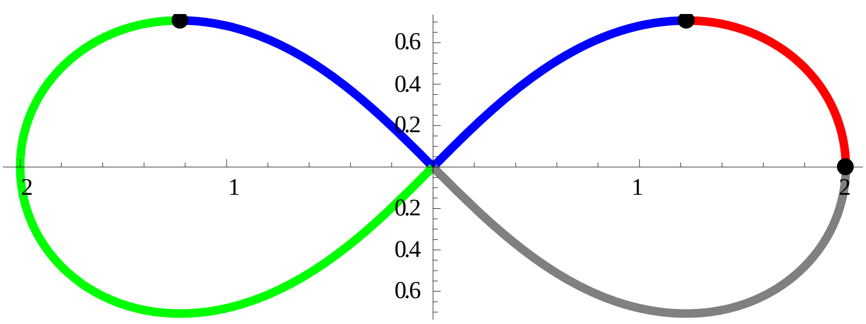
31.1. 2π;



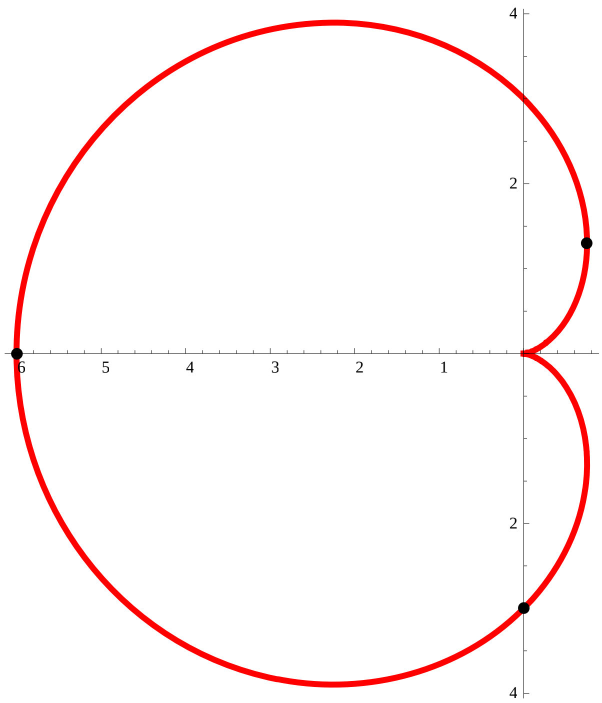
31.2. $\dfrac{3\pi}{8}$;



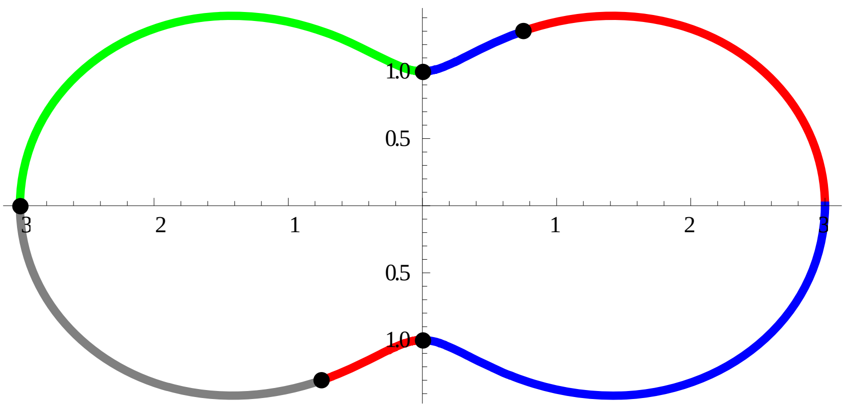
31.3. $\dfrac{\pi}{4}$;



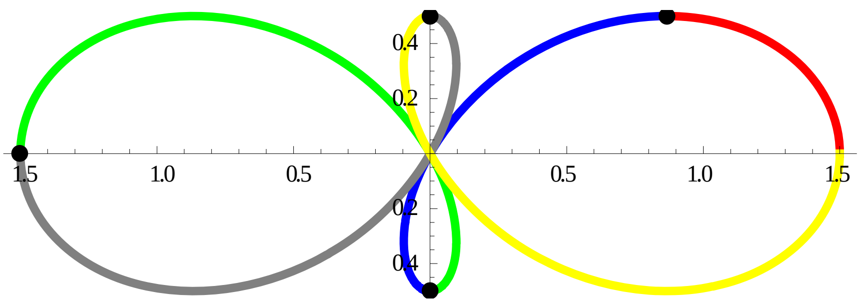
31.4. 4;



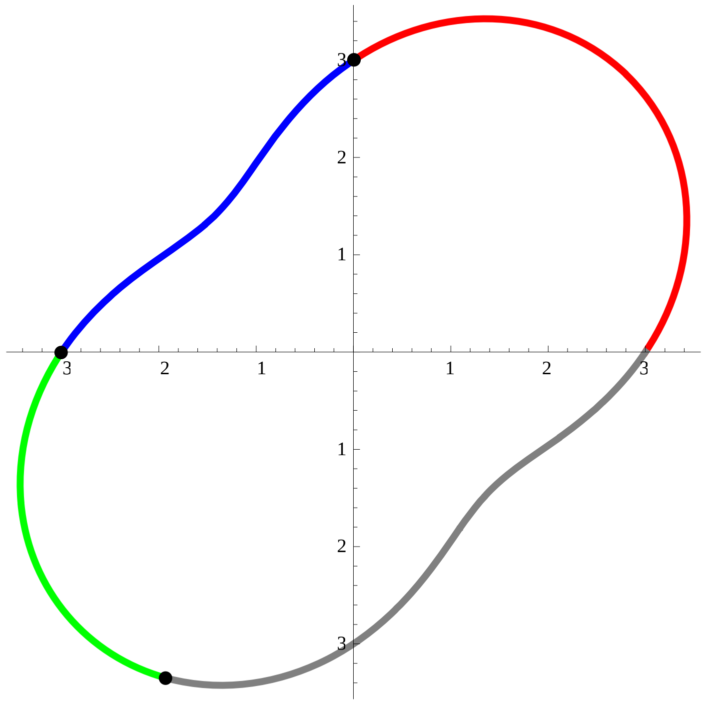
31.5. $\dfrac{27\pi}{2}$;



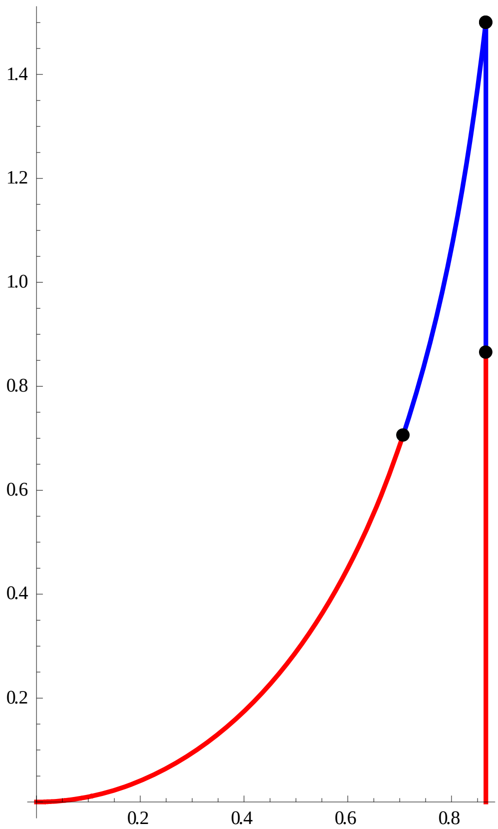
31.6. $\dfrac{9\pi}{2}$;



31.7. $\dfrac{3\pi}{4}$;

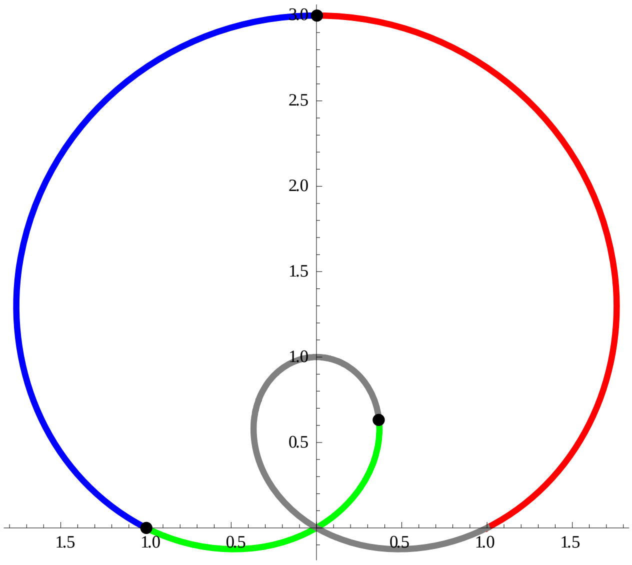


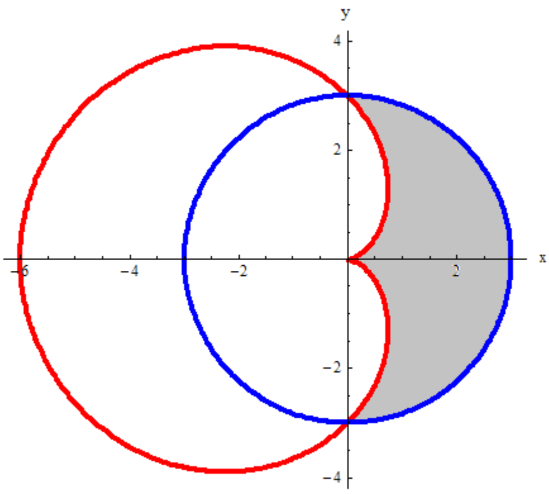
31.8. $\dfrac{19\pi}{2}$;



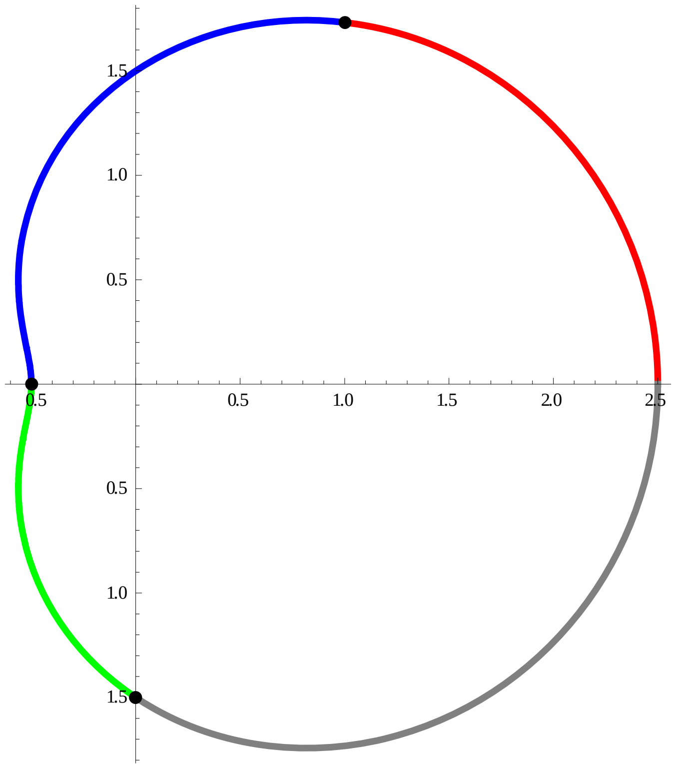
31.9. $\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$;

31.10. $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}+2\pi$ (по внешнему контуру);





31.11. $18-\dfrac{9\pi}{4}$;



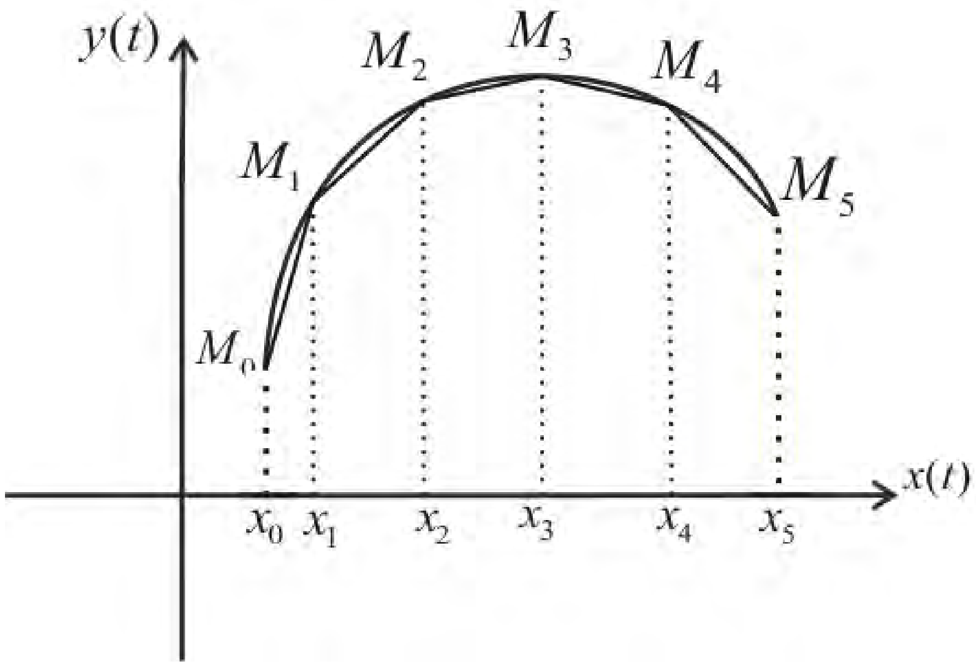
31.12. $\dfrac{11\pi}{4}$.

§ 32. Длина дуги кривой.

Определение 1. Рассмотрим простую кривую L на плоскости (см. § 30), заданную параметрически в виде

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad \alpha_1 \le t \le \alpha_2 \qquad (1)$$

Разобьем отрезок $\left[\alpha_1;\alpha_2\right]$ на n частичных отрезков точками $t_0 = \alpha_1, t_1, ..., t_{n-1}, t_n = \alpha_2; \quad t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n$ и обозначим это разбиение τ_n. Пусть $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ – длина k-го частичного отрезка $\left[t_{k-1}, t_k\right]$, $k = 1, 2, ..., n$; $\Delta = \max\limits_k \Delta t_k$ – диаметр разбиения. Пусть $M_k(x_k, y_k) = M_k\left(x(t_k), y(t_k)\right)$ – точки на кривой, $k = 0, 1, 2, ..., n$. Рассмотрим ломаную последовательно проходящую через точки $M_0, M_1, ..., M_n$.



Пусть $\Delta l_k = \left|\overrightarrow{M_{k-1}M_k}\right|$ – длина k–го частичного звена ломаной

$$l(\tau_n) = \sum_{k=1}^{n} \Delta l_k \text{ – длина ломаной} \qquad (2)$$

Кривая называется спрямлякмой, если множество $\left\{l(\tau_n)\right\}$ – длин всевозможных вписанных в кривую ломаных – ограничено, при этом $l = \sup\left\{l(\tau_n)\right\}$ – называется длиной кривой L.

Замечание. Эквивалентное утверждение: число l называется длиной кривой L, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что $\forall$ разбиения τ_n диаметром $\Delta < \delta$ выполнено неравенство

$$0 \le l - l(\tau_n) < \varepsilon \qquad (3)$$

Теорема 1. Пусть $x(t)$ и $y(t)$ – непрерывно-дифференцируемы, тогда кривая L вида (1) – спрямляемая.

Доказательство. $\Delta l_k = \sqrt{\left(x(t_k)-x(t_{k-1})\right)^2+\left(y(t_k)-y(t_{k-1})\right)^2} =$

$=\left|\text{по теореме Лагранжа (см.теорему 4 § 12)}\right|= \sqrt{\left(x_t'(c_k)\right)^2+\left(y_t'(d_k)\right)^2}\Delta t_k$, где

$c_k,\, d_k \in \left[t_{k-1},\, t_k\right]$.

Тогда $l(\tau_n)=\sum\limits_{k=1}^{n}\Delta l_k = \sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\left(x_t'(c_k)\right)^2+\left(y_t'(d_k)\right)^2}\Delta t_k \le \sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{m_1^2+m_2^2}\Delta t_k =$

$=\sqrt{m_1^2+m_2^2}(\alpha_2-\alpha_1)$, где $m_1=\sup\limits_{t\in[\alpha_1,\alpha_2]}\left(x'(t)\right)$, $m_2=\sup\limits_{t\in[\alpha_1,\alpha_2]}\left(y'(t)\right)$. Таким образом $\left\{l(\tau_n)\right\}$ – ограничено, и следовательно имеет точную верхнюю грань, что и требовалось доказать.

Найдем длину кривой L. Рассмотрим случай явного задания функции:

$$\begin{cases} x=x \\ y=f(x) \end{cases}, \qquad x\in\left[a,b\right]$$

Тогда из (3): $\Delta l_k=\sqrt{1+\left(f'(d_k)\right)^2}\Delta x_k$ и $l(\tau_n)=\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{1+\left(f'(d_k)\right)^2}\Delta x_k$ – n-ная интегральная сумма для функции $\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}$, поэтому:

$$l=\int\limits_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx \qquad (4)$$

Аналогично для кривой L заданной по формулам (1)

$$l=\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2}\sqrt{\left(x_t'(t)\right)^2+\left(y_t'(t)\right)^2}dt \qquad (5)$$

Длина l пространственной кривой L: $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t), \\ z=z(t) \end{cases} \quad t\in\left[\alpha_1,\alpha_2\right]$ находится по формуле:

$$l=\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2}\sqrt{\left(x_t'(t)\right)^2+\left(y_t'(t)\right)^2+\left(z_t'(t)\right)^2}dt \qquad (6)$$

Пример 1. Найдем длину дуги астроиды $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}, \quad 0\le t\le 2\pi,\ a>0$

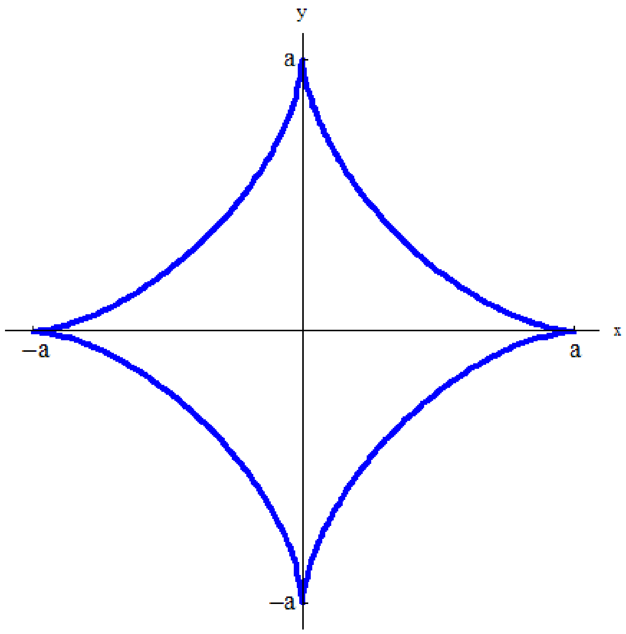


Рис.1. Астроида $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi$.

Решение. $\begin{cases} x_t' = -3a\cos^2 t \cdot \sin t \\ y_t' = 3a\sin^2 t \cdot \cos t \end{cases} \Rightarrow \left(x_t'\right)^2 + \left(y_t'\right)^2 = 9a^2\sin^2 t \cdot \cos^2 t = \dfrac{9}{4}a^2\sin^2 2t$. По формуле (5): $l = \int\limits_0^{2\pi} \dfrac{3}{2}a\left|\sin 2t\right|dt = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{3a}{2}\cdot\sin 2tdt = -3a\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a$.

Пример 2. Найти длину дуги линии $y^2 = \dfrac{4}{9}x^3,\ x \in [0;3]$.

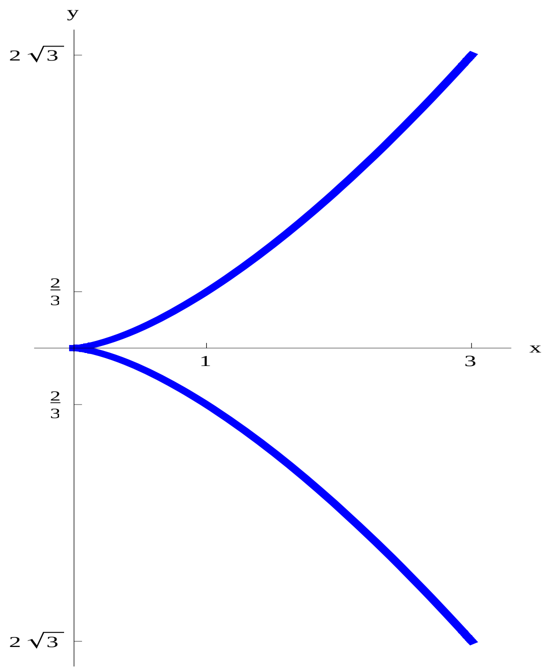


Рис.2. Кривая $y^2 = \dfrac{4}{9}x^3,\ x \in [0;3]$.

Решение. Кривая симметрична относительно оси *Ox*:

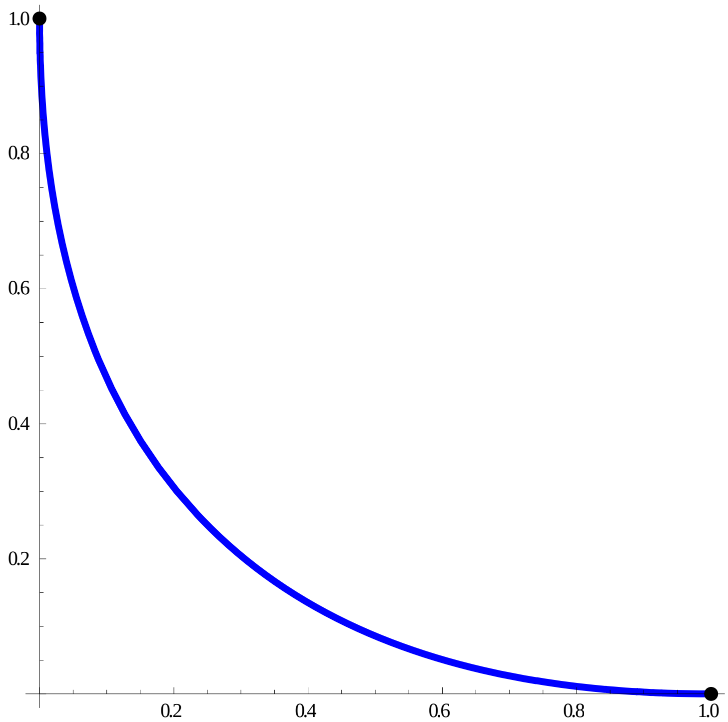
$y = \pm\frac{2}{3}x^{3/2}$ – задают верхнюю и нижнюю ветви $y' = \pm x^{1/2}$. По формуле (4)

$l = \int_0^3 \sqrt{1+(y')^2}dx = \int_0^3 \sqrt{1+x}dx = \frac{2(1+x)^{3/2}}{3}\Bigg|_0^3 = \frac{14}{3}$. Длина всей кривой: $\frac{28}{3}$.

Замечание. Если кривая не является простой, необходимо учитывать возможность самоналожения участков кривой друг на друга.

Пример 3. Найти длину кривой $\begin{cases} x = \cos^4 t \\ y = \sin^4 t \end{cases}$.

Решение. При $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ получаем график:



При $t \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ получаем тот же график, проходимый в обратном направлении (точки $\left(\cos^4\left(\frac{\pi}{2} - t\right); \sin^4\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right)$ и $\left(\cos^4\left(\frac{\pi}{2} + t\right); \sin^4\left(\frac{\pi}{2} + t\right)\right)$ совпадают.

Поэтому

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}dt = \frac{\sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}} \quad \text{(проверить).}$$

Упражнение 1. Найти длину кривой $\begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = \sin^2 t \end{cases}$. Построить кривую.

Замечание. $dl = \sqrt{\left(x_t'\right)^2 + \left(y_t'\right)^2}dt$ называется дифференциалом длины дуги. И тогда формула (5) перепишется в виде:

$$l=\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} dl \qquad (6)$$

Найдем длину кривой L заданной в полярных координатах: $r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, где функция $r(\varphi)$ – непрерывно-дифференцируема. Тогда (см. формулы (1) § 31) $\begin{cases} x = r(\varphi)\cdot\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\cdot\sin\varphi \end{cases}$, $\alpha \le \varphi \le \beta$ - параметрическое задание кривой;

$\begin{cases} x'_\varphi = r'(\varphi)\cdot\cos\varphi - r(\varphi)\cdot\sin\varphi \\ y'_\varphi = r'(\varphi)\cdot\sin\varphi + r(\varphi)\cdot\cos\varphi \end{cases}$, $dl = \sqrt{\left(x'_\varphi\right)^2 + \left(y'_\varphi\right)^2}d\varphi = \sqrt{r^2(\varphi) + \left(r'_\varphi(\varphi)\right)^2}d\varphi$.

Поэтому $l = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + \left(r'_\varphi(\varphi)\right)^2}d\varphi$ (7)

Пример 4. Найти длину дуги части кардиоиды $r = a(1+\cos\varphi),\ a > 0$, расположенной вне круга $r = \frac{3}{2}a$ (см. пример 4 § 31).

Решение. $r = a(1+\cos\varphi),\ r' = -a\cdot\sin\varphi$

$$dl = \sqrt{r^2(\varphi) + \left(r'_\varphi(\varphi)\right)^2}d\varphi = \sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}d\varphi =$$

$= a\sqrt{1+\cos^2\varphi + \sin^2\varphi + 2\cos\varphi}d\varphi = a\sqrt{2+2\cos\varphi}d\varphi = 2a\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|\cdot d\varphi$, поэтому по формуле (7):

$$l = \int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{r^2(\varphi) + \left(r'_\varphi(\varphi)\right)^2}d\varphi = 2a\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos\frac{\varphi}{2}d\varphi = 4a\sin\frac{\varphi}{2}\bigg|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = 4a.$$

Упражнение 2. Найти длину всей кривой $r = a(1+\cos\varphi)$.

Упражнение 3. Найти длину дуги кривой:

$$r = \frac{1}{\sin\varphi + \cos\varphi};\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$$

Построить кривую.

Упражнения к § 32.

Вычислить длину дуги данной линии.

32.1. $y = 1 + \ln\cos x,\quad 0 \le x \le \pi/6$;

32.2. $x = 3\cos^3 t,\ \ y = 3\sin^3 t$;

32.3. $r = \sin^3\frac{\varphi}{3},\quad 0 \le \varphi \le 3\pi/2$;

32.4. $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{4}$;

32.5. $y^2 = (x+1)^3,\ \ -1 \le x \le \frac{1}{3}$;

32.6. $r = 4\cos\varphi$;

32.7. $x = 2\cos^2 t,\ y = 2\sin^2 t,\ (0 \le t \le \pi/2)$;

32.8. $y^2 = (4-x)^3,\ 4/9 \le x \le 4$;

32.9. $y = \ln\sin x,\ \left(\pi/2 \le x \le 2\pi/3\right)$;

32.10. $r = 1 + \sin\varphi$;

32.11. $y = e^x + e^{-x},\ \ (0 \le x \le 1)$;

32.12. $x = \sqrt{3}\cdot t^2,\ \ y = t - t^3\ \ ,(-1 \le t \le 1)$;

32.13. $r = 3(1+\cos\varphi)$;

32.14. $y^2 = x^3,\ (0 \le x \le 4/9)$.

Ответы на упражнения к § 32.

32.1. $\dfrac{\ln 3}{2}$; **32.2.** 18; **32.3.** $\dfrac{3\pi}{4}$; **32.4.** 12;

32.5 $\dfrac{112}{27}$; **32.6.** 4π; **32.7.** $2\sqrt{2}$; **32.8.** $\dfrac{416}{27}$;

32.9. $\dfrac{\ln 3}{2}$; **32.10.** 8; **32.11.** $e - e^{-1}$; **32.12.** 4;

32.13. 24; **32.14.** $\dfrac{16}{27}(2\sqrt{2}-1)$.

§ 33. Объемы тел.

Под телом *T* будем подразумевать ограниченное множество в пространстве. Будем рассматривать тела, имеющие внутренние точки и границу, которая также принадлежит телу (замкнутые тела), причем такие, что любые две внутренние точки можно соединить непрерывной линией, проходящей внутри тела.

Определение 1. Рассмотрим тело $\underline{T}$ составленное из конечного числа многогранников, содержащихся в *T*, и тело $\overline{T}$, составленное из многогранников и покрывающее тело *T*: $\underline{T} \subset T \subset \overline{T}$

Пусть $\underline{v} = \sup\limits_{\underline{T}}(v(\underline{T}))$ и $\overline{v} = \inf\limits_{\overline{T}}(v(\overline{T}))$, где $v(\underline{T})$ и $v(\overline{T})$ объемы тел $\underline{T}$ и $\overline{T}$. Тело называется кубируемым, если $\overline{v} = \underline{v}$. При этом число

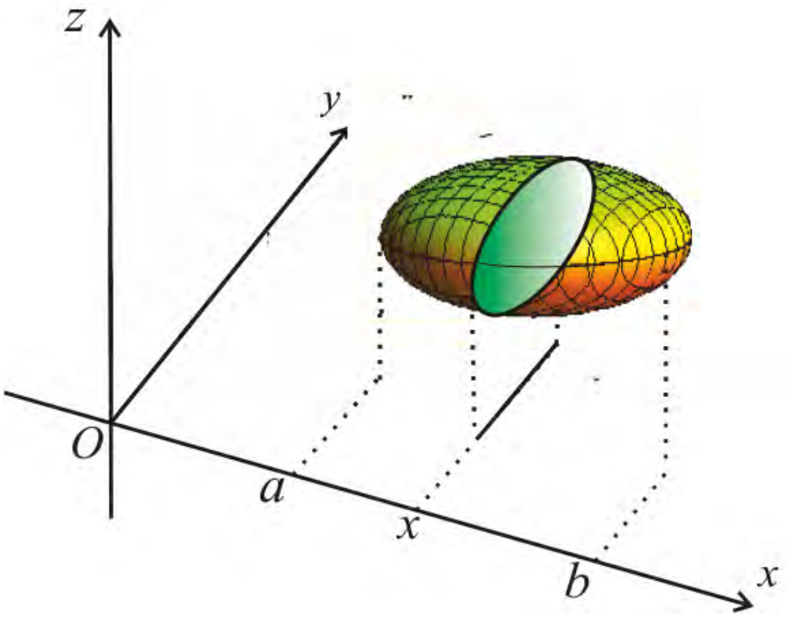
$$\overline{v} = \underline{v} = v(T) \qquad (1)$$

называется объемом тела *T* (по Жордану).

Замечание. Для кубируемости тела *T* необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \underline{T} \ и \ \overline{T}$ такие, что

$$v(\overline{T}) - v(\underline{T}) < \varepsilon \qquad (2)$$

Пусть для кубируемого тела *T* известны площади $s = s(x)$ его сечения плоскостями перпендикулярными оси *Ox*, проходящими через точки *(x, 0, 0)*, $\forall x \in [a,b]$, где $[a,b] = \underset{Ox}{np}\,T$, и $s(x)$ – непрерывна



Разобьем отрезок $\left[a,b\right]$ на n частичных отрезков точками $x_0 = a,\ x_1, ..., x_{n-1}, x_n = b$; $x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n$ и обозначим это разбиение τ_n. Пусть $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$; *k=1, 2, …, n*; $\Delta = \max_k \Delta x_k$ – диаметр разбиения, тогда

$$\int_a^b s(x)dx = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=1}^m s(x_k)\Delta x_k = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=1}^m v(V_k) \tag{3}$$

Где $v(V_k)$ это – объем цилиндрического тела высотой Δx_k и площадью основания $s(x_k)$. Пусть $T_k - k$-ый слой тела *T* между плоскостями, проходящими через точки $(x_{k-1},0,0)$ и $(x_k,0,0)$ и перпендикулярными оси *Ox*.

Так как *T* – кубируемо, то T_k – также кубируемо и $\underline{s_k}\cdot\Delta x \le v(T_k) \le \overline{s_k}\cdot\Delta x$, где

$$\underline{s_k} = \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} s(x)\ ,\ \ \overline{s_k} = \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} s(x).$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^n \underline{s_k}\Delta x_k \le v(T) = \sum_{k=1}^n v(T_k) \le \sum_{k=1}^n \overline{s_k}\Delta x_k \tag{4}$$

$\forall n \in N$, или

$$\underline{s}(\tau_n) \le v(T) \le \overline{s}(\tau_n) \tag{5}$$

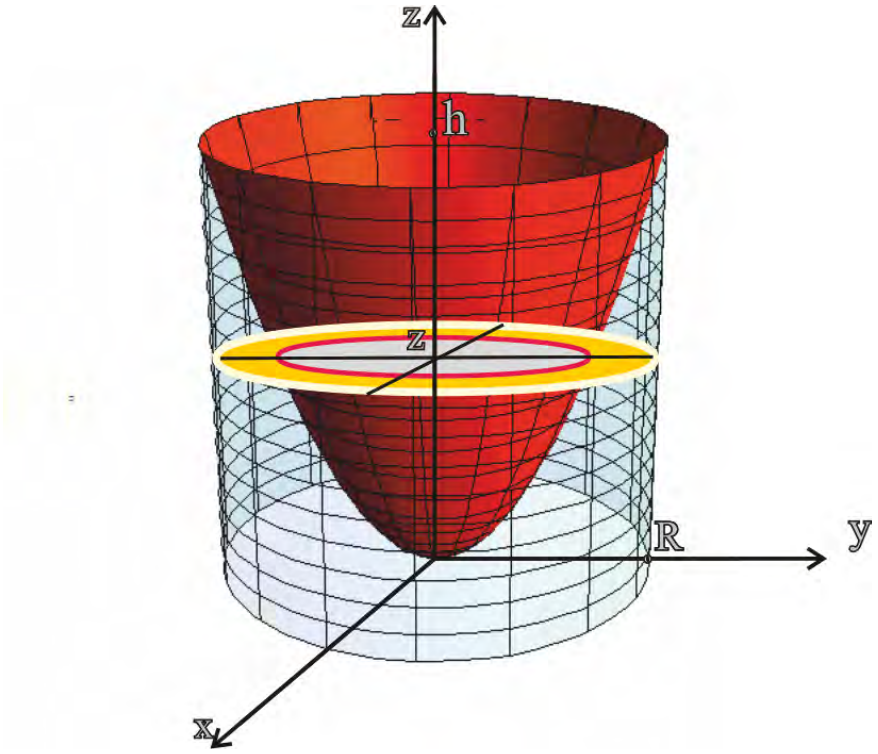
Где $\underline{s}(\tau_n)$ и $\overline{s}(\tau_n)$ это – нижняя и верхняя суммы Дарбу функции $s(x)$ для разбиения τ_n. Поэтому $\int_a^b s(x)dx = \lim_{\Delta\to 0}\underline{s}(\tau_n) = \lim_{\Delta\to 0}\overline{s}(\tau_n) = v(T)$. Таким образом

$$v(T) = \int_a^b S(x)dx \tag{6}$$

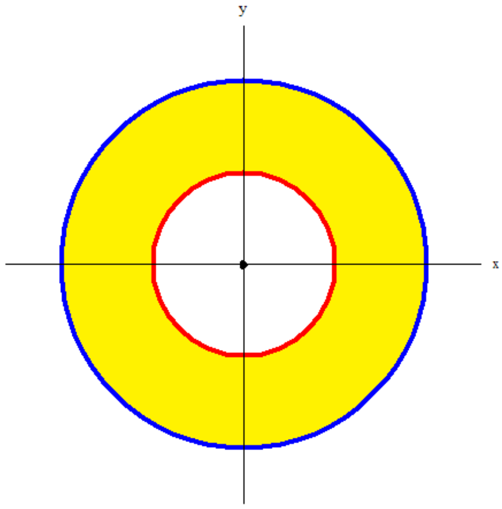
Замечание. Нужно заметить, что неравенство (4), которое использовалось для вывода формулы (6), выполняется, когда любые два рассматриваемые сечения тела *T* при проекции на плоскость *yOz* полностью содержатся одно в другом. Однако формула (6) верна и в общем случае. Для этого достаточно потребовать, чтобы тело Т было кубируемым и функция $s(x)$ – непрерывной.

Пример 1. Найти объем тела ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = R^2,\quad x^2 + y^2 = \frac{z}{h}R^2$ (ниже параболоида).

Решение. Из системы уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ x^2 + y^2 = \frac{z}{h}R^2 \end{cases}$ следует, что $z = h$.



В сечении тела плоскостью проходящей через точку *(0, 0, z)* перпендикулярно оси *Oz* получается кольцо

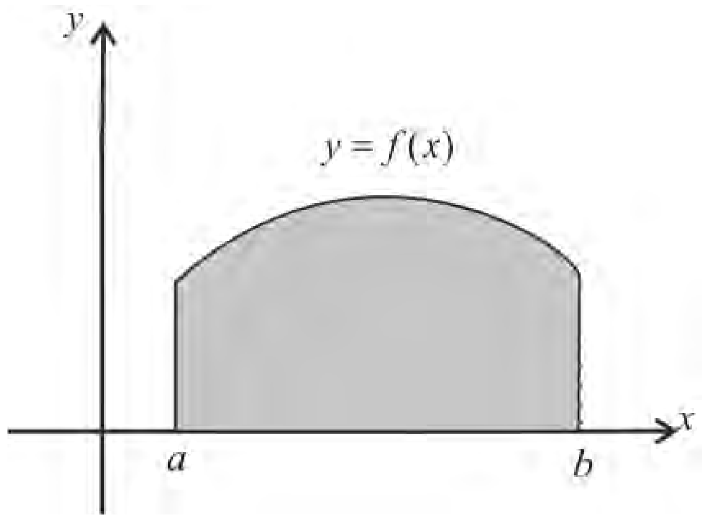


Радиус внешней окружности равен R, радиус внутренней равен $R\sqrt{\frac{z}{h}}$.

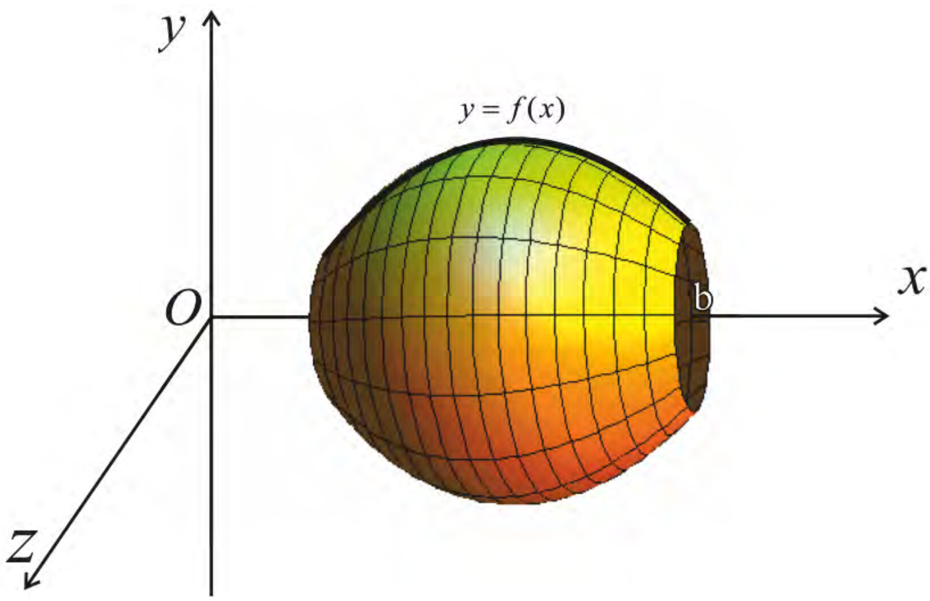
Поэтому по формуле (6):

$$v(T)=\int_0^h\left(\pi R^2-\frac{\pi R^2 z}{h}\right)dz=\pi R^2\int_0^h\left(1-\frac{z}{h}\right)dz=\pi R^2\left(z-\frac{z^2}{2h}\right)\Bigg|_0^h=\frac{\pi R^2 h}{2}.$$

Формулу (6) удобно применять к телам вращения. Пусть $y=f(x)$ – непрерывна на отрезке $[a,b]$, $f(x)\geq 0,\ \forall x\in[a,b]$. Будем вращать криволинейную трапецию $\Phi=\{(x,y)\,|\,a\leq x\leq b,\ 0\leq y\leq f(x)\}$



вокруг оси *Ox*. Получим тело:

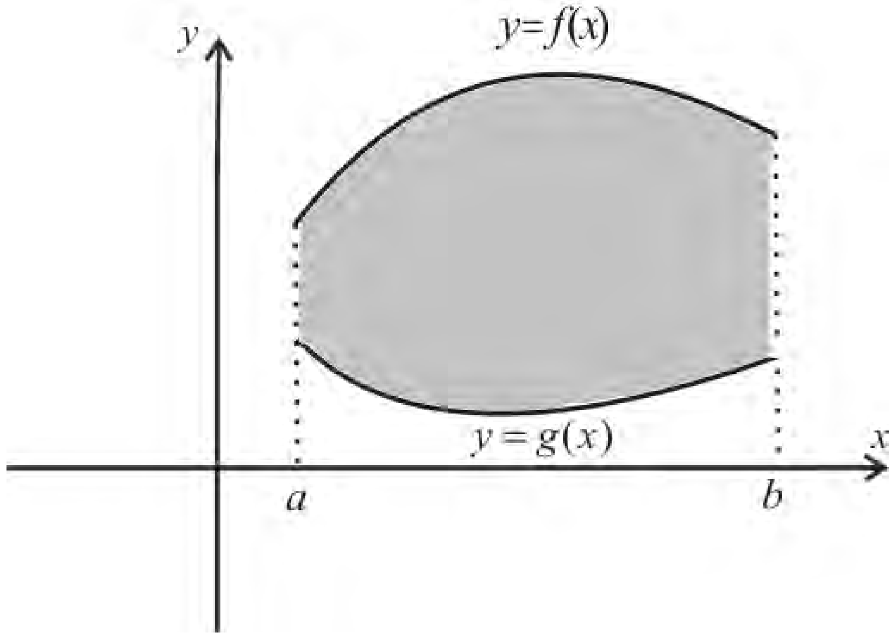


Тогда сечением полученного тела плоскостью проходящей через точку *(x,0,0)* и перпендикулярной оси Ox будет круг радиуса $R = f(x)$, $s(x) = \pi f^2(x)$, и по формуле (6):

$$V_x = \int_a^b f^2(x)dx = \pi\int_a^b y^2 dx, \qquad (7)$$

Где $y = f(x)$.

Аналогично, если $0 \le g(x) \le f(x)$, $\forall x \in [a,b]$, то при вращении вокруг оси *Ox* фигуры $\Phi_1 = \{(x,y) \,|\, a \le x \le b,\ g(x) \le y \le f(x)\}$

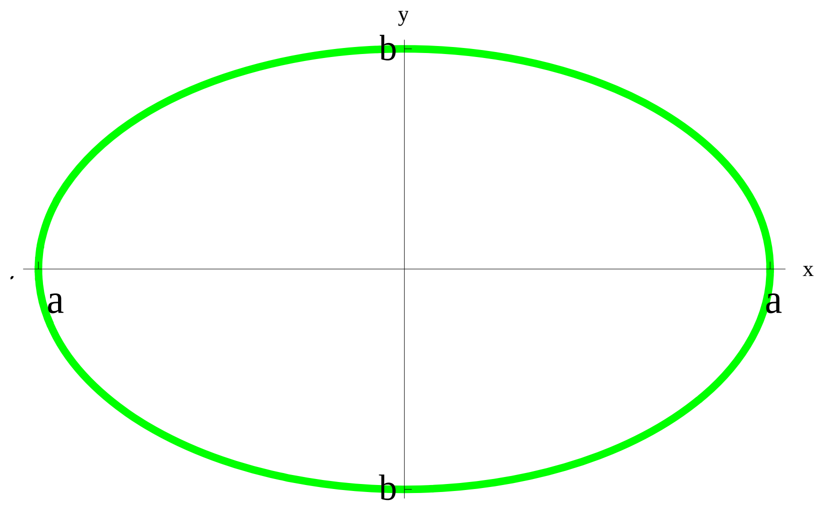


Получим тело, объем которого

$$V_x = \pi\int_a^b (f^2(x) - g^2(x))dx \qquad (8)$$

Пример 2. Рассмотрим фигуру Φ ограниченную эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $y^2 = b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$. Найдем объем эллипсоида полученного при вращении вокруг оси Ox фигуры Φ.

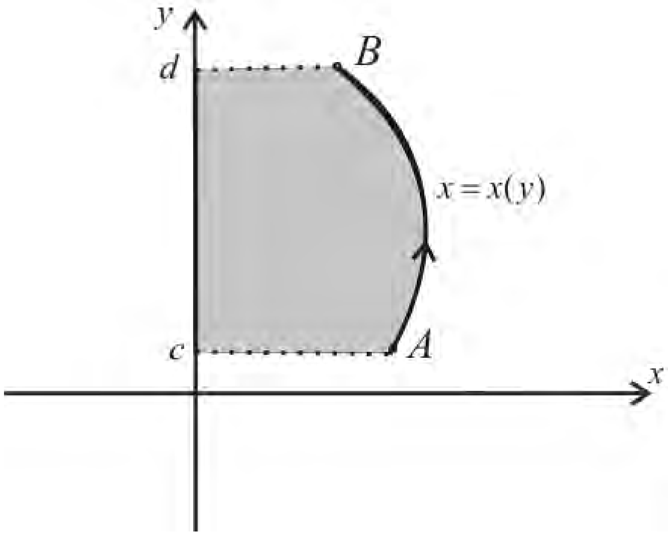
Решение.



По формуле (7): $V_x = \pi\int_{-a}^{a} y^2(x)dx = \pi\int_{-a}^{a} b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx = \pi b^2\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Big|_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi ab^2$.

Пусть функция $x = x(y)$ – непрерывна при $y\in[c,d]$ и $x(y)\ge 0,\ \forall y\in[c,d]$. Тогда, аналогично, при вращении вокруг оси Oy фигуры

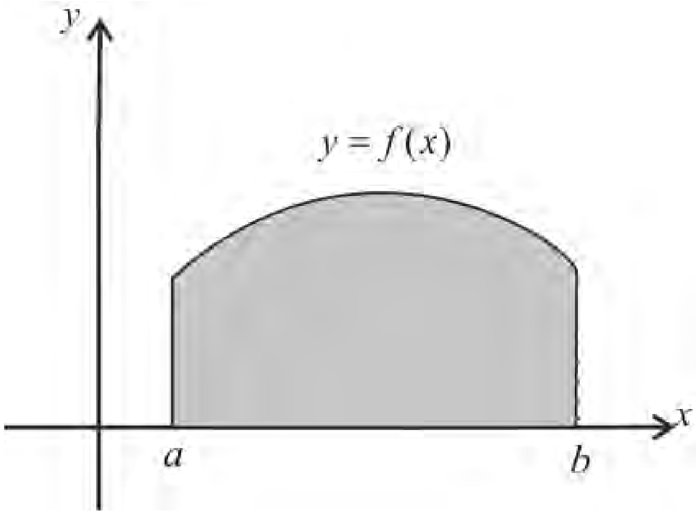
$\Phi_2 = \{(x,y)\,|\, c\le y\le d,\ 0\le x\le x(y)\}$



Получим тело, объем которого

$$V_y = \pi\int_c^d x^2(y)dy \qquad (9)$$

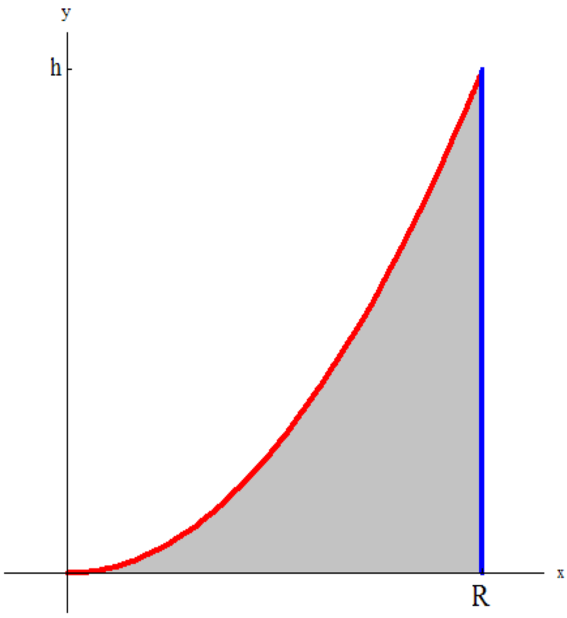
Если же вращать вокруг оси Oy трапецию $\Phi = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\},\ a \ge 0$,



то $$V_y = 2\pi\int_a^b x\, f(x)dx \qquad (10)$$

Пример 3. Рассмотрим тело T из примера 1. Оно получается, если вращать вокруг оси Oz фигуру, ограниченную линиями:

$$\begin{cases} z = \dfrac{h}{R^2}\cdot x^2 \\ x = R \end{cases}$$



Из первого уравнения найдем x^2: $x^2 = \dfrac{z \cdot R^2}{h}$, поэтому по формуле (9):

$$V_z = \pi\int_0^h (x_1^2(z) - x_2^2(z))dz = \pi\int_0^h \left(R^2 - \frac{zR^2}{h}\right)dz = \pi R^2\int_0^h \left(1 - \frac{z}{h}\right)dz = \frac{\pi R^2 h}{2}.$$

Пример 4. Объем V_z при вращении фигуры $\begin{cases} z = \dfrac{h}{R^2} \cdot x^2 \\ x = R \end{cases}$ из примера 3

вокруг оси Oz можно также найти и по формуле (10):

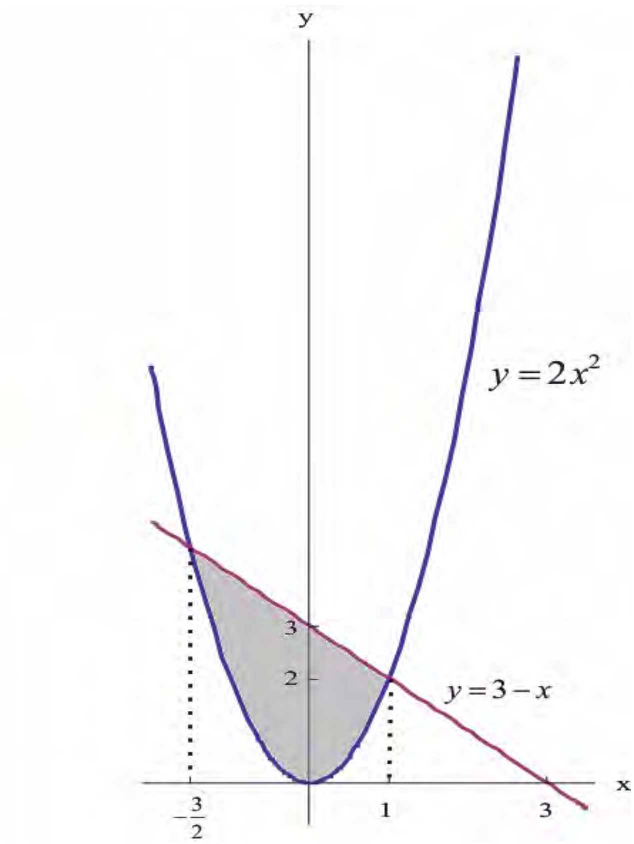
$$V_z = 2\pi\int_0^R x \cdot z(x)dx = 2\pi\int_0^R x \cdot \frac{h}{R^2} \cdot x^2 dx = 2\pi \cdot \frac{h}{R^2} \cdot \frac{x^4}{4}\bigg|_0^R = \frac{\pi R^2 h}{2}.$$

Упражнение 1. $y = x^2,\ x \in [1, 2]$. Найти объемы V_x и V_y тел полученных при вращении фигуры $\Phi = \left\{(x, y) \middle| 1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le x^2\right\}$ вокруг осей Ox и Oy. Сделать чертеж.

Упражнение 2. $x = \sqrt{y};\ y \in [1; 4]$. Найти объем V_y тела полученного при вращении фигуры $\Phi = \left\{(x, y) \middle| 1 \le y \le 4,\ 0 \le x \le \sqrt{y}\right\}$ вокруг оси Oy. Сделать чертеж.

Пример 5. Фигура Ф ограничена линиями $y = 2x^2,\ x + y = 3$. Найти V_x.

Решение.

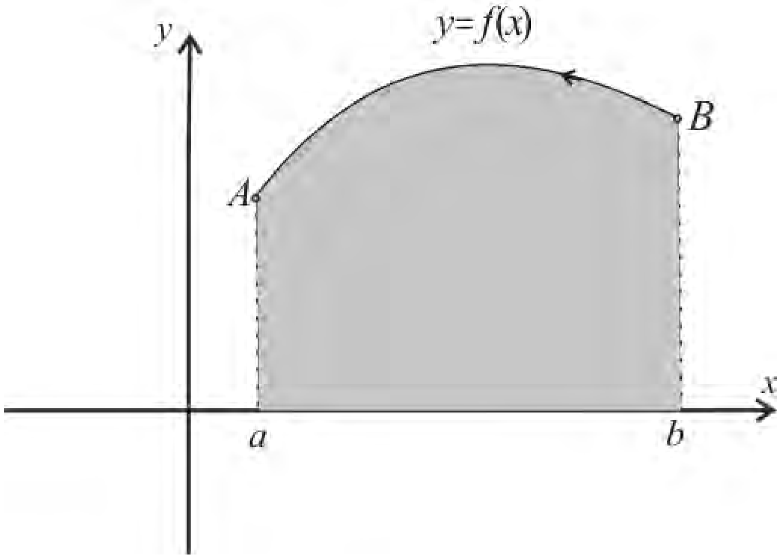


Абсциссы точек пересечения: $x_1 = -\dfrac{3}{2};\ x_2 = 1$ (см. пример 1 § 30). По формуле (8):

$$V_x = \pi \int_{-\frac{3}{2}}^{1} ((3-x)^2 - (2x^2)^2)dx = \pi \int_{-\frac{3}{2}}^{1} (9 - 6x + x^2 - 4x^4)dx =$$

$$= \left(9x - 3x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{5}x^5\right)\Bigg|_{-\frac{3}{2}}^{1} = 20\frac{5}{6}.$$

Замечание. Для непрерывной функции $y = f(x),\ f(x) \geq 0$ рассмотрим криволинейную трапецию $\Phi = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$.



Пусть $x = x(t),\ t_A \le t \le t_B,\ x(t_A) = a, x(t_B) = b$, где $x(t)$ – непрерывно-дифференцируема на промежутке $[t_A;\, t_B]$. Тогда по формуле (7): $V_x = \pi\int\limits_a^b f^2(x)dx =$

$= \Big|$ по формуле (1) § 26 $\Big| = \pi\int\limits_{t_A}^{t_B} f^2(x(t))\cdot x'(t)dt = \pi\int\limits_{t_A}^{t_B} y^2(t)\cdot x'(t)dt$,

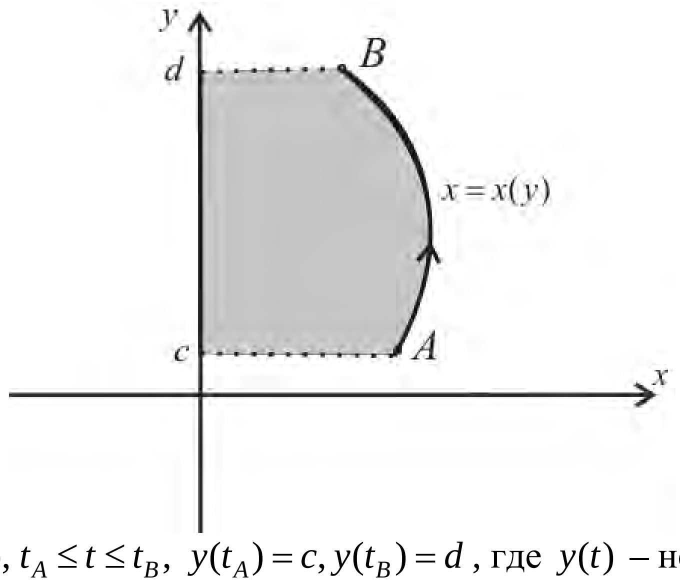
Где $\begin{cases} x = x(t) \\ y = f(x(t)) = y(t) \end{cases}$, $t_A \le t \le t_B$ – параметрическое задание линии

$y = f(x),\ x \in [a,\, b]$. Таким образом $V_x = \pi\int\limits_{t_A}^{t_B} y^2(t)\cdot x'(t)dt$, или

$$V_x = -\pi\int\limits_{t_B}^{t_A} y^2(t)\cdot x'(t)dt \qquad (12)$$

(кривая обходится так, чтобы область Φ оставалась слева).

Аналогично, для непрерывной функции $x = x(y),\ x(y) \ge 0$ рассмотрим криволинейную трапецию $\Phi_2 = \{(x,y) \,|\, c \le y \le d,\ 0 \le x \le x(y)\}$



Пусть $y = y(t),\ t_A \le t \le t_B,\ y(t_A) = c, y(t_B) = d$, где $y(t)$ – непрерывно-дифференцируема на промежутке $[t_A;\, t_B]$. Тогда по формуле (9):

$V_y = \pi\int\limits_c^d x^2(y)dy = \Big|$ по формуле (1) § 26 $\Big| = \pi\int\limits_{t_A}^{t_B} x^2(y(t))\cdot y'(t)dt = \pi\int\limits_{t_A}^{t_B} y^2(t)\cdot x'(t)dt$,

Где $\begin{cases} y = y(t) \\ x = x(y(t)) = x(t) \end{cases}$, $t_A \le t \le t_B$ – параметрическое задание линии

$x = x(y),\ y \in [c, d]$. Таким образом

$$V_y = \pi\int\limits_{t_A}^{t_B} x^2(t)\cdot y'(t)dt \qquad (13)$$

(кривая обходится так, чтобы область Φ оставалась слева).

Рассмотрим область ,ограниченную простой замкнутой кривой $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t_1 \le t \le t_2$, $x(t_1) = x(t_2), y(t_1) = y(t_2), y(t) \ge 0$ (кривая лежит по одну сторону от оси Ox). Тогда объем V_x можно находить по формуле (12):

$$V_x = -\pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t) \cdot x'(t) dt,$$

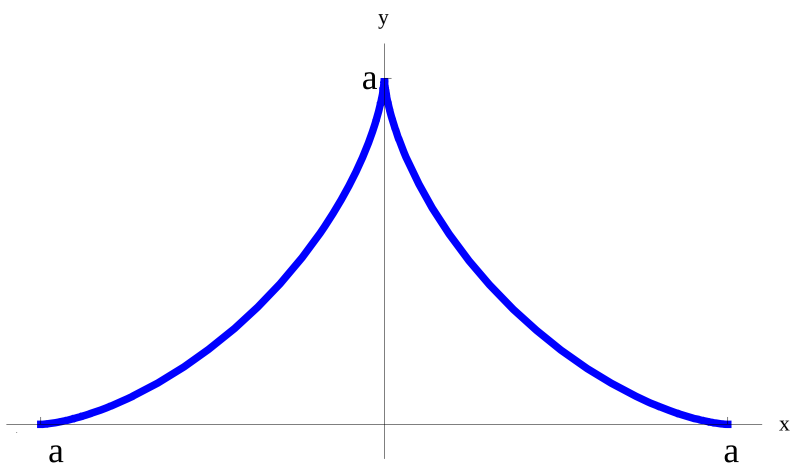
(кривая обходится так, чтобы область оставалась слева).

Аналогично ,для области ограниченной простой замкнутой кривой $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t_1 \le t \le t_2$, $x(t_1) = x(t_2), y(t_1) = y(t_2), x(t) \ge 0$ (кривая лежит по одну сторону от оси Oy)объем V_y можно находить по формуле (13):

$$V_y = \pi \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) \cdot y'(t) dt,$$

(кривая обходится так, чтобы область оставалась слева).

Пример 6. Дана астроида $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$, $\quad 0 \le t \le \pi$:



Найдем V_x.

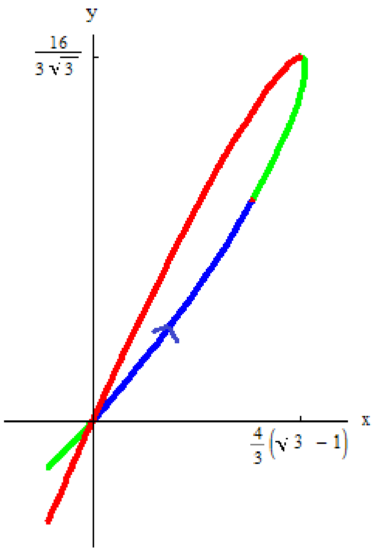
Решение. $x' = 3a\cos^2 t(-\sin t)$, по формуле (12):

$$V_x = \int_{-a}^{a} y^2 dx = \int_{\pi}^{0} (a\sin^3 t)^2 \cdot (-3a\cos^2 t \cdot \sin t) dt = -3a^3 \int_{\pi}^{0} \sin^7 t \cdot \cos^2 t dt =$$

$$= +3a^3 \int_{\pi}^{0} \sin^6 t \cdot \cos^2 t \, d(\cos t) = 3a^3 \int_{\pi}^{0} (1-\cos^2 t)^3 \cos^2 t \, d(\cos t) = \frac{32}{105} a^3.$$

Пример 7. Петля кривой $\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 4t - t^3 \end{cases}$ вращается вокруг оси Ox.Найти V_x.

Решение.

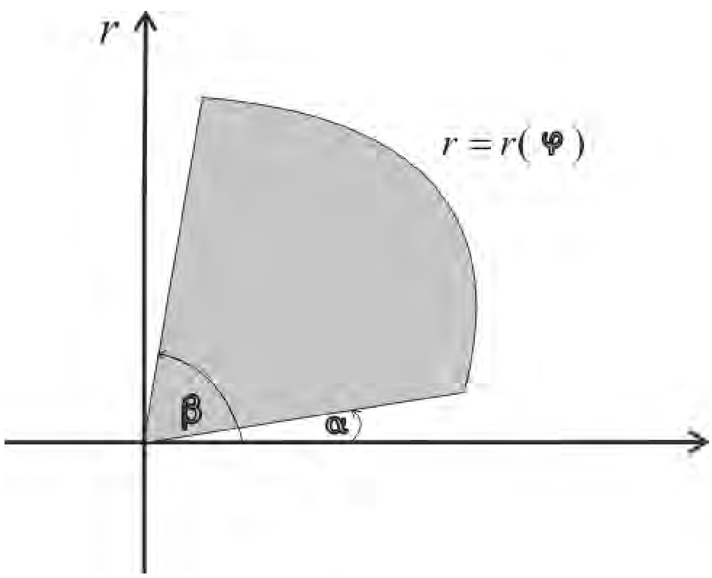


$$\begin{cases} x = t(2-t) \\ y = t(4-t^2) \end{cases}$$, при $x(0) = x(2) = 0$ и $y(0) = y(2) = 0$,при $0 \le t \le 2$ петля обходится против часовой стрелки. По формуле (12):

$$V_x = -\pi \int_0^2 y^2(t) \cdot x'(t)dt = = -\pi \int_0^2 (4t - t^3)^2 \cdot (2-2t)dt = \pi \cdot \frac{64}{35}.$$

Упражнение 3. Петля кривой $\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 4t - t^3 \end{cases}$ вращается вокруг оси Oy .Найти V_y.

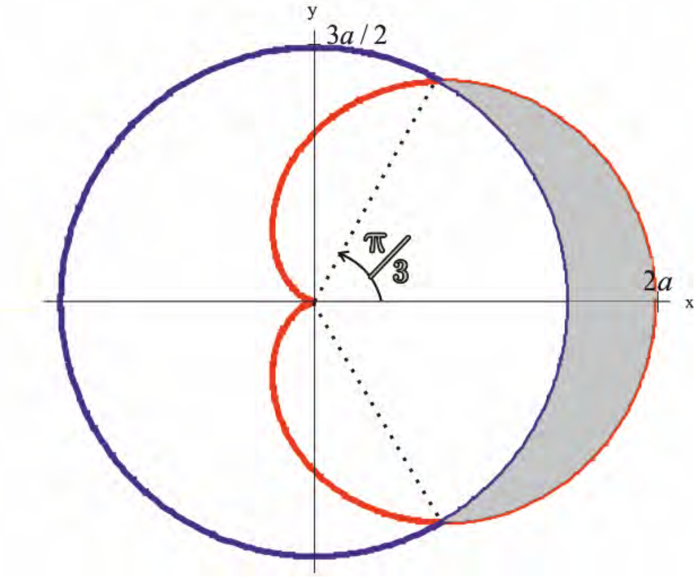
Пусть $r = r(\varphi)$ – кривая в полярной системе координат, $r(\varphi)$ – непрерывна при $\varphi \in [\alpha; \beta]$. Рассмотрим на плоскости xOy криволинейный сектор $\Phi = \{(\varphi, r) | \alpha \le \varphi \le \beta \le \pi,\ 0 \le r \le r(\varphi)\}$



Тогда объем тела при вращении фигуры φ вокруг полярной оси равен

$$V=\frac{2}{3}\pi\int_{\alpha}^{\beta} r^3(\varphi)\cdot\sin\varphi d\varphi \quad . \qquad (14)$$

Пример 8. $\Phi=\left\{(\varphi,r)\middle| -\frac{\pi}{3}\le\varphi\le\frac{\pi}{3},\ \frac{3}{2}a\le r\le a(1+\cos\varphi)\right\}$ (см. пример 4 § 31).



Найдем V_x.

Решение. По формуле (14):

$$V_x=\frac{2}{3}\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}(r_1^3(\varphi)-r_2^3(\varphi))\cdot\sin\varphi d\varphi=\frac{2}{3}\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(a^3(1+\cos\varphi)^3-\frac{27}{8}a^3\right)\sin\varphi d\varphi=$$

$$=-\frac{2}{3}\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left((1+\cos\varphi)^3-\frac{27}{8}\right)d(\cos\varphi)=-\frac{2}{3}\pi a^3\cdot\frac{1}{4}(1+\cos\varphi)^4\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}+\frac{9}{4}\pi a^3\cos\varphi\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}=$$

$$=\pi a^3\frac{67}{96}.$$

Упражнения к § 33.

Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры вокруг указанной оси координат.

33.1. $y^2=x,\ x=4,\ Ox,Oy$;

33.2. $y=e^x,\ y=e^{2x},\ x=1,\ \ Ox,\ Oy$;

33.3. $y=arctgx,\ x=1, y=0,\ Oy$;

33.4. $y^2=x^3,\ x=2-y^2,\ Ox,Oy$;

33.5. $y^2=2x-x^2,\ y=0,\ Ox,Oy$;

33.6. $y=\sin x,\ y=0,\ (0\le x\le 2\pi),\ Ox$;

33.7. $y = 2x^2,\ 4x = y^2,\quad Ox, Oy$;

33.8. $y = 4x - x^2,\ y = 0,\ Ox, Oy$;

33.9. $xy = 6,\ x + 2y - 8 = 0,\ Ox, Oy$;

33.10. $y = x^2 - 3x,\ y = 0,\ Ox, Oy$;

33.11. $y^2 = (x-1)^3,\ x = 2,\ Ox, Oy$;

33.12. $y = x^3,\ x = 0,\ y = 1,\ Ox, Oy$;

33.13. $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases},\ 0 \le t \le 2\pi,\ \ Ox$;

33.14. $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases},\ 0 \le t \le \pi,\ \ Ox, Oy$;

33.15. $\begin{cases} x = 2t + t^2 \\ y = 2t^2 + t^3 \end{cases}$, *петля*, Ox, Oy;(см.упражнение 30.20)

33.16. $\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases},\ 0 \le t \le \sqrt{3},\ \ Ox$;(см.упражнение 30.21)

33.17. $\begin{cases} x = 4t - t^3 \\ y = 4t^2 \end{cases},\ 0 \le t \le 2,\ \ Oy$;(см.упражнение 30.22)

33.18. $\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t^3 - 4t \end{cases},\ -2 \le t \le 0,\ \ Ox$;(см.упражнение 30.23)

33.19. $r = \cos\varphi,\ \ 0 \le \varphi \le \pi$ вокруг полярной оси;

33.20. $r = \cos^2\varphi,\ \ 0 \le \varphi \le \pi$ вокруг полярной оси;

33.21. $r = 2(1 + \cos\varphi),\ \ 0 \le \varphi \le \pi$ вокруг полярной оси;

33.22. $r = \sin 2\varphi,\ \ 0 \le \varphi \le \pi/2$ вокруг полярной оси;

33.23. $1 \le r \le 1 + \cos\varphi$, вокруг полярной оси;

Найдя площади сечений, вычислить объемы тел. Построить тела.

33.24. $x^2 + y^2 = \frac{z^2}{h^2} \cdot R^2,\ z = h$;

33.25. $x^2 + y^2 = \frac{z}{h} \cdot R^2,\ z = h$;

33.26. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{h},\ z = h$;

33.27. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{h^2},\ z = h$;

33.28. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{h^2}$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{h}$;

Ответы на упражнения к § 33.

33.1. $V_x=8\pi, V_y=\frac{64\pi}{5}$;

33.2. $V_x=\frac{\pi}{4}\left(e^2-1\right)^2; V_y=\frac{\pi}{2}\left(e^2-3\right)$;

33.3. $V_y=\pi(\frac{\pi}{2}-1)$;

33.4. $V_x=\frac{3\pi}{4}, V_y=\frac{512\pi}{105}$;

33.5. $V_x=\frac{16}{15}\pi, V_y=\frac{8}{3}\pi$;

33.6. $V_x=\pi^2$;

33.7. $V_x=\frac{6\pi}{5}, V_y=\frac{3\pi}{5}$;

33.8. $V_x=\frac{512\pi}{15}, V_y=\frac{128\pi}{3}$;

33.9. $V_x=\frac{16\pi}{3}, V_y=\frac{32\pi}{3}$;

33.10. $V_x=\frac{81\pi}{10}, V_y=\frac{27\pi}{2}$;

33.11. $V_x=\frac{\pi}{4}, V_y=\frac{96\pi}{35}$;

33.12. $V_x=\frac{6\pi}{7}, V_y=\frac{3\pi}{5}$.

33.13. $V_x=5\pi^2$;

33.14. $V_x=\frac{32}{105}\pi, V_y=\frac{32}{105}\pi$;

33.15. $V_x=\frac{64}{105}\pi, V_y=\frac{64}{105}\pi$;

33.16. $V_x=\frac{81}{4}\pi$;

33.17. $V_y=\frac{256}{3}\pi$;

33.18. $V_x=\frac{64}{3}\pi$;

33.19. $\frac{\pi}{6}$;

33.20. $\frac{2}{21}\pi$;

33.21. $\frac{64}{3}\pi$;

33.22. $\frac{32}{105}\pi$;

33.23. $\frac{11}{6}\pi$;

33.24. $\frac{1}{3}\pi R^2\cdot h$;

33.25. $\frac{1}{2}\pi R^2\cdot h$;

33.26. $\frac{1}{2}\pi ab\cdot h$;

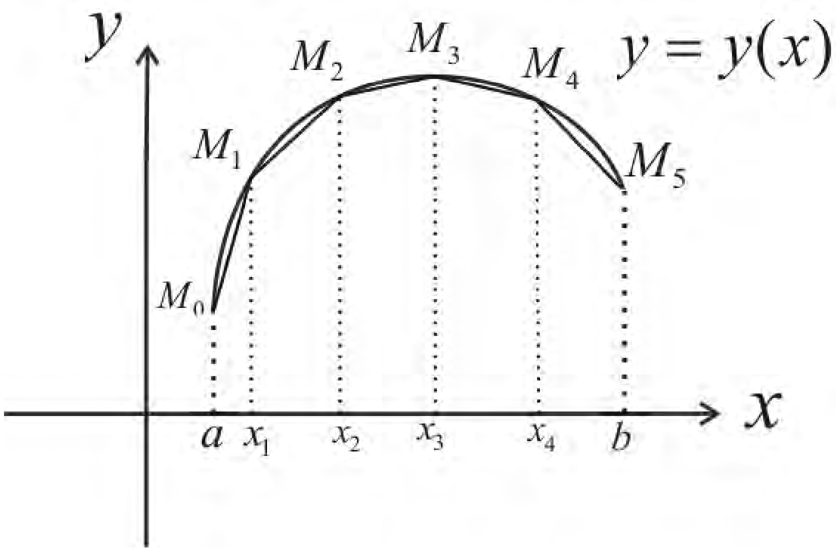
33.27. $\frac{1}{3}\pi ab\cdot h$;

33.28. $\frac{1}{6}\pi ab\cdot h$

§ 34. Площадь поверхности вращения.

Определение 1. Пусть L – простая кривая на плоскости заданная явно в виде $y = y(x),\ \ x \in [a,b]$ (см. § 30). Пусть функция $y = y(x)$ - непрерывна и неотрицательна $\forall\ x \in [a,b]$. Разобьем отрезок $[a,b]$ на n частичных отрезков точками $x_0 = a,\ x_1, ..., x_{n-1}, x_n = b$; $x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n$ и обозначим это разбиение τ_n. Пусть $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$; $\Delta y_k = y(x_k) - y(x_{k-1})$

$\Delta = \max \Delta x_k$ - диаметр разбиения.



Пусть $M_k(x_k, y_k) = M_k(x_k, y(x_k))$ точки на кривой $k = 0,1,...,n$. Рассмотрим ломаную последовательно проходящую через точки M_0 , M_1 ,…, M_m. При вращении кривой $y = y(x)$ вокруг оси Ox каждое звено $(M_{k-1},\ M_k)$ ломаной описывает поверхность ΔQ_k площадь которой Δq_k, $k = 1,2,...,n$ (боковая поверхность усеченного конуса).

$q_л = \sum_{k=1}^{n} \Delta q_k$ - площадь всей поверхности.

Если $\exists$ предел при $\Delta \to 0$ площади $q_л$ не зависящий от способа разбиения отрезка, то он называется площадью q поверхности вращения кривой L вокруг оси Ox.

Таким образом $q = \lim\limits_{\Delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta q_k$ (1)

Замечание. Пусть функция $y = f(x)$ – непрерывно-дифференцируема на отрезке $[a,b]$, тогда $\Delta q_k = \pi(y_{k-1} + y_k) \cdot \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2}$ – площадь боковой поверхности усеченного конуса; $\Delta q_k = \pi(y_{k-1} + y_k) \cdot \Delta x_k \cdot \sqrt{1 + \left(\dfrac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2} =|$ (по теореме

Лагранжа (см. теорему 4 § 12)$\Big| = \pi(y_{k-1} + y_k)\sqrt{1+(y'(c_k))^2} \cdot \Delta x_k$, где $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Поэтому

$$q = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=1}^{n}\pi(y_{k-1} + y_k)\sqrt{1+(y'(c_k))^2} \cdot \Delta x_k =$$

$$= \lim_{\Delta\to 0} 2\pi\sum_{k=1}^{n} y(c_k)\sqrt{1+(y'(c_k))^2} \cdot \Delta x_k = 2\pi\int_a^b y(x)\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$$

Таким образом:

$$q_x = 2\pi\int_a^b y(x)\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx, \qquad (2)$$

$$q_x = 2\pi\int_a^b y\,dl \qquad (3)$$

Где $dl = \sqrt{1+(y')^2}\,dx$ – дифференциал дуги. Формулы (2) и (3) приведены для кривых *L*, лежащих выше оси *Ox*. В общем случае верны формулы:

$$q_x = 2\pi\int_a^b |y(x)|\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx \qquad (4)$$

$$q_x = 2\pi\int_a^b |y(x)|\,dl \qquad (5)$$

Если кривая L задана параметрически в виде

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in [\alpha_1, \alpha_2]$, то (см. § 32)

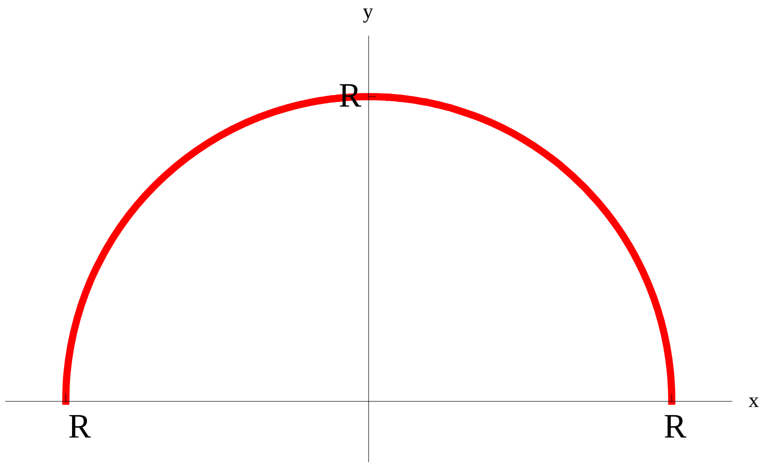
$dl = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt$, поэтому

$$q_x = 2\pi\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} |y(t)| \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt \qquad (6)$$

Для кривой *L* заданной в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi),\ \varphi \in [\alpha, \beta]$, $dl = \sqrt{r(\varphi)^2 + (r'(\varphi))^2}\,d\varphi$, (см. § 32), и

$$q_x = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta} |r(\varphi)\sin\varphi| \cdot \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2}\,d\varphi. \qquad (7)$$

Пример 1. $y = \sqrt{R^2 - x^2},\quad -R \le x \le R$ – верхняя полуокружность радиуса R

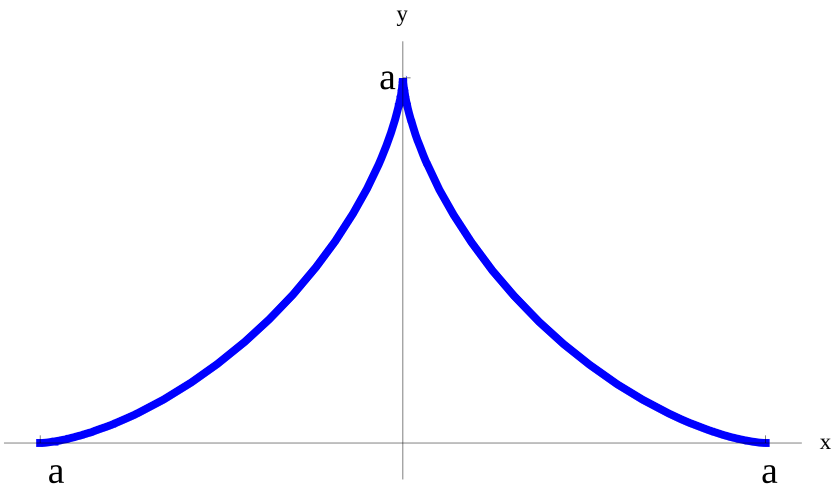


Найдем площадь поверхности при вращении вокруг оси Ox.

Решение. $y' = -\dfrac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$, по формуле (2):

$$q_x = 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx = 2\pi \int_{-R}^{R} R dx = 2\pi R x \Big|_{-R}^{R} = 4\pi R^2 .$$

Пример 2. $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$, $\quad 0 \le t \le \pi$ – верхняя половина астроиды



Найдем q_x.

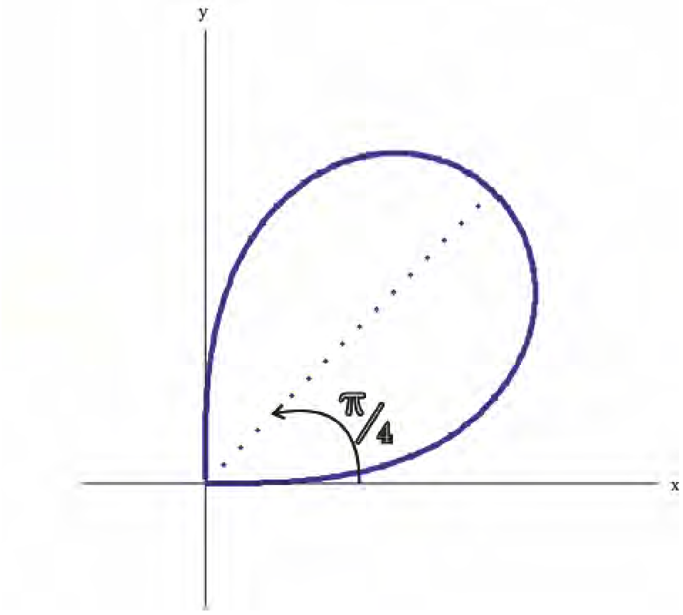
Решение. $\begin{cases} x'_t = -3a\cos^2 t \cdot \sin t \\ y'_t = 3a\sin^2 t \cdot \cos t \end{cases}$, $\quad dl = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt = 3a \cdot \left|\sin t \cdot \cos t\right| dt$

(см. пример 1 § 32). Пусть $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$, тогда по формуле (6):

$$q_x = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t \cdot 3a\sin t \cdot \cos t dt = 6a^2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \, d(\sin t) = 6a^2\pi \cdot \frac{1}{5} \cdot \sin^5 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{6\pi a^2}{5} .$$

Поэтому площадь всей поверхности $q_x = 2 \cdot \dfrac{6\pi a^2}{5} = \dfrac{12\pi a^2}{5}$.

Пример 3. $r^2 = a^2 \sin 2\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$ – лепесток лемнискаты, расположенный в первой четверти



Найдем q_x.

Решение. $r = a\sqrt{\sin 2\varphi}$; $\quad r' = \dfrac{a\cos 2\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}}$

$dl = \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{\sin 2\varphi}} \cdot d\varphi$. По формуле (7):

$$q_x = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sqrt{\sin 2\varphi} \cdot \sin\varphi \cdot \frac{a}{\sqrt{\sin 2\varphi}} d\varphi = 2\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi = 2\pi a^2 \cdot (-\cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi a^2 .$$

Упражнения к § 34.

Вычислить площадь поверхности, образованной вращением дуги кривой L вокруг указанной оси.

34.1. $y = 2\sqrt{x-1},\ x \in [1;\ 5],\ Ox$.

34.2. $y = x^3,\ x \in [-1;1],\ Ox$.

34.3. $x = 3(t - \sin t), y = 3(1 - \cos t),\ t \in [0;\ 2\pi],\ Ox$.

34.4. $r = 4\cos\varphi$.

34.5. $r = 2(1 + \cos\varphi)$ вокруг полярной оси.

34.6. $y = 2\sqrt{x};\ 0 \le x \le 1,\ Ox$.

34.7. $x = \cos t, y = 1 + \sin t,\ Ox$.

34.8. $\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x=\cos t \\ y=1+\sin t \end{cases}, 0\le t\le\pi & ,Ox \\ y=1, \qquad -1\le x\le 1 & \end{array}\right.$

34.9. $x=5\cos^3 t, y=5\sin^3 t, Ox$.

34.10. $r=\sqrt{\cos 2\varphi}$.

34.11. $r^2=2\cos 2\varphi$.

34.12. $r=2\sin\varphi,\ \frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{3\pi}{4}$.

34.13. $x=2\cos t, y=3+2\sin t, Ox$.

34.14. $y=x^3, 0\le x\le 2$.

34.15. $r^2=9\cos 2\varphi$.

34.16. $r=4\sin\varphi$.

34.17. $y=e^x,\ x\in[0;2], Ox$.

34.18. $y=\operatorname{ch} x,\ x\in[0;1], Ox$.

Ответы на упражнения к § 34.

34.1. $\frac{8}{3}\pi(5\sqrt{5}-1)$

34.2. $\frac{2}{27}\pi(10\sqrt{10}-1)$

34.3. 192π.

34.4. 16π.

34.5. $\frac{128}{5}\pi$.

34.6. $\frac{8}{3}\pi(2\sqrt{2}-1)$.

34.7. $4\pi^2$.

34.8. $8\pi+2\pi^2$

34.9. 60π.

34.10. $2\pi(2-\sqrt{2})$

34.11. $4\pi(2-\sqrt{2})$

34.12. $2\pi(2+\pi)$

34.13. $24\pi^2$

34.14. $\frac{\pi}{27}(145\sqrt{145}-1)$

34.15. $18\pi(2-\sqrt{2})$

34.16. $16\pi^2$

34.17. $\pi\left(e^2\sqrt{1+e^4}-\sqrt{2}+\ln\left(\frac{e^2+\sqrt{1+e^4}}{1+\sqrt{2}}\right)\right)$

34.18. $\frac{1}{2}\pi(2+\operatorname{sh} 2)$.

ЛИТЕРАТУРА

1.Кудрявцев,Л.Д. Краткий курс математического анализа. / Л.Д.Кудявцев. – М.: Наука, 1989.

2. Демидович,Б.П.Сборник задач по математическому анализу./ Б.П.Демидович. – М.: Наука, 1990.

3. Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа./ Под ред.А.В.Ефимова, Б.П.Демидовича. – М.: Наука, 1981.-Т.1.

4. Герасимович, А.И. Математический анализ: в 2 ч./ А.И. Герасимович, Н.А. Рысюк/. – Минск: Вышэйшая школа, 1989. – Ч. 1.

5. Математический анализ в вопросах и задачах./Под ред.В.Ф.Бутузова.- М.: Физматлит, 2001.

5. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах./ П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова/. – Минск: Вышэйшая школа, 1986. – Ч. 1.

6. Сухая, Т.А. Задачи по высшей математике./ Т.А. Сухая, В.Ф.Бубнов/. – Минск: Вышэйшая школа, 1993. – Ч. 2.

7. Индивидуальные задания по высшей математике./ под ред. А.П. Рябушко /. – Минск: Вышэйшая школа, 2008. – Ч. 1,2.

8. Кузнецов, Л.А. Сборник заданий по высшей математике./ Л.А.Кузнецов/. – М: Высшая школа, 1983.

9.Матвеева,Л.Д., РудыйА.Н. Математический анализ. 1 семестр. /Л.Д.Матвеева,А.Н.Рудый/.-Минск,БНТУ,2015.

10.Матвеева,Л.Д., Бань Л.В.,РудыйА.Н. Математический анализ. Часть 2. /Л.Д.Матвеева,Л.В.Бань,А.Н.Рудый/.-Минск,БНТУ,2015.Электронный учебный материал.Рег.№ БНТУ/ЭФ 41-35.2015.