

**Министерство образования Республики Беларусь**  
**БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**  
Факультет маркетинга, менеджмента, предпринимательства  
Кафедра «Бизнес-администрирование»

## **МАТЕМАТИКА**

**Методическое пособие по выполнению  
контрольной работы  
для студентов специальностей  
1-27 03 01 «Управление инновационными проектами промышленных  
предприятий»  
1-27 03 02 «Управление дизайн-проектами на промышленном  
предприятии»**

*Электронный учебный материал*

Минск 2016

УДК 51(075.8)  
ББК 22.18я73.1я7

**Автор:**  
*С.В.Чернявская*

**Рецензент:**  
*Б.М. Астрахан, доцент кафедры «Экономика и управление инновационными проектами в промышленности» БНТУ, кандидат технических наук, доцент*

Чернявская С.В.. Математика: методическое пособие по выполнению контрольной работы для студентов специальности 1-27 03 01 «Управление инновационными проектами промышленных предприятий», 1-27 03 02 «Управление дизайн - проектами на промышленном предприятии»/ С.В.Чернявская – Мн.: БНТУ, 2015. – 53 с.

Методическое пособие содержит исходные данные и методические указания по выполнению контрольной работы по дисциплине «Математика». В работу включены темы 2 семестра «Функции одной и нескольких переменных», «Интегрирование» и «Дифференциальные уравнения».

Белорусский национальный технический университет  
пр-т Независимости, 65, г. Минск, Республика Беларусь  
Тел.(017) 292-77-52 факс (017) 292-91-37  
Регистрационный № БНТУ/ФММП51-5.2016

## **ОГЛАВЛЕНИЕ**

|  |           |
|--|-----------|
| <b>ВВЕДЕНИЕ</b>  | <b>4</b>  |
| 1 Содержание организация выполнения контрольной работы                 | 5         |
| 1.1 Цели и задачи контрольной работы                                   | 5         |
| 1.2 Содержание и порядок выполнения контрольной работы                 | 5         |
| 1.2.1 Структура и задание на контрольную работу                        | 5         |
| 1.2.2 Выбор варианта исходных данных для выполнения контрольной работы | 5         |
| 1.2.3 Порядок выполнения и защиты контрольной работы                   | 6         |
| 2 Методические рекомендации по выполнению разделов контрольной работы  | 8         |
| 2.1 Содержание контрольной работы                                      | 8         |
| 2.2 Задания контрольной работы   | 9         |
| 2.3 Решение типового варианта.   | 70        |
| <b>СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ</b>                                 | <b>81</b> |

## ВВЕДЕНИЕ

Контрольная работа выполняется в соответствии с учебным планом БНТУ по специальностям 1-27 03 01 «Управление инновационными проектами промышленных предприятий», 1-27 03 02 «Управление дизайн - проектами на промышленном предприятии»

Методическое пособие предназначено для проведения контрольной работы по таким разделам курса «Математика», как «Вычисление пределов», «Исследование функции одной и нескольких переменных», «Интегрирование функции одной переменной» и «Дифференциальные уравнения». Контрольная работа соответствует учебной программе 2 семестра по дисциплине «Математика».

Выполнение контрольной работы обеспечивает более глубокое изучение материала, направлено на закрепление и систематизацию знаний, умений и формирование общих компетенций.

Теоретические сведения к контрольной работе (основные определения, формулировки теорем, формулы), используемые при решении задач, можно найти в учебном пособии [1], а также другой рекомендуемой литературе. Контрольные работы сопровождаются решением типового варианта. Контрольные работы содержат 30 вариантов.

Результатом выполнения контрольной работы является закрепление теоретических знаний, получение практических навыков при решении основных задач курса высшей математики по темам «Функции одной и нескольких переменных», «Интегрирование функций одной переменной», «Дифференциальные уравнения».

# **1 Содержание организация выполнения контрольной работы**

## **1.1 Цели и задачи контрольной работы**

Целью контрольной работы является закрепление знаний, полученных в процессе обучения по дисциплине «Математика», формирование необходимых умений и навыков при нахождении пределов и производных функции одной переменной, исследовании функций одной и нескольких переменных, вычислении неопределенного, определенного и несобственного интегралов, нахождении площадей и объемов, решении обыкновенных дифференциальных уравнений.

## **1.2 Содержание и порядок выполнения контрольной работы**

### **1.2.1 Структура и задание на контрольную работу**

Задачи выполняются в той последовательности, в которой они указаны в контрольной работе. Обязательно должно быть записано условие задачи, решение с достаточной степенью подробности и необходимыми пояснениями, затем ответ. Если в задаче приведено только условие и ответ, то задача считается нерешенной.

Отчет можно представлять в рукописном виде (четким и разборчивым почерком), используя только черные или синие чернила, или в печатном виде.

На титульном листе отчета должны быть указаны:

- дисциплина;
- номер варианта;
- номер группы;
- фамилия, имя, отчество студента.

### **1.2.2 Выбор варианта исходных данных для выполнения контрольной работы**

Каждый студент выполняет контрольную работу по выбранному номеру варианта, который определяется на основе таблицы 1.1.

К цифрам в рамках необходимо добавить сумму цифр номера группы, например,  $1+0+5+0+3+6+1+4=20$

Таблица 1.1 – Номера вариантов контрольной работы

| Последние две<br>цифры зачетной<br>книжки | Четвертая и пятая цифры зачетной книжки |    |    |    |    |    |    |    |    |
|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
|   | 01                                      | 02 | 03 | 04 | 05 | 06 | 07 | 08 | 09 |
| 01  | 1                                       | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |
| 02  | 2                                       | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
| 03  | 3                                       | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 |
| 04  | 4                                       | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 |
| 05  | 5                                       | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 06  | 6                                       | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 07  | 7                                       | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 08  | 8                                       | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 09  | 9                                       | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| 10  | 10                                      | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 11  | 11                                      | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| 12  | 12                                      | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 13  | 13                                      | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |
| 14  | 14                                      | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 |
| 15  | 15                                      | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 |
| 16  | 16                                      | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 17  | 17                                      | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| 18  | 18                                      | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 1  |
| 19  | 19                                      | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 1  | 2  |
| 20  | 20                                      | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 1  | 2  | 3  |
| 21  | 21                                      | 22 | 23 | 24 | 25 | 1  | 2  | 3  | 4  |
| 22  | 22                                      | 23 | 24 | 25 | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  |
| 23  | 23                                      | 24 | 25 | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  |
| 24  | 24                                      | 25 | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  |
| 25  | 25                                      | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  |

### 1.2.3 Порядок выполнения и защиты контрольной работы

Руководитель контрольной работы составляет график выполнения отдельных разделов, проводит консультации по утвержденному расписанию, контролирует ход выполнения контрольной работы.

За качество принятых в контрольной работе решений отвечает студент, который обязан после каждого этапа представлять руководителю промежуточный объем работ на проверку. Руководитель проверяет выполненную работу, указывает ошибки и дает рекомендации по их исправлению.

Выполненная контрольная работа сдается студентом до начала экзаменационной сессии с учетом сроков проведения зачетов. Руководитель контрольной работы проверяет ее. Замечания фиксируются на оборотной стороне титульного листа.

При условии соответствия требованиям, предъявляемым к контрольной работе, она решением руководителя допускается к защите, о чем делается подпись «К защите» на титульном листе.

Если контрольная работа требует полной или частичной переработки, то студент обязан до защиты представить ее руководителю для повторной проверки.

Защита контрольной работы происходит (после исправления замечаний руководителя) в виде доклада и ответов на вопросы.

## 2 Методические рекомендации по выполнению разделов контрольной работы

### 2.1 Содержание контрольной работы

Таблица 2.1 Содержание тем контрольной работы

| № | Тема  | Содержание темы   | Номера заданий |
|---|---|---|----------------|
| 1 | Вычисление пределов                               | Основные способы раскрытия неопределенностей, теоремы о пределах.   | 1              |
| 2 | Непрерывность                                     | Непрерывность функции в точке и на промежутке. Точки разрыва и их классификация.  | 2              |
| 3 | Производная                                       | Дифференцирование функции одной переменной. Приложение производной к вычислению пределов и нахождению приближенных значений функции.                              | 3,4,5          |
| 4 | Исследование функции одной переменной             | Исследование функции одной переменной и построение ее графика. Экономические приложения производной.  | 6              |
| 5 | Функции нескольких переменных                     | Производные и дифференциалы функции нескольких переменных, производная по направлению, градиент, экстремумы, наибольшее и наименьшее значения в замкнутой области | 7              |
| 6 | Интегрирование                                    | Основные способы вычисления неопределенного интеграла, вычисление определенного и несобственного интеграла  | 8,9            |
| 7 | Геометрические приложения определенного интеграла | Вычисление площадей криволинейных трапеций, объемов тел вращения и длины дуги с помощью интеграла   | 10             |
| 8 | Обыкновенные дифференциальные уравнения           | Основные виды дифференциальных уравнений 1-го и 2-го порядка, нахождение общего и частного решения ОДУ  | 11, 12         |



## 2.2 Задания контрольной работы

Таблица 2.2 Условие задания тем контрольной работы

| Номер задания | Условие задания  |
|---------------|--|
| 1             | Вычислить пределы функций.   |
| 2             | Исследовать функцию на непрерывность и построить её график   |
| 3             | Вычислить производные от заданных функций  |
| 4             | Вычислить пределы, пользуясь правилом Лопиталя.  |
| 5             | Вычислить приближенное значение заданного выражения $A$ с использованием дифференциала.  |
| 6             | Зависимость между издержками производства $y$ и объемом производства $x$ выражается функцией $y=f(x)$ . Требуется:<br>а) найти предельные издержки при заданных объемах продукции $x$ ;<br>б) найти эластичность издержек при выпуске продукции $x$ ;<br>в) исследовать функцию издержек и построить ее график.  |
| 7             | Для данной функции найти:<br>а) полный дифференциал в точке $M$ ,<br>б) градиент в точке $M$ ,<br>в) производную в точке $M$ в направлении вектора $\overline{MN}$ ,<br>г) приближенное значение функции в точке $P$ ,<br>д) локальные экстремумы функции,<br>е) условные экстремумы при заданном уравнении связи,<br>ж) наибольшее и наименьшее значения функции в заданной области |
| 8             | Вычислить неопределенные интегралы.  |
| 9             | Вычислить определенный и несобственный интегралы.  |
| 10            | Вычислить указанную величину (площадь криволинейной трапеции, или объем тела вращения, или длину дуги).  |
| 11            | Найти общее решение дифференциальных уравнений первого порядка (найти их частное решение, если задано начальное условие).  |
| 12            | Найти общее решение дифференциальных уравнений второго порядка (найти их частное решение, если задано начальное условие).  |

## Вариант №1

|   |
|---|
| 1. а) при $a = 0, a = 2, a = \infty$ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$ ; |
| б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5x + 2}{2x^3 + 5x^2 - x}$ ;                            |
| в) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}}$ ;                          |
| г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{3x^2}$ ;  |
| д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+4}{x+8} \right)^{-3x}$ .                             |

|   |
|---|
| 2. $y = \begin{cases} x+4, & x < -1; \\ x^2 + 2, & -1 \leq x < 1; \\ 2x, & x \geq 1. \end{cases}$ |
|---|

|  |  |
|--|--|
| 3. а) $y = 2x^5 - \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x} + 3\sqrt{x}$ ; | г) $y = \frac{\sqrt{(x+7)} \cdot (x-3)^4}{(x+2)^5} \cdot 2x$ ; |
| б) $y = \sin^3 2x \cdot \cos 8x$ ;                           | д) $y^2 - 8x + 5 = 0$ .  |
| в) $y = (\arccos x)^2 : \ln(1+x^2)$ ;                        |  |

|  |  |
|--|--|
| 4. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+5)}{\sqrt[4]{x+3}}$ ; | б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{\sin x}$ . |
|--|--|

5.  $A = \sqrt[5]{34}$

|  |
|--|
| 6. $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x-1}$ , а) объемы продукции $x = 2, x = 5$ . |
|--|

|                     |   |
|---------------------|---|
| 7. $z = xy(4-x-y)$  |   |
| а) M(1;-1);         | д) -  |
| б) M(1;-1);         | е) уравнение связи: $2x - y + 5 = 0$          |
| в) M(1;-1); N(2;3); | ж) в треугольнике $x = 0; y = 0; x + y = 3$ . |
| г) P(1,02;-0,98);   |   |

|   |   |
|---|---|
| <b>8.</b> а) $\int (x^4 + x^{-1} + \cos 5x) dx$ | в) $\int x^2 e^{2x} dx$                   |
| б) $\int \frac{x dx}{\sqrt[3]{4+x^2}}$          | г) $\int \frac{(2x-5) dx}{x^2 - 3x + 10}$ |

|   |  |
|---|--|
| <b>9.</b> а) $\int_0^1 \sqrt[4]{x^3} (1 + \sqrt{x})^2 dx$ | б) $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{4+x^2}$ |
|---|--|

**10.** Найти площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2 - 3x + 1; y = 2$ .

|  |
|--|
| <b>11.</b> а) $(\sqrt{xy} - \sqrt{x}) dx + (\sqrt{xy} + \sqrt{y}) dy = 0; y(1) = 1;$ |
| б) $xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x};$                                      |
| в) $y' + xy = -x^3; y(0) = 3.$   |

|   |                       |
|---|-----------------------|
| <b>12.</b> а) $4y^3 y'' = y^4 - 1;$<br>$y(0) = \sqrt{2}$<br>$y'(0) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ | б) $y'' + y = 4xe^x.$ |
|---|-----------------------|

## Вариант №2

|  |
|--|
| 1. а) при $a = 0, a = 3, a = \infty$ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{6 + x - x^2}{x^3 - 27}$ ; |
| б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 7x}{2x^3 - 4x^2 + 5}$ ;                         |
| в) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+12} - \sqrt{4-x}}{x^2 + 2x - 8}$ ;                 |
| г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin x}{5x}$ ;                                    |
| д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{x+1} \right)^{2x}$ .                         |

|  |
|--|
| 2. $y = \begin{cases} x+1, & x \leq 0 \\ x^2 + 2, & 0 < x \leq 2 \\ -x+4, & x > 2 \end{cases}$ |
|--|

|  |  |
|--|--|
| 3. а) $y = \frac{3}{x} + \sqrt[5]{x^2} - 4x^3 + \frac{2}{x^4}$ ; | г) $y = \frac{(x-3)^5 \cdot (x+2)^3}{\sqrt{(x-3)^3}} \cdot 3^{-x}$ ; |
| б) $y = \operatorname{tg}^4 x \cdot \cos^2 x$ ;                  |  |
| в) $y = (\operatorname{arctg} x)^3 : \ln(x + x^3)$ ;             | д) $y - x - \operatorname{arctg} y = 0$ ;                            |

|   |   |
|---|---|
| 4. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$ ; | б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x}}{x^5}$ . |
|---|---|

5.  $A = \ln 0,2$

|   |
|---|
| 6. $y = \frac{x+1}{(x-1)^2}$ , а) объемы продукции $x = 3, x = 5$ . |
|---|

|  |   |
|--|---|
| 7. $z = \frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{4} + 3$ ; |   |
| а) $M(2;1)$ ;  | д) -  |
| б) $M(2;1)$ ;  | е) уравнение связи: $2x + y + 5 = 0$ ;        |
| в) $M(2;1); N(2;3)$ ;                                | ж) в треугольнике $x = 0; y = 0; x + y = 4$ . |
| г) $P(1,03; 1,01)$ ;                                 |   |

|  |                                     |
|--|-------------------------------------|
| 8. а) $\int \left( \frac{3}{1-3x} + \frac{1}{(2x-1)} - 5 \cdot 2^x \right) dx$ | в) $\int x \ln(3x+2) dx$            |
| б) $\int \frac{e^{3x} dx}{1+(e^{3x})^2}$                                       | г) $\int \frac{(x+8) dx}{x^2-4x+8}$ |

|   |   |
|---|---|
| 9. а) $\int_0^{\pi/3} \frac{\sin^3 x dx}{\cos^4 x}$ | б) $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{x^3+1}$ |
|---|---|

10. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Ox$  криволинейной трапеции, ограниченной линиями  $y = 0,25x^2$ ;  $y = 0,125x^2$

|   |
|---|
| 11. а) $(1+y^2)dx - \sqrt{x}dy = 0; y(1) = \frac{\pi}{4}$ ; |
| б) $(x^2 - y^2)y' = 2xy$                                    |
| в) $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3; y(0) = \frac{1}{2}$ .    |

|  |                                |
|--|--------------------------------|
| 12. а) $y'' = 128y^3$ ;<br>$y(0) = 1$<br>$y'(0) = 8$ | б) $y'' + y' - 2y = x^2 e^x$ . |
|--|--------------------------------|

### Вариант №3

|           |  |  |
|-----------|--|--|
| <b>1.</b> | а) при $a = 0, a = 2, a = \infty$  | $\lim_{x \rightarrow a} \frac{2x^2 - 7x + 4}{x^2 - 5x + 6};$ |
|           | б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - 3x^2 + 7}{x^4 + 2x^3 + 1};$     |  |
|           | в) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x+10} - \sqrt{4-x}}{2x^2 - x - 21};$ |  |
|           | г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 5x}{2x^2};$                   |  |
|           | д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x}{1+2x} \right)^{-4x}.$       |  |

|           |  |
|-----------|--|
| <b>2.</b> | $y = \begin{cases} x+2, & x \leq -1; \\ (x+1)^2, & -1 < x \leq 1; \\ -x+3, & x > 1. \end{cases}$ |
|-----------|--|

|  |  |
|--|--|
| <b>3.</b> а) $y = 3x^4 + \sqrt[3]{x^5} - \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2};$ | г) $y = \frac{(x-2)^3 \cdot \sqrt{(x+7)^5}}{(x-4)^2} \cdot e^{x^2};$ |
| б) $y = \operatorname{ctg} 3x \cdot \sin^2 3x;$                        | д) $y^2 - 25x + 4 = 0.$  |
| в) $y = \ln(1+x^3) : \arccos 3x;$                                      |  |

|   |   |
|---|---|
| <b>4.</b> а) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 5x};$ | б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\ln(1+2x)}.$ |
|---|---|

**5.**  $A = \sin 0,25$

|           |   |
|-----------|---|
| <b>6.</b> | $y = \frac{x}{9-x}$ . а) объемы продукции $x = 2, x = 4.$ |
|-----------|---|

|                    |                         |                   |                            |
|--------------------|-------------------------|-------------------|----------------------------|
| <b>7.</b>          | $z = x^3 + y^3 - 12xy;$ |                   |                            |
| а) M(1;1);         | д) -                    |                   |                            |
| б) M(1;1);         | е) уравнение связи:     | $2x - y + 1 = 0;$ |                            |
| в) M(1;1); N(2;3); | ж) в треугольнике       |                   | $x = 0; y = 0; x + y = 1.$ |
| г) P(-0,98;1,01);  |                         |                   |                            |

|   |   |
|---|---|
| <b>8.</b> а) $\int (\frac{3}{1-5x} + \sin 4x - \frac{2}{x^4}) dx$<br>б) $\int \frac{3^x dx}{1+3^x}$ | в) $\int (x^2 + \frac{1}{x}) \ln x dx$<br>г) $\int \frac{(2x-1)dx}{x^2 - 4x + 5}$ |
|---|---|

|   |   |
|---|---|
| <b>9.</b> а) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x dx$ | б) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}$ |
|---|---|

**10.** Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Ox$  криволинейной трапеции, ограниченной линией  $y^2 = \frac{4}{27}(4-x)^3$

|  |
|--|
| <b>11.</b> а) $(1 + e^{2x})y^2 dy = e^x dx; y(0) = 1;$ |
| б) $y^2 + x^2 y' = xy y';$                             |
| в) $y' + \frac{y}{x} = 3x; y(1) = 1.$                  |

|  |                        |
|--|------------------------|
| <b>12.</b> а) $y^3 y'' + 64 = 0;$<br>$y(0) = 4$<br>$y'(0) = 2$ | б) $y'' - 5y' = 3x^2.$ |
|--|------------------------|

### Вариант №4

|   |
|---|
| 1. а) при $a = 0, a = 1/3, a = \infty$ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{3x^2 + 2x - 1}{27x^3 - 1}$ ; |
| б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 2x^2 + 4x}{2x^3 + 5}$ ;                              |
| в) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{x+6}}{x^2 - x - 6}$ ;                        |
| г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{2 \sin x}$ ;                               |
| д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x} \right)^{-3x}$ .                             |

|   |
|---|
| 2. $y = \begin{cases} -x, & x \leq 0; \\ -(x-1)^2, & 0 < x \leq 2; \\ x-3, & x \geq 2. \end{cases}$ |
|---|

|   |   |
|---|---|
| 3. а) $y = 7\sqrt{x} - \frac{2}{x^5} - 3x^3 + \frac{4}{x}$ ;      | г) $y = \frac{(x+3) \cdot \sqrt[5]{(x-2)^2}}{(x+7)^7} \cdot 2^{-x^2}$ |
| б) $y = \cos^5 2x \cdot \operatorname{tg} x$ ;                    | д) $y^2 - x - \cos y = 0$   |
| в) $y = \operatorname{lg}(1+x^2) : \operatorname{arctg}(1+x^2)$ ; |   |

|   |   |
|---|---|
| 4. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{2 \sin x + x}$ ; | б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x^3}$ . |
|---|---|

5.  $A = \sqrt[4]{16,64}$ .

|  |
|--|
| 6. $y = \frac{4x - x^2 - 4}{x}$ а) объемы продукции $x = 1, x = 4$ . |
|--|

|                                 |  |
|---------------------------------|--|
| 7. $z = x^2 + y^2 - 12xy + 3$ ; |  |
| а) M(-1;-1);                    | д) -   |
| б) M(-1;-1);                    | е) уравнение связи: $2x + y + 1 = 0$ ;         |
| в) M(-1;-1); N(2;3);            | ж) в треугольнике $x = 0; y = 0; x + y = -1$ . |
| г) P(1,03;0,98);                |  |



|   |   |
|---|---|
| <b>8.</b> а) $\int (\frac{2}{1-3x} + \cos 5x + \frac{2}{4+x^2}) dx$ | в) $\int (x^2 - 3) \sin 2x dx$          |
| б) $\int \frac{dx}{x \ln^2 x}$                                      | г) $\int \frac{(x-2) dx}{x^2 - 3x + 5}$ |

|   |  |
|---|--|
| <b>9.</b> а) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \operatorname{ctg}^3 x dx$ | б) $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{3/2}}$ |
|---|--|

**10.** Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Ox$  криволинейной трапеции, ограниченной линиями  $y^2 = 3x, x = 5$

|  |
|--|
| <b>11.</b> а) $y \ln^3 y + y' = \sqrt{x+1} = 0; y(0) = e;$ |
| б) $xy' - y = (x+y) \ln \frac{x+y}{x};$                    |
| в) $y' + \frac{y}{x} = \sin x; y(\pi) = \frac{1}{\pi}.$    |

|   |                          |
|---|--------------------------|
| <b>12.</b> а) $y'' + 2 \sin y \cos^3 y = 0;$<br>$y(0) = 0$<br>$y'(0) = 1$ | б) $y'' + y = x^2 + 2x.$ |
|---|--------------------------|

## Вариант №5

|  |
|--|
| 1. а) при $a = 0, a = 1, a = \infty$ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{3x^2 + 2x - 1}{-x^2 + x + 2}$ ; |
| б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 28x}{5x^3 + 3x^2 + x - 1}$ ;                          |
| в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+2x} - \sqrt{x+4}}{3x^2 - 4x + 1}$ ;                       |
| г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x - \sin^2 x}{3x^2}$ ;                                    |
| д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+5}{2x+1} \right)^{5x}$ .                           |

|   |
|---|
| 2. $y = \begin{cases} -2(x+1), & x \leq -1; \\ (x+1)^2, & -1 < x < 0; \\ x, & x > 0. \end{cases}$ |
|---|

|  |   |
|--|---|
| 3. а) $y = 7x + \frac{5}{x^2} - \sqrt[3]{x^4} + \frac{6}{x}$ ; | г) $y = \frac{(x+2)^7 \cdot (x-3)^3}{\sqrt{(x+1)^5}} \cdot 5^{x-1}$ |
| б) $y = \sin^5 x \cdot \operatorname{tg} 2x$ ;                 | д) $\operatorname{tg} y - 3x - 5y + 1 = 0$ ;                        |
| в) $y = \ln^2 x \cdot \arccos 2x$ ;                            | е) $y = \ln(x-3)$ .   |

|  |   |
|--|---|
| 4. а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6}$ ; | б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{1 - \cos bx}$ . |
|--|---|

5.  $A = (3,03)^5$

|  |
|--|
| 6. $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ а) объемы продукции $x = 4, x = 9$ . |
|--|

|    |                                |   |
|----|--------------------------------|---|
| 7. | $z = 4x^2 - y^2 - 4x + 2y + 5$ |   |
|    | а) $M(1;2)$ ;                  | д) -  |
|    | б) $M(1;2)$ ;                  | е) уравнение связи: $x - y + 5 = 0$ ;         |
|    | в) $M(1;2); N(2;3)$ ;          | ж) в треугольнике $x = 0; y = 0; x + y = 2$ . |
|    | г) $P(0,97; -0,98)$ ;          |   |

|   |  |
|---|--|
| 8. а) $\int \left( \frac{3}{\sqrt{3x+1}} + \sin 2x - \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} \right) dx$ | в) $\int (x^2 + 3)4^x dx$                |
| б) $\int \frac{e^x (e^x + 1)^{-1} dx}{\ln(1 + e^x)}$                                    | г) $\int \frac{(3x+1)dx}{-x^2 + 2x + 3}$ |

|  |  |
|--|--|
| 9. а) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin 2x dx}{\cos^3 x}$ | б) $\int_1^{\infty} \frac{(x^3 + 1)dx}{x^4}$ |
|--|--|

10. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Ox$  криволинейной трапеции, ограниченной линиями  $y = \operatorname{tg}x; 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ .

|  |
|--|
| 11. а) $\frac{y}{y'} = \ln y; y(1) = e;$ |
| б) $2x^3 y' = y(2x^2 - y^2);$            |
| в) $y' + 2xy = xe^{-x^2}; y(0) = 1.$     |

|   |                          |
|---|--------------------------|
| 12. а) $y'' = 32 \sin^3 y \cos y;$<br>$y(1) = \frac{\pi}{2}$<br>$y'(1) = 4$ | б) $y'' + y = x^3 + 6x.$ |
|---|--------------------------|

## Вариант №6

|   |
|---|
| 1. а) при $a = 0, a = 2, a = \infty$ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - 8}{x^2 + x - 6}$ ; |
| б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 10x + 3}{2x^2 + 5x - 3}$ ;                     |
| в) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x+1}}$ ;                  |
| г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{5x}$ ;   |
| д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3}{x} \right)^{-5x}$ .                       |

|   |
|---|
| 2. $y = \begin{cases} -x, & x \leq 0; \\ x^2, & 0 < x \leq 2; \\ x+1, & x > 2. \end{cases}$ |
|---|

|  |  |
|--|--|
| 3. а) $y = 5x^2 - \sqrt[3]{x^4} + \frac{4}{x^3} - \frac{5}{x}$ ; | г) $y = \frac{(x-1)^4 \cdot (x+2)^5}{\sqrt[3]{(x-4)^2}} \cdot e^{x^3}$ ; |
| б) $y = \cos^5 3x \cdot \operatorname{ctgx}$ ;                   | д) $y - e^y + 4x = 0$ ;  |
| в) $y = \ln^2(1+x) : \arccos x^3$ ;                              |  |

|   |   |
|---|---|
| 4. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^5}$ ; | б) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1 - \sin 3x}{\cos 3x}$ . |
|---|---|

5.  $A = \sqrt[3]{10}$

|   |
|---|
| 6. $y = x + \frac{\ln x}{x}$ , а) объемы продукции $x = 2, x = 5$ . |
|---|

|   |   |
|---|---|
| 7. $z = 5x^2 + y^2 - 4xy + 6x - 8y + 1$ ; |   |
| а) M(2;-1);                               | д) -  |
| б) M(2;-1);                               | е) уравнение связи: $3x - y + 5 = 0$ ;        |
| в) M(2;-1); N(2;3);                       | ж) в треугольнике $x = 0; y = 0; x + y = 1$ . |
| г) P(0,95;1,03);                          |   |

|   |  |
|---|--|
| <b>8. a)</b> $\int \left( \frac{1}{x-2} + \cos 3x - \frac{2}{\sin x^2} \right) dx$<br><b>б)</b> $\int \cos^3 x \cdot \sin^4 x dx$ | <b>в)</b> $\int \frac{x \sin x dx}{\cos^2 x}$<br><b>г)</b> $\int \frac{(4x+3)dx}{-x^2-2x+1}$ |
|---|--|

|  |  |
|--|--|
| <b>9. a)</b> $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$ | <b>б)</b> $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}}$ |
|--|--|

**10.** Найти площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = 2 - x^2, y = x^2$ .

|  |
|--|
| <b>11. a)</b> $\frac{xdy}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{ydx}{\sqrt{1-x^2}} = 0; y(0) = 1;$ |
| <b>б)</b> $(y + \sqrt{xy})dx = xdy;$   |
| <b>в)</b> $y' + 2xy = -2x^3; y(1) = \frac{1}{e}.$                                  |

|   |   |
|---|---|
| <b>12. a)</b> $y'' = 98y^3;$<br>$y(1) = 1$<br>$y'(1) = 7$ | <b>б)</b> $y'' - y' + 2y = (x+2)e^{2x}$ |
|---|---|

## Вариант №7

|   |
|---|
| 1. а) при $a = 0, a = 1, a = \infty$ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$ ; |
| б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^3 + x^2 + x}{x^4 + 3x - 2}$ ;                     |
| в) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 4x + 1}{\sqrt{x+3} - \sqrt{5+3x}}$ ;               |
| г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x}$ ;  |
| д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+2}{x+1} \right)^{2x}$ .                      |

|   |
|---|
| 2. $y = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 1; \\ 2x, & 1 < x \leq 6; \\ x + 2, & x > 3. \end{cases}$ |
|---|

|  |  |
|--|--|
| 3. а) $y = 3x^5 - \frac{3}{x} - \sqrt{x^3} + \frac{10}{x^5}$ ; | г) $y = \frac{(x-3)^2 \cdot \sqrt{(x+4)}}{(x+2)^7} \cdot 3^{2x}$ ; |
| б) $y = \operatorname{ctg}^3 2x \cdot \sin^2 x$ ;              | д) $y^2 + x^2 - \sin y = 0$  |
| в) $y = \operatorname{arcsin} 3x : \ln(1 + x^2)$ ;             |  |

|   |   |
|---|---|
| 4. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$ ; | б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{e^x - 1}$ |
|---|---|

5.  $A = \operatorname{tg} 0,1$

|   |
|---|
| 6. $y = \frac{(x-2)^2}{x+1}$ , а) объемы продукции $x = 1, x = 3$ . |
|---|

|                                  |   |
|----------------------------------|---|
| 7. $z = 8(x - y) - x^2 - 2y^2$ ; |   |
| а) $M(1;0)$ ;                    | д) -  |
| б) $M(1;0)$ ;                    | е) уравнение связи: $x - y + 1 = 0$ ;         |
| в) $M(1;0); N(2;3)$ ;            | ж) в треугольнике $x = 0; y = 0; x + y = 2$ . |
| г) $P(1,01; -0,98)$ ;            |   |

|  |                                    |
|--|------------------------------------|
| 8. а) $\int (\frac{1}{\sqrt[3]{4x+7}} + x^2 - 3) dx$ | в) $\int x^2 \cos x dx$            |
| б) $\int x\sqrt{1+x^2} dx$                           | г) $\int \frac{(5x-1)dx}{x^2-x+1}$ |

|  |   |
|--|---|
| 9. а) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$ | б) $\int_2^{\infty} \frac{\ln x dx}{x}$ |
|--|---|

10. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Oy$  криволинейной трапеции, ограниченной линиями  $xy = 3; y = 6; y = 1$ .

|  |
|--|
| 11. а) $yy' = -\frac{2x}{\cos y}; y(e) = 0;$     |
| б) $xy' = y - xe^{y/x};$                         |
| в) $y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x}; y(1) = 4.$ |

|   |                                   |
|---|-----------------------------------|
| 12. а) $y^3 y'' + 49 = 0;$<br>$y(3) = -7$<br>$y'(3) = -1$ | б) $y'' - 9y' + 20y = x^2 e^{4x}$ |
|---|-----------------------------------|

## Вариант №8

|   |
|---|
| 1. а) при $a = 0, a = 3, a = \infty$ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{3x^2 - 7x - 6}{2x^2 - 7x + 3}$ ; |
| б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 7x + 3}{5x^3 - 3x + 4}$ ;                              |
| в) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x-3}}$ ;                         |
| г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{4x^2}$ ;  |
| д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3}{x-1} \right)^x$ .                                 |

|  |
|--|
| 2. $y = \begin{cases} x-3, & x < 0; \\ x+1, & 0 \leq x \leq 4; \\ 3+x, & x > 4. \end{cases}$ |
|--|

|  |   |
|--|---|
| 3. а) $y = \sqrt[3]{x^7} - \frac{3}{x} - 4x^5 + \frac{4}{x^5}$ ; | г) $y = \frac{(x-7)^{10} \sqrt{(3x-1)}}{(x+3)^5} \cdot 4^{-3x}$ |
| б) $y = \cos^2 4x \cdot \operatorname{tg} 2x$ ;                  | д) $4\sin^2 y - x = 0$ ;  |
| в) $y = \ln^3 x \cdot \arccos 3x$ ;                              | е) $y = \ln(x+4)$ .   |

|  |  |
|--|--|
| 4. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - x}{x - \sin x}$ ; | б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$ . |
|--|--|

5.  $A = (2,01)^3 + (2,01)^2$

|  |
|--|
| 6. $y = \frac{x^2}{4x^2 - 1}$ а) объемы продукции $x = 1, x = 2$ . |
|--|

|  |   |
|--|---|
| 7. $z = x^2 + 2y^2 + 2xy + 4x - 12y + 1$ ; |   |
| а) $M(0; -1)$ ;                            | д) -  |
| б) $M(0; -1)$ ;                            | е) уравнение связи: $3x - y + 1 = 0$          |
| в) $M(0; -1); N(2; 3)$ ;                   | ж) в треугольнике $x = 0; y = 0; x + y = 1$ . |
| г) $P(1,02; -0,98)$ ;                      |   |



|   |   |
|---|---|
| 8. а) $\int (\frac{1}{\sqrt{3x-1}} - \sin 4x + x^5 + 1) dx$ | В) $\int x^2 \ln x dx$                  |
| б) $\int x^2 \sqrt[3]{1+x^3} dx$                            | Г) $\int \frac{(x+3) dx}{x^2 - 5x + 4}$ |

|  |  |
|--|--|
| 9. а) $\int_0^{\pi/3} \cos^3 x \sin 2x dx$ | б) $\int_{\sqrt{2}x}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$ |
|--|--|

10. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = 2x - x^2$ ;  $y = -x$ .

|   |
|---|
| 11. а) $\frac{dx}{x(y-2)} + \frac{dy}{y(x+1)} = 0$ ; $y(3) = 1$ ; |
| б) $x \sin \frac{y}{x} y' + x = \sin \frac{y}{x}$ ;               |
| в) $y' + x = \frac{2}{x^3}$ ; $y(1) = 1$                          |

|  |                                   |
|--|-----------------------------------|
| 12. а) $4y^3 y'' = 16y^4 - 1$ ;<br>$y(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$<br>$y'(3) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ | б) $y'' - 18y' + 81y = x^3 + 3$ . |
|--|-----------------------------------|

### Вариант №9

|   |
|---|
| 1. а) при $a = 0, a = -1, a = \infty$ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{3x^2 + 2x - 1}{3x^2 + x - 2}$ ; |
| б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^3 + 3x + 1}{3x^2 + x - 5}$ ;                               |
| в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 4x - \sin^2 2x}{x^2}$ ;                                     |
| г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x}{2x - 3} \right)^{3x}$ .                            |
| д) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+6}}{2x^2 - 7x - 15}$ ;                       |

|   |
|---|
| 2. $y = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & x \leq 0; \\ 0, & 0 < x \leq 2; \\ x-2, & x > 2. \end{cases}$ |
|---|

|  |  |
|--|--|
| 3. а) $y = 8x^2 + \sqrt[3]{x^4} - \frac{4}{x} - \frac{2}{x^3}$ ; | г) $y = \frac{(x+8)^8(x-3)^2}{\sqrt{(x+2)^5}} \cdot e^{x^2}$ ; |
| б) $y = \operatorname{tg}^3 2x \cdot \cos^3 x$ ;                 | д) $\operatorname{tgy} - 4y + 5x = 0$ ;                        |
| в) $y = \ln^2(1-x) \cdot \operatorname{arctg} 2x$ ;              | е) $y = \cos 3x$   |

|   |   |
|---|---|
| 4. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+3)^4}{e^{2x}}$ ; | б) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x-a}{x^n - a^n}$ . |
|---|---|

5.  $A = \sqrt[3]{65}$

6.  $y = x^2 - 2 \ln x$ , а) объемы продукции  $x = 1, x = e$ .

|  |   |
|--|---|
| 7. $z = \frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{9} + 1$ |   |
| а) $M(1;1)$ ;                                      | д) -  |
| б) $M(1;1)$ ;                                      | е) уравнение связи: $x - y + 3 = 0$ ;         |
| в) $M(1;1); N(2;3)$ ;                              | ж) в треугольнике $x = 0; y = 0; x + y = 2$ . |
| г) $P(1,05; 1,02)$ ;                               |   |

|  |  |
|--|--|
| 8. а) $\int (x^5 + \sqrt{(x-1)^3} - \cos 5x) dx$ | в) $\int \arcsin x dx$                   |
| б) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^3}}$            | г) $\int \frac{(4x-1) dx}{x^2 - 2x + 5}$ |

|                                    |   |
|------------------------------------|---|
| 9. а) $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x dx$ | б) $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2x dx}{\pi(4x^2 + 1)}$ |
|------------------------------------|---|

10. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Ox$  криволинейной трапеции, ограниченной линиями  $y = 4 - x^2$ ;  $y = 9 - x^2$ ,  $y = 0$

|   |
|---|
| 11. а) $x(y^6 + 1) dx + y^2(x^4 + 1) dy = 0$ ; $y(0) = 1$ ; |
| б) $xy' = y \cos \ln \frac{y}{x}$ ;                         |
| в) $y' - \frac{y}{x} = x \sin x$ ; $y(\frac{\pi}{2}) = 1$ . |

|   |                          |
|---|--------------------------|
| 12. а) $y'' + 8 \sin y \cos^3 y = 0$ ;<br>$y(0) = 0$<br>$y'(0) = 2$ | б) $y'' + y' + y = xe^x$ |
|---|--------------------------|

## Вариант №10

|  |
|--|
| 1. а) при $a = 0, a = -1, a = \infty$ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{7x^2 + 4x - 3}{3x^2 + 3x + 1}$ ; |
| б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 5x - 7}{2x^2 - x + 10}$ ;                               |
| в) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{3x+17} - \sqrt{2x+12}}{x^2 + 8x - 15}$ ;                     |
| г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - \sin 2x}{x^2}$ ;                             |
| д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-7}{x} \right)^{2x+1}$ .                               |

|   |
|---|
| 2. $y = \begin{cases} 2x^2, & x \leq 0; \\ x, & 0 < x \leq 1; \\ 2+x, & x > 1. \end{cases}$ |
|---|

|  |   |
|--|---|
| 3. а) $y = 4x^6 + \frac{5}{x} + \sqrt[3]{x^7} - \frac{7}{x^4}$ ; | г) $y = \frac{(x+2) \cdot (x-7)^4}{\sqrt[3]{(x-1)^4}} \cdot e^{5x}$ ; |
| б) $y = \operatorname{tg}^5 3x \cdot \cos^4 5x$ ;                | д) $y^2 + 19x - y = 0$ ;  |
| в) $y = \ln(x-10) \cdot \arcsin^5 x$ ;                           | е) $y = xe^{6x}$ .  |

|  |   |
|--|---|
| 4. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2} \right)$ ; | б) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}$ . |
|--|---|

5.  $A = \sqrt[3]{27,5}$

|  |
|--|
| 6. $y = \frac{5x}{4-x^2}$ , а) объемы продукции $x = 1, x = 3$ . |
|--|

|  |  |
|--|--|
| 7. $z = (x-1)^2 + \frac{(y-1)^2}{4}$ ; |  |
| а) M(1;-2);                            | д) -   |
| б) M(1;-2);                            | е) уравнение связи: $2x - y + 1 = 0$ ;         |
| в) M(1;-2); N(2;3);                    | ж) в треугольнике $x = 0; y = 0; x + y = -2$ . |
| г) P(0,96;-0,98);                      |  |

|   |  |
|---|--|
| <p>8. а) <math>\int (\frac{1}{5+x} - \sqrt{2x-1} + \frac{2}{x^3}) dx</math></p> <p>б) <math>\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos^3 x}}</math></p> | <p>в) <math>\int x \cdot \arcsin x dx</math></p> <p>г) <math>\int \frac{(2x-1) dx}{-x^2 - 4x + 5}</math></p> |
|---|--|

|  |  |
|--|--|
| <p>9. а) <math>\int_1^4 \frac{(1+x^2) dx}{\sqrt{x}}</math></p> | <p>б) <math>\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x dx}{1+x^2}</math></p> |
|--|--|

10. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Ox$  криволинейной трапеции, ограниченной линиями  $y = xe^x$ ;  $x = 1$ ,  $y = 0$

|  |
|--|
| <p>11. а) <math>(1+x)y dx + (1-y)x dy = 0</math>; <math>y(2) = e</math>;</p> |
| <p>б) <math>xy' \ln \frac{y}{x} = x + y \ln \frac{y}{x}</math>;</p>          |
| <p>в) <math>y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1</math>; <math>y(1) = 1</math>.</p>   |

|  |  |
|--|--|
| <p>12. а) <math>y'' = 72y^3</math>;<br/> <math>y(2) = 1</math><br/> <math>y'(2) = 6</math></p> | <p>б) <math>y'' - y' = x^2 e^{-x}</math></p> |
|--|--|

## Вариант №11

|  |
|--|
| 1. а) при $a = 0, a = -5, a = \infty$ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{4x^2 + 19x - 5}{2x^2 + 11x + 5}$ ; |
| б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5 + 2x + 1}{x^4 - 3x^3 + 2x}$ ;                               |
| в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+2} - \sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1} - 1}$ ;                          |
| г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x + \sin 3x}{x \cdot \sin x}$ ;                                 |
| д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x-3}{x-2} \right)^x$ .                                   |

|  |
|--|
| 2. $y = \begin{cases} 3x + 4, & x \leq -1; \\ x^2 - 2, & 1 < x < 2; \\ x, & x \geq 2. \end{cases}$ |
|--|

|   |   |
|---|---|
| 3. а) $y = 3\sqrt{x} + \frac{4}{x^5} + \sqrt[3]{x^2} - \frac{7}{x}$ | г) $y = \frac{(x+4)^3(x-2)^4}{\sqrt[3]{(x-2)^5}} \cdot e^{x^3}$ ; |
| б) $y = \sin^2 3x \cdot \operatorname{arccctg} 3x^5$ ;              | д) $\operatorname{tgy} = 3x + 5y$ ;                               |
| в) $y = \log_3(x+1) : \operatorname{arctg} 7x$                      |   |

|   |   |
|---|---|
| 4. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin(3/x)$ ; | б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x\sqrt{1-x^2}}$ |
|---|---|

5.  $A = \sqrt[4]{15,8}$

6.  $y = \frac{x^3}{x^2 - x + 1}$ , а) объемы продукции  $x = 2, x = 3$ .

|   |   |
|---|---|
| 7. $z = x^2 + 3y^2 + 4xy - 2x + 4y + 4$ |   |
| а) $M(1; -2)$ ;                         | д) -  |
| б) $M(1; -2)$ ;                         | е) уравнение связи: $2x - 3y + 6 = 0$ ;       |
| в) $M(1; -2); N(2; 3)$ ;                | ж) в треугольнике $x = 0; y = 0; x + y = 1$ . |
| г) $P(1,02; -1,05)$ ;                   |   |

|  |                                     |
|--|-------------------------------------|
| 8. а) $\int (\frac{1}{x-2} - 10^x - \sin 2x) dx$ | в) $\int x^2 \cdot \sin 5x dx$      |
| б) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+3\cos x}}$     | г) $\int \frac{(3x+1) dx}{x^2+x+1}$ |

|                                  |   |
|----------------------------------|---|
| 9. а) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$ | б) $\int_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln(\ln x))}$ |
|----------------------------------|---|

10. Найти длину дуги кривой  $y = x^{3/2}$  между точками  $x_1 = 1$  и  $x_2 = 3$

|   |
|---|
| 11. а) $(1+y)dx - (1-x)dy = 0; y(0) = 1;$                       |
| б) $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y ;$                               |
| в) $y' + \frac{xy}{(1-x^2)} = \frac{x}{2}; y(0) = \frac{2}{3}.$ |

|   |                               |
|---|-------------------------------|
| 12. а) $y^3 y'' + 36 = 0;$<br>$y(0) = 3$<br>$y'(0) = 2$ | б) $y'' + 2y' + y = (x+1)e^x$ |
|---|-------------------------------|

## Вариант №12

|  |
|--|
| 1. а) при $a=0, a=1, a=\infty$ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - 7x + 5}$ ; |
| б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x - 7}{3x^3 + x + 1}$ ;                        |
| в) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}}$ ;                  |
| г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{2x^2}$ ;                                       |
| д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-5}{3x+4} \right)^{2x}$ .                      |

|   |
|---|
| 2. $y = \begin{cases} x, & x \leq 1; \\ (x-2)^2, & 1 < x < 3; \\ -x+6, & x \geq 3. \end{cases}$ |
|---|

|   |  |
|---|--|
| 3. а) $y = \sqrt{x^3} + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^5} - 5x^3$ ; | г) $y = \frac{(x-7)^2(x-1)^4}{\sqrt[3]{(x+2)^5}} \cdot e^{-x}$ ; |
| б) $y = \operatorname{tg}^6 2x \cdot \cos 7x^2$ ;             | д) $\sin y = x^2 + y^2$ ;  |
| в) $y = \ln(x+9) : \operatorname{arccctg}^3 7x$               |  |

|  |   |
|--|---|
| 4. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$ ; | б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1 - x^3}{\sin^2 2x}$ . |
|--|---|

5.  $A = \sqrt[5]{200}$

6.  $y = x^3 e^{-x^2/2}$ , а) объемы продукции  $x=1, x=2$ .

|                                  |  |
|----------------------------------|--|
| 7. $z = 6 - 3x^2 + 2y^2 + 2xy$ ; |  |
| а) $M(0; -1)$ ;                  | д) -   |
| б) $M(0; -1)$ ;                  | е) уравнение связи: $2x - 3y - 6 = 0$ ;        |
| в) $M(0; -1); N(2; 3)$ ;         | ж) в треугольнике $x = 0; y = 0; x + y = -2$ . |
| г) $P(1,03; -0,95)$ ;            |  |



|   |  |
|---|--|
| <b>8. а)</b> $\int (x^3 + \sqrt{3x+2} - 3^x + 4)dx$ | <b>в)</b> $\int x^2 \cdot e^{-3x} dx$    |
| <b>б)</b> $\int \frac{2^x dx}{1+(2^x)^2}$           | <b>г)</b> $\int \frac{(x+4)dx}{x^2+x+2}$ |

|   |   |
|---|---|
| <b>9. а)</b> $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^3 x}$ | <b>б)</b> $\int_0^{\infty} \frac{\arctg x dx}{x^3+1}$ |
|---|---|

**10.** Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями  $y = 2x - x^2; y = -x, y = 0$

|               |  |
|---------------|--|
| <b>11. а)</b> | $(x^2 - yx^2) \frac{dy}{dx} + y^2 + xy^2 = 0; y(2) = 3;$ |
| <b>б)</b>     | $y' = \frac{x+y}{x-y};$                                  |
| <b>в)</b>     | $y' + \frac{2}{x}y = x^3; y(1) = -\frac{5}{6}.$          |

|                                       |                                      |
|---------------------------------------|--------------------------------------|
| <b>12. а)</b>                         | $y'' = 18\sin^3 y \cos y;$           |
| $y(1) = \frac{\pi}{2}$<br>$y'(1) = 3$ | <b>б)</b> $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$ |

### Вариант №13

|  |
|--|
| 1. а) при $a = 0, a = -2, a = \infty$ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{9x^2 + 17x - 2}{x^2 + 2x}$ ; |
| б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{18x^2 + 5x}{8 - 3x - 9x^3}$ ;                              |
| в) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{4+x} - 3}{\sqrt{x-1} - 2}$ ;                              |
| г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{3x^2}$ ;                                     |
| д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-2}{3x+1} \right)^{5x}$ .                          |

|  |
|--|
| 2. $y = \begin{cases} x-1, & x < 1; \\ x^2 + 2, & 1 \leq x \leq 2; \\ -2x, & x > 2. \end{cases}$ |
|--|

|  |   |
|--|---|
| 3. а) $y = 7x^2 + \frac{4}{x} - \sqrt[5]{x^4} + \frac{8}{x^3}$ ; | г) $y = \frac{\sqrt[3]{x-3}(x+7)^5}{(x-4)^2} \cdot 3^x$ ; |
| б) $y = \operatorname{ctg} \frac{1}{x} \cdot \arccos x^4$ ;      | д) $\operatorname{tgy} = 4y - 5x$ ;                       |
| в) $y = \lg(x+2) : \arcsin^2 3x$ ;                               |   |

|   |  |
|---|--|
| 4. а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1 - \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$ ; | б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{a\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{\sin bx}}$ . |
|---|--|

5.  $A = \sqrt[7]{130}$

6.  $y = \ln(x^2 + 1)$ , а) объемы продукции  $x = 1, x = 3$ .

|   |   |
|---|---|
| 7. $z = x^2 + 2y^2 - 4xy + 4x - 4y + 3$ ; |   |
| а) $M(1; -1)$ ;                           | д) -  |
| б) $M(1; -1)$ ;                           | е) уравнение связи: $3x - y + 6 = 0$ ;        |
| в) $M(1; -1); N(2; 3)$ ;                  | ж) в треугольнике $x = 0; y = 0; x + y = 2$ . |
| г) $P(1,02; -0,98)$ ;                     |   |

|  |  |
|--|--|
| 8. а) $\int \left( \frac{2}{4+x^2} - \frac{3}{\sqrt{9-x^2}} + \cos(2x+2) \right) dx$ | в) $\int (5x^2 - 3)e^{2x} dx$          |
| б) $\int \frac{\ln^2 x dx}{x}$   | г) $\int \frac{(x-1)dx}{x^2 + 3x + 4}$ |

|                                    |   |
|------------------------------------|---|
| 9. а) $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x dx$ | б) $\int_1^{\infty} \frac{x^3 dx}{1+x^4}$ |
|------------------------------------|---|

10. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями  $y = -x^2 + 4x - 3$ ;  $y = 0$

|  |
|--|
| 11. а) $(y-2)dx + x^2 dy = 0$ ; $y(1) = 4$ ;     |
| б) $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$ ;                  |
| в) $y' - \frac{1}{x+1}y = e(x+1)$ ; $y(0) = 1$ . |

|  |                                      |
|--|--------------------------------------|
| 12. а) $4y^3 y'' = y^4 - 16$ ;<br>$y(0) = 2\sqrt{2}$<br>$y'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ | б) $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$ . |
|--|--------------------------------------|

## Вариант №14

|  |   |
|--|---|
| 1. а) при $a = 0, a = 1, a = \infty$   | $\lim_{x \rightarrow a} \frac{4x^3 - 2x^2 + 5x}{3x^2 + 7x}$ |
| б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^4 + 4x - 5}{4x^2 - 3x + 2}$ ;             |   |
| в) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{4x-3} - 3}{x^2 - 9}$ ;                      |   |
| г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\operatorname{tg} 3x}$ ; |   |
| д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-2}{3x+10} \right)^{3x}$ .           |   |

|   |
|---|
| 2. $y = \begin{cases} x^3, & x < -1; \\ x-1, & -1 \leq x \leq 3; \\ -x+5, & x > 3. \end{cases}$ |
|---|

|  |   |
|--|---|
| 3. а) $y = 8x^3 - \frac{4}{x} - \frac{7}{x^4} + \sqrt[7]{x^2}$ ; | г) $y = \frac{\sqrt[3]{(x-2)^5(x-1)}}{(x+3)^4} \cdot 2^{x-1}$ ; |
| б) $y = \operatorname{tg}^3 2x \cdot \arccos 2x^3$ ;             | д) $x^2 y^2 + x = 5y$ ;   |
| в) $y = 4^{-\sin x} : \operatorname{arctg} 3x$ ;                 |   |

|  |   |
|--|---|
| 4. а) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \cos 4x}$ ; | б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x - e^{-x}}$ . |
|--|---|

5.  $A = \sqrt{640}$

6.  $y = \frac{x^2 - x - 1}{x^2 - 2x}$ , а) объемы продукции  $x = 1, x = 3$ .

|                                 |   |
|---------------------------------|---|
| 7. $z = x^3 + 2y^3 - 6xy + 5$ ; |   |
| а) $M(1; -2)$ ;                 | д) -  |
| б) $M(1; -2)$ ;                 | е) уравнение связи: $2x - y + 1 = 0$ ;        |
| в) $M(1; -2); N(2; 3)$ ;        | ж) в треугольнике $x = 0; y = 0; x + y = 5$ . |
| г) $P(1,05; -0,95)$ ;           |   |

|  |                                      |
|--|--------------------------------------|
| 8. а) $\int \left(\frac{1}{x} + x^4 + \cos 5x\right) dx$ | в) $\int x^2 \cdot e^{2x} dx$        |
| б) $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{4+x^2}}$                    | г) $\int \frac{(2x-5)dx}{x^2-3x+10}$ |

|  |   |
|--|---|
| 9. а) $\int_0^1 \sqrt{x^3} (2 - \sqrt[3]{x})^2 dx$ | б) $\int_2^{\infty} \frac{\ln^2 x dx}{x}$ |
|--|---|

10. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями  $y = x^2 - 3x + 1$ ;  $y = 2$

|  |
|--|
| 11. а) $ydx - (x^2 - 1)dy = 0; y(1) = 1;$                |
| б) $y' = 4 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2;$  |
| в) $y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x; y(-1) = \frac{3}{2}.$ |

|  |                            |
|--|----------------------------|
| 12. а) $y'' = 50y^3;$<br>$y(3) = 1$<br>$y'(3) = 5$ | б) $y'' - 2y' + 2y = 4x^3$ |
|--|----------------------------|

## Вариант №15

|  |
|--|
| 1. а) при $a = 0, a = 3, a = \infty$ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{3x^2 + 5x - 1}{x^2 - 5x + 6}$ ; |
| б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 2}{6x^2 + 5x + 1}$ ;                             |
| в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{x^2 + 4}}{3x^2}$ ;                                      |
| г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x - \sin 3x}{2x^2}$ ;                          |
| д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3}{3x-1} \right)^{2x}$ .                            |

|   |
|---|
| 2. $y = \begin{cases} x, & x < -2; \\ -x+1, & -2 \leq x \leq 1; \\ x^2 - 1, & x > 1. \end{cases}$ |
|---|

|  |   |
|--|---|
| 3. а) $y = 8x - \frac{5}{x^4} + \frac{1}{x} - \sqrt[5]{x^4}$ ; | г) $y = \frac{\sqrt[6]{(x-1)^5}}{(x+2)^4(x-5)^7} \cdot e^{x^3}$ ; |
| б) $y = \sin^5 3x \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x}$ ;       | д) $\sin y = xy^2 + 5$ ;  |
| в) $y = 2^{\cos x} : \operatorname{arctg}^3 x$ ;               |   |

|  |   |
|--|---|
| 4. а) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1/\cos^2 x - 2\operatorname{tg} x}{1 + \cos 4x}$ ; | б) $\lim_{x \rightarrow \infty} (a^{1/x} - 1)x$ . |
|--|---|

5.  $A = \sqrt[3]{1,4}$

6.  $y = \frac{x^2 + 6x}{x^2 + 1}$ , а) объемы продукции  $x = 1, x = 2$ .

|  |  |
|--|--|
| 7. $z = x^2 + 3y^2 + 4xy - 3x + 6y + 10$ ; |  |
| а) $M(2; -1)$ ;                            | д) -   |
| б) $M(2; -1)$ ;                            | е) уравнение связи: $x - y + 5 = 0$ ;          |
| в) $M(2; -1); N(2; 3)$ ;                   | ж) в треугольнике $x = 0; y = 0; x + y = -1$ . |
| г) $P(1,03; -0,97)$ ;                      |  |

|  |   |
|--|---|
| <b>8. а)</b> $\int (x^{-5} + 5^x - 2 \sin 2x) dx$    | <b>в)</b> $\int x^2 \cdot \ln(2x+1) dx$         |
| <b>б)</b> $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1-4 \cos x}}$ | <b>г)</b> $\int \frac{(x-3) dx}{2x^2 + 2x + 4}$ |

|   |   |
|---|---|
| <b>9. а)</b> $\int_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2} dx}{3 + \sqrt[3]{(x-2)^2}}$ | <b>б)</b> $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x dx}{1+x^2}$ |
|---|---|

**10.** Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Ox$  криволинейной трапеции, ограниченной линиями  $y = \sin x; 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

|  |
|--|
| <b>11. а)</b> $dy + y \operatorname{tg} x dx = 0; y(\frac{\pi}{4}) = 1;$ |
| <b>б)</b> $xyy' = y^2 + 2x^2;$   |
| <b>в)</b> $y' - \frac{y}{x} = -2 \frac{\ln x}{x}; y(1) = 1.$             |

|  |  |
|--|--|
| <b>12. а)</b> $y^3 y'' + 25 = 0;$<br>$y(2) = -5$<br>$y'(2) = -1$ | <b>б)</b> $y'' - y' + y = 2x^3 - x + 2.$ |
|--|--|

## Вариант №16

|  |
|--|
| 1. а) при $a = 0, a = 4, a = \infty$ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 + 3x - 28}{x^3 - 64}$ ; |
| б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 4x - x^4}{x + 3x^2 + 2x^3}$ ;                        |
| в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$ ;                               |
| г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin 2x}{\pi - 4x}$ ;                                     |
| д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x+7}{x+4} \right)^{4x}$ .                        |

|   |
|---|
| 2. $y = \begin{cases} x+3, & x \leq 0; \\ -x^2+4, & 0 < x < 2; \\ x-2, & x \geq 2. \end{cases}$ |
|---|

|  |  |
|--|--|
| 3. а) $y = \sqrt[4]{x^3} - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^5} + 3x$ ; | г) $y = \frac{(x-1)^6(x+2)^3}{\sqrt[5]{(x-2)^2}} \cdot 2^{-x}$ ; |
| б) $y = \cos^5 \sqrt{x} \cdot \operatorname{arctg} x^4$ ;      | д) $\sqrt{y} + \sqrt{x} = \sqrt{7}$                              |
| в) $y = \lg(x-3) : \operatorname{arcsin}^2 5x$ ;               |  |

|  |  |
|--|--|
| 4. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi x}{\operatorname{ctg}(\frac{\pi x}{2})}$ ; | б) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^4 \sin(b/x)$ . |
|--|--|

5.  $A = (3,02)^4 + (3,02)^3$

6.  $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$ , а) объемы продукции  $x = 2, x = 3$ .

|                                      |   |
|--------------------------------------|---|
| 7. $z = 3 - x^2 + 3y^2 + 6xy - 2x$ ; |   |
| а) $M(1;1)$ ;                        | д) -  |
| б) $M(1;1)$ ;                        | е) уравнение связи: $x - y + 1 = 0$ ;         |
| в) $M(1;1); N(2;3)$ ;                | ж) в треугольнике $x = 0; y = 0; x + y = 2$ . |
| г) $P(1,02; -0,95)$ ;                |   |



|   |                                      |
|---|--------------------------------------|
| 8. а) $\int (\frac{2}{3x+5} + \frac{1}{\cos^2 3x} + e^{2x}) dx$ | в) $\int (2x+3) \sin 4x dx$          |
| б) $\int e^x \sqrt{1+e^x} dx$                                   | г) $\int \frac{(3x+5) dx}{x^2-3x+2}$ |

|  |                                 |
|--|---------------------------------|
| 9. а) $\int_0^{10} \frac{dx}{\sqrt{x+9} + \sqrt{x}}$ | б) $\int_0^{\infty} e^{-3x} dx$ |
|--|---------------------------------|

10. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Ox$  криволинейной трапеции, ограниченной линиями  $y = -x^2 + 3$ ;  $y = x^2 + 1$

|  |
|--|
| 11. а) $y' - xy^2 = 2xy; y(1) = 1;$    |
| б) $(x + \sqrt{x^2 + y^2})y' = y$      |
| в) $y' = x^2 - y; y(1) = \frac{1}{2}.$ |

|  |   |
|--|---|
| 12. а) $y'' = 98y^3;$<br>$y(1) = 1$<br>$y'(1) = 7$ | б) $y'' + 2y' = 4e^x (\sin x + \cos x)$ |
|--|---|

## Вариант №17

|  |
|--|
| 1. а) при $a = 0, a = 4, a = \infty$ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 + 3x - 28}{x^2 - 4x}$ ; |
| б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 14x^2}{1 + 2x + 7x^3}$ ;                            |
| в) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3-x} - 2}{\sqrt{8-x} - 3}$ ;                           |
| г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos^3 4x}{3x^2}$ ;                                 |
| д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x-7}{x+6} \right)^{2x}$ .                        |

|   |
|---|
| 2. $y = \begin{cases} 0, & x \leq -1; \\ x^2 - 1, & -1 < x \leq 2; \\ 2x, & x > 2. \end{cases}$ |
|---|

|  |  |
|--|--|
| 3. а) $y = 4x^3 + \frac{3}{x} - \sqrt[3]{x^5} - \frac{2}{x^4}$ ; | г) $y = \frac{(x+7)^2(x-3)^5}{\sqrt[5]{x^2+3x-1}} \cdot e^{x^3}$ ; |
| б) $y = \operatorname{ctg}^3 4x \cdot \arcsin \sqrt{x}$ ;        | д) $x^3 + y^3 = 5x$ ;  |
| в) $y = \log_2(x+3) : \arccos^2 x$ ;                             |  |

|  |  |
|--|--|
| 4. а) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \cdot \operatorname{ctg} x$ ; | б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3}$ . |
|--|--|

5.  $A = \cos 151^\circ$

6.  $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}$ , а) объемы продукции  $x = 0, x = 1$ .

|                                     |  |
|-------------------------------------|--|
| 7. $z = 3 - x^2 + y^2 + 2xy - 2x$ . |  |
| а) M(3;-1);                         | д) -   |
| б) M(3;-1);                         | е) уравнение связи: $3x - y + 6 = 0$ ;         |
| в) M(3;-1); N(2;3);                 | ж) в треугольнике $x = 0; y = 0; x + y = -2$ . |
| г) P(1,03;-0,97);                   |  |

|  |   |
|--|---|
| 8. а) $\int (e^{5x} - \frac{1}{\sin^2 2x} + \sin 5x) dx$ | в) $\int (x+1) \cdot \ln x dx$          |
| б) $\int \cos x \cdot \sqrt[3]{\sin^2 x} dx$             | г) $\int \frac{(x+2) dx}{x^2 - 4x + 1}$ |

|                                       |   |
|---------------------------------------|---|
| 9. а) $\int_1^3 \frac{\ln^3 x dx}{x}$ | б) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(4+x)^3}$ |
|---------------------------------------|---|

10. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями  $y^2 = 6x; x^2 + y^2 = 16; x = 0$

|  |
|--|
| 11. а) $x(y^2 - 4) dx + y dy = 0; y(0) = 3;$         |
| б) $xy - y' = \frac{x}{\arctg(y/x)};$                |
| в) $y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x} e^x; y(1) = e.$ |

|  |                                       |
|--|---------------------------------------|
| 12. а) $y'' = 8 \sin y \cos^3 y;$<br>$y(1) = \frac{\pi}{2}$<br>$y'(1) = 2$ | б) $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x} \sin 6x$ |
|--|---------------------------------------|

## Вариант №18

|   |
|---|
| 1. а) при $a = 0, a = -2, a = \infty$ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - 4}{3x^2 + x - 10}$ ;  |
| б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 2x^2 - 7}{3x^4 + 3x + 5}$ ;                        |
| в) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x-3} - 2}{\sqrt{x+2} - 3}$ ;                             |
| г) $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin 2x} - \frac{1}{\operatorname{tg} 2x} \right)$ ; |
| д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1-2x}{3-x} \right)^{-x}$ .                         |

|  |
|--|
| 2. $y = \begin{cases} -1, & x < 0; \\ \cos x, & 0 \leq x \leq \pi; \\ 1-x, & x > \pi. \end{cases}$ |
|--|

|   |  |
|---|--|
| <b>3. Найти производные</b>   |  |
| а) $y = 4x^5 - \frac{5}{x} - \sqrt{x^3} + \frac{2}{x^3}$ ;              | г) $y = \frac{\sqrt{(x+10)}(x-8)^3}{(x-1)^5} \cdot e^{-x^4}$ ; |
| б) $y = \operatorname{tg} \sqrt{x} \cdot \operatorname{arccctg} 3x^5$ ; | д) $xy^2 - y^3 = 4x - 5$                                       |
| в) $y = 2^{-x} : \operatorname{arcsin}^3 4x$ ;                          |  |

|   |  |
|---|--|
| 4. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin(3/x)$ ; | б) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{a}{6x}$ . |
|---|--|

5.  $A = \cos 61^\circ$

6.  $y = x^2 - 1/x^2$ , а) объемы продукции  $x = 2, x = 3$ .

|   |   |
|---|---|
| 7. $z = x^2 + 4y^2 + 2xy - 4x + 8y + 5$ ; |   |
| а) $M(1;0)$ ;                             | д) -  |
| б) $M(1;0)$ ;                             | е) уравнение связи: $x - 2y + 4 = 0$          |
| в) $M(1;0); N(2;3)$ ;                     | ж) в треугольнике $x = 0; y = 0; x + y = 3$ . |
| г) $P(1,02; -0,95)$ ;                     |   |

|   |  |
|---|--|
| 8. а) $\int \left( \frac{1}{\sqrt[4]{3x+1}} - \cos 3x + 2^x - 1 \right) dx$ | в) $\int (x^2 + x) \cdot \sin 2x dx$     |
| б) $\int x^3 \cdot \sqrt{1+x^4} dx$   | г) $\int \frac{(x+3)dx}{-4x^2 + 4x + 3}$ |

|   |  |
|---|--|
| 9. а) $\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{2x+1}}$ | б) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 25}$ |
|---|--|

10. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Ox$  криволинейной трапеции, ограниченной линиями  $y = -x^2 + 3; y = -x^2 + 1, y = 0$

|   |
|---|
| 11. а) $(1 + x^2)dy + ydx = 0; y(1) = 1;$       |
| б) $y' = \frac{y}{x} + \cos \frac{y}{x}$        |
| в) $y' = y - x; y\left(\frac{9}{2}\right) = 1.$ |

|  |  |
|--|--|
| 12. а) $y'' = 32y^3;$<br>$y(4) = 1$<br>$y'(4) = 4$ | б) $y'' + 2y' + 4y = -2e^x (\sin x + \cos x).$ |
|--|--|

## Вариант №19

|  |
|--|
| 1. а) при $a = 0$ , $a = 6$ , $a = \infty$ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{2x^2 - 11x - 6}{3x^2 - 20x + 12}$ ; |
| б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 7x^2 + 3}{2 + 2x - x^2}$ ;                                      |
| в) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{5x+1} - 4}{x^2 + 2x - 15}$ ;  |
| г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos^2 2x}{x^2}$ ;   |
| д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x-1}{2x+5} \right)^{3x}$ .                                     |

|  |
|--|
| 2. $y = \begin{cases} 2, & x < -1; \\ 1-x, & -1 \leq x \leq 1; \\ \ln x, & x > 1. \end{cases}$ |
|--|

|  |  |
|--|--|
| 3. а) $y = \frac{7}{x} + \frac{4}{x^3} - \sqrt[5]{x^3} - 2x^6$ ; | г) $y = \frac{\sqrt[4]{(x+4)^3(x-2)^5}}{(x-3)^2} \cdot e^{4x}$ |
| б) $y = 2^{\lg x} \cdot \operatorname{arctg}^5 3x$ ;             | д) $3y = 7 + xy^3$ ;   |
| в) $y = \lg(x+3) : \operatorname{arctg}^2 5x$ ;                  |  |

|   |   |
|---|---|
| 4. а) $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg}(\pi x / 2)$ ; | б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$ . |
|---|---|

5.  $A = \operatorname{tg} 44^\circ$

6.  $y = \frac{4-x}{1-x^2}$ , а) объемы продукции  $x = 2$ ,  $x = 3$ .

|                        |   |
|------------------------|---|
| 7. $z = xy^2(2-x-y)$ ; |   |
| а) $M(2;-1)$ ;         | д) -  |
| б) $M(2;-1)$ ;         | е) уравнение связи: $2x - y + 1 = 0$ ;        |
| в) $M(2;-1); N(2;3)$ ; | ж) в треугольнике $x = 0; y = 0; x + y = 2$ . |
| г) $P(-0,98; 1,02)$ ;  |   |

|   |                                     |
|---|-------------------------------------|
| 8. а) $\int \left( \frac{2}{x+7} + \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} - 2 \sin 3x \right) dx$ | в) $\int (x^2 + 3) \cdot \ln x dx$  |
| б) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^3}}$   | г) $\int \frac{(2x-3)dx}{x^2-5x+7}$ |

|  |  |
|--|--|
| 9. а) $\int_0^{\pi} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2} dx$ | б) $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{(1+x)^3}$ |
|--|--|

10. Найти длину дуги кривой  $y^2 = (x+1)^3$ , отсеченной прямой  $x = 4$ .

|   |
|---|
| 11. а) $y' = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tgy}; y(0) = \frac{\pi}{2};$ |
| б) $xy' = 2(y - \sqrt{xy});$  |
| в) $y' - \frac{2x-5}{x^2} \cdot y = 5; y(2) = 4.$                                 |

|   |                                |
|---|--------------------------------|
| 12. а) $y^3 y'' + 16 = 0;$<br>$y(1) = 2$<br>$y'(1) = 2$ | б) $y'' + 2y' + 5y = -\sin 2x$ |
|---|--------------------------------|

## Вариант №20

|   |
|---|
| 1. а) при $a = 0, a = 2, a = \infty$ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - 2x - 4}{x^2 - 11x + 18}$ ; |
| б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3x + 1}{3x^2 + x - 5}$ ;                               |
| в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{x^2 + 4}}{3x^2}$ ;                                       |
| г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{x^2 - x}$ ;  |
| д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3+x}{9x-4} \right)^{2x}$ .                             |

|   |
|---|
| 2. $y = \begin{cases} -x, & x \leq 0; \\ x^3, & 0 < x \leq 2; \\ x+4, & x > 2. \end{cases}$ |
|---|

|   |  |
|---|--|
| 3. а) $y = \frac{6}{x^4} - \frac{3}{x} + 3x^3 - \sqrt{x^7}$ ; | г) $y = \frac{\sqrt[5]{(x+2)^3}}{(x+1)^4(x-3)^5} \cdot 3x^3$ ; |
| б) $y = \cos^4 3x \cdot \arcsin 3x^2$ ;                       | д) $y = 7x - \operatorname{ctgy}$                              |
| в) $y = \log_5(x+1) : \operatorname{arctg}^2 x^3$             |  |

|   |   |
|---|---|
| 4. а) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{1+2x+1}}{\sqrt{2+x+x}}$ ; | б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{\ln x} - x}{x-1}$ . |
|---|---|

5.  $A = \sqrt[3]{1,02}$

6.  $y = e^{1/(2-x)}$ , а) объемы продукции  $x = 3, x = 5$ .

|                                     |  |
|-------------------------------------|--|
| 7. $z = 3 - x^2 + y^2 + 6xy - 2x$ ; |  |
| а) $M(3; -1)$ ;                     | д) -   |
| б) $M(3; -1)$ ;                     | е) уравнение связи: $2x - y + 1 = 0$ ;         |
| в) $M(3; -1); N(2; 3)$ ;            | ж) в треугольнике $x = 0; y = 0; x + y = -1$ . |
| г) $P(1,05; -0,95)$ ;               |  |



|  |  |
|--|--|
| 8. а) $\int (x^5 + \frac{3}{2x+5} - \cos 3x) dx$ | в) $\int (x^2 + 2x) \cdot \ln x dx$      |
| б) $\int \frac{\cos x dx}{1+5 \sin x}$           | г) $\int \frac{(x+1) dx}{-x^2 + 8x + 9}$ |

|  |                                      |
|--|--------------------------------------|
| 9. а) $\int_1^e \frac{\sqrt{1 + \ln x} dx}{x}$ | б) $\int_0^{\infty} x^3 e^{-x^4} dx$ |
|--|--------------------------------------|

10. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Ox$  криволинейной трапеции, ограниченной линиями  $y = \cos x; 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

|  |
|--|
| 11. а) $y' = 2^{x-y}; y(-3) = -5;$             |
| б) $(x^2 + y^2) dx - xy dy = 0;$               |
| в) $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1+x^2; y(1) = 3.$ |

|   |                                      |
|---|--------------------------------------|
| 12. а) $y'' + 32 \sin y \cos^3 y = 0;$<br>$y(0) = 0$<br>$y'(0) = 4$ | б) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 3x$ |
|---|--------------------------------------|

## Вариант №21

|  |
|--|
| 1. а) при $a = 0, a = 2, a = \infty$ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - 8}{2x^2 - 9x + 10}$ ; |
| б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + x^2 - 6}{2x^2 + 3x + 1}$ ;                        |
| в) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{3x+17} - \sqrt{2x+12}}{x^2 + 8x + 15}$ ;               |
| г) $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{\sin x} \right)$ ;  |
| д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2-3x}{5-3x} \right)^x$ .                          |

|  |
|--|
| 2. $y = \begin{cases} \sin x, & x \leq 0; \\ x, & 0 \leq x \leq 2; \\ 0, & x > 2. \end{cases}$ |
|--|

|  |   |
|--|---|
| 3. а) $y = 2\sqrt{x^3} - \frac{7}{x^5} + 3x^2 - \frac{2}{x^5}$ ; | г) $y = \frac{\sqrt[5]{(x+4)^3}}{(x-1) \cdot (x+3)^5} \cdot e^{-x}$ ; |
| б) $y = \operatorname{tg} 3x \cdot \sin 7x^4$ ;                  | д) $y^2 = 2x + 3y$  |
| в) $y = \ln(x^3 - 1) : \operatorname{arctg}^{11} 6x$ ;           |   |

|   |  |
|---|--|
| 4. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{4/x^2} - 1}{2\operatorname{arctg} x^2 - \pi}$ ; | б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{\operatorname{tg}^2 2x}$ . |
|---|--|

5.  $A = \frac{2,9}{\sqrt{(2,9)^2 + 16}}$

6.  $y = 4e^{-x^2+2x}$ , а) объемы продукции  $x = 1, x = 5$ .

|                            |   |
|----------------------------|---|
| 7. $z = xy^2(1 - x - y)$ ; |   |
| а) $M(1;2)$ ;              | д) -  |
| б) $M(1;2)$ ;              | е) уравнение связи: $2x - y + 4 = 0$ ;        |
| в) $M(1;2); N(2;3)$ ;      | ж) в треугольнике $x = 0; y = 0; x + y = 1$ . |
| г) $P(1,01; -0,95)$ ;      |   |

|   |  |
|---|--|
| 8. а) $\int (x^5 + \frac{5}{x^4 + 4} - \frac{1}{x^5}) dx$ | в) $\int (x^2 + 5) \cdot \ln x dx$       |
| б) $\int \frac{xdx}{4 + (x^2)^2}$                         | г) $\int \frac{(4x - 3)dx}{x^2 + x - 1}$ |

|   |   |
|---|---|
| 9. а) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$ | б) $\int_1^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$ |
|---|---|

10. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Ox$  криволинейной трапеции, ограниченной линиями  $y = x + 1$ ;  $y^2 = 2x + 6$

|   |
|---|
| 11. а) $x\sqrt{1+y^2} dx + y\sqrt{1+x^2} dy = 0; y(0) = 0;$ |
| б) $xy' = xy^{y/x} + y;$                                    |
| в) $y'(x^2 + 2) = y; y(2) = 2.$                             |

|  |  |
|--|--|
| 12. а) $y'' = 50\sin^3 y \cos y;$<br>$y(1) = \frac{\pi}{2}$<br>$y'(1) = 5$ | б) $y'' + 6y' + 13y = e^{-2x} \cos 4x$ |
|--|--|

## Вариант №22

|  |  |
|--|--|
| 1. а) при $a = 0, a = 1, a = \infty$   | $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 + x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$ ; |
| б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 4x^2 - 7x}{2x^2 + 7x - 3}$ ;    |  |
| в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{\sqrt{x^2 + 16} - 4}$ ; |  |
| г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x - \sin^2 x}{x^2}$ ;               |  |
| д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x - 1}{4x + 1} \right)^{2x}$ . |  |

|   |  |
|---|--|
| 2. $y = \begin{cases} \cos x, & x \leq \pi/2; \\ 2, & \pi/2 < x \leq \pi; \\ 2 - x, & x > \pi. \end{cases}$ |  |
|---|--|

|  |  |
|--|--|
| 3. а) $y = 4x^3 - \frac{3}{x} - \sqrt[5]{x^2} + \frac{6}{x^2}$ ; | г) $y = \frac{\sqrt[3]{(x-1)^7}}{(x+1)^5(x-5)^3} \cdot e^{-x/3}$ ; |
| б) $y = \sin^4 3x \cdot \operatorname{tg} 5x$ ;                  | д) $y = x + \operatorname{arctg} y$                                |
| в) $y = \ln(7x-3) : \arccos^2 8x$ ;                              |  |

|  |  |
|--|--|
| 4. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 e^{-x})$ ; | б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$ . |
|--|--|

5.  $A = \sqrt{8,76}$

6.  $y = (x-1)e^{3x+1}$ ; а) объемы продукции  $x = 0, x = 2$ .

|   |  |
|---|--|
| 7. $z = x^2 + 3y^2 + 4xy - 2x + 4y + 4$ ; |  |
| а) $M(1; -1)$ ;                           | д) -   |
| б) $M(1; -1)$ ;                           | е) уравнение связи: $x - y + 3 = 0$ ;          |
| в) $M(1; -1); N(2; 3)$ ;                  | ж) в треугольнике $x = 0; y = 0; x + y = -2$ . |
| г) $P(1,05; -0,96)$ ;                     |  |

|   |                                      |
|---|--------------------------------------|
| 8. а) $\int (x^4 + \frac{3}{x} - \cos 5x) dx$ | в) $\int x^2 e^{-2x} dx$             |
| б) $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{4+x^2}}$         | г) $\int \frac{(2x-5)dx}{x^2-3x+10}$ |

|   |   |
|---|---|
| 9. а) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \operatorname{tg}^4 x dx$ | б) $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{16+x^2}$ |
|---|---|

10. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями  $y = x^2 - 2$ ;  $y = x$

|   |
|---|
| 11. а) $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0$ ; $y(3) = 1$ ;   |
| б) $(x^4 + 6x^2y^2 + y^4)dx + 4xy(x^2 + y^2) = 0$ |
| в) $y' + \frac{y}{2x} = x^2$ ; $y(1) = 1$ .       |

|   |                                 |
|---|---------------------------------|
| 12. а) $y'' = 18y^3$ ;<br>$y(1) = 1$<br>$y'(1) = 3$ | б) $y'' + 2y' + 5y = -2 \sin x$ |
|---|---------------------------------|

### Вариант №23

|   |
|---|
| 1. а) при $a = 0, a = 1, a = \infty$ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{4x^4 - 5x^2 + 1}{x^2 - 1}$ ; |
| б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3x + 1}{1 + 2x - x^4}$ ;                           |
| в) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{2x+7} - 5}{3 - \sqrt{x}}$ ;                              |
| г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 2x}{x \arcsin x}$ ;                                 |
| д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1-x}{2-x} \right)^{3x}$ .                          |

|   |
|---|
| 2. $y = \begin{cases} x-1, & x \leq 0; \\ x^2, & 0 < x < 2; \\ 2x, & x \geq 2. \end{cases}$ |
|---|

|  |  |
|--|--|
| 3. а) $y = 5x^3 - \frac{8}{x^2} - 4\sqrt{x} + \frac{1}{x}$ ; | г) $y = \frac{\sqrt{(x+2)^3} (x-1)^4}{(x+2)^7} \cdot 3x$ ; |
| б) $y = \operatorname{tg}^3 2x \cdot \sin x^5$ ;             | д) $y^2 = 25x - 4$   |
| в) $y = \ln(x-1) : \operatorname{arctg} 3x^2$ ;              |  |

|   |   |
|---|---|
| 4. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-4}{x+3} \right)^{3x}$ ; | б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - 1}{\operatorname{tg} x - x}$ . |
|---|---|

5.  $A = \sqrt[3]{27,5}$

6.  $y = (5x^4 + 3)/x$  ; а) объемы продукции  $x = 1, x = 2$ .

|   |   |
|---|---|
| 7. $z = x^2 + 2y^2 - 6xy + 4x - 4y + 3$ ; |   |
| а) $M(2; -1)$ ;                           | д) -  |
| б) $M(2; -1)$ ;                           | е) уравнение связи: $x - 3y + 3 = 0$ ;        |
| в) $M(2; -1); N(2; 3)$ ;                  | ж) в треугольнике $x = 0; y = 0; x + y = 1$ . |
| г) $P(0,98; 1,02)$ ;                      |   |

|   |   |
|---|---|
| 8. а) $\int (x^{-3} + \frac{3}{\sqrt{9-x^2}} + \cos 2x) dx$ | б) $\int (x^3 + 2x) \cdot \ln x dx$     |
| б) $\int \frac{x^3 dx}{1+2x^4}$                             | г) $\int \frac{(x-5) dx}{x^2 - 3x + 4}$ |

|   |  |
|---|--|
| 9. а) $\int_{\pi/3}^{\pi/4} \sin 3x \cos 5x dx$ | б) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3(2+x)}$ |
|---|--|

10. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями  $y^2 + 8x = 16$ ;  $y^2 - 24x = 48$

|  |
|--|
| 11. а) $xy dx + (x+1) dx = 0$ ; $y(1) = 1$ ;<br>б) $xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y$ ; |
| в) $y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ ; $y(0) = 0$ .                            |

|   |   |
|---|---|
| 12. а) $y^3 y'' + 9 = 0$ ;<br>$y(1) = 1$<br>$y'(1) = 3$ | б) $y'' - 4y' + 8y = e^x(-3 \sin x + 4 \cos x)$ |
|---|---|

## Вариант №24

|   |
|---|
| 1. а) при $a = 0, a = -5, a = \infty$ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - x - 30}{x^3 + 125}$ ; |
| б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - 5x + 2}{4x^3 - 2x^2 + 1}$ ;                        |
| в) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{\sqrt{3x - x}}$ ;                                    |
| г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x \sin x}$ ;                                      |
| д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x + 4}{3x} \right)^{-2x}$ .                       |

|   |
|---|
| 2. $y = \begin{cases} x+1, & x < 0; \\ x^2 - 1, & 0 \leq x < 1; \\ -x, & x \geq 1. \end{cases}$ |
|---|

|  |   |
|--|---|
| 3. а) $y = 8x^3 - \frac{4}{x} - \frac{7}{x^4} + \sqrt[7]{x^2}$ ; | г) $y = \frac{\sqrt[4]{x-8} \cdot (x+2)^6}{(x-1)^5} \cdot e^{2x}$ ; |
| б) $y = e^{-\sin x} \cdot \operatorname{tg} 7x^6$ ;              | д) $y^2 - x = \cos y$ ;   |
| в) $y = \ln(2x - 1) : \operatorname{arccctg} 3x^2$ ;             |   |

|   |  |
|---|--|
| 4. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x}$ ; | б) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^{1/x}$ . |
|---|--|

5.  $A = \sin 31^\circ$

6.  $y = x \ln^2 x$ ; а) объемы продукции  $x = e, x = 3$ .

|   |   |
|---|---|
| 7. $z = x^2 + 4y^2 + 2xy - 4x + 8y + 5$ ; |   |
| а) $M(1; -2)$ ;                           | е) уравнение связи: $2x - y + 4 = 0$ ;<br>ж) в треугольнике $x = 0; y = 0; x + y = 1$ . |
| б) $M(1; -2)$ ;                           |   |
| в) $M(1; -2); N(2; 3)$ ;                  |   |
| г) $P(1,03; -0,95)$ ;                     |   |



|   |  |
|---|--|
| 8. а) $\int \left( \frac{5}{\sin^2 3x} - \frac{2}{x^2 + 1} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$ | в) $\int (3x^2 + 2) \cdot e^x dx$            |
| б) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[4]{4 + \cos x}}$  | г) $\int \frac{(2x + 5) dx}{4x^2 + 12x + 1}$ |

|                                  |   |
|----------------------------------|---|
| 9. а) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ | б) $\int_2^{\infty} \frac{\ln^5 x dx}{x}$ |
|----------------------------------|---|

10. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Ox$  криволинейной трапеции, ограниченной линиями  $y = \sin^2 x; 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

|   |
|---|
| 11. а) $(x - y^2 x) dx + (y - x^2 y) dy = 0; y(1) = 1;$ |
| б) $(x^2 + y^2) y' = 2xy;$                              |
| в) $y' - \frac{2}{x+1} y = e^x (x+1)^2; y(0) = 1.$      |

|   |  |
|---|--|
| 12. а) $y^3 y'' = 4(y^4 - 1);$<br>$y(0) = \sqrt{2}$<br>$y'(0) = \sqrt{2}$ | б) $y'' + 2y' = 10e^x (\sin x + \cos x)$ |
|---|--|

## Вариант №25

|  |
|--|
| 1. а) при $a = 0, a = 1/2, a = \infty$ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{8x^3 - 1}{x^2 - 1/4}$ ; |
| б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 + 3x + 5}{4x^3 - 2x^2 + 1}$ ;                     |
| в) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+20} - 4}{x^3 + 60}$ ;                              |
| г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos x}{4x^2}$ ;                                  |
| д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-1}{2x+4} \right)^{-x}$                       |

|   |
|---|
| 2. $y = \begin{cases} -x, & x < 0; \\ x^2 + 1, & 0 \leq x < 2; \\ x + 1, & x \geq 2. \end{cases}$ |
|---|

|  |   |
|--|---|
| 3. а) $y = 5x^4 - \frac{2}{x} + \frac{9}{x^3} + \sqrt[3]{x^4}$ ; | г) $y = \frac{\sqrt[7]{(x-2)^4}}{(x+2)^2(x-6)^5} \cdot e^{x^3}$ ; |
| б) $y = \sin^5 x \cdot \operatorname{ctg} 4x$ ;                  | д) $3x + \sin y = 5y$ ;   |
| в) $y = \ln(x-4) : \operatorname{arccctg}^2 5x$ ;                |   |

|   |   |
|---|---|
| 4. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x^2/2 - x - 1}{\cos x - x^2/2 - 1}$ ; | б) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \sin \frac{a}{x}$ . |
|---|---|

5.  $A = \sqrt[10]{1025}$

6.  $y = \frac{2(x+1)^2}{x-2}$ ; а) объемы продукции  $x = 1, x = 5$ .

|                                     |   |
|-------------------------------------|---|
| 7. $z = 3 - x^2 + y^2 + 6xy - 2x$ ; |   |
| а) $M(2; -1)$ ;                     | д) -  |
| б) $M(2; -1)$ ;                     | е) уравнение связи: $2x - y + 5 = 0$ ;        |
| в) $M(2; -1); N(2; 3)$ ;            | ж) в треугольнике $x = 0; y = 0; x + y = 3$ . |
| г) $P(1, 02; -0, 98)$ ;             |   |

|  |                                     |
|--|-------------------------------------|
| 8. а) $\int (x^3 + \frac{2}{\cos^2 4x} - \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}) dx$ | в) $\int (2x+5) \cdot \arctg x dx$  |
| б) $\int \frac{3x dx}{4+x^2}$  | г) $\int \frac{(x-4) dx}{x^2-2x+4}$ |

|  |   |
|--|---|
| 9. а) $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}$ | б) $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{1+x^4}$ |
|--|---|

10. Найти длину дуги кривой  $y = \frac{4}{5} x^{5/4}$  между точками  $x_1 = 0; x_2 = 1$

|   |
|---|
| 11. а) $3e^x \operatorname{tg} y dx + \frac{1-e^x}{\cos^2 y} dy = 0; y(0) = \frac{\pi}{4};$ |
| б) $(y^2 - 2xy) dx + x^2 dy = 0;$   |
| в) $y' + y \operatorname{tg} x = \cos^2 x; y(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}.$                 |

|   |                                      |
|---|--------------------------------------|
| 12. а) $y'' + 50 \sin y \cos^3 y = 0;$<br>$y(0) = 0$<br>$y'(0) = 5$ | б) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 5x$ |
|---|--------------------------------------|

## Вариант №26

|  |
|--|
| 1. а) при $a = 0, a = -2, a = \infty$ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{3x^2 + 11x + 10}{x^2 - 5x + 14}$ ; |
| б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x - 7}{1 - 2x^3 + x^4}$ ;                                |
| в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{x^2 + x}$ ;   |
| г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x + \sin x}{\arcsin x}$ ;                                       |
| д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x+4}{3x+5} \right)^{x+1}$ .                              |

|  |
|--|
| 2. $y = \begin{cases} x+3, & x \leq 0; \\ 1, & 0 < x \leq 2; \\ x^2 - 2, & x > 2. \end{cases}$ |
|--|

|  |   |
|--|---|
| 3. а) $y = 3\sqrt[3]{x^4} - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^4} + 10x^2$ ; | г) $y = \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{(x-3)^3 \cdot (x-4)^2} \cdot e^{-x}$ ; |
| б) $y = \operatorname{ctg}^7 x \cdot \sin 3x^2$ ;                  | д) $\sin y = 7x + 3y$   |
| в) $y = \ln(x+13) : \arcsin^4 x$ ;                                 |   |

|   |   |
|---|---|
| 4. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$ ; | б) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{6/(1+2\ln x)}$ . |
|---|---|

5.  $A = (5,07)^3$

6.  $y = \frac{2+x}{(x+1)^2}$ , а) объемы продукции  $x=0, x=2$ .

|   |  |
|---|--|
| 7. $z = 2x^2 + y^2 - 4xy + 6x - 8y + 1$ ; |  |
| а) $M(-1; -1)$ ;                          | д) -   |
| б) $M(-1; -1)$ ;                          | е) уравнение связи: $x - y + 3 = 0$            |
| в) $M(-1; -1); N(2; 3)$ ;                 | ж) в треугольнике $x = 0; y = 0; x + y = -2$ . |
| г) $P(1,05; -0,97)$ ;                     |  |

|   |  |
|---|--|
| 8. а) $\int \left( \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2 + 16} - \cos 6x \right) dx$ | в) $\int (3x - 2) \cdot \arccos x dx$      |
| б) $\int \cos 2x \cdot \sin^3 2x dx$                                      | г) $\int \frac{(2x + 7) dx}{x^2 - 3x + 5}$ |

|  |  |
|--|--|
| 9. а) $\int_{e^2}^{e^3} \frac{\ln x dx}{x(1 - \ln^2 x)}$ | б) $\int_{\sqrt{2}x}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$ |
|--|--|

10. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Oy$  криволинейной трапеции, ограниченной линиями  $y = (x + 4)^2$ ;  $x = 0$

|  |
|--|
| 11. а) $\sqrt{3 + y^2} dx - y dy = x^2 y dx$ ; $y(1) = 1$ ;                        |
| б) $xy' = 2\sqrt{3x^2 + y^2} + y$ ;  |
| в) $y' - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x$ ; $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ . |

|  |                                   |
|--|-----------------------------------|
| 12. а) $y'' = 8y^3$ ;<br>$y(0) = 1$<br>$y'(0) = 2$ | б) $y'' + 2y' + 5y = -17 \sin 2x$ |
|--|-----------------------------------|

## Вариант №27

|  |  |
|--|--|
| 1. а) при $a = 0, a = 1, a = \infty$                                       | $\lim_{x \rightarrow a} \frac{3x^2 + x}{4x^2 - 5x + 1};$ |
| б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 7x + 2x^2}{x^3 + 4x^2 - 3};$     |  |
| в) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3x^2 + 1} - 1}{x^3 + x^2};$        |  |
| г) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{(\pi/2 - x)^2};$  |  |
| д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1 + 2x}{3 + 2x} \right)^{-x}$ |  |

|   |
|---|
| 2. $y = \begin{cases} x - 1, & x < 0; \\ \sin x, & 0 \leq x < \pi; \\ 3, & x \geq \pi. \end{cases}$ |
|---|

|   |   |
|---|---|
| 3. а) $y = 4\sqrt{x^3} + \frac{3}{x} + 2x^7 - \frac{8}{x^3};$ | г) $y = \frac{\sqrt[3]{(x-2)^5} (x+3)^2}{(x-7)^3} \cdot e^x;$ |
| б) $y = \cos^5 9x \cdot \operatorname{tg} \sqrt{x^5};$        | д) $y^2 - x = \cos y$   |
| в) $y = \ln(7x - 1) : \arcsin 3x^2;$                          |   |

|   |  |
|---|--|
| 4. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + xe^x)}{\ln(x + \sqrt{1 + x^2})};$ | б) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln 2x)^{1/\ln x}.$ |
|---|--|

5.  $A = \operatorname{ctg} 29^\circ$

6.  $y = \frac{\ln x}{x};$  а) объемы продукции  $x = 2, x = e.$

|                           |   |
|---------------------------|---|
| 7. $z = xy^2(1 - x - y);$ |   |
| а) $M(-2; 1);$            | д) -  |
| б) $M(-2; 1);$            | е) уравнение связи: $x - 2y + 12 = 0;$        |
| в) $M(-2; 1); N(2; 3);$   | ж) в треугольнике $x = 0; y = 0; x + y = -1.$ |
| г) $P(1, 01; -0, 95);$    |   |

|   |                                     |
|---|-------------------------------------|
| 8. а) $\int \left( \frac{1}{x^3} - \frac{2}{3-5x} - \frac{1}{\sqrt{25-x^2}} \right) dx$ | в) $\int (x^2 - x) \cdot \sin x dx$ |
| б) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt[5]{4+3\sin x}}$   | г) $\int \frac{(2x-1)dx}{x^2-3x+2}$ |

|   |   |
|---|---|
| 9. а) $\int_1^4 \frac{(1+\sqrt{x})dx}{x^2}$ | б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+10}$ |
|---|---|

10. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Ox$  криволинейной трапеции, ограниченной линиями  $y = 4x - x^2$ ;  $y = x$

|  |
|--|
| 11. а) $2x dx - 2y dy = x^2 y - 2xy^2 dx; y(1) = 1;$ |
| б) $y' = \frac{x+2y}{2x-y};$                         |
| в) $y' - \frac{y}{x} = x^2; y(1) = 0.$               |

|  |                                       |
|--|---------------------------------------|
| 12. а) $y^3 y'' + 4 = 0;$<br>$y(0) = -1$<br>$y'(0) = -2$ | б) $y'' + 6y' + 13y = e^{-2x} \cos x$ |
|--|---------------------------------------|

## Вариант №28

|  |
|--|
| 1. а) при $a = 0, a = -6, a = \infty$ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 + 2x - 24}{2x^3 + 15x - 18}$ ; |
| б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 + x^2 - 7}{2x^2 - 5x + 1}$ ;                                |
| в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2}{\sqrt{x+8} - 3}$ ;  |
| г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \operatorname{tg} x}$ ;                               |
| д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x}{3x+2} \right)^{x-2}$ .                                |

|  |
|--|
| 2. $y = \begin{cases} -x+1, & x < -1; \\ x^2+1, & -1 \leq x \leq 2; \\ 2x, & x > 2. \end{cases}$ |
|--|

|  |  |
|--|--|
| 3. а) $y = 5x^2 + \frac{4}{x} - \sqrt[3]{x^7} - 2x^7$ ;        | г) $y = \frac{\sqrt[5]{x+1}(x-3)^7}{(x+8)^3} \cdot e^{2x}$ ; |
| б) $y = \cos^8 5x \cdot \sin 4x^2$ ;                           | д) $\operatorname{arctg} y = 4x + 5y$ ;                      |
| в) $y = \lg(x-1) : \operatorname{arcc} \operatorname{tg} 6x$ ; |  |

|  |  |
|--|--|
| 4. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arcsin} x \cdot \operatorname{tg} x$ ; | б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{m}{x} \right)^x$ . |
|--|--|

5.  $A = \operatorname{tg} 59^\circ$

6.  $y = \left( \frac{x-2}{x+1} \right)^2$ ; а) объемы продукции  $x=1, x=3$ .

|   |   |
|---|---|
| 7. $z = x^2 + 2y^2 - 4xy + 8x - 6y + 1$ |   |
| а) $M(2; -1)$ ;                         | д) -  |
| б) $M(2; -1)$ ;                         | е) уравнение связи: $3x - y + 3 = 0$ ;        |
| в) $M(2; -1); N(2; 3)$ ;                | ж) в треугольнике $x = 0; y = 0; x + y = 2$ . |
| г) $P(1,03; -0,99)$ ;                   |   |



|   |  |
|---|--|
| 8. а) $\int (\sin 4x - \frac{2}{x^2 + 9} - \frac{2}{1-x}) dx$ | в) $\int (x^2 + 1) \cdot \cos x dx$    |
| б) $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt[4]{4+x^6}}$                      | г) $\int \frac{(x-2)dx}{x^2 - 6x + 1}$ |

|   |                                   |
|---|-----------------------------------|
| 9. а) $\int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \cos^2 x dx$ | б) $\int_0^{\infty} x e^{-2x} dx$ |
|---|-----------------------------------|

10. Найти длину дуги кривой  $y^2 = \frac{4}{9}(2-x)^2$ , отсеченной прямой  $x = -1$

|  |
|--|
| 11. а) $y \ln y + xy' = 0; y(4) = 1;$              |
| б) $y' = \frac{x^2 + xy - 5y^2}{x^2 - 6xy};$       |
| в) $y' - 3x^2 y = \frac{x^2(1+x^3)}{3}; y(0) = 0.$ |

|  |  |
|--|--|
| 12. а) $y'' = 2 \sin^3 y \cos y;$<br>$y(1) = \frac{\pi}{2}$<br>$y'(1) = 1$ | б) $y'' + 2y' = 6e^x (\sin x + \cos x).$ |
|--|--|

## Вариант №29

|   |
|---|
| 1. а) при $a = 0, a = 4, a = \infty$ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - 64}{7x^2 - 27x - 4}$ ; |
| б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 2x - 4}{3x^2 - 4x + 1}$ ;                          |
| в) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{x^3 - 8}$ ;                                   |
| г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{\sin x + \sin 7x}$ ;                                       |
| д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{x-1} \right)^{3-2x}$ .                          |

|  |
|--|
| 2. $y = \begin{cases} 1, & x \leq 0; \\ 2^x, & 0 < x \leq 2; \\ x+3, & x > 2. \end{cases}$ |
|--|

|   |  |
|---|--|
| 3. а) $y = \sqrt{x^5} - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^3} - 3x^3$ ; | г) $y = \frac{\sqrt[5]{(x+1)^2}}{(x-3)^4(x-4)^3} \cdot e^{-x}$ ; |
| б) $y = \cos^2 4x \cdot \sin 3x^5$ ;                          | д) $y = 6x - tgy$  |
| в) $y = \lg(x+6) : \arcsin 5x^4$ ;                            |  |

|   |   |
|---|---|
| 4. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - e^x)^{1/x}$ ; | б) $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{1/x^2}$ . |
|---|---|

5.  $A = \cos 59^\circ$

6.  $y = \frac{4x}{(4+x^2)}$ , а) объемы продукции  $x = -1, x = 1$ .

|   |   |
|---|---|
| 7. $z = x^2 + 4y^2 - 8xy + x - y + 1$ ; |   |
| а) $M(-1;2)$ ;                          | д) -  |
| б) $M(-1;2)$ ;                          | е) уравнение связи: $x - 3y + 6 = 0$          |
| в) $M(-1;2); N(2;3)$ ;                  | ж) в треугольнике $x = 0; y = 0; x + y = 3$ . |
| г) $P(1,05; -0,96)$ ;                   |   |

|  |   |
|--|---|
| 8. а) $\int \left( \frac{5}{x^7} - \frac{2}{x+5} - \cos 6x \right) dx$ | в) $\int (x^2 - x) \cdot \sin x dx$     |
| б) $\int \frac{5^x dx}{\sqrt{1 - (5^x)^2}}$                            | г) $\int \frac{(x-7) dx}{x^2 + 2x + 5}$ |

|   |   |
|---|---|
| 9. а) $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1 + \operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx$ | б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 13}$ |
|---|---|

10. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями  $y = x^3$ ;  $xy = 8$ ;  $x = 6$

|   |
|---|
| 11. а) $y(1 + \ln y) + xy' = 0$ ; $y(2) = 1$ ;        |
| б) $xy' = 2(y - \sqrt{xy})$ ;                         |
| в) $y' - \frac{y}{x} = -\frac{2}{x^2}$ ; $y(1) = 1$ . |

|  |   |
|--|---|
| 12. а) $y^3 y'' = y^4 - 16$ ;<br>$y(0) = \sqrt{2}$<br>$y'(0) = \sqrt{2}$ | б) $y'' - 4y' + 8y = e^x (3 \sin x + 5 \cos x)$ . |
|--|---|

### Вариант №30

|   |
|---|
| 1. а) при $a=0, a=1, a=\infty$ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^3 + x - 2}$ ; |
| б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 7x}{2x^3 - 4x^2 + 5}$ ;                            |
| в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{5-x} - \sqrt{5+x}}$ ;                                |
| г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{5x^2}$ ;                                    |
| д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4-2x}{1-2x} \right)^{x+1}$ .                       |

|  |
|--|
| 2. $y = \begin{cases} -x+2, & x \leq -2, \\ x^3 & -2 < x \leq 1, \\ 2, & x > 1. \end{cases}$ |
|--|

|  |   |
|--|---|
| 3. а) $y = \sqrt[3]{x^7} - \frac{7}{x^4} + \frac{5}{x} + 9x^3$ ; | г) $y = \frac{\sqrt[3]{(x-2)^4}}{(x-5) \cdot (x+1)^7} \cdot 3x$ ; |
| б) $y = \sin 4x^5 \cdot \operatorname{ctg} 3x$ ;                 | д) $yx + x = 3y$  |
| в) $y = \log_4(x-1) : \arcsin^4 x$ ;                             |   |

|  |   |
|--|---|
| 4. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\cos(m/\sqrt{x}))^x$ ; | б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$ . |
|--|---|

5.  $A = \sqrt[4]{17,2}$

6.  $y = \frac{x^3}{9-x^3}$ ; а) объемы продукции  $x=1, x=4$ .

|  |   |
|--|---|
| 7. $z = x^2 + 6y^2 - 12xy + 6x - 4y + 1$ ; |   |
| а) $M(-1;-1)$ ;                            | д) -  |
| б) $M(-1;-1)$ ;                            | е) уравнение связи: $x - y + 1 = 0$ ;         |
| в) $M(-1;-1); N(2;3)$ ;                    | ж) в треугольнике $x = 0; y = 0; x + y = 2$ . |
| г) $P(0,98;-0,97)$ ;                       |   |

|  |  |
|--|--|
| 8. а) $\int \left( \frac{5}{\cos^2 3x} - \frac{2}{x+3} - e^{-3x} \right) dx$ | в) $\int (x^2 + 2) \cdot \ln x dx$         |
| б) $\int \frac{\operatorname{tg}^2 x dx}{3 \cos^2 x}$                        | г) $\int \frac{(2x+1) dx}{-4x^2 + 4x + 3}$ |

|  |  |
|--|--|
| 9. а) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x dx}{\sin^2 x}$ | б) $\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x dx}{1+x^2}$ |
|--|--|

10. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Ox$  криволинейной трапеции, ограниченной линиями  $y = -x^2 + 3$ ;  $y = x^2 + 1$

|  |
|--|
| 11. а) $2x dx - y dy = yx^2 dy - xy^2 dx; y(0) = 1;$ |
| б) $y' = \frac{x-y}{x+y};$                           |
| в) $y' - y \cos x = \sin 2x; y(0) = -1.$             |

|   |   |
|---|---|
| 12. а) $y'' = 2y^3;$<br>$y(-1) = 1$<br>$y'(-1) = 1$ | б) $y'' - 3y' + 2y = 19 \sin x + 3 \cos x.$ |
|---|---|

## 2.3 Решение типового варианта.

Задание 1.

Вычислить пределы функции:

|                           |   |
|---------------------------|---|
| а) при $a = 0; 3; \infty$ | $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 8x + 15};$             |
| б)                        | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 2x}{9x^4 + 2x^3 - 3};$ |
| в)                        | $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{25 - x^2}{\sqrt{x+4} - 3};$               |
| г)                        | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{5x^2};$                      |
| д)                        | $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-1}{2x+3} \right)^{5x};$    |

Решение.

$$\text{а) при } a=0 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 8x + 15} = \frac{0^2 - 0 - 6}{0^2 - 8 \cdot 0 + 15} = -\frac{6}{15} = -\frac{2}{5};$$

$$\text{при } a=3 \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 8x + 15} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x-5)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+2}{x-5} = -\frac{5}{2};$$

$$\text{при } a=\infty \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 8x + 15} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x} + \frac{6}{x^2}}{1 - \frac{8}{x} + \frac{15}{x^2}} = 1;$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 2x}{9x^4 + 2x^3 - 3} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{2}{x^3}}{9 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^4}} = \frac{0}{9} = 0;$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{25 - x^2}{\sqrt{x+4} - 3} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(5-x)(5+x)(\sqrt{x+4} + 3)}{x+4-9} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-(x-5)(x+5)(\sqrt{x+4} + 3)}{x-5} =$$

$$-\lim_{x \rightarrow 5} (x+5)(\sqrt{x+4} + 3) = -10 \cdot 6 = -60;$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{5x^2} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 3x}{5x^2} \cdot \frac{9}{9} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{18}{5} \cdot \left( \frac{\sin 3x}{3x} \right)^2 = \frac{18}{5} \cdot 1 = 3,6;$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-1}{2x+3} \right)^{5x} = \left[ 1^\infty \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+3-4}{2x+3} \right)^{5x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{-4}{2x+3} \right)^{\frac{2x+3}{-4} \cdot \frac{-4}{2x+3} \cdot 5x} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-20x}{2x+3}} = e^{-10};$$

**Задание 2.**

Исследовать на непрерывность функцию

$$y = \begin{cases} 1-x, & x \leq 1 \\ x^2, & 1 < x \leq 2 \\ 6-x, & x > 2 \end{cases} \text{ и построить ее график.}$$

**Решение.**

На промежутках  $(-\infty; 1); (1; 2); (2; \infty)$  функция непрерывна как элементарная. Исследуем места соединения функций, то есть точки  $x=1$  и  $x=2$ .

Найдем односторонние пределы функции в этих точках.

$$f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x) = 0; \quad f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} x^2 = 1.$$

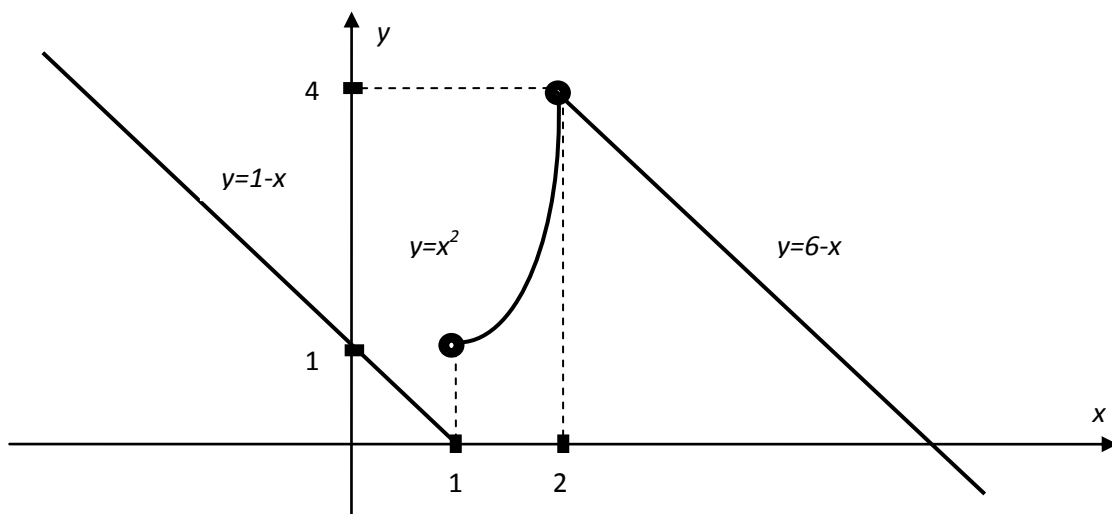
Следовательно,  $x=1$  - это точка разрыва первого рода, скачок функции равен 1.

$$f(2-0) = \lim_{x \rightarrow 2-0} x^2 = 4; \quad f(2+0) = \lim_{x \rightarrow 2+0} (6-x) = 4.$$

Найдем значение функции в точке  $x=2$ :

$f(2) = 2^2 = 4$ . Так как  $f(2-0) = f(2+0) = f(2)$ , следовательно, точка  $x=2$  - точка непрерывности.

График функции  $y(x)$  имеет вид:



**Задание 3.**

Вычислить производные для следующих функций:

|   |   |
|---|---|
| 3. а) $y = \frac{1}{6}x^6 + \frac{2}{x^4} - \frac{3}{x} - 4\sqrt{x} + 5;$ | Г) $y = \frac{\sqrt[3]{x-1} \cdot (x+3)^5}{(x-4)^2};$ |
| б) $y = \sin^5 7x \cdot \operatorname{tg} 8x;$                            | Д) $yx + y^4 - x = 3$                                 |
| в) $y = \arcsin 3x : \log_2(x^4 + 3);$                                    |   |

Решение.

$$\text{а) } y = \frac{1}{6}x^6 + \frac{2}{x^4} - \frac{3}{x} - 4\sqrt{x} + 5 = \frac{1}{6}x^6 + 2x^{-4} - \frac{3}{x} - 4\sqrt{x} + 5;$$
$$y' = x^5 - 8x^{-5} + \frac{3}{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}};$$

$$y = \sin^5 7x \cdot \operatorname{tg} 8x;$$

$$\text{б) } y' = (\sin^5 7x)' \cdot \operatorname{tg} 8x + \sin^5 7x \cdot (\operatorname{tg} 8x)' = 5 \sin^4 7x \cdot \cos 7x \cdot 7 \cdot \operatorname{tg} 8x +;$$
$$+ \sin^5 7x \cdot \frac{1}{\cos^2 8x} \cdot 8 = 35 \sin^4 7x \cdot \cos 7x \cdot \operatorname{tg} 8x + \frac{8 \sin^5 7x}{\cos^2 8x};$$

$$\text{в) } y = \arcsin 3x : \log_2(x^4 + 3);$$

$$y' = \frac{(\arcsin 3x)' \cdot \log_2(x^4 + 3) - \arcsin 3x \cdot (\log_2(x^4 + 3))'}{(\log_2(x^4 + 3))^2} =$$
$$= \frac{3 \log_2(x^4 + 3) / \sqrt{1 - 9x^2} - 4x^3 \cdot \arcsin 3x / (x^4 + 3) \cdot \ln 2}{\log_2^2(x^4 + 3)} =$$
$$= \frac{1}{\log_2^2(x^4 + 3)} \cdot \left( \frac{3 \log_2(x^4 + 3)}{\sqrt{1 - 9x^2}} - \frac{4x^3 \arcsin 3x}{(x^4 + 3) \ln 2} \right);$$

$$\text{г) } y = \frac{\sqrt[3]{x-1} \cdot (x+3)^5}{(x-4)^2};$$

В этом задании удобно пользоваться логарифмической производной. Прологарифмируем функцию по основанию натурального логарифма:

$$\ln y = \ln \left( \frac{\sqrt[3]{x-1} \cdot (x+3)^5}{(x-4)^2} \right) = \frac{1}{3} \ln(x-1) + 5 \ln(x+3) - 2 \ln(x-4).$$

Вычислим производную, считая  $y$  сложной функцией от  $x$ :

$$\frac{1}{y} y' = \frac{1}{3(x-1)} + \frac{5}{x+3} - \frac{2}{x-4};$$
$$y' = \frac{\sqrt[3]{x-1} \cdot (x+3)^5}{(x-4)^2} \cdot \left( \frac{1}{3(x-1)} + \frac{5}{x+3} - \frac{2}{x-4} \right);$$

$$\text{д) } yx + y^4 - x = 3;$$

Аналогично предыдущей задаче, вычисляем производную, считая  $y$  сложной функцией от  $x$ :

$$y'x + y + 4y^3 y' - 1 = 0; y'(x + 4y^3) = 1 - y; y' = \frac{1 - y}{x + 4y^3};$$



#### Задание 4.

Вычислить пределы, пользуясь правилом Лопиталя.

|  |  |
|--|--|
| 4. а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x-1)}{\operatorname{ctg} \pi x}$ ; | б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4x - 5}{x^2 - 6x}$ ; |
|--|--|

Решение.

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x-1)}{\operatorname{ctg} \pi x} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x - 1}{-\pi / \sin^2 \pi x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\sin^2 \pi x}{\pi(x-1)} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2\pi \sin \pi x \cos \pi x}{\pi} =$$

$$= -\lim_{x \rightarrow 1} \sin 2\pi x = -\sin 2\pi = 0;$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4x - 5}{x^2 - 6x} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4}{2x - 6} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{2} = \infty;$$

#### Задание 5.

Вычислить приближенное значение выражения  $A = \sqrt[3]{8,1}$  с использованием дифференциала функции.

Решение.

Рассмотрим функцию  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ . Пусть  $x_0 = 8; \Delta x = 0,1$ . Вычислим  $f(x_0) = f(8) = \sqrt[3]{8} = 2$ . Согласно формуле  $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df$ , где  $df$  - дифференциал функции  $df = f'(x_0) \cdot \Delta x$ , получим

$$f'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}};$$

$$f'(x_0) = f'(8) = \frac{1}{12};$$

$$df = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{120};$$

$$f(x_0 + \Delta x) = f(8 + 0,1) = \sqrt[3]{8,1} \approx 2 + \frac{1}{120} \approx 2,0083;$$

#### Задание 6.

Зависимость между издержками производства  $y$  и объемом производства  $x$  выражается функцией  $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$ .

Требуется:

а) найти предельные издержки при заданных объемах продукции  $x=3;5$ ;

б) найти эластичность функции издержек при выпуске продукции  $x$ ;

в) исследовать функцию издержек и построить ее график.

*Решение.*

**а)** Предельные издержки есть первая производная от функции издержек:

$$y'(x) = \frac{(2x-3)(x-1) - x^2 + 3x - 3}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}.$$

При заданных объемах продукции предельные издержки будут равны следующим числам:  $x = 3; y'(3) = 1,5; x = 5; y'(5) = 0,5625$ .

**б)** Эластичность  $E_x(y)$  функции издержек  $y(x)$  вычисляется по формуле

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot y'. \text{ Следовательно } E_x(y) = \frac{x(x-1)}{x^2 - 3x + 3} \cdot \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = \frac{x^2(x-2)}{(x^2 - 3x + 3)(x-1)}.$$

**в)** Исследуем функцию  $y(x)$  и построим ее график. Область определения функции  $x \neq 1$ . Найдем критические точки первой производной:

$$y'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0; x = 0; 2. \text{ Найдем знаки первой производной на промежутках.}$$

Так как при  $x \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$   $y' > 0$ , функция на этих промежутках возрастает, при  $x \in (0; 2)$   $y' < 0$ , функция на этом промежутке убывает. По изменению знака производной при переходе через критические точки слева направо заключаем, что  $x = 0$  - точка максимума,  $y(0) = -3$  - максимум функции;  $x = 2$  - точка минимума,  $y(2) = 1$  - минимум функции.

Исследуем функцию по второй производной на выпуклость и точки перегиба.

$$y''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2 - 2x) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3}. \text{ Критическая точка второй}$$

производной.  $x = 1$  Найдем знак второй производной на промежутках  $x \in (-\infty; 1) \cup (1; \infty)$ . Очевидно, что на промежутке  $(-\infty; 1)$   $y'' < 0$ , следовательно, функция на этом промежутке выпукла. Т.к. на промежутке  $(1; \infty)$   $y'' > 0$ , то на этом промежутке функция вогнута. Поскольку критическая точка  $x = 1$  не принадлежит области определения, то точек перегиба функция не имеет.

Найдем вертикальные и наклонные асимптоты.

Для нахождения вертикальной асимптоты вычислим односторонние пределы в точке, которая не принадлежит области определения, т.е. при

$$x = 1: \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2 - 3x + 3}{x-1} = \frac{1}{-0} = -\infty; \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2 - 3x + 3}{x-1} = \frac{1}{0} = \infty. \text{ Т.к. односторонние}$$

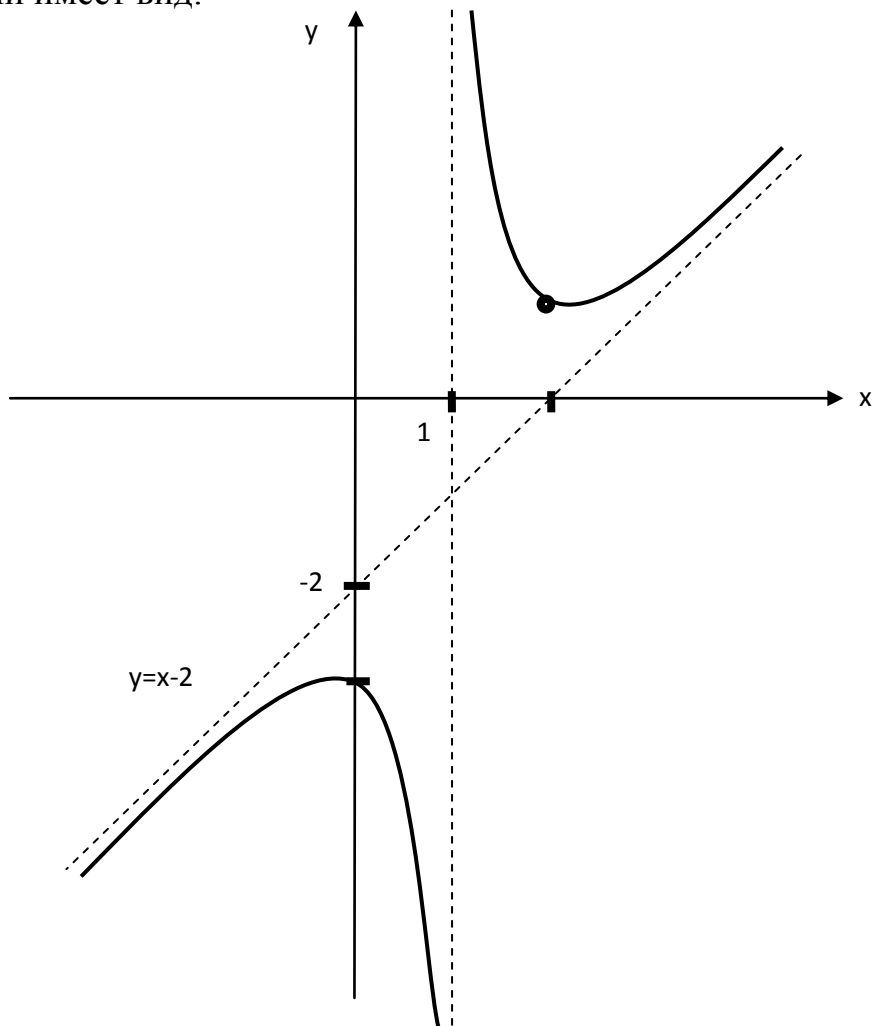
пределы бесконечны, то  $x = 1$  - вертикальная асимптота.

Наклонные асимптоты имеют уравнения вида,  $y = kx + b$  где

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}; b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx). \text{ Для нашей функции получим}$$

$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 3}{x^2 - x} = 1; b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x + 3}{x - 1} = -2$ . Поэтому наклонная асимптота имеет уравнение  $y = x - 2$ .

Перенесем все полученные данные на координатную плоскость. График данной функции имеет вид:



### Задание 7

Для функции  $z = x^2 + y^2 + 8xy - 4x - 6y - 7$  найти: а) полный дифференциал в точке  $M(1;1)$ , б) градиент в точке  $M$ , в) производную в точке  $M$  в направлении вектора  $\overline{MN}$ ,  $N(2;3)$ , г) приближенное значение функции в точке  $P(1,02;0,98)$ , д) локальные экстремумы функции, е) условные экстремумы при заданном уравнении связи  $x - y = 4$

### Решение

а) Полный дифференциал функции двух переменных вычисляется по формуле:  $dz(M) = z'_x(M)dx + z'_y(M)dy$ . Для данной функции:  $z'_x = 2x + 8y - 4$ ,  $z'_y = 2y + 8x - 6$ ,  $z'_x(M) = 6; z'_y(M) = 4$ . Поэтому  $dz(M) = 6dx + 4dy$ .

**б)** Градиент функции двух переменных- это вектор, который в разложении по ортам имеет вид:  $gradz(M) = z'_x(M) \cdot i + z'_y(M) \cdot j$  , с учетом предыдущих вычислений, получим  $gradz(M) = 6i + 4j$  .

**в)** Производная по направлению вычисляется по формуле:  $z'_l(M) = z'_x(M) \cdot \cos \alpha + z'_y(M) \cdot \cos \beta$  , где  $\cos \alpha = \frac{x_l}{|l|}$  ,  $\cos \beta = \frac{y_l}{|l|}$  - направляющие косинусы вектора  $\vec{l}(x_l; y_l)$  , длина этого вектора вычисляется по формуле:  $|\vec{l}| = \sqrt{x_l^2 + y_l^2}$  . Для данных задачи получим:  $\vec{l} = \overline{MN}(2-1; 3-1) = (1; 2)$  , длина  $|\vec{l}| = \sqrt{5}$  . Тогда  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$  ;  $\cos \beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$  . Поэтому  $z'_l(M) = 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + 4 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 2,8\sqrt{5}$  .

**г)** Приближенное значение функции двух переменных вычисляется по формуле:  $z(P) = z(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) \approx z(M) + dz(M)$  , где дифференциал вычисляется по формуле  $dz(M) = z'_x(M) \cdot \Delta x + z'_y(M) \cdot \Delta y$  , точки  $M(x_0; y_0) = M(1; 1)$  и  $P(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) = P(1,02; 0,98)$  , приращения аргументов  $\Delta x = 0,02$ ;  $\Delta y = -0,02$  . Вычислив  $z(M) = -7$ ,  $z'_x(M) = 6$ ;  $z'_y(M) = 4$  , подставим в формулу и найдем приближенно, что  $z(P) = z(1,02; 0,98) \approx -7 + 6 \cdot 0,02 + 4 \cdot (-0,02) = -6,96$  .

**д)** Для нахождения локальных экстремумов приравняем к нулю значения первых производных, решим систему уравнений и найдем критическую точку: 
$$\begin{cases} z'_x = 2x + 8y - 4 = 0, \\ z'_y = 2y + 8x - 6 = 0 \end{cases}$$

Решением этой системы является  $A\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$  -критическая точка . Найдем вторые производные функции и вычислим их значения в критической точке:  $z''_{x^2} = 2$ ;  $z''_{xy} = 8$ ;  $z''_{y^2} = 2$  . Обозначим  $A = 2$ ;  $B = 8$ ;  $C = 2$  , найдем  $\Delta = AC - B^2 = 4 - 64 = -60 < 0$  . Очевидно, что в критической точке экстремума нет.

**е)** Составим функцию Лагранжа  $F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + 8xy - 4x - 6y - 7 + \lambda(x - y - 4)$  и вычислим ее частные производные первого порядка по всем трем переменным  $x; y; \lambda$  :

$F'_x = 2x + 8y - 4 + \lambda$ ;  $F'_y = 2y + 8x - 6 - \lambda$ ;  $F'_\lambda = x - y - 4$  . Приравняем их к нулю, решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x = y + 4 \\ 2y + 8 + 8y - 4 + \lambda = 0 \\ 2y + 8y + 32 - 6 - \lambda = 0 \end{cases}$$

и найдем координаты критической точки:  $x = 2,5; y = -1,5; \lambda = 11$ .  
 Вычислим частные производные второго порядка по переменным  $x; y$ ;  
 найдем их значения в критической точке:  $F''_{xx} = 2; F''_{yy} = 8; F''_{xy} = 2$ . Вычислим  
 знак второго дифференциала:  $d^2F = 2dx^2 + 16dxdy + 2dy^2 > 0$ . Следовательно, в  
 критической точке  $B(2,5; -1,5)$  функция имеет минимум. Вычислим  
 минимальное значение функции  $F_{\min}(2,5; -1,5) = -29,5$ .

*Задание 8.*

*Вычислить неопределенные интегралы:*

|   |  |
|---|--|
| 8. а) $\int \left( \frac{3}{x} - \sqrt[7]{x^5} + \sin 5x \right) dx;$ | в) $\int (x^2 - 2x)e^{-x} dx;$           |
| б) $\int \frac{e^{tgx} dx}{\cos^2 x};$                                | г) $\int \frac{(3x+4)dx}{x^2 + 2x + 4}.$ |

*Решение.*

$$\text{а) } \int \left( \frac{3}{x} - \sqrt[7]{x^5} + \sin 5x \right) dx = 3 \int \frac{dx}{x} - \int x^{5/7} dx + \frac{1}{5} \int \sin 5x d(5x) = 3 \ln|x| - \frac{7}{12} x^{12/7} - \frac{1}{5} \cos 5x;$$

$$\text{б) } \int \frac{e^{tgx} dx}{\cos^2 x} = \left[ \begin{array}{l} tgx = t \\ \frac{dx}{\cos^2 x} = dt \end{array} \right] = \int e^t dt = e^t + c = e^{tgx} + c;$$

$$\text{в) } \int (x^2 - 2x)e^{-x} dx = \left[ \begin{array}{l} x^2 - 2x = u; (2x - 2)dx = du; \\ e^{-x} dx = dv; -e^{-x} = v \end{array} \right] = -e^{-x}(x^2 - 2x) + \int (2x - 2)e^{-x} dx =$$

$$\int \left[ \begin{array}{l} 2x - 2 = u; 2dx = du; \\ e^{-x} dx = dv; -e^{-x} = v \end{array} \right] = -e^{-x}(x^2 - 2x) - e^{-x}(2x - 2) + \int 2e^{-x} dx = -e^{-x}(x^2 - 4x + 4) + c$$

$$\text{г) } \int \frac{(3x+4)dx}{x^2 + 2x + 4} = [(x^2 + 2x + 4)' = 2x + 2] = \frac{3}{2} \int \frac{2x + 2 - 2}{x^2 + 2x + 4} dx + 4 \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 4} =$$

$$= \frac{3}{2} \int \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 4} dx - 3 \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 4} + 4 \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 4} = \frac{3}{2} \int \frac{d(x^2 + 2x + 4)}{x^2 + 2x + 4} +$$

$$+ \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 3} = \frac{3}{2} \ln(x^2 + 2x + 4) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{3}} + c.$$

*Задание 9.*

*Вычислить определенный и несобственный интеграл*

|  |   |
|--|---|
| 9. а) $\int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}};$ | б) $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}$ |
|--|---|

*Решение.*

$$\begin{aligned} \text{а) } \int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} &= \left[ \sqrt[4]{x} = t; x = t^4; dx = 4t^3 dt; \right] = \int_1^2 \frac{4t^3 dt}{t^2 + t} = 4 \int_1^2 \frac{t^2 dt}{t+1} = 4 \int_1^2 \frac{t^2 - 1 + 1}{t+1} dt = \\ &= 4 \int_1^2 (t-1) dt + 4 \int_1^2 \frac{dt}{t+1} = 4 \left. \frac{(t-1)^2}{2} \right|_1^2 + 4 \ln|t+1| \Big|_1^2 = 2 + 4 \ln 1,5. \end{aligned}$$

$$\text{б) } \int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x} = \left[ \frac{dx}{x} = d(\ln x) \right] = \int_e^{\infty} \ln^{-3} x d(\ln x) = \frac{\ln^{-2} x}{-2} \Big|_e^{\infty} = -\frac{1}{2 \ln^2 x} \Big|_e^{\infty} = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\infty} - 1 \right) = \frac{1}{2}$$

**Задание 10**

Найти длину дуги кривой  $y = x^{3/2}$  между точками с абсциссами  $x_1 = 4; x_2 = 12$ .

*Решение.*

По формуле длины дуги  $l = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$ , вычислим производную

$$y' = \frac{3}{2} x^{1/2}, \quad (y'(x))^2 = \frac{9}{4} x$$

$$l = \int_4^{12} \sqrt{1 + \frac{9}{4} x} dx = \frac{4}{9} \int_4^{12} \left( 1 + \frac{9}{4} x \right) d \left( 1 + \frac{9}{4} x \right) = \frac{4}{9} \frac{\left( 1 + \frac{9}{4} x \right)^2}{2} \Big|_4^{12} = \frac{2}{9} \left( (1 + 27)^2 - (1 + 9)^2 \right) = 152.$$

**Задание 11.**

Найти общее решение дифференциальных уравнений первого порядка (найти частное решение, если задано начальное условие).

|  |
|--|
| а) $(1 + e^x)y^2 y' = e^x; y(0) = 0;$              |
| б) $2x^2 y' = x^2 + y^2;$                          |
| в) $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$ |

*Решение.*

**а)**  $(1 + e^x)y^2 y' = e^x; y(0) = 0;$

Разделим переменные, используя определение производной  $y' = \frac{dy}{dx}$ , получим:

$(1 + e^x)y^2 dy = e^x dx$ , отсюда следует, что  $y^2 dy = \frac{e^x dx}{1 + e^x}$ . Получив уравнение с разделенными переменными, проинтегрируем обе его части:

$\frac{y^3}{3} = \ln(1 + e^x) + \ln c$  . Выразим отсюда искомую функцию, получим:  
 $y = \sqrt[3]{3 \ln c(1 + e^x)}$  . Получили общее решение дифференциального уравнения.  
 Найдем теперь его частное решение. Для этого подставим координаты заданной точки  $x = 0; y = 0$  в общее решение:  $0 = \ln c(1 + e^0)$  . Решив его, находим  $c = \frac{1}{2}$  . Окончательно получим следующее частное решение:  $y = \sqrt[3]{3 \ln \left( \frac{1 + e^x}{2} \right)}$  .

**б)**  $2x^2 y' = x^2 + y^2$ ;

Выразим из данного уравнения  $y'$  , получим уравнение  $y' = \frac{x^2 + y^2}{2x^2}$  , в котором

правая часть  $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2x^2}$  есть однородная функция второго порядка.

Следовательно, данное уравнение является однородным и может быть решено с помощью замены переменной:  $y = xu$  , где  $u = u(x)$  .

Продифференцировав замену, получим:  $y' = u + xu'$  . Подставив все в дифференциальное уравнение, получим  $u + xu' = \frac{x^2 + x^2 u^2}{2x^2} = \frac{1 + u^2}{2}$  . Отсюда

следует, что  $xu' = \frac{1 + u^2}{2} - u = \frac{(u - 1)^2}{2}$  это уравнение есть дифференциальное

уравнение с разделяющимися переменными  $\frac{xdu}{dx} = \frac{(u - 1)^2}{2}$  ,  $\frac{dx}{x} = \frac{2du}{(u - 1)^2}$  .

Проинтегрировав уравнение, получим общий интеграл:  $\ln(cx) = \frac{2}{1 - u}$  .

Выражение для искомой функции здесь затруднительно, поэтому оставим его в таком виде и сделаем обратную замену:  $u = \frac{y}{x}$  . Окончательно получим, что

$$\ln(cx) = \frac{2x}{x - y} .$$

**в)**  $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$

Это линейное уравнение первого порядка. Решим его с помощью подстановки  $y = uv$  , где  $u = u(x); v = v(x)$  . Продифференцировав замену, получим:  $y' = u'v + uv'$  . Подставим полученные выражения в исходное

уравнение и оно примет вид:  $u'v + uv' + uv \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$  . Из этого уравнения нужно

найти две неизвестные функции  $u = u(x); v = v(x)$  . Это можно сделать, если ограничить одну из функций некоторым условием. Для этого сгруппируем слагаемые в полученном уравнении:  $u'v + u(v' + v \operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos x}$  и приравняем

выражение в скобках к нулю. Из полученного равенства найдем функцию

$v(x): v' + vtgx = 0, \frac{dv}{v} = -tgx dx$ .  $\ln v = \ln(c \cdot \cos x)$  Здесь произвольную постоянную можно выбрать самостоятельно, поэтому  $c = 1; v = \cos x$ . Подставив найденную функцию в то же уравнение, где группировали слагаемые, получим:  $u'v = \frac{1}{\cos x}$  Из него найдем вторую функцию:  $\frac{du}{dx} \cdot \cos x = \frac{1}{\cos x}$ ,  $du = \frac{dx}{\cos^2 x}$ ,  $u = tgx + c$ . Произведя обратную подстановку,  $y = uv$ , получим окончательный ответ:  $y = \cos x(tgx + c)$

### Задание 12.

Найти общее решение дифференциальных уравнений второго порядка (найти частное решение, если задано начальное условие).

$$y'' = y'e^y; y(0) = 0; y'(0) = 1$$

### Решение

Уравнение  $y'' = y'e^y$  допускает понижение порядка, поскольку не содержит переменной  $x$ . Для таких уравнений применяется замена  $y' = p; p = p(y)$ . Продифференцируем замену, получим  $y'' = \frac{dp}{dy} y' = \frac{dp}{dy} \cdot p$ . Подставим эти выражения в дифференциальное уравнение, получим:  $\frac{dp}{dy} p = p \cdot e^y$ . Разделим обе части на  $p \neq 0$ , получим дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными:  $dp = e^y dy$ . Проинтегрируем его и получим  $p = e^y + c_1$ , где  $c_1$  – произвольная постоянная. Чтобы найти ее значение, воспользуемся начальными условиями, а именно тем, что  $y = 0; y' = 1$ . Тогда  $1 = 1 + c_1; c_1 = 0$ . Сделаем обратную замену в полученном выражении:  $\frac{dy}{dx} = e^y$ . Снова получили дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными  $e^{-y} dy = dx$ . Проинтегрировав его, получим общее решение исходного дифференциального уравнения второго порядка:  $-e^{-y} = x + c_2$ , где  $c_2$  – произвольная постоянная. Чтобы найти ее значение, еще раз воспользуемся начальным условием, а именно:  $x = 0; y = 0$ . Получим  $c_2 = -1$  и частное решение уравнения имеет вид:  $e^{-y} = 1 - x$  или  $-y = \ln|1 - x|$ . Окончательный ответ:  $y = -\ln|1 - x|$ .



## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булдык, Г.М. Высшая математика. Курс лекций для студентов экономических специальностей./ Г.М. Булдык. -Минск, ФУ «Аинформ», 2010, -543 с.
2. Булдык, Г.М. Сборник задач и упражнений по высшей математике для студентов экономических специальностей вузов, экономистов - практиков./ Г.М. Булдык. -Минск, ФУ «Аинформ», 2009, -313 с.
3. Высшая математика для экономистов: учебник для вузов / Н.Ш. Кремер[ и др.]; под редакцией проф. Н.Ш. Кремера. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ, 2010. –471 с.
4. Грибкова, В.П. Сборник задач по высшей математике для экономистов. Часть 2: учеб.пособие / В.П. Грибкова [ и др.]. – Мн.: БНТУ, 2005. –273 с.
5. Мацкевич, И.П. Основы высшей математики. Общий курс.: учеб. пособие / И.П. Мацкевич [ и др.]. – Мн.: изд. МИУ, 2010. –320 с.