

## ЧИСЛЕННАЯ ОЦЕНКА РАЗМЕРОВ ПЯТНА КОНТАКТА И ДЕФОРМАЦИЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ НАГРУЗОК В ТАЗОБЕДРЕННОМ И ГОЛЕНОСТОПНОМ СУСТАВАХ ЧЕЛОВЕКА

Чигарев А.В., Борисов А.В.

Белорусский национальный технический университет, Минск,  
Филиал ГОУВПО «МЭИ (ТУ)» в г. Смоленске

*В статье исследуются упругие деформации в зоне контакта (задача Герца). Получены зависимости размеров площадки и глубины соприкосновения от силы, сжимающей тела для рассматриваемых моделей суставов. Проведены численные оценки радиуса зоны контакта, глубины проникновения и контактного давления. Полученные результаты в целом согласуются с данными, полученными экспериментально.*

*The elastic deformations in the zone of contact (the problem of Hertz) are investigated in the article. The relations between the sizes of site and the depth of contact with the force compressing bodies for the considered models of joints are obtained. The numerical evaluations of radius of the zone of contact, of the depth of penetration and of contact pressure are conducted. The obtained result on the whole is agreed with the data obtained experimentally.*

Математическая модель тазобедренного и голеностопного суставов с учетом всех факторов, влияющих на его работу достаточно сложная. Поэтому на первом этапе исследуются упругие деформации в зоне контакта.

При контакте в суставе, например, тазобедренном, между головкой бедренной кости и вертлужной впадиной тазовой кости вступают в действие упругие силы. Возникают деформации, которые влияют на механические свойства сустава. Для правильной интерпретации результатов и выбора режима исследования необходимо иметь представление об упругих взаимодействиях.

Такое рассмотрение необходимо для того, чтобы:

- избежать разрушения сустава при нагрузках, в том числе и при предельных в спорте. Давление в области контакта может превысить предел прочности;
- анализировать силы во время движения, которые непосредственно влияют на деформации и разрушение в суставе.

Исследуем упругие деформации в контакте (задача Герца).

Для начала рассмотрим только силу упругости. Нахождение деформаций при локальном соприкосновении тел при воздействии нагрузки  $F$  составляет задачу Герца.

Введем упрощающие предположения.

1. Допустим, что материалы, из которых состоят поверхности суставов (гиалиновый хрящ), изотропны, а значит, все их упругие свойства описываются всего двумя парами параметров (в общем случае, разными для взаимодействующих тел) – модулями Юнга  $E$ ,  $E'$  и коэффициентами Пуассона  $\mu$ ,  $\mu'$ .

2. Считаем, что вблизи точки соприкосновения недеформированному участку поверхности каждого из тел можно приписать два радиуса кривизны  $r_1$ ,  $r_2$  (для суставной сумки) и  $r_1'$ ,  $r_2'$  (для головки сустава) во взаимно перпендикулярных плоскостях, ортогональных самой поверхности в данной точке (рис. 1 и 3).

3. Перемещения малы по сравнению с радиусами кривизны поверхностей.

4. Граничные поверхности представляют собой эллиптические параболоиды.

Предположим, что тела сдавливаются некоторой силой  $F$ , в результате чего они деформируются и сближаются на некоторое малое расстояние  $h$  (рис. 2 и 4). Областью соприкосновения будет участок поверхности площадью  $S$ . Пусть  $u_z$  и  $u'_z$  – компоненты

(соответственно по осям  $z$  и  $z'$ ) векторов смещения точек поверхностей обоих тел при сдавливании (рис. 2 и 4).

Рисунки имеют вид:

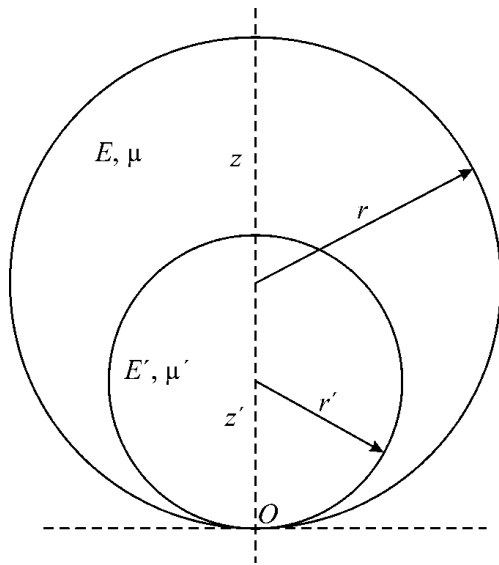


Рис. 1. Соприкосновение двух тел до деформации

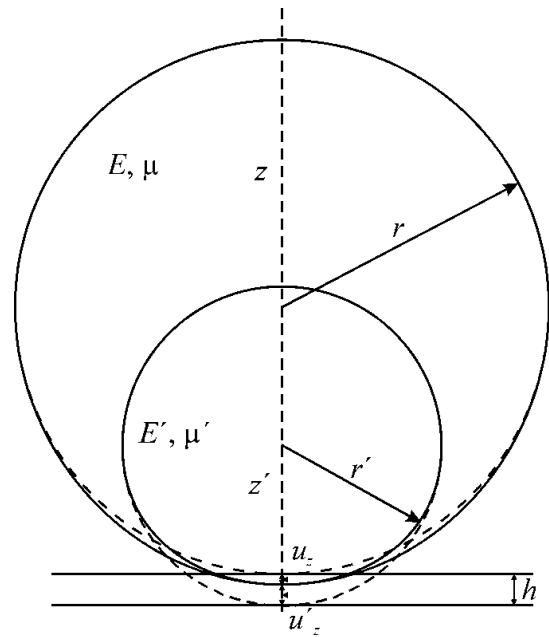


Рис. 2. Соприкосновение двух тел после деформации

Пунктиром изображены поверхности до деформации, а сплошной линией – поверхности сдвинутых тел. Буквы  $z$  и  $z'$  обозначают длины, определяемые равенствами (1) и (2).

Для поверхностей типа тазобедренного сустава рисунок имеет вид. Изменение формулы так же понять несложно.

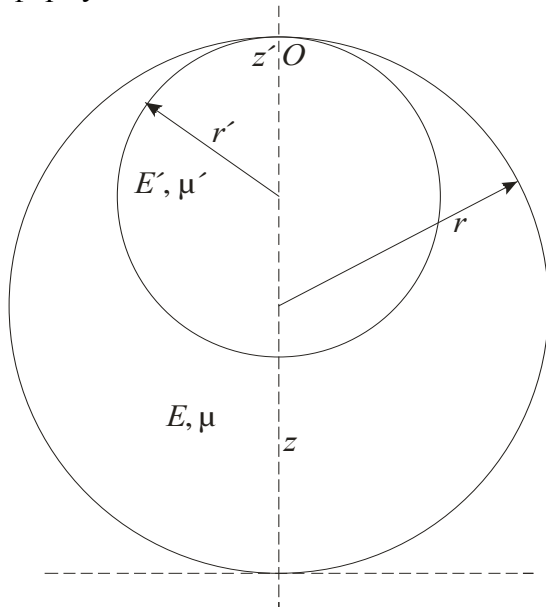


Рис. 3. Соприкосновение двух тел до деформации.

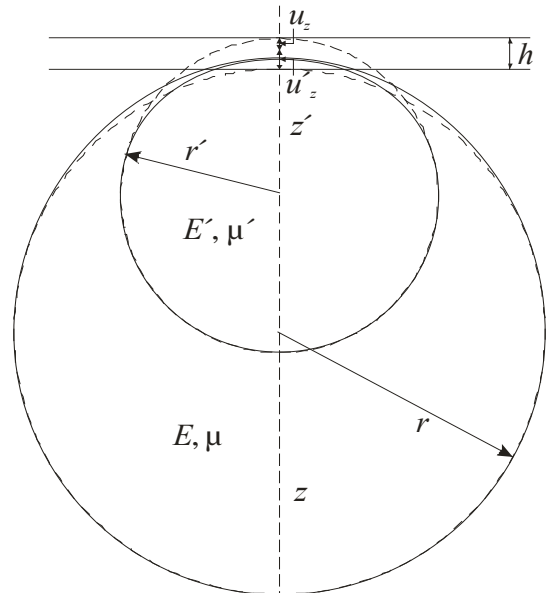


Рис. 4. Соприкосновение двух тел после деформации.

Пунктиром изображены поверхности до деформации, а сплошной линией – поверхности сдвинутых тел. Буквы  $z$  и  $z'$  обозначают длины, определяемые равенствами (1) и (2).

Решение задачи Герца в общем виде получено в работе [7]. Однако ответ записывается в неявной форме. В [6] рассмотрен общий случай контакта двух тел из одинакового материала, сжимаемых силой в вертикальном направлении, при радиусах кривизны  $r_1$  и  $r_2$  для первого тела,  $r_1'$  и  $r_2'$  для второго. Получена в явном виде зависимость полуосей образующейся эллиптической площадки от свойств и размеров соприкасающихся тел.

Чтобы получить общее представление о деформациях при упругом контакте и найти характерные числовые значения, ограничимся анализом взаимодействия сферических поверхностей. Это означает, что  $r_1 = r_2 = r$  и  $r_1' = r_2' = r'$ .

При воздействии нагрузки соприкасающиеся тела деформируются так, что вместо точки касания образуется некоторая контактная площадка (рис. 2 и 4).

При малых деформациях (допущение 3) выполняется следующее геометрическое соотношение между глубиной проникновения  $h$  и радиусом контактного круга  $a$ :

$$h = \frac{a^2}{R}, \quad (1)$$

Решение задачи Герца дает соотношение между придавливающей силой  $F$  и глубиной проникновения  $h$ :

$$F = \frac{Ka^3}{R} = Kh^{\frac{3}{2}}R^{\frac{1}{2}}. \quad (2)$$

Соответственно, давление связано с силой следующим образом:

$$P = \frac{F}{\pi a^2} = \frac{1}{\pi} \sqrt[3]{\frac{FK^2}{R^2}}. \quad (3)$$

Приведенное решение для двух соприкасающихся сферических форм содержит частный случай контакт плоской поверхности и головки сустава с радиусом кривизны  $R$  ( $R = r, r' = \infty$ ).

Выпишем, после подстановки в явном виде, получающиеся приближенные формулы [6] для двух сферических тел:

А) размеры площадки контакта

$$a = b = 0,9086 \sqrt[3]{F \frac{rr'}{r-r'} \left( \frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2} \right)}. \quad (4)$$

В) глубина проникновения (сближение соприкасающихся тел)

$$h = 0,8255 \sqrt[3]{F^2 \frac{r-r'}{rr'} \left( \frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2} \right)^2}. \quad (5)$$

С) наибольшее напряжение

$$\sigma_{max} = 0,5784 \sqrt[3]{F \frac{\frac{r-r'}{rr'}}{\left( \frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2} \right)^2}}. \quad (6)$$

Как уже отмечалось, в неявном виде можно получить решение для любых поверхностей (оговоренных в условии 2), однако для получения ответа необходимы численные расчеты. Тем не менее, результат по порядку величины будет такой же, что и в

нашем упрощенном случае. Поэтому приближенную оценку характерной величины давления в контакте можно провести на основе формулы (4).

Для поверхностей типа голеностопного сустава

В данном случае не будем повторять все преобразования, которые проводили выше. Они идентичны. Результат тоже. Необходимо только учесть, что теперь  $r > r'$  и заменить знаки. Тогда можно записать:

$$h = F^{\frac{2}{3}} \left( \frac{1}{K^2} \left( \frac{1}{r'} - \frac{1}{r} \right) \right)^{\frac{1}{3}} \quad (7)$$

Данные сведены в таблицу, в строках которой вписаны численные значения площади соприкосновения и давления в месте контакта при разных модулях Юнга (упругости) исследуемого материала. Данные приведены для тазобедренного 14 мм и на 0.2 миллиметра большей суставной сумкой и голеностопного сустава с радиусом кривизны 20 мм на 1 мм большей суставной сумкой ввиду его формы [8]. Взяты два значения прижимающей силы  $F = 1 \cdot 10^3$  Н и  $F = 1 \cdot 10^4$  Н, по порядку величины соответствующие обычному и предельному режимам эксплуатации. Коэффициент Пуассона равен 0.332.

Таблица 1

Сравнительный анализ контактных деформаций, возникающих при обычных и предельных нагрузках в модели тазобедренного сустава человека с различными значениями упругости поверхностей сустава

Модуль упругости, Па	Радиус области контакта $a$ , м		Сближение за счет деформации $h$ , м		Давление в контакте $P$ , Па	
	$10^7$	0.0510	0.1099	0.0026	0.0122	183186
$10^8$	0.0237	0.0510	0.0006	0.0026	850274	$1.8319 \times 10^6$
$10^9$	0.0110	0.0237	0.0001	0.0006	$3.9466 \times 10^6$	$8.5027 \times 10^6$
при величине силы нагрузки $F$ , кН						
	1	10	1	10	1	10

Таблица 2

Сравнительный анализ контактных деформаций, возникающих при обычных и предельных нагрузках в модели голеностопного сустава человека с различными значениями упругости поверхностей сустава

Модуль упругости, Па	Радиус области контакта $a$ , м		Сближение за счет деформации $h$ , м		Давление в контакте $P$ , Па	
	$10^7$	0.0383	0.0825	0.0035	0.0162	244121
$10^8$	0.0178	0.0383	0.0008	0.0035	$1.1331 \times 10^6$	$2.4412 \times 10^6$
$10^9$	0.0083	0.0178	0.0002	0.0008	$5.2594 \times 10^6$	$1.1331 \times 10^7$
при величине силы нагрузки $F$ , кН						
	1	10	1	10	1	10

Другое ограничение (условие 1) состоит в рассмотрении соприкасающихся тел в рамках модели сплошной среды с изотропными характеристиками. Понятно, что на микроуровне молекулярная структура уже играет существенную роль, поэтому подобное приближение довольно условно. В связи с этим решение задачи Герца с более точными геометрическими характеристиками соприкасающихся поверхностей (в отличие от рассмотренного случая) лишено смысла, так как условие 1 само по себе является весьма грубым приближением.

#### Выводы

При постановке задачи Герца используется модель сплошной упругой однородной среды и предположение малости деформаций.

В месте соприкосновения сустава с суставной сумкой образуется контактная площадка.

Решение задачи Герца позволяет найти радиус контактной площадки и величину прогиба в зависимости от приложенной нагрузки.

Типичные значения:

радиус зоны контакта от 0.110 м до 0.001 м;

глубина проникновения от 0.0162 м до 0.0001 м;

контактное давление от 183186 до  $1.1331 \times 10^7$  Па.

Очевидно, предельные значения соответствуют не реализуемым в реальности ситуациям для тканей человека. Т.е. в этом случае происходит необратимое разрушение суставов это наблюдается в случае если из костей вымываются вещества, делающие их твердыми и они становятся мягкими, что и наблюдается в медицинской практике.

Так же видно, что в модели тазобедренного сустава значения давления в контакте ниже, чем в модели голеностопного сустава, что обусловлено геометрией строения.

Предельное значение прочности бедренной кости человека на сжатие равно  $1.7 \times 10^8$  Па [2], а максимальное давление, полученное нами для предельных нагрузок несколько ниже табличного значения.

#### Литература

1. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теория упругости. – М.: Наука, 1987. – 246 с.
2. Дружинин Г.В. Учет свойств человека в моделях технологий. – М.: МАИК "Наука", 2000. – 327 с.
3. Циглер Ф. Механика твердых тел и жидкостей. – М., – Ижевск: РХД, 2002. – 912 с.
4. Чигарев А.В., Михасев Г.И. Биомеханика. – Минск: УП "Технопринт", 2004. – 306 с.
5. Чигарев А.В. Стохастическая и регулярная динамика неоднородных сред. – Минск: УП "Технопринт", 2000. – 425 с.
6. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. – Киев: Наук. Думка, 1988. – 736 с.
7. Борисов А.В. Приближенные математические модели деформируемых суставов человека и численная оценка возникающих деформаций. // Научные труды международной научно-практической конференции ученых МАДИ(ГТУ), РГАУ-МСХА, ЛНАУ. 17 - 18 июня 2008 года. Том 4. Педагогика и методика. Москва-Луганск. Издательство МАДИ(ГТУ), РГАУ-МСХА, ЛНАУ. 2008. С. 160-171.
8. Гаврюшенко Н.С. Материаловедческие аспекты создания эрозионностойких узлов трения искусственных суставов человека. Дисс. на соиск. уч. степ. д.т.н. – М.: 2000. – 234 с.