О НЕКОТОРЫХ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ И СИНГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЯХ ДВУХМЕРНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ НЕСВЯЗАННОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

Веремейчик А.И., Хвисевич В.М., Сырица И.С.

Брестский государственный технический университет, Брест

Some fundamental decisions of non-stationary problems of untied thermoelasticity for homogeneous isotropic bodies are constructed.

До настоящего времени распространенной остается технология, основанная на сведении краевых и начально-краевых задач теории термоупругости к уравнениям Фредгольма второго рода [1, 2]. При этом в данной процедуре приведения одним из узловых моментов является построение фундаментальных решений. Рассмотрим построение фундаментальных решений двухмерных краевых задач нестационарной термоупругости.

Для однородных изотропных материалов систему дифференциальных уравнений термоупругости можно записать в следующем тензорном виде:

$$\mu\ u_{i,kk} + (\lambda+\mu)u_{k,ki} = (3\lambda+2\mu)\alpha_T T_{,i} - X_i, \tag{1}$$

$$T_{,kk} - \frac{1}{a}\dot{T} = -\frac{q}{a}, \tag{2}$$

где: λ и μ – коэффициенты Ламе, α_T – коэффициент линейного теплового расширения, a – коэффициент температуропроводности [3], $Xi(x,t)$ – массовые нагрузки, c_ε – удельная объемная теплоемкость.

Частное решение дифференциального уравнения (1) представляем в виде, предложенном Гудьером, вводя потенциал термоупругого перемещения Φ [4]:

$$u_i = \Phi_{,i}. \tag{3}$$

Подставляя (3) в (1) при отсутствии массовых сил ($X_i = 0$), получим:

$$\left[(\lambda+2\mu)\Phi_{,ii} - (3\lambda+2\mu)\alpha_T T\right]_{,i} = 0,$$

или $\Phi_{,ii} = mT$, где $m = \dfrac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}\alpha_T$. (4)

Рассмотрим задачу определения температуры и перемещений в пространстве E^2, вызванных действием единичного источника тепла, помещенного в начале координат. В силу центральной симметрии поля перемещений и деформаций, необходимо решить следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} &\Delta\Phi' = mT'_*, \\ &\Delta T'_* - \frac{1}{a}\dot{T}'_* = -\frac{\delta(R)}{a}\delta(t), \\ &\Delta = \frac{d^2}{dR^2} + \frac{1}{R}\frac{d}{dR}. \end{aligned} \tag{5}$$

Применяя к уравнениям (5) преобразование Лапласа [2], получаем:

$$\begin{aligned} &\Delta\bar{\Phi}' = m\bar{T}'_*, \\ &\Delta\bar{T}'_* - \frac{p}{a}\bar{T}'_* = -\frac{\delta(R)}{a}, \end{aligned} \tag{6}$$

где p – параметр преобразования, $\bar{T}'_*$ и $\bar{\Phi}'$ – трансформанты Лапласа функций T'_* и Φ' соответственно.

Исключая из этой системы $\overline{T_*'}$, приходим к соотношению:

$$\frac{\Delta\bar{\Phi}'}{m} = -\frac{\delta(R)}{a},$$

или, вводя дополнительные обозначения:

$$A_1 A_2 \bar{\Phi}' = -\frac{m}{a}\delta(R), \qquad (7)$$

где $A_1 = \Delta,\; A_2 = \Delta - \alpha^2,\; \alpha = \frac{P}{a}$.

Решая уравнение (7) относительно функции $\overline{\Phi'}$, имеем:

$$\bar{\Phi}' = \frac{1}{\alpha^2}(\bar{M}_1 - \bar{M}_2), \qquad (8)$$

причем $\overline{M_1}$ и $\overline{M_2}$ являются решением следующих уравнений соответственно:

$$A_1\bar{M}_1 = -\frac{m}{a}\delta(R), \quad A_2\bar{M}_2 = -\frac{m}{a}\delta(R). \qquad (9)$$

Легко определить, что

$$\bar{M}_1 = -\frac{m}{2\pi a}\ln\frac{1}{R}, \qquad (10)$$

$$\bar{M}_2 = -\frac{m}{2\pi a}K_0\left(R\sqrt{\frac{p}{a}}\right), \qquad (11)$$

где K_0 - модифицированная функция Бесселя второго рода нулевого порядка.

Тогда потенциал термоупругого перемещения и температура в пространстве преобразований по Лапласу вычисляются нижеследующими равенствами:

$$\bar{T}_*'(R,p) = \frac{1}{2\pi a}K_0\left(R\sqrt{\frac{p}{a}}\right), \qquad (12)$$

$$\bar{\Phi}'(R,p) = -\frac{m}{2\pi p}\left[\ln\left(\frac{1}{R}\right) - K_0\left(R\sqrt{\frac{p}{a}}\right)\right]. \qquad (13)$$

Применяя обратное преобразование Лапласа к формулам (12) и (13), получаем в истинном времени следующие фундаментальные решения двухмерных задач несвязанной нестационарной термоупругости:

$$T_*'(x,y,t) = \frac{1}{4\pi at}\exp\left(-\frac{R^2}{4at}\right), \qquad (14)$$

$$u_i'(x,y,t) = -\frac{H(t)R_{,i}}{2\pi R}\left[1 - \exp\left(-\frac{R^2}{4at}\right)\right], \qquad (15)$$

где: $H(t)$ - функция Хевисайда; $R_{,i} = \frac{\partial R}{\partial x_i}$.

Если источник тепла перенести из начала координат в точку $y(y_1,y_2)$, то функции $\Phi'(R,t)$ и $T_*'(R,t)$ будут вычисляться по формулам (14) и (15) лишь с тем отличием, что величина R определяется в этом случае по равенству:

$$R(x,t) = \sqrt{(x_i - y_i)(x_i - y_i)},\; i = 1,2. \qquad (16)$$

При этом для определения перемещений в бесконечной области можно получить следующую формулу:

$$u_i' = \frac{m}{2\pi}\left(\frac{(x_i - y_i)}{R^2} + \frac{\partial}{\partial x_i}\int_0^t \frac{\exp\left(-\frac{R^2}{4a\tau}\right)}{t}dt\right). \tag{17}$$

Компоненты перемещения, вызванные действием в точке y единичной нагрузки, такие же, как и у соответствующих компонент фундаментального решения двухмерной изотермической эластостатики, а температура, соответствующая этому воздействию, также, как и в трехмерном случае, нулевая.

Другие сингулярные решения нестационарных задач несвязанной классической термоупругости определяются следующими равенствами:

$$T_{ij}'(x,y) = \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)R}\left[R_{,j}n_i(x) - R_{,i}n_j(x) - \left(\delta_{ij} + \frac{2}{1-2\nu}R_{,i}R_{,j}\right)R_{,k}n_k(x)\right]$$

$$D_{ijk}'(x,y) = \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)R}\left[(1-2\nu)\left(\delta_{ik}R_{,j} + \delta_{ik}R_{,i} - \delta_{ik}R_{,k}\right) + 2R_{,i}R_{,j}R_{,k}\right]$$

$$S_{ijk}'(x,y) = \frac{\mu}{2\pi(1-\nu)R^2}\Big\{2\left[(1-2\nu)\delta_{ij}R_{,k} + \nu\left(\delta_{ik}R_{,j} + \delta_{jk}R_{,i}\right) - 4R_{,k}R_{,k}R_{,i}\right]\times$$
$$\times R_{,p}n_p(x) + 2\nu R_{,k}\left[R_{,i}n_j(x) + R_{,j}n_i(x)\right] + (1-2\nu)\left[2R_{,i}R_{,j}n_k(x) + \delta_{ik}n_j(x) +\right.$$
$$\left. + \delta_{jk}n_i(x)\right] - (1-4\nu)\delta_{ij}n_k(x)\Big\}$$

$$Q_*'(x,y,t) = \frac{\lambda_0 d}{8\pi a^2 t^2}\exp\left(-\frac{R^2}{4at}\right),$$

$$Q_i'(x,y,t) = \frac{\lambda_0 m}{\pi}\left\{\frac{1}{R^2}\left[n_m R_{,m}R_{,i} - \frac{n_i}{2}\right]\left[1 - \exp\left(-\frac{R^2}{4at}\right)\right] - \frac{1}{4at}n_m R_{,m}R_{,i}\exp\left(-\frac{R^2}{4at}\right)\right\}$$

$$P_*'(x,y,t) = \frac{\lambda_0^2}{8\pi\chi^2 t^2}\frac{\partial}{\partial n(x)}\left[d\exp\left(-\frac{R^2}{4\chi t}\right)\right],$$

$$V_{ij}'^{*}(x,y,t) = \frac{\mu m}{\pi}\left\{\left[\frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ij} + R_{,i}R_{,j}\right]\frac{1}{2at}\exp\left(-\frac{R^2}{4at}\right) + \frac{1}{R^2}\left[\delta_{ij} - 2R_{,i}R_{,j}\right]\left[1 - \exp\left(-\frac{R^2}{4at}\right)\right]\right\},$$

$$S_{ij}'^{*}(x,y,t) = \frac{\lambda_0 \mu m}{\pi}\left\{-\left(\frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ij} + R_{,i}R_{,j}\right)\frac{R\ \ R_{,i}n_i(x)}{(2at)^2}\exp\left(-\frac{R^2}{4at}\right) +\right.$$
$$+\frac{1}{R}\left[R_{,i}n_i(x) + R_{,i}n_j(x) + \left(\delta_{ij} - 4R_{,i}R_{,j}\right)R_{,k}n_k(x)\right]\left[\frac{1}{2at}\exp\left(-\frac{R^2}{4at}\right) -\right.$$
$$\left.\left. - \frac{2}{R^2}\left(1 - \exp\left(-\frac{R^2}{4at}\right)\right)\right]\right\} + \frac{\lambda_0\mu}{4\pi(1-\nu)aR}\Big\{\left[2R_{,i}R_{,j} - (1-2\nu)\delta_{ij}\right]R_{,k}n_k(x) +$$
$$+ (1-2\nu)\left[R_{,i}n_j(x) + R_{,j}n_i(x)\right]\Big\}.$$

Литература

1. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. - М.: Наука, 1968. - 512 с.
2. Мазья В.Г. Граничные интегральные уравнения // Итоги науки и техники. М. ВИНИТИ, 1988. Т.27. – С. 131-228.
3. Карслоу Б., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. - М.: Наука, 1964. - 487 с.
4. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. - М.: Наука, 1975. - 576 с.