

# ВОЛНОВЫЕ ПОВЕРХНОСТИ ДЛЯ КРИСТАЛЛОВ ОДНОГО КЛАССА ТРИГОНАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ СИММЕТРИИ

**Босяков С.М., Скляр О.Н.**

*Белорусский государственный университет, Минск  
Белорусский национальный технический университет, Минск*

*Expressions for coordinates of points of media which define the geometrical form of the quasi-longitudinal and quasitransversal wave's fronts propagating in piezoelectric crystals of trigonal system of symmetry of a class 32 from dot source of disturbances are obtained. Construction of wave surfaces for quartz is executed.*

Вопросам распространения упругих волн в неограниченных анизотропных средах с учетом взаимосвязи механических и электрических свойств посвящены фундаментальные монографии [1, 2]. В настоящей работе представлены результаты реализации метода слабых разрывов применительно к системам уравнений движения тригонально анизотропных сред с учетом пьезоэффекта. Поскольку одними из практически востребованных материалов являются тригональные кристаллы класса 32 (например,  $\alpha$ -кварц), проведено моделирование волновых фронтов, возбуждаемых точечным источником возмущений, в материалах этого класса симметрии.

Соответствующую систему уравнений движения в отсутствие массовых сил представим в виде:

$$\begin{aligned} & \left( A_{11}\partial_1^2 + A\partial_2^2 + A_{44}\partial_3^2 - \rho\partial_t^2 \right) u_1 + 2A_{14}(\partial_2\partial_3u_1 + \\ & + \partial_1\partial_3u_2 + \partial_1\partial_2u_3) + \partial_1(A\partial_2u_2 + B\partial_3u_3) = e_{11}(\partial_2^2 - \partial_1^2)\Phi, \\ & \left( A\partial_1^2 + A_{11}\partial_2^2 + A_{44}\partial_3^2 - \rho\partial_t^2 \right) u_2 + A_{14}\left( (\partial_1^2 - \partial_2^2)u_3 + \right. \\ & \left. + \partial_3(\partial_1u_1 - 2\partial_2u_2) \right) + \partial_2(A\partial_1u_1 + B\partial_3u_3) = \partial_1(2e_{11}\partial_2 - e_{14}\partial_3)\Phi, \\ & e_{14}\partial_1\partial_2\Phi + \left( A_{44}(\partial_1^2 + \partial_2^2) + A_{33}\partial_3^2 - \rho\partial_t^2 \right) u_3 + \\ & + B\partial_3(\partial_1u_1 + \partial_2u_2) + A_{14}\partial_2(\partial_2u_1 + 2\partial_1u_1 - \partial_2u_2) = 0. \\ & e_{11}\left( (\partial_1^2 - \partial_2^2)u_1 - 2\partial_1\partial_2u_2 \right) + e_{14}\partial_1(\partial_3u_2 + \partial_2u_3) = \\ & = \varepsilon_{11}(\partial_1^2 + \partial_2^2)\Phi + \varepsilon_{33}\partial_3^2\Phi, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $u_i$  - компоненты вектора перемещений,  $\Phi$  - электрический потенциал,  $A_{11}$ ,  $A_{33}$ ,  $A_{44}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{13}$ ,  $A_{14}$  - константы упругости,  $A = (A_{11} + A_{12})/2$ ,  $B = A_{13} + A_{44}$ ,  $e_{11}$ ,  $e_{14}$  - пьезоэлектрические модули,  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{33}$  - диэлектрические проницаемости,  $\partial_i = \partial/\partial x_i$ ,  $\partial_t = \partial/\partial t$ ,  $i = \overline{1, 3}$ .

Начальные условия к системе (1) зададим на поверхности  $z(x_1, x_2, x_3, t) = 0$  и перейдем к новым переменным  $g = z(x_1, x_2, x_3, t)$  и

$g_i = z_i(x_1, x_2, x_3, t)$ ,  $i = \overline{1, 3}$ . После стандартной процедуры получим следующее характеристическое уравнение системы (1):

$$\frac{q_0 p_0^6}{c_2^6} + \frac{q_1 p_0^4}{c_2^4} + \frac{q_2 p_0^2}{c_2^2} + q_3 = 0. \quad (2)$$

Здесь  $q_0 = -1$ . Остальные коэффициенты и  $q_i$  имеют вид:

$$\begin{aligned} q_1 &= \sum_{i=1}^3 s_i, \quad q_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (s_i^2 - s_i s_j) + \sum_{i=4}^6 s_i^2, \\ q_3 &= s_1 s_2 s_3 + 2s_4 s_5 s_6 - s_1 s_6^2 - s_2 s_5^2 - s_3 s_4^2, \\ s_1 &= c_{11} p_1^2 + (a_{11} - a_{12}) p_2^2 / 2 + p_3 (2a_{14} p_2 + c_{44} p_3) + dK_{11}^2 (p_1^2 - p_2^2)^2, \\ s_2 &= c_{11} p_2^2 + (a_{11} - a_{12}) p_1^2 / 2 + p_3 (2a_{14} p_2 + c_{44} p_3) + d p_1^2 (K_{14} p_3 - 2K_{11} p_2)^2, \\ s_3 &= a_{33} p_3^2 + a_{44} (p_1^2 + p_2^2) + dK_{14}^2 p_1^2 p_2^2, \\ s_4 &= p_1 ((a_{11} + a_{12}) p_2 + 4a_{14} p_3) / 2 - dK_{11} p_1 (2K_{11} p_2 - K_{14} p_3) (p_1^2 - p_2^2), \\ s_5 &= p_1 ((a_{13} + a_{44}) p_3 + 2a_{14} p_2) + dK_{11} K_{14} p_1 p_2 (p_1^2 - p_2^2), \\ s_6 &= a_{14} (p_1^2 - p_2^2) + (a_{13} + a_{44}) p_2 p_3 + dK_{14} (K_{14} p_3 - 2K_{11} p_2) p_1^2 p_2, \\ 1/d &= p_1^2 + p_2^2 + k_{33} p_3^2. \end{aligned}$$

Параметры  $p_0 = \partial z / \partial t$ ,  $p_i = \partial z / \partial x_i$ ,  $c_2 = \sqrt{A_{44} / \rho}$ ,  $a_{ij} = A_{ij} / A_{44}$ ,  $K_{ij} = e_{ij} / \sqrt{A_{44} \varepsilon_{11}}$ ,  $k_{jk} = \varepsilon_{jk} / \varepsilon_{11}$ .

Рассмотрим уравнение характеристик (2) как алгебраическое уравнение третьего порядка относительно  $p_0^2$ . После несложных преобразований получим:

$$p_0^{(n)} = c_2 \sqrt{2 \sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{\Lambda + 2\pi(4-n)}{3}\right) - \frac{q_1}{3q_0}}, \quad \Lambda = \arccos\left(-\frac{q}{2} \sqrt{-\left(\frac{3}{p}\right)^3}\right), \quad (3)$$

где  $p = -\frac{q_1^2}{3q_0^2} + \frac{q_2}{q_0}$ ;  $q = \frac{2q_1^3}{27q_0^3} - \frac{q_1 q_2}{3q_0^2} + \frac{q_3}{q_0}$ , верхний индекс указывает на тип упругой волны ( $n = 1$  соответствует квазипродольной волне,  $n = 2, 3$  - квазиперечным волнам).

Для нахождения координат точек среды, определяющих геометрическую форму волнового фронта для материалов тригональной системы симметрии класса 32, определим систему бихарактеристик (лучей), отвечающую искомому волновому фронту. При этом бихарактеристики определяются как решения следующих систем обыкновенных дифференциальных уравнений [3]:

$$\frac{dx_s^{(n)}}{dt} = \frac{\partial p_0^{(n)}}{\partial p_s}, n, s = \overline{1, 3}. \quad (4)$$

Подставляя выражения (3) в уравнения (4) и учитывая то, что их правая часть не зависит от времени, получим формулы для безразмерных координат  $x_s^{(n)}/(c_2 t)$ ,  $s, n = \overline{1, 3}$  точек среды, до которых дошло волновое возмущение:

$$\begin{aligned} \frac{x_s^{(n)}}{c_2 t} = & \frac{1}{v_n} \left( \frac{1}{2\sqrt{-3\bar{p}}} \left( \frac{2\hat{q}_1\hat{q}_{1s}}{3q_0^2} - \frac{\hat{q}_{2s}}{q_0} \right) \cos \left( \frac{\hat{\Lambda} + 2\pi(4-n)}{3} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\bar{p}}{3}} \sin \left( \frac{\hat{\Lambda} + 2\pi(4-n)}{3} \right) \sqrt{\frac{\bar{p}^3}{4\bar{p}^3 + 27\hat{q}^2}} \times \right. \\ & \times \left( \left( \frac{2\hat{q}_1^2\hat{q}_{1s}}{9q_0^3} - \frac{\hat{q}_2\hat{q}_{1s} + \hat{q}_1\hat{q}_{2s}}{3q_0^2} + \frac{\hat{q}_{3s}}{q_0} \right) \sqrt{\left( \frac{3}{\bar{p}} \right)^3} - \right. \\ & \left. \left. \frac{9\hat{q}\sqrt{3}}{2} \sqrt{\left( \frac{1}{\bar{p}} \right)^5 \left( \frac{2\hat{q}_1\hat{q}_{1s}}{3q_0^2} - \frac{\hat{q}_{2s}}{q_0} \right)} \right) \right). \end{aligned}$$

Здесь  $v_1$  является скоростью распространения квазипродольной пьезоактивной упругой волны,  $v_2$  и  $v_3$  - скоростями распространения квазипродольных пьезоактивных упругих волн. Скорости  $v_n$  определяются по формулам аналогичным соотношениям (3). Выражения для коэффициентов  $\hat{q}_k, \hat{s}_k$  получаем из соотношений для  $q_k, s_k$  заменой параметров  $p_k$  на направляющие косинусы нормали к характеристической поверхности  $n_k = \cos \alpha_k$  ( $\alpha_k$  - угол между нормалью к волновой поверхности и координатной осью  $x_k$ ). Выражения для  $\hat{q}_{ik}, i, k = \overline{1, 3}$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \hat{q}_{1i} &= \sum_{j=1}^3 s_{1j}, \hat{q}_{2i} = 2 \sum_{j=4}^6 \hat{s}_j s_{ji} - \sum_{j=1}^3 \hat{s}_j (s_{1i} + s_{2i} + s_{3i} - s_{ji}), \\ \hat{q}_{3i} &= (\hat{s}_2\hat{s}_3 - \hat{s}_6^2) s_{1i} + (\hat{s}_1\hat{s}_3 - \hat{s}_5^2) s_{2i} + (\hat{s}_1\hat{s}_2 - \hat{s}_4^2) s_{3i} - \\ & - 2(\hat{s}_3\hat{s}_4 - \hat{s}_5\hat{s}_6) s_{4i} - 2(\hat{s}_2\hat{s}_5 - \hat{s}_4\hat{s}_6) s_{5i} - 2(\hat{s}_1\hat{s}_6 - \hat{s}_4\hat{s}_5) s_{6i}, \\ s_{11} &= 2n_1 \left( a_{11} + f^2 K_{11}^2 (n_1^2 - n_2^2) (n_1^2 + 3n_2^2 + 2k_{33}n_3^2) \right), \\ s_{12} &= (a_{11} - a_{12}) n_2 + 2an_3 - 2f^2 K_{11}^2 n_2 (n_1^2 - n_2^2) (3n_1^2 + n_2^2 + 2k_{33}n_3^2), \\ s_{13} &= 2 \left( a_{14} n_2 + n_3 \left( a_{44} - f^2 K_{11}^2 k_{33} (n_1^2 - n_2^2)^2 \right) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{21} &= n_1 \left( (a_{11} - a_{12}) + 2f^2 (K_{14}n_3 - 2K_{11}n_2)^2 (n_2^2 + k_{33}n_3^2) \right), \\
s_{22} &= 2 \left( a_{11}n_2 + a_{14}n_3 - f^2n_1^2 (K_{14}n_3 - 2K_{11}n_2) (2dK_{11} + (K_{14}n_3 - 2K_{11}n_2)n_2) \right) \\
s_{33} &= 2n_3 \left( a_{33} - f^2K_{14}^2n_1^2n_2^2 \right), \quad s_{23} = 2 \left( (a_{14}n_2 + a_{44}n_3) + \right. \\
&\quad \left. + f^2n_1^2 (K_{14}n_3 - 2K_{11}n_2) (dK_{14} - k_{33}n_3 (K_{14}n_3 - 2K_{11}n_2)) \right), \\
s_{31} &= 2n_1 \left( a_{44} + f^2n_2^2K_{14}^2 (n_2^2 + k_{33}n_3^2) \right), \\
s_{32} &= 2n_2 \left( a_{44} + f^2n_1^2K_{14}^2 (n_1^2 + k_{33}n_3^2) \right), \\
s_{41} &= \frac{1}{2} \left( (a_{11} + a_{12})n_2 + 4a_{14}n_3 \right) - \\
&\quad - f^2K_{11} (2K_{11}n_2 - K_{14}n_3) \left( f (3n_1^2 - n_2^2) - 2(n_1^2 - n_2^2)n_1^2 \right), \\
s_{42} &= n_1 (a_{11} + a_{12}) / 2 + \\
&\quad + f^2K_{11}n_1 \left( f (2K_{11} (2n_2^2 - n_1^2) - K_{14}n_2n_3) + 2n_2 (n_1^2 - n_2^2) (2K_{11}n_2 - K_{14}n_3) \right), \\
s_{43} &= n_1 \left( 2a_{14} + f^2K_{11} (n_1^2 - n_2^2) (fK_{14} + 2k_{33}n_3 (2K_{11}n_2 - K_{14}n_3)) \right), \\
s_{51} &= (a_{13} + a_{44})n_3 + 2a_{14}n_2 + f^2K_{11}K_{14}n_2 \left( f (3n_1^2 - n_2^2) - 2n_1^2 (n_1^2 - n_2^2) \right), \\
s_{52} &= n_1 \left( 2a_{14} + f^2K_{11}K_{14} \left( f (n_1^2 - 3n_2^2) - 2n_2^2 (n_1^2 - n_2^2) \right) \right), \\
s_{53} &= n_1 \left( (a_{13} + a_{44}) - 2f^2k_{33}K_{11}K_{14}n_2n_3 (n_1^2 - n_2^2) \right), \\
s_{61} &= 2n_1 \left( a_{14} + f^2K_{14}n_2 (K_{14}n_3 - 2K_{11}n_2) (n_2^2 + k_{33}n_3^2) \right), \\
s_{62} &= (a_{13} + a_{44})n_3 - 2a_{14}n_2 + \\
&\quad + f^2K_{14}n_1^2 \left( f (K_{14}n_3 - 4K_{11}n_2) - 2n_2^2 (K_{14}n_3 - 2K_{11}n_2) \right), \\
s_{63} &= n_2 \left( (a_{13} + a_{44}) + f^2K_{14}n_1^2 (fK_{14} - 3k_{33}n_3 (K_{14}n_3 - 2K_{11}n_2)) \right),
\end{aligned}$$

Здесь коэффициенты  $\widehat{s}_k$ ,  $k = \overline{1, 6}$  получаются из соответствующих коэффициентов  $s_k$  заменой параметров  $p_i$  на направляющие косинусы нормали к волновой поверхности  $n_i$ ,  $f = n_1^2 + n_2^2 + k_{33}n_3^2$ .

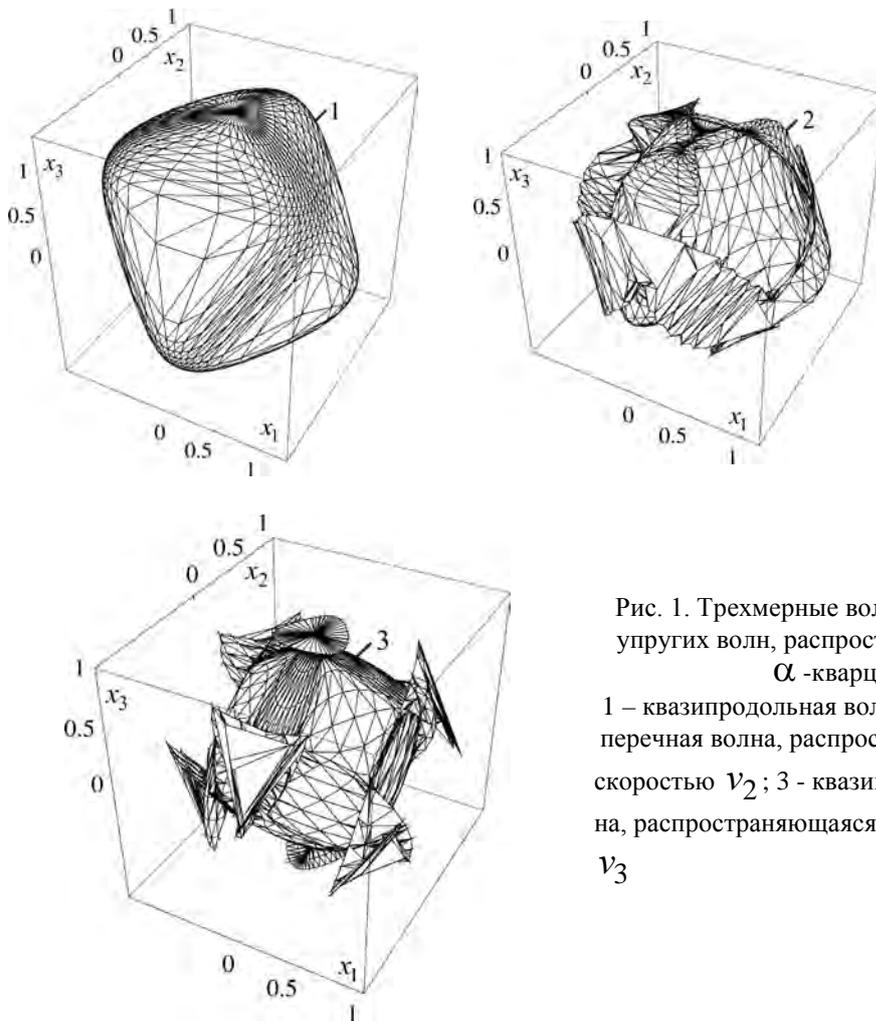


Рис. 1. Трехмерные волновые фронты упругих волн, распространяющиеся в  $\alpha$ -кварце:  
 1 – квазипродольная волна; 2 – квазипоперечная волна, распространяющаяся со скоростью  $v_2$ ; 3 – квазипоперечная волна, распространяющаяся со скоростью  $v_3$

В качестве примера выполним построение трехмерных фронтов квазипродольной и квазипоперечных волн, распространяющихся от точечного источника возмущений в  $\alpha$ -кварце, приведены на рис. 1. Упругие и пьезоэлектрические свойства материала характеризуются следующими постоянными:  $A_{11} = 86,7$ ;  $A_{12} = 7$ ;  $A_{13} = 11,9$ ;  $A_{33} = 107,2$ ;  $A_{44} = 57,9$  ГПа;  $e_{11} = 0,171$ ;  $e_{14} = -0,04$  Кл/м<sup>2</sup>;  $\epsilon_{11} = 39,2$ ;  $\epsilon_{33} = 41$  пФ/м [1].

Из рис. 1 видно, что распространение квазипоперечных волн в  $\alpha$ -кварце происходит с возникновением сложной системы лакун. В частности, на волновом фронте квазипоперечной волны, имеющую фазовую скорость равную  $v_2$ , возникает две конические лакуны, осью которых является координатная ось  $x_3$ , четыре лакуны симметрично расположенных относительно трех осей координат, а также две лакуны симметричных относительно начала координат. Лакуны, возникающие на фронте квазипоперечной волны, распространяющейся с фазовой скоростью  $v_3$ , имеют вид полос. Заметим, что геометрическая форма лакун на фронтах квазипоперечных волн существенно отличается от конических лакун, имеющих одну точку ветвления линий волнового фронта.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф08М - 087).

### **Литература**

1. Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. Применение для обработки сигналов. – М.: Наука, 1982. – 424 с.
2. Балакирев М. К., Гилинский И. А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука 1982 г. – 240 с.
3. Петрашень Г. И. Распространение волн в анизотропных упругих средах. – Ленинград: Наука, 1980. – 284 с.