

РАСЧЕТ СОСТАВНОЙ МЯГКОЙ ОБОЛОЧКИ АЭРОСТАТА В ПАКЕТЕ МАТЕМАТИСА

Журавков М.А., Громыко А.О., Громыко О.В.

Белорусский государственный университет, Минск

Paper deal with computer simulation of the balloon shells deflected modes using Mathematica program facilities. The main equations and algorithm for them solving are demonstrated.

Введение. На высоте от 15 до 40 км наиболее пригодными являются методы изучения свойств атмосферы при помощи автоматических аэростатов. Автоматические аэростаты с большим полетным весом, рассчитанные на длительные полеты в верхних слоях атмосферы, имеют оболочки огромных размеров, объем которых достигает 300000–400000 м³. Такие оболочки, изготовленные из полиэтиленовой пленки толщиной 15–30 микрон, способны нести груз весом 5–6 тонн на высотах 28–30 км и дрейфовать 7–10 суток. Старт аэростатов больших объемов с пленочными оболочками очень сложен. При старте аэростата объем газа, заполняющего оболочку гораздо меньше полного объема оболочки. Подъем оболочки происходит под действием силы, равной разности выталкивающей силы и веса системы $F_0 = U_0 f_0 - G_{\text{сист}}$, где $f_0 = \gamma_{\text{в}} - \gamma_{\text{г}}$. Расчетная сила F_0 составляет 5–20% от $G_{\text{сист}}$. Удержание оболочки перед взлетом осуществляется с помощью центрального валика, расположенного на специальном прицепе. После откидывания валика, держащего оболочку, нижняя часть оболочки разгружается. Подвеска и незаполненная газом часть оболочки не входит в общий начальный (стартовый) объем оболочки аэростата, в результате начальная сила F_0 гораздо больше расчетной: $F_{0\text{нач}} = U_0 f_0 - G_{\text{об.в}}$, где $G_{\text{об.в}}$ – вес заполненной части оболочки.

Оболочка при взлете быстро меняет свою форму, при этом происходит растекание газа по всему объему. Расстояние между усилительными лентами увеличивается настолько, что при неправильном раскрое «выпучины» между лентами могут распрямиться, что приводит к значительному увеличению натяжений в полотнищах. Наряду с изложенным, благодаря малой степени заполнения на земле, оболочка аэростата представляет собой как бы огромный парус, подверженный воздействию ветра и других динамических нагрузок (прежде всего динамического удара в момент отрыва от земли).

Отмеченные обстоятельства приводят к мысли создания нового типа оболочки аэростата – составной оболочки. Составная оболочка аэростата представляет собой оболочку, состоящую из двух участков (рис.1). Объем верхнего участка оболочки почти равен стартовому объему газа, что приводит к значительному уменьшению изменения формы оболочки при старте и полностью избавляет от неблагоприятных воздействий ветровых нагрузок.

Представленная работа посвящена математическому и компьютерному моделированию составной оболочки аэростата с целью исследования ее напряженно-деформированного состояния.

Нагрузки на оболочку. Конструктивно оболочка аэростата представляет собой набор полиэтиленовых полотнищ, соединенных между собой усилительными лентами. В начальном состоянии на полотнищах имеются поперечные складки. Поперечные усилия в полотнищах пропорциональны радиусу кривизны

«выпучины» оболочки. Внутреннее избыточное давление и массовые силы воспринимаются полотнищами оболочки и через поперечные натяжения в полотнищах передаются на усилительный меридиональный каркас.

Продольные натяжения в полотнищах принимаем равными нулю, так как жесткость в направлении меридиана значительно меньше жесткости лент, а в зоне контакта полотнищ и лент имеются складки (полотнища оболочки соединяются с лентами с посадкой). Таким образом, несущими элементами являются усилительные ленты, которые определяют форму меридионального обвода оболочки. Так как оболочка аэростата не имеет собственной формы, она принимает форму, диктуемую нагрузками. Поэтому расчет оболочки аэростата содержит определение равновесной формы при различной степени заполнения оболочки аэростата.

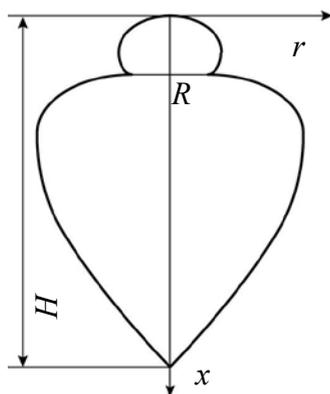


Рис. 1

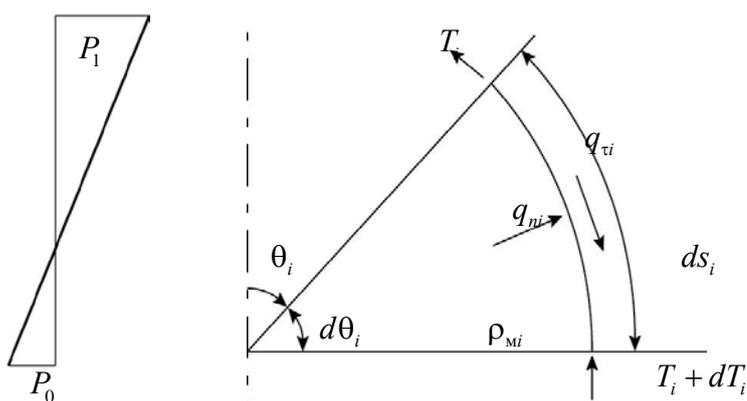


Рис. 2

Рассмотрим задачу определения геометрии составной мягкой оболочки [1,2] аэростата. При заданных длинах меридиана первого и второго участка оболочки, а также радиусе стыка R , рассмотрим нагружение осесимметричной системой сил: избыточным давлением, изменяющимся по линейному закону по высоте и массовыми силами

$$P_{10} = P_1 - \frac{P_1 - P_0}{H} x \quad (1)$$

$$P_{20} = -(\gamma h) \cos \theta, \quad S = (\gamma h) \sin \theta. \quad (2)$$

Будем определять форму системы в результате деформации и усилия, которые возникают в оболочке. В соотношениях (1) и (2) приняты обозначения: P_1 – избыточное давление в верхнем полюсе; P_0 – избыточное давление в нижнем полюсе; H – высота оболочки; (γh) – конструктивный вес единицы поверхности; θ – угол между осью симметрии оболочки и нормалью к образующей.

Очевидно, на единицу площади оболочки действуют: полная нормальная составляющая внешних сил

$$P_n = P_{10} + P_{20} = P_1 - \frac{P_1 - P_0}{H} x - (\gamma h) \cos \theta$$

и полная касательная составляющая

$$S = S_0 = (\gamma h) \sin \theta,$$

а нормальные и касательные погонные нагрузки, действующие на усилительную ленту

$$q_{ni} = \frac{2\pi r_i}{n} \left[P_1 - \frac{P_1 - P_0}{H} x - (\gamma h)_i \cos \theta_i \right] = \frac{2\pi r_i}{n} P_{ni}$$

$$q_{vi} = \frac{2\pi r_i}{n} (\gamma h)_i \sin \theta_i = \frac{2\pi r_i}{n} S_i,$$

где n – число усилительных лент, $i = 1, 2$ – обозначают участки, соответствующие верхней и нижней оболочкам.

Вывод уравнений равновесия. Проектируем силы на направления касательной к меридиану (рис.2):

$$(T_i + dT_i) - T_i + q_v ds_i = 0, \quad \frac{n}{2\pi} \frac{dT_i}{ds_i} = -r_i S_i.$$

Проектируем силы на направление нормали

$$(T_i + dT_i) \frac{d\theta_i}{2} + T_i \frac{d\theta_i}{2} - q_n ds_i = 0.$$

Пренебрегая малыми второго порядка, получим

$$\frac{n}{2\pi} T_i \frac{d\theta_i}{ds_i} = r_i P_{ni}.$$

Введем обозначение: $t_i = \frac{n}{2\pi} T_i$ – меридиональное усилие в оболочке. Тогда система уравнений для определения формы оболочки принимает следующий вид:

$$\frac{dt_i}{ds_i} = -r_i (\gamma h)_i \sin \theta_i, \quad (3)$$

$$t_i \frac{d\theta_i}{ds_i} = r_i \left[P_1 - \frac{P_1 - P_0}{H} x_i - (\gamma h)_i \cos \theta_i \right], \quad (4)$$

$$\frac{dx_i}{ds_i} = \sin \theta_i; \quad \frac{dr_i}{ds_i} = \cos \theta_i. \quad (5)$$

Система уравнений (3-5) описывает геометрию и позволяет определить напряжения в верхней и нижней оболочках.

Граничные условия для верхней оболочки:

при $s_1 = 0 \rightarrow x_1 = 0; \theta_1 = 0; r_1 = 0,$

при $s_1 = s_1 \rightarrow x_1 = H_1; r_1 = R.$

Из уравнений (3) и (5) получим

$$t_1 = t_{01} - (\gamma h)_1 \int_0^{s_1} \sin \theta_1 \left(\int_0^{s_1} \cos \theta_1 ds_1 \right) ds_1, \quad (6)$$

где t_{01} – постоянная интегрирования, равная меридиональному усилию при $s_1 = 0$.

Из уравнений (4-6) также следует, что

$$\frac{d\theta_1}{ds_1} = \frac{\left[P_1 - \frac{P_1 - P_0}{H} x_1 - (\gamma h)_1 \cos \theta_1 \right] \int_0^{s_1} \cos \theta_1 ds_1}{t_{01} - (\gamma h)_1 \int_0^{s_1} \sin \theta_1 \left(\int_0^{s_1} \cos \theta_1 ds_1 \right) ds_1}. \quad (7)$$

Граничные условия для нижней оболочки:

при $s_2 = 0 \rightarrow x_2 = H_1; \theta_2 = \arcsin \left(\frac{t_1}{t_{02}} \sin \theta_1 \right); r_2 = R,$

а из условий равенства вертикальных составляющих меридиональных усилий в точке стыка двух оболочек (рис.3),

при $s_2 = s_2 \rightarrow x_2 = H; r_2 = 0$.

Из уравнений (3) и (5) получим

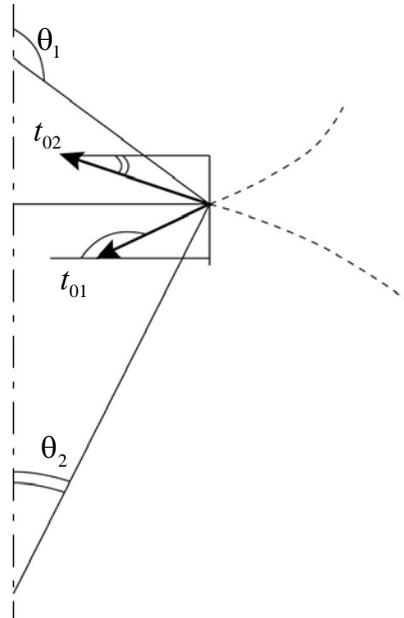
$$t_2 = t_{02} - (\gamma h)_2 \int_0^{s_2} \sin \theta_2 \left(\int_0^{s_2} \cos \theta_2 ds_2 + R \right) ds_2, \quad (8)$$

где t_{02} – постоянная интегрирования, равная меридиональному усилию при $s_2 = 0$.

Из уравнений (4), (5) и (8) следует

$$\frac{d\theta_2}{ds_2} = \frac{\left[P_1 - \frac{P_1 - P_0}{H} x_2 - (\gamma h)_2 \cos \theta_2 \right] \left(\int_0^{s_2} \cos \theta_2 ds_2 + R \right)}{t_{02} - (\gamma h)_2 \int_0^{s_2} \sin \theta_2 \left(\int_0^{s_2} \cos \theta_2 ds_2 + R \right) ds_2}. \quad (9)$$

Уравнения (7) и (9) – основные уравнения для определения формы составной оболочки. Будем решать их численным методом Эйлера.



$$t_1 \sin(\pi - \theta_1) = t_{02} \sin \theta_2$$

$$\theta_2 = \arcsin \left(\frac{t_1 \sin \theta_1}{t_{02}} \right)$$

Рис. 3

Безразмерная форма уравнений. Введем безразмерные параметры:

$$\bar{s} = \frac{s}{L_M}, \quad \bar{s}_1 = \frac{s_1}{L_M}, \quad \bar{s}_2 = \frac{s_2}{L_M}, \quad \bar{x} = \frac{x}{L_M}, \quad \bar{x}_1 = \frac{x_1}{L_M}, \quad \bar{x}_2 = \frac{x_2}{L_M}, \quad \bar{r} = \frac{r}{L_M}, \quad \bar{R} = \frac{R}{L_M}, \quad \bar{H} = \frac{H}{L_M},$$

$$\bar{H}_1 = \frac{H_1}{L_M}, \quad \bar{H}_2 = \frac{H_2}{L_M}, \quad \mu_1 = \frac{(\gamma h)_1}{P_1}, \quad \mu_2 = \frac{(\gamma h)_2}{P_1}, \quad \bar{t}_{01} = \frac{t_{01}}{P_1 L_M^2}, \quad \bar{t}_{02} = \frac{t_{02}}{P_1 L_M^2}, \quad \bar{t}_1 = \frac{t_1}{P_1 L_M^2},$$

$$\bar{t}_2 = \frac{t_2}{P_1 L_M^2}, \quad \bar{P} = \frac{P_0}{P_1}, \quad \beta = \frac{1 - \bar{P}}{\bar{H}}.$$

Тогда для верхней оболочки граничные условия и уравнения примут вид:

$$\begin{aligned}
\bar{s}_1 = 0 &\rightarrow \bar{x}_1 = 0; \theta_1 = 0; \bar{r}_1 = 0, \\
\bar{s}_1 = \bar{s}_1 &\rightarrow \bar{x}_1 = \bar{H}_1; \bar{r}_1 = \bar{R}, \\
\bar{t}_1 &= \bar{t}_{01} - \mu_1 \int_0^{\bar{s}_1} \sin \theta_1 \left(\int_0^{\bar{s}_1} \cos \theta_1 d\bar{s}_1 \right) d\bar{s}_1, \\
\frac{d\theta_1}{d\bar{s}_1} &= \frac{\left[1 - \beta \int_0^{\bar{s}_1} \sin \theta_1 d\bar{s}_1 - \mu_1 \cos \theta_1 \right] \int_0^{\bar{s}_1} \cos \theta_1 d\bar{s}_1}{\bar{t}_1}, \\
\bar{x}_1 &= \int_0^{\bar{s}_1} \sin \theta_1 d\bar{s}_1, \quad \bar{r}_1 = \int_0^{\bar{s}_1} \cos \theta_1 d\bar{s}_1.
\end{aligned} \tag{10}$$

Для нижней оболочки граничные условия и уравнения примут вид:

$$\begin{aligned}
\bar{s}_2 = 0 &\rightarrow \bar{x}_2 = \bar{H}_1; \theta_2 = \arcsin \left(\frac{\bar{t}_1}{\bar{t}_{02}} \sin \theta_1 \right); \bar{r}_2 = \bar{R}, \\
\bar{s}_2 = \bar{s}_2 &\rightarrow \bar{x}_2 = \bar{H}; \bar{r}_2 = 0, \quad \bar{t}_2 = \bar{t}_{02} - \mu_2 \int_0^{\bar{s}_2} \sin \theta_2 \left(\int_0^{\bar{s}_2} \cos \theta_2 d\bar{s}_2 + \bar{R} \right) d\bar{s}_2, \\
\frac{d\theta_2}{d\bar{s}_2} &= \frac{\left[1 - \beta \left(\int_0^{\bar{s}_2} \sin \theta_2 d\bar{s}_2 + \bar{H}_1 \right) - \mu_2 \cos \theta_2 \right] \int_0^{\bar{s}_2} \cos \theta_2 d\bar{s}_2 + \bar{R}}{\bar{t}_2}, \\
\bar{x}_2 &= \int_0^{\bar{s}_2} \sin \theta_2 d\bar{s}_2 + \bar{H}_1, \quad \bar{r}_2 = \int_0^{\bar{s}_2} \cos \theta_2 d\bar{s}_2 + \bar{R}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Далее полученные системы решаются методом Эйлера с использованием пакета компьютерной математики Mathematica [3].

Результаты расчета обвода оболочки. Результаты расчета обвода оболочки представлены в графическом виде на нижеследующих графиках. На рис. 4-7 можно проследить изменение формы оболочки в зависимости от параметра β , при различных сочетаниях параметров μ_1 и μ_2 для двух различных вариантов геометрии аэростата. В работе также были получены численные данные по меридиональным усилиям \bar{t}_{01} и \bar{t}_{02} в каркасе оболочки и их зависимости от параметров μ_1 и μ_2 (в статье графики опущены, приведены в докладе). Поведение верхней оболочки во втором варианте значительно отличается от поведения верхней оболочки в первом варианте. Из рис.6-7 видно, верхняя оболочка "садится" на нижнюю при значениях $\beta = 0, 1, 2$. Это объясняется тем, что подъемная сила газа, содержащегося в верхней оболочке, меньше ее собственного веса. Поэтому верхняя оболочка является дополнительным грузом для нижней оболочки.

Таким образом, видно, что по выше изложенному алгоритму решения задачи можно найти форму обвода и меридиональные усилия составной оболочки с различными геометрическими размерами, при различных сочетаниях параметров β , μ_1 и μ_2 .

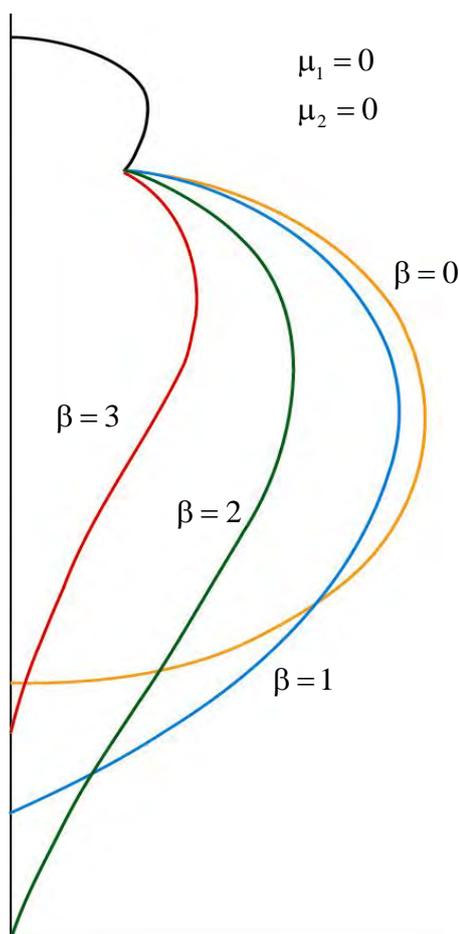


Рис. 4

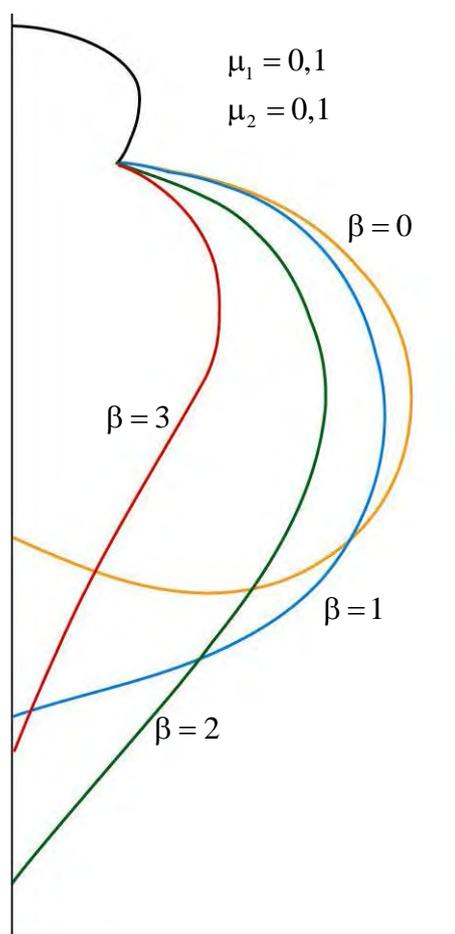


Рис. 5

Выводы. Рассмотрена и математически описана геометрическая форма оболочек составного азростата. Выведены основные уравнения равновесия элементов мягких оболочек для составного азростата. Дифференциальные уравнения равновесия преобразованы к безразмерной форме. Для решения дифференциальных уравнений выбран метод Эйлера, разработан алгоритм и программа с использованием пакета Mathematica. Проведен анализ изменения формы обвода составной оболочки с различными геометрическими размерами, а также при различных сочетаниях параметров силовых и геометрических параметров β , μ_1 и μ_2 .

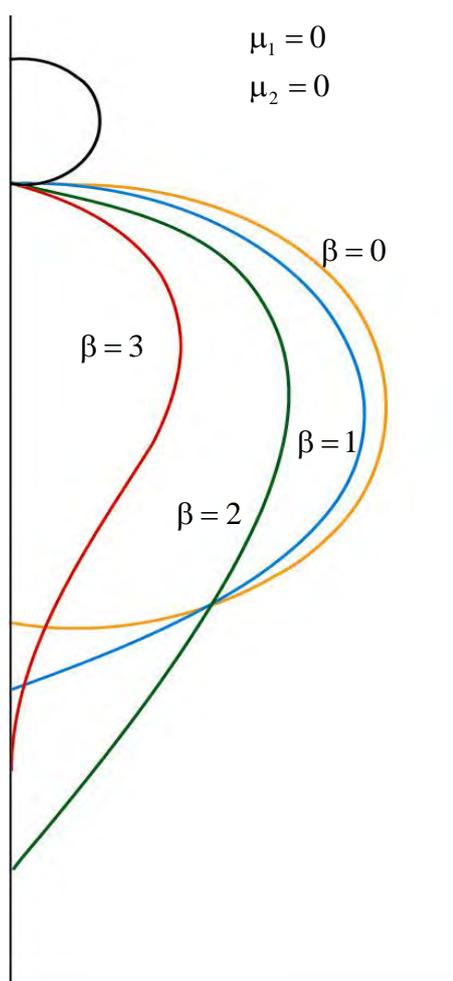


Рис. 6

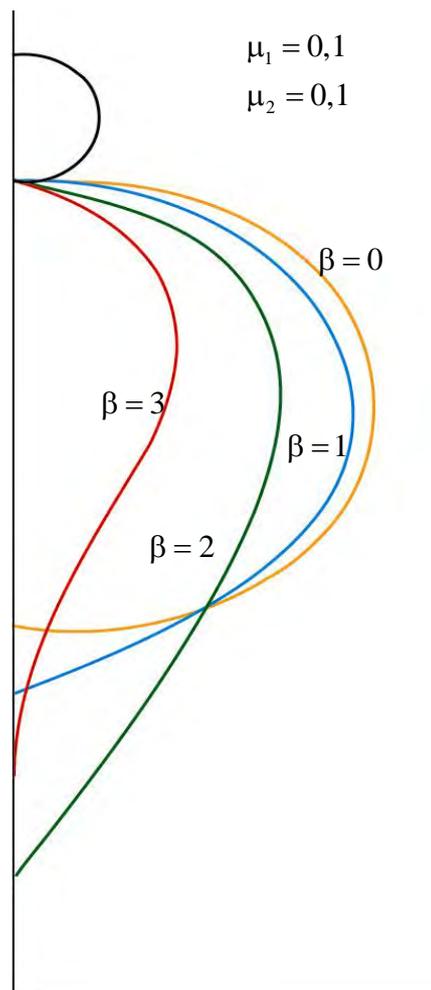


Рис. 7

Литература

1. Механика сплошной среды. Криволинейные брусья, пластины и оболочки/ А.О.Громько, О.В.Громько, М.А.Журавков, Д.Г.Медведев. Под ред проф. Журавкова М.А. – Мн.: БГУ, 2005. - 396 с.
2. Журавков М.А., Громько А.О., Громько О.В. О расчете прочности и жесткости мягкой цилиндрической оболочки пневмоопалубки. В кн.: Современные информационные технологии при добыче полезных ископаемых. Материалы науч.-практ. семинара-совещания 26-28 ноября 2003 г. Солигорск, РУП ПО «Беларуськалий». – Мн.: БГУ, 2004, с.67-71.
3. Дьяконов В. П. Mathematica 4.1, 4.2, 5.0 в математических и научно-технических расчетах / В. П. Дьяконов. – М: Солон, 2004. – 696 с.