

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И ПОВОРОТОВ КОРНЯ ЗУБА, ВОЗНИКАЮЩИХ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ НАГРУЗКИ

Ивашенко С.В., Юркевич К.С., Босяков С.М.

Белорусский государственный медицинский университет, Минск
Белорусский государственный университет, Минск

In the present paper visualization of displacements and turns of a fang under action of the concentrated loading is carried out. The geometrical form of a fang is described by two various elliptic hyperboloids. As an example modeling displacements and turns of a fang under action of the loadings directed along an axis of applicate and an axis of ordinates is executed.

В практике ортопедической стоматологии достаточно часто возникает необходимость перемещений и поворотов зубов, связанная с устранением у пациента аномалий и дефектов челюстно-лицевой области. Результаты расчета напряженно-деформированного состояния, возникающего под действием различным образом ориентированных сосредоточенных нагрузок, в системе «зуб - периодонт» представлены в монографии [1]. Настоящая работа продолжает это актуальное направление и посвящена моделированию перемещений корня зуба в костной ткани без учета влияния периодонта.

Следуя [1], будем считать корень зуба абсолютно твердым телом, которое имеет форму эллиптического двуполостного гиперboloида. В этом случае уравнение поверхности корня можно представить в виде:

$$F(x, y, z) = \frac{z}{H} - \sqrt{\frac{x^2}{a_k^2} + \frac{y^2}{b^2} + p^2},$$

где x, y, z - пространственные координаты, H - параметр, описывающий высоту корня зуба, p - параметр, характеризующий закругление вершины корня зуба, $a_k = a_1$ при $x \geq 0$ и $a_k = a_2$ при $x < 0$, a_1, a_2, b - полуоси эллипса в сечении корня зуба.

Если на зуб действует произвольным образом ориентированная сосредоточенная нагрузка, корень зуба получает три поступательных перемещения вдоль осей координат и три поворота вокруг осей координат. Перемещения точек костной ткани, контактирующих с поверхностью корня зуба, в направлении координатных осей, представим в следующем виде:

$$u = \frac{u_0 + (z - z_a)\varphi_y - y\varphi_z}{1 + \frac{z}{H} \sqrt{\frac{x^2}{a_k^2} + \frac{y^2}{b^2} + p^2}}, v = \frac{v_0 + (x - x_b)\varphi_z - (z - z_b)\varphi_x}{1 + \frac{z}{H} \sqrt{\frac{x^2}{a_k^2} + \frac{y^2}{b^2} + p^2}},$$
$$w = \frac{w_0 + y\varphi_x - (x - x_c)\varphi_y}{1 + \frac{z}{H} \sqrt{\frac{x^2}{a_k^2} + \frac{y^2}{b^2} + p^2}}. \quad (1)$$

Здесь u_0, v_0, w_0 - поступательные перемещения корня зуба вдоль координатных осей, x_b, x_c, z_a и z_b - абсциссы и аппликаты точек, являющихся центрами сопротивления,

φ_x , φ_y и φ_z - углы поворота зуба вокруг осей координат. С учетом толщины h костной ткани, прилегающей к корню зуба, для поступательных перемещений будем иметь:

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{2P_x h}{\pi G(a_1 + a_2)b \left(\left(\frac{\gamma H^2}{2a_1 a_2} + \frac{H^2}{2b^2} + 1 \right) (1 - d^2) + H^2 \left(\frac{1}{b^2} + \frac{\gamma}{a_1 a_2} \right) d^2 \ln(d) \right)}, \\ v_0 &= \frac{2P_y h}{\pi G(a_1 + a_2)b \left(\left(\frac{H^2}{2a_1 a_2} + \frac{\gamma H^2}{2b^2} + 1 \right) (1 - d^2) + H^2 \left(\frac{\gamma}{b^2} + \frac{1}{a_1 a_2} \right) d^2 \ln(d) \right)}, \\ w_0 &= \frac{2P_z h}{\pi G(a_1 + a_2)b \left(H^2 \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{a_1 a_2} \right) \left(\frac{1 - d^2}{2} + d^2 \ln(d) \right) + \gamma (1 - d^2) \right)}, \end{aligned} \quad (2)$$

где P_x , P_y и P_z - проекции сосредоточенной нагрузки на оси координат, G - модуль сдвига. Выражения для координат центров сопротивления можно найти в монографии [1].

Для определения углов поворота корня зуба относительно координатных осей воспользуемся следующими уравнениями [1]:

$$\begin{aligned} \frac{(y_f P_x - (z_f - z_b) P_y) h}{a_1 + a_2} &= \frac{\pi G b H^2 \varphi_x}{8} \left((1 - d^2)^2 \left(\frac{3b^2}{4a_1 a_2} + \frac{\gamma b^2}{H^2} + \frac{\gamma H^2}{b^2} + \frac{H^2}{a_1 a_2} + 2\gamma - \frac{7}{4} \right) + \right. \\ &+ \frac{(1 - d^2)}{2} \left(5 - \frac{b^2}{a_1 a_2} \right) - d^4 \left(3 + \frac{b^2}{a_1 a_2} \right) \ln(d) - \frac{4z_b}{3H} \left(2(1 - d^3) + \left(\frac{\gamma H^2}{b^2} + \frac{H^2}{a_1 a_2} + \gamma - 1 \right) \times \right. \\ &\left. \left. \times (1 - 3d^2 + 2d^3) \right) \right) + \frac{2GHb\varphi_z}{3} \left((a_1 - a_2) \left(\sqrt{(1 - d^2)^3} + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{\gamma H^2}{b^2} \left(\frac{1}{4} \sqrt{(1 - d^2)^3} - \frac{3d^2 \sqrt{1 - d^2}}{8} + \frac{3}{8} d^4 \ln \frac{1 + \sqrt{1 - d^2}}{d} \right) \right) + \\ &+ \left. \frac{\pi x_b}{4} \left(2(1 - d^3) + \left(\frac{\gamma H^2}{b^2} + \frac{H^2}{a_1 a_2} + \gamma - 1 \right) (1 - 3d^2 + 2d^3) \right) \right), \\ \frac{((z_f - z_a) P_x - (x_f - x_c) P_z) h}{a_1 + a_2} &= \frac{\pi G b H^2 \varphi_y}{8} \left((1 - d^2)^2 \left(\frac{H^2}{b^2} + \frac{\gamma H^2}{a_1 a_2} + 2\gamma - \frac{7}{4} + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \left(\frac{\gamma}{H^2} + \frac{3}{4b^2} \right) (a_1^2 - a_1 a_2 + a_2^2) \right) - \left(\frac{1 - d^2}{2} \right) \left(\frac{a_1^2 - a_1 a_2 + a_2^2}{b^2} - 5 \right) - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{(a_1^2 - a_1 a_2 + a_2^2)}{b^2} + 3 \right) d^4 \ln(d) - \frac{8(1-d^3)z_a}{3H} - \\
& - \frac{4z_a}{3H} \left(\frac{\gamma H^2}{b^2} + \frac{H^2}{a_1 a_2} + \gamma - 1 \right) \left(1 - 3d^2 + 2d^3 \right) - \frac{16(a_1 - a_2)x_c}{3\pi b^2} \times \\
& \times \left(\frac{1}{3} \sqrt{(1-d^2)^3} - d^2 \sqrt{1-d^2} + d^3 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-d^2}}{d} + \frac{\gamma b^2}{H^2} \sqrt{(1-d^2)^3} \right), \\
\frac{((x_f - x_b)P_y - y_f P_x)h}{a_1 + a_2} &= \frac{2GH(a_1 - a_2)\varphi_x}{3} \left((1-\gamma) \left(\frac{1}{4} \sqrt{(1-d^2)^3} - \frac{3d^2}{8} \sqrt{(1-d^2)} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{3}{8} d^4 \ln \left(\frac{1}{d} (1 + \sqrt{1-d^2}) \right) \right) + \frac{\gamma H z_b}{b^2} \times \right. \\
& \left. \left(\frac{1}{3} \sqrt{(1-d^2)^3} - d^2 \sqrt{1-d^2} + d^3 \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{(1-d^2)}}{d} \right) \right) \right) + \frac{\pi G b H^2 \varphi_z}{8} \times \\
& \times \left(\left(\frac{\gamma(a_1^2 - a_1 a_2 + a_2^2)}{b^2} + \frac{\gamma b^2}{a_1 a_2} - 2\gamma + 8 \right) \left(\frac{1}{4} (1-d^2)^2 - d^2 \left(\frac{1-d^2}{2} + d^2 \ln(d) \right) \right) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{H^2} (1-d^2)^2 (a_1^2 - a_1 a_2 + a_2^2 + b^2) - \frac{16\gamma x_b}{3\pi b^2} (a_1 - a_2) \sqrt{(1-d^2)^3} \right).
\end{aligned}$$

Здесь $\gamma = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}$, ν - коэффициент Пуассона, x_f , y_f , z_f - координаты точки приложения силы к корню зуба.

Из последней системы линейных уравнений найдем углы поворота корня зуба и с учетом выражений для поступательных перемещений (2) выполним построение корня зуба после его перемещения под действием сосредоточенной нагрузки. Для визуализации корня зуба используем обобщенную цилиндрическую систему координат (r, θ, z)

$$[1]: \quad x = a_k r \cos(\theta), \quad y = b r \sin(\theta), \quad z = H \sqrt{r^2 + d^2}.$$

Здесь r - безразмерный радиус, $a_k = a_1$ при $\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2$ и $a_k = a_2$ при $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.

На рис. 1 совмещены исходное положение корня зуба и его положение, которое он занимает в результате действия силы величиной 300 Н, направленной вертикально вдоль оси аппликат и приложенной в точке с координатами (0, 0, 28.5). На рис. 2 показаны начальное и исходное положения для случая, когда действующая на зуб нагрузка той же величины направлена вдоль оси ординат и приложена в точке с координатами (0, 2, 28.5). Здесь и на рисунках значения координат сформулированы в миллиметрах. Геометрические размеры корня зуба и параметр, описывающий закругление вершины корня зуба имеют следующие значения: $a_1 = 3$, $a_2 = 1$, $b = 2$, $H = 25$ мм, $p = 0.55$.

Заметим, что рассматриваемые величины H и p соответствуют высоте корня зуба равной 15 мм.. Упругие свойства костной ткани описываются модулем упругости $G = 161$ МПа, $\nu = 0.25$, что соответствует кортикальной костной ткани [2].

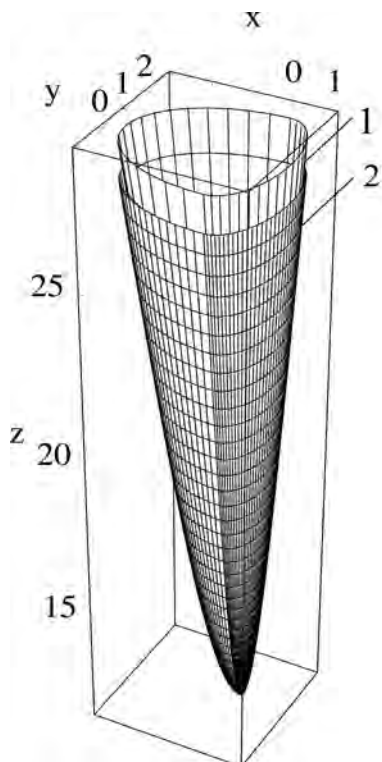


Рис. 1. Перемещение и поворот зуба под действием силы, направленной вдоль оси аппликат: 1 – исходное положение зуба; 2 – конечное положение зуба

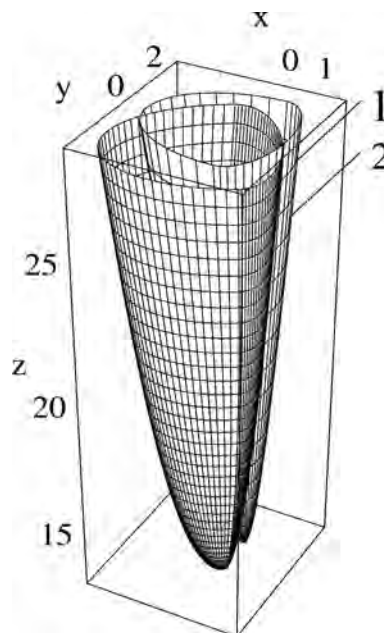


Рис. 2. Перемещение и поворот зуба под действием силы, направленной вдоль оси ординат: 1 – исходное положение зуба; 2 – конечное положение зуба

Из рис. 1 видно, что под действием направленной вертикально вниз нагрузки корень зуба перемещаясь, практически не поворачивается. Полное перемещение зуба составляет 1.5 мм, углы поворота корня зуба относительно осей абсцисс и ординат равны нулю, угол поворота относительно оси аппликат составляет 4.65 мкрад. Рисунок 2 показывает, что под действием сосредоточенной нагрузки, направленной вдоль оси аппликат, корень зуба перемещается по направлению действия силы, одновременно поворачиваясь относительно двух координатных осей. При этом максимальное перемещение составляет 1.8 мм, угол поворота относительно оси ординат равен нулю, угол поворота относительно оси абсцисс равен 4,3 мрад, относительно оси аппликат – 1.255 рад. В заключение отметим, что более полный количественный анализ перемещений и поворотов корней зубов позволяют выполнить кривые, представляющие собой сечения корня зуба, находящегося в исходном и конечном положении, плоскостями, проходящими перпендикулярно оси аппликат.

Литература

1. Наумович С. А., Крушевский А. Е. Биомеханика системы зуб – периодонт. – Мн.: Экономические технологии. – 132 с.
2. Шашмурина В. Р., Чумаченко Е. Н. Математическое моделирование в планировании ортопедического лечения пациентов с полным отсутствием зубов на нижней челюсти // Современная стоматология. 2006, № 1.