

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ СВОЙСТВ КОСТНОЙ ТКАНИ НА ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ЗУБНОГО РЯДА ПОД ДЕЙСТВИЕМ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ НАГРУЗКИ

Ивашенко С.В., Юркевич К.С., Босяков С.М.

*Белорусский государственный медицинский университет, Минск
Белорусский государственный университет, Минск*

In the present paper results of calculation and visualization of displacements of a triple-rooted tooth under action of the concentrated loading in cortical and spongy bone tissue are submitted.

В работе [1] при определении реакций опор и перемещений мостовидного протеза использована модель абсолютно твердого тела, расположенного на упругих податливых опорах. Этот подход применяется в настоящей работе для расчета перемещений зубов под действием сосредоточенной нагрузки, создаваемой ортодонтическим аппаратом, с учетом различных констант упругости костной ткани.

Далее рассмотрим трехкорневой зуб, все корни которого являются круговыми гиперболами и располагаются на одной прямой, совпадающей с осью Oy (начало координат совпадает с основанием первого корня). Координатная ось Ox перпендикулярна ряду корней, ось Oz направлена вверх. Будем считать, при воздействии силовых факторов зуб получает три поступательных и три угловых перемещения при вращении вокруг осей координат. Жесткости каждого корня при поступательном перемещении вдоль соответствующих координатных осей равны c_{kx} , c_{ky} , c_{kz} , жесткости корней при повороте относительно осей координат - μ_{kx} , μ_{ky} , μ_{kz} , $k = \overline{1, 3}$. Уравнения равновесия трехкорневого зуба представим в виде:

$$\sum_{k=1}^3 (R_{kx}) - P_x = 0, \quad \sum_{k=1}^3 (R_{ky}) - P_y = 0, \quad \sum_{k=1}^3 (R_{kz}) - P_z = 0,$$
$$\sum_{k=1}^3 (M_{kx}) + R_{z2}s_1 + R_{z3}(s_1 + s_2) = P_z y_f - z_f P_y, \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^3 (M_{ky}) = P_x z_f - x_f P_z, \quad \sum_{k=1}^3 (M_{kz}) - R_{z2}s_1 - R_{z3}(s_1 + s_2) = P_y x_f - y_f P_x,$$

где P_x , P_y , P_z - проекции главного вектора внешних сил; $R_{kx} = c_{kx}u_k$, $R_{ky} = c_{ky}v_k$, $R_{kz} = c_{kz}w_k$ - проекции реакций опор, u_k , v_k , w_k - поступательные перемещения k -го корня, x_f , y_f , z_f - координаты точки приложения силы, M_{kx} , M_{ky} , M_{kz} - проекции главных моментов внешних сил, s_1 , s_2 - расстояния между опорами.

Поскольку ось Oy расположена вдоль ряда корней, перемещения v_k для всех опор одинаковы и равны v_1 . Перемещения второго и третьего корней вдоль осей Ox и Oz выражаются через перемещения первого зуба и углы поворота зуба следующим образом:

$$u_2 = u_1 - \varphi_z s_1, u_3 = u_1 - \varphi_z (s_1 + s_2), w_2 = w_1 + \varphi_x s_1, w_3 = w_1 + \varphi_x (s_1 + s_2). \quad (2)$$

Подставим формулы для проекций реакций опор и выражения (2) в систему (1). В результате будем иметь следующие шесть уравнений относительно неизвестных перемещений u_1 , v_1 , w_1 и углов поворота φ_x , φ_y , φ_z :

$$\begin{aligned} u_1(c_{1x} + c_{2x} + c_{3x}) - \varphi_z(c_{2x}s_1 + c_{3x}(s_1 + s_2)) &= P_x, \quad v_1(c_{1y} + c_{2y} + c_{3y}) = P_y, \\ w_1(c_{1z} + c_{2z} + c_{3z}) + \varphi_x(c_{2z}s_1 + c_{3z}(s_1 + s_2)) &= P_z, \\ \varphi_x(\mu_{1x} + \mu_{2x} + \mu_{3x} + c_{2z}s_1^2 + c_{3z}(s_1 + s_2)^2) + w_1(c_{2z}s_1 + c_{3z}(s_1 + s_2)) &= \\ &= y_f P_z - z_f P_y, \quad \varphi_y(\mu_{1y} + \mu_{2y} + \mu_{3y}) = z_f P_x - x_f P_z, \\ \varphi_z(c_{2x}s_1^2 + c_{3x}(s_1 + s_2)^2 - \mu_{1z} - \mu_{2z} - \mu_{3z}) - \\ - u_1(c_{2x}s_1 + c_{3x}(s_1 + s_2)) &= x_f P_y - y_f P_z. \end{aligned} \quad (3)$$

Найдем решение системы (3) для случая, когда выполняется равенство между жесткостями корней при поступательном перемещении вдоль координатной осей и жесткостями корней при повороте относительно оси координат, то есть $c_{kx} = c_x$, $c_{ky} = c_y$, $c_{kz} = c_z$ и $\mu_{kx} = \mu_x$, $\mu_{ky} = \mu_y$, $\mu_{kz} = \mu_z$. После несложных преобразований получим:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{c_x \left(x_f P_y (2s_1 + s_2) + P_x \left(s_1^2 + (s_1 + s_2)^2 - y_f (2s_1 + s_2) \right) \right) - 3P_x \mu_z}{c_x \left(2c_x (s_1^2 + s_1 s_2 + s_2^2) - 9\mu_z \right)}, \\ w_1 &= \frac{c_z \left(z_f P_y (2s_1 + s_2) + P_z \left(s_1^2 + (s_1 + s_2)^2 - y_f (2s_1 + s_2) \right) \right) + 3P_z \mu_x}{c_z \left(2c_z (s_1^2 + s_1 s_2 + s_2^2) + 9\mu_x \right)}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{P_y}{3c_y}, \quad \varphi_x = -\frac{P_z (2s_1 + s_2 - 3y_f) + 3P_y z_f}{2c_z (s_1^2 + s_1 s_2 + s_2^2) + 9\mu_x}, \quad \varphi_y = \frac{P_x z_f - P_z x_f}{3\mu_y}, \\ \varphi_z &= \frac{3x_f P_y + P_x (2s_1 + s_2 - 3y_f)}{2c_x (s_1^2 + s_1 s_2 + s_2^2) - 9\mu_z}. \end{aligned}$$

Жесткости корней при поступательном перемещении и при повороте представим на основе соответствующих выражений, полученных в [1], следующим образом:

$$\begin{aligned} c_x = c_y &= \pi a^2 G \left[(1 - p^2) \left(1 + \frac{H^2}{2a^2} (1 + \gamma) \right) + p^2 \frac{H^2}{a^2} (1 + \gamma) \ln(p) \right], \\ c_z &= \pi a^2 G \left[(1 - p) \gamma + \frac{2H^2}{a^2} \left(\frac{1}{2} (1 - p^2) + p^2 \ln(p) \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_x &= \frac{\pi a G H^2}{8} \left((1-p^2)(3-p^2) \left(2\gamma - 1 + \frac{a^2 \gamma}{H^2} + \frac{H^2}{a^2} (1+\gamma) \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3H} \left(4z_b(2-p^3) + (1-3p^2+2p^3) \left(\gamma - 1 + \frac{H^2}{a^2} (1+\gamma) \right) - 4p^4 \ln(p) \right) \right), \\ &\quad + (1-p^2)^2 \left(2\gamma - \frac{7}{4} + \frac{H^2}{a^2} (1+\gamma) - a^2 \left(\frac{3}{4a^2} + \frac{\gamma}{H^2} \right) \right) - 4p^4 \ln(p) \Bigg), \\ \mu_y &= \frac{\pi a G H^2}{8} \left(2(1-p^2) - \frac{4z_a}{3H} \left(2(1-p^2) + (1-3p^2+2p^3) \left(\gamma - 1 + \frac{H^2}{a^2} (1+\gamma) \right) \right) \right) + \\ &\quad \mu_z = \pi a G H^2 \left(\left(\frac{1}{4} + \frac{2a^2}{H^2} \right) (1-p^2)^2 - p^2 \left(\frac{1}{2} (1-p^2) + p^2 \ln(p) \right) \right). \end{aligned}$$

Здесь a - радиус верхней части корня, H - параметр, характеризующий высоту корня зуба, p - параметр, описывающий закругление вершины зуба, G - модуль сдвига, $\gamma = 2(1-\nu)/(1-2\nu)$, ν - коэффициент Пуассона. Выражения для z_a и z_b в соответствии с соотношениями, полученными в [1], для координат центров сопротивления, можно представить в виде:

$$\begin{aligned} z_a &= \frac{2H \left(H^2 (1-p)^2 (1+2p)(1+\gamma) + a^2 \left(3(1-p^2) + \gamma_2 (1-3p^2+2p^3) \right) \right)}{3 \left((1-p^2) (2a^2 + H^2 (1+\gamma)) + 2p^2 H^2 (1+\gamma) \ln(d) \right)}, \\ z_b &= \frac{2H \left(H^2 (1-p)^2 (1+2p)(1+\gamma) + a^2 \left(3(1-p^2) + \gamma_2 (1-3p^2+2p^3) \right) \right)}{3(1-p^2) \left(2a^2 + H^2 (1+\gamma) \right) + 2p^2 H^2 (1+\gamma) \ln(d)}, \end{aligned}$$

где $\gamma_2 = \gamma - 2$.

Проведем расчет перемещений корней зуба и выполним визуализацию исходного и конечного положений зуба для различных значений технических констант, соответствующей нормальной и ослабленной костной ткани. Примем геометрические размеры корней $a = 2$, $H = 25$ мм, $p = 0.55$ (заданные значения параметров H и p соответствуют высоте корней зубов 28.5 мм). Величина сосредоточенной нагрузки составляет 300 Н, сила приложена в точке с координатами $(-2, 0, 28.5)$ под углом $\pi/4$ к осям Ox и Oy (сила перпендикулярна оси Oz). Значения координат сформулированы в миллиметрах. В таблице 1 приведены значения технических постоянных для нормальной и ослабленной костной ткани [2], а также значения результирующих перемещений $U_i = \sqrt{u_i^2 + v_i^2 + w_i^2}$ каждого из трех корней, определенные в соответствии с формулами (4) и (2).

Таблица 1.

Постоянные упругости и перемещения корней в ослабленной и нормальной костной ткани

Костная ткань	Модуль упругости, МПа	Коэффициент Пуассона	Перемещения корней, мм		
			1	2	3
Кортикальная кость	161.0	0.25	0.46	0.47	0.48
Губчатая кость (P1)	75.0	0.45	0.32	0.33	0.36
Губчатая кость (P2)	28.9	0.44	0.96	1.01	1.07
Губчатая кость (P3)	17.3	0.44	1.61	1.69	1.78

На рис. 1 и 2 приведены начальные (поверхности 1) и конечные (поверхности 2) положения корней зубов в кортикальной и губчатой костных тканях. Значение и направление действующей нагрузки, координаты точки приложения, а также геометрические характеристики корней зубов прежние. Значения технических констант упругости взяты из работы [2].

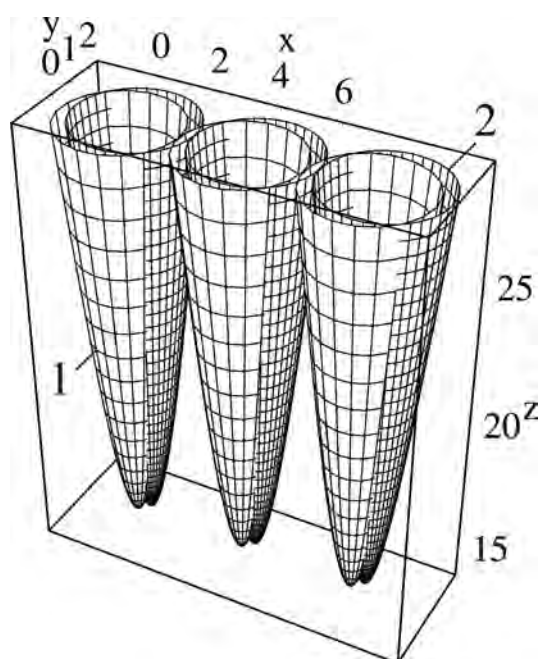


Рис. 1. Перемещения корней зубов в кортикальной костной ткани

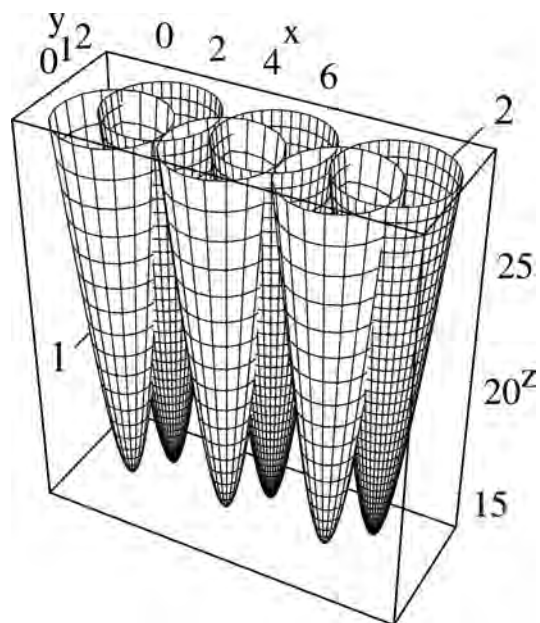


Рис. 2. Перемещения корней зубов в губчатой костной ткани P3

Как следует из полученных численных и графических результатов на величины перемещений корней зубов существенно влияет не только модуль сдвига костной ткани, но и коэффициент Пуассона. Это обстоятельство иллюстрируют значения перемещений, найденные для кортикальной костной ткани и губчатой костной ткани P1. Также отметим, что полученные результаты могут быть ис-

пользованы для решения обратной задачи нахождения модуля силы и ее ориентации по отношению к осям координат по заданным перемещениям корней зубов.

Литература

1. Наумович С. А., Крушевский А. Е. Биомеханика системы зуб – периодонт. – Мн.: Экономические технологии. – 132 с.
2. Шашмурина В. Р., Чумаченко Е. Н. Математическое моделирование в планировании ортопедического лечения пациентов с полным отсутствием зубов на нижней челюсти // Современная стоматология. 2006, № 1.