Министерство образования Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

кафедра «Инженерная математика»

О БАЗОВЫХ ПОНЯТИЯХ И КОНСТРУКЦИЯХ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ И ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ И О НЕКОТОРЫХ ИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ

для студентов

инженерных специальностей

приборостроительного факультета

Электронный учебный материал

Минск 2016

УДК 510.222+510.6+517.5+532.5+532.62

ББК

М54

Составители:

Роговцов Н.Н., Мелешко А.Н., Гундина М.А.

Рецензенты:
Волорова Н.А., Карпук В.В.

Данное учебно-методическое электронное пособие предназначено для студентов инженерных специальностей приборостроительного факультета БНТУ, изучающих курсы «Математика» и «Прикладная математика». В нем изложены сведения о базовых понятиях и конструкциях, используемых в элементарной и высшей математике. Особое внимание в данном пособии уделено описанию свойств функций и процедурам построения графиков функций. Кроме этого, в последней главе пособия изложены сведения о математических свойствах различных плоских кривых и некоторых нетривиальных приложениях в физике, механике и технике.

Белорусский национальный технический университет
пр-т Независимости, 65, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.(017) 292-77-52 факс (017) 292-91-37
Регистрационный № **БНТУ/ПСФ85-30.2016**

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Данное электронное учебно-методическое пособие посвящено достаточно подробному изложению ряда базовых понятий и конструкций, которые широко используются во многих областях математики и ее разнообразных приложениях. Следует отметить, что без глубокого разъяснения смысла этих понятий и конструкций практически невозможно грамотно изложить содержание многих разделов математики, которые входят в учебные программы по курсам «Высшая математика» («Математика») и «Прикладная математика» и читаются студентам вузов технического профиля. Математика, являясь «царицей наук», имеет ряд особенностей, которые оказывают значительное влияние на процесс ее изучения, восприятия, а также на формирование навыков оперирования математическими объектами и на овладение элементами эвристического мышления. Объем накопленных в математике знаний огромен. Ведь математика возникла более четырех тысяч лет тому назад, и с тех пор ее идеи, понятия, конструкции и т.д. «рождались», развивались, обобщались, интерпретировались, обосновывались и эффективно применялись в различных областях человеческой деятельности. Среди уникальных черт, которые присущи различным ветвям математики, следует особо выделить свойства универсальности и абстрактности ее идей, понятий, конструкций и представлений, а также отметить систематическое употребление в математике строгих умозаключений дедуктивного и индуктивного типов. Отмеченные выше уникальные черты математики могут в определенной степени препятствовать усвоению ее результатов значительной частью студентов, которые не имеют достаточной подготовки по элементарной математике. По указанным выше причинам в данное учебно-методическое пособие включена только наиболее важная часть совокупности математических идей, понятий и конструкций, которая лежит в основе как элементарной, так и высшей математики. В частности, в пособии достаточно подробно и строго изложены следующие разделы элементарной и высшей математики:

1) элементы общей теории множеств;

2) числовые множества, их классификация и основные свойства;

3) отображения (функции) и их классификация;

4) бинарные отношения и их классификация (отношение эквивалентности);

5) внутренние и внешние бинарные алгебраические операции, их классификация;

6) элементы исчислений высказываний, предикатов и теории вывода (необходимые и достаточные условия);

7) простейшие понятия комбинаторики;

8) метод координат (простейшие задачи аналитической геометрии).

Кроме того во второй, третьей и четвертой главах этого учебно-методического пособия с использованием многочисленных графических и табличных иллюстраций подробно описаны простейшие свойства неравенств, дробей и операций над действительными и комплексными числами. Более того, в данных главах изложен справочный материал, относящийся к описанию широко используемых тригонометрических тождеств и общих свойств действительных функций действительной переменной. Особое внимание в данном учебно-методическом пособии уделено изложению конкретных фактов, относящихся к теории элементарных (и некоторых простейших специальных) функций, преобразованиям их графиков и процедурам построения кривых первого, второго, третьего и четвертого порядков в различных системах координат. Следует отметить, что изучение свойств таких функций и их графиков позволит обучающемуся лучше понять суть математики и ее возможностей для описания разнообразных реальных процессов, движений, изменений и зависимостей между различными переменными величинами. Кроме этого, в четвертой главе пособия приведен целый ряд сведений, относящихся к описанию геометрических свойств указанных выше кривых и их наиболее широко известным приложениям в технике и механике, а также изложены некоторые интересные исторические факты из жизни выдающихся ученых, которые впервые обнаружили и использовали особенности этих кривых.

Цель данного учебно-методического пособия состоит в том, чтобы не только разъяснить обучающимся (в частности, студентам инженерных специальностей БНТУ) суть базовых понятий и конструкций математики, но также подготовить их к освоению более сложных разделов курсов «Высшая математика» («Математика») и «Прикладная математика» и хотя бы частично компенсировать у некоторых из них значительные пробелы в знаниях по элементарной математике, истории математических исследований, а также стимулировать их интерес к изучению не только самой математики, но к ее нетривиальным приложениям для решения научно-технических проблем.

При написании данного пособия использовались различные литературные источники (см., в частности, библиографию [1–21] и ссылки в ней), конкретные математические сведения из которых компоновались, преобразовывались и определенным образом дополнялись. Так как изложенный материал не охватывает все базовые понятия и конструкции и их технические приложения, то в данном электронном пособии по мере изложения будут даваться отдельные ссылки на публикации, в которых приведены более подробные определения или разъяснения смысла некоторых понятий, конструкций, формул, схем построения графиков функций (кривых).

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ, МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ И КОМБИНАТОРИКИ

1.1. Множества, операции над множествами

В математике некоторые понятия являются первичными (исходными) и, по сути, являются частично неопределяемыми. К ним, в частности, относятся понятия множества, натурального числа, отображения, отношения, точки, прямой и так далее.

Под множеством понимают совокупность определённых и отличных друг от друга объектов (предметов), объединённых общим характерным признаком (или признаками) в единое целое. Объекты (предметы), из которых состоит множество, называют элементами множества. При этом говорят, что эти элементы принадлежат этому множеству.

Множества обычно обозначают прописными буквами $A, B,..., X,...,$ а их элементы – строчными буквами $a, b,..., x,...$ Множества, состоящие из конечного (бесконечного) числа элементов называются соответственно конечными (бесконечными). Множество, не содержащее ни одного элемента, называют пустым множеством и обозначают символом $\varnothing$.

Если A – конечное множество, то число его элементов обозначают через $|A|$ и называют мощностью множества A.

Если элемент a принадлежит множеству A, то пишут $a \in A$, если же элемент b не принадлежит множеству A, то пишут $b \notin A$ (или $b \overline{\in} A$).

Множество считают заданным, если о любом объекте можно сказать, что он принадлежит или не принадлежит этому множеству. Множество задаётся с помощью перечисления всех его элементов или посредством указания свойств, которыми обладают все элементы этого множества. Если множество A состоит из элементов $a_1, a_2,..., a_n$, то пишут $A = \{a_1, a_2,..., a_n\}$. Если X – множество всех элементов x таких, что только они обладают некоторым(и) характеристическим(и) свойством(ами) $P(x)$, то используют обозначение $X=\{x|P(x)\}$. При этом x–элемент множества *X*, если для *x* имеет(ют) место свойство(а) $P(x)$.

Между множествами могут существовать различные отношения. В частности, между ними могут иметь место отношения равенства и включения.

Определение 1.1.1. Множества *A* и *B* называются равными, если каждый элемент множества *A* является элементом множества *B* и, наоборот, каждый элемент множества *B* является элементом множества *A*.

Для обозначения отношения равенства используют знак "=" и пишут $A=B$. Если множество *A* не равно *B*, то пишут $A\neq B$.

Определение 1.1.2. Множество *B* называется подмножеством множества *A*, если каждый элемент множества *B* является элементом множества *A*.

Если *B* – подмножество множества *A*, то используется обозначение $B\subseteq A$. Непустое подмножество *B* непустого множества *A* называется собственным, если *B* не совпадает с *A*. При этом пишут $B\subset A$. Само множество *A* и пустое множество $\varnothing$ называют несобственными подмножествами множества *A*. Символы $\subseteq$ и $\subset$ имеют смысл соответственно отношения включения и отношения строгого включения между множествами. Если все данные множества являются подмножествами одного и того же множества U, то такое множество U называют универсальным множеством (универсумом).

Для пояснения смысла понятий множества, отношения между множествами и операций, которые можно производить над ними, широко используются диаграммы Эйлера-Венна, в которых множествам сопоставляются плоские фигуры, Например, некоторому множеству *A* можно сопоставить фигуру (см. рис. 1.1).

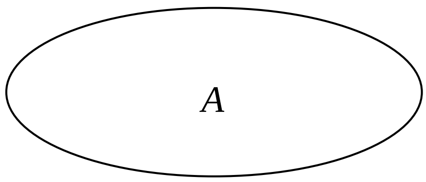


Рис. 1.1. Символическое сопоставление множеству A плоской фигуры

Если множество A есть совокупность точек на плоскости, то оно реально будет идентично некоторой плоской фигуре.

Тот факт, что множества A и B не имеют общих элементов можно изобразить, например так, как показано на рис. 1.2. Если A и B имеют некоторое количество общих элементов, то это изображается так, как показано на рис. 1.3. Проиллюстрировать факт того, что множество B является собственным подмножеством множества A можно так, как это изображено на рис. 1.4. Если $A = B$, то это можно изобразить полным наложением соответствующих этим множествам диаграмм (фигур) одну на другую.

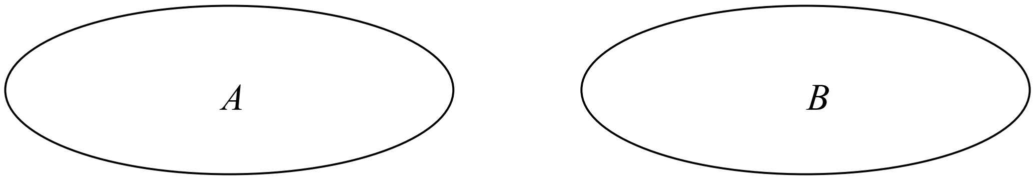


Рис. 1.2. Множества A и B не имеют общих элементов

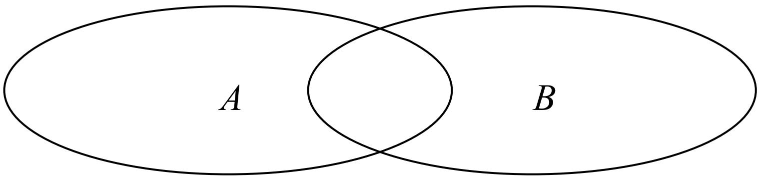


Рис. 1.3 . Множества A и B имеют общие элементы

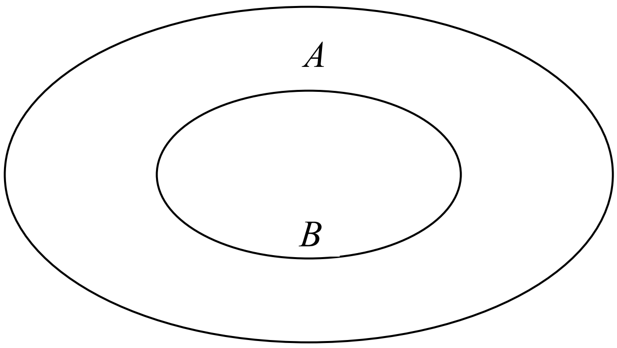


Рис. 1.4. Множество B есть собственное подмножество множества A

Определим простейшие операции над множествами, а также дадим их геометрическую интерпретацию посредством использования диаграмм Эйлера-Венна.

Определение 1.1.3. Объединением (суммой) множеств A и B называется множество $C = A \bigcup B$, содержащее те и только те элементы, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B: $C = A \bigcup B = \{x | x \in A \text{ или } x \in B \text{ или } (x \in A \text{ и } x \in B)\}$.

Геометрически объединение множеств A и B можно изобразить в виде заштрихованных фигур, как это показано на рис. 1.5 или на рис. 1.6.

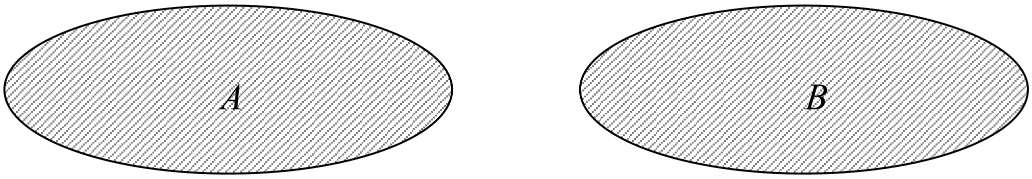


Рис. 1.5. Объединение множеств A и B, не имеющих общих элементов

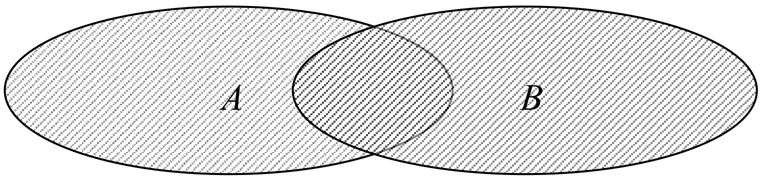


Рис. 1.6. Объединение множеств A и B, имеющих общие элементы

Используя данные выше определения, можно установить, что верны такие равенства:

$A \bigcup A = A$, $A \bigcup \varnothing = A$, $A \bigcup U = U$; если $B \subset A$, то $A \bigcup B = A$.

Определение 1.1.4. Пересечением (произведением) множеств A и B называется множество $C = A \bigcap B$, состоящее из всех тех и только тех элементов, каждый из которых принадлежит обоим множествам одновременно:

$C = A \bigcap B = \{x | x \in A \text{ и } x \in B\}$.

Геометрическая интерпретация пересечения множеств *A* и *B* дана на рис. 1.7 (элементы, принадлежащие $A \bigcap B$ изображены заштрихованной частью фигур *A* и *B*).

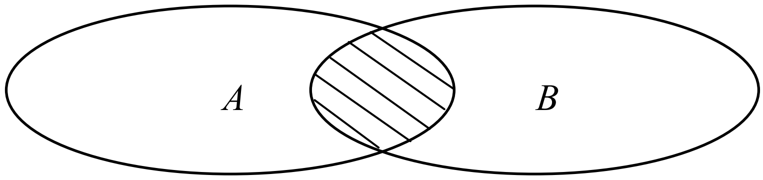


Рис. 1.7. Пересечение множеств A и B, имеющих общие элементы

Если множества A и B не имеют общих элементов, то $A \bigcap B = \varnothing$ (см. рис. 1.8).

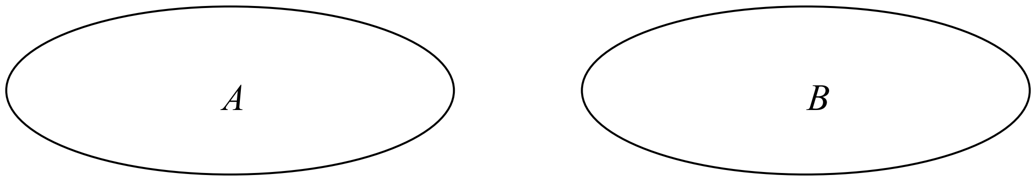


Рис. 1.8 Пересечение множеств A и B, не имеющих общих элементов

(Заштрихованная часть отсутствует вовсе).

Очевидно, что имеют место следующие равенства:

$A \bigcap A = A,$ $A \bigcap \varnothing = \varnothing,$ $A \bigcap U = A$; если $B \subset A$, то $A \bigcap B = B$.

Определение 1.1.5. Разностью двух множеств A и B называется множество $C = A \setminus B$, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат *A*, но не принадлежат *B*: $C = A \setminus B = \{x | x \in A \text{ и } x \notin B\}$.

Разности множеств $A \setminus B$ изображены на рисунках 1.9 и 1.10 заштрихованной областью фигуры *A*.

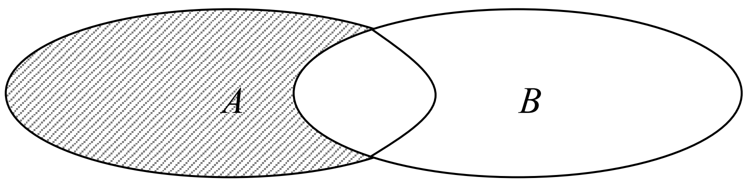


Рис. 1.9 Разность множеств A и B

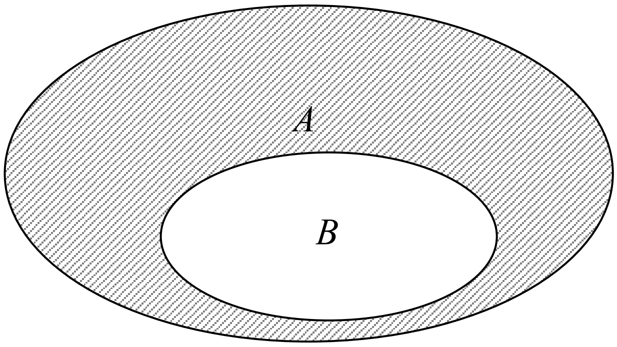


Рис. 1.10. Дополнение множества B до множества A

Если $B \subset A$ (см. рис. 1.10), то разность $A \setminus B$ называют дополнением множества B до множества A.

Определение 1.1.6. Дополнением множества A до универсального множества U называется разность $U \setminus A$ и обозначается символом $\overline{A}$

$$\overline{A} = U \setminus A = \{x | x \notin A\}$$

С помощью диаграмм Эйлера-Венна данную операцию можно проиллюстрировать так (см. рис. 1.11)

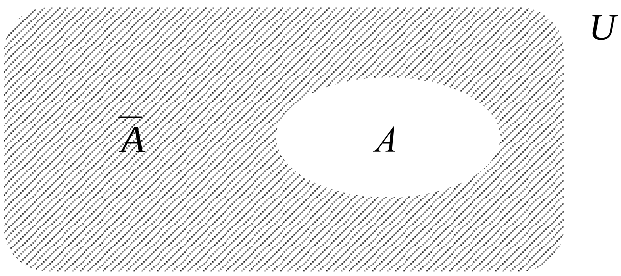


Рис. 1.11. Дополнение множества A до универсального множества U

Символы $\cup, \cap, \setminus$ имеют смысл операций объединения, пересечения и разности множеств соответственно.

1.2. Общие сведения о числовых множествах

Множества, элементами которых являются числа, называются числовыми.

Для основных числовых множеств приняты следующие стандартные обозначения:

N – множество всех натуральных чисел,

$N = \{1, 2, 3, ...\}$;

Z_0 (или N_0) – множество всех целых неотрицательных чисел,

$Z_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\}$;

Z – множество всех целых чисел,

$Z = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$;

Q – множество всех рациональных чисел,

$$Q = \left\{ \frac{m}{n} \middle| \, m \in Z, n \in Z \setminus \{0\} \right\},$$

где $\{0\}$ – множество, которое содержит только одно число нуль;

I – множество всех иррациональных чисел;

R_0 – множество всех неотрицательных действительных чисел;

R – множество всех действительных чисел, (числовая прямая)

$R = Q \cup I$;

C – множество всех комплексных чисел.

Указанные множества связаны между собой посредством следующих отношений:

$N \subset Z_0 \subset Z \subset Q \subset R \subset C$.

Более подробно числовые множества будут описаны далее.

1.3. Соответствия между множествами и отображения множеств. Общее понятие отношения. Отношение эквивалентности

Иногда между двумя множествами можно установить *соответствие*, т.е. можно ввести правило, по которому для каждого элемента одного множества указывается вполне определенный элемент или подмножество элементов другого множества. При этом допускается, что некоторым элементам первого множества может соответствовать пустое множество.

На основе понятия соответствия между множествами вводится понятие отображение множеств.

Определение 1.3.1. Соответствие, при котором каждому элементу множества A отвечает единственный элемент множества B, называется *отображением множества* A *в множество* B.

Определение 1.3.2. Соответствие, для которого каждому элементу множества A отвечает единственный элемент множества B, и, кроме того, каждому элементу множества B отвечает хотя бы один элемент множества A, называется отображением *множества* A *на множество* B.

Отображения множеств обычно обозначают буквами $f, g, h,...$ и пишут $A \xrightarrow{f} B$ или $f : A \to B$.

Определение 1.3.3. Если при отображении f элементу $a \in A$ соответствует элемент $b \in B$, то элемент b называется *образом* элемента a. В свою очередь элемент a называется *прообразом* элемента b и этот факт записывается так $b = f(a)$.

При этом факт отображения всего множества A на множество B записывается так $B = f(A)$.

Определение 1.3.4. Множество $f(A)$ образов всех элементов $a \in A$ при отображении f называют образом множества A.

Определение 1.3.5. Отображение $f : A \to B$ множества A на множество B, при котором каждому элементу множества B соответствует только единственный элемент множества A, называется *взаимно однозначным отображением (биективным или биекцией)* множества A на множество B.

Если отображение $f : A \to B$ биективно, то отображение $f^{-1} : B \to A$, ставящее в соответствие каждому элементу $b \in B$ его прообраз $a \in A$, называют *обратным* отображением для отображения f. Обратным для отображения f^{-1} будет исходное отображение f.

Определение 1.3.6. Если множество A взаимно однозначно отображается на множество B, то множества A и B называются *равномощными*.

Равномощность множеств обычно записывается с помощью знака ~: $A \sim \mathrm{B}$.

О равномощных множествах A и B также говорят, что между ними установлено *отношение эквивалентности*.

Кроме понятий множества и отображения в математике используется еще целый ряд базовых понятий. К таким понятиям относится понятие отношения. Выше уже были приведены примеры отношений. К ним, в частности, относятся отношения равенства, включения и отношение равномощности множеств. К отношениям относятся также понятия «больше» и «меньше» для вещественных чисел и понятие подобия для геометрических фигур. Введем общее понятие бинарного отношения и дадим краткую классификацию отношений.

Определение 1.3.7. Декартовым произведением двух непустых множеств A и B называется множество $C = A \times B = \{(a,b) | \, a \in A \text{ и } b \in B\}$. При этом в упорядоченной паре (a,b) элемент a считается первым, а элемент b – вторым.

Определение 1.3.8. Бинарным отношением σ называется множество упорядоченных пар (a,b) ($a \in A$ и $b \in B$), которые образуют некоторое непустое множество декартового произведения $A \times B$. При этом выражения $(a,b) \in \sigma$ и $a\sigma b$ считаются равноценными.

Замечание 1.3.1. В рамках определения 1.3.8. говорят, что элемент a находится в отношении σ к элементу b в том и только в том случае, когда имеет место $a\sigma b$.

Замечание 1.3.2. Если $A = B$, то отношение $\sigma \subset A \times A$ называется бинарным отношением, заданным на множестве A.

Определение 1.3.9. Бинарное отношение σ называется менее общим, чем отношение τ, а τ – более общим чем σ, если для любых элементов a и b из подмножества $a\sigma b \subset A \times B$ следует, что имеет место $a\tau b$.

Например, отношение равенства геометрических фигур является менее общим, чем отношение подобия таких фигур.

Определение 1.3.10. Бинарное отношение σ, заданное на множестве A (это отношение есть подмножество множества $A \times A$), называется *рефлексивным*, если для любого элемента $a \in A$ имеет место $a \sigma a$.

Примерами рефлексивных отношений являются равенство отрезков, подобие фигур и отношение включения $\subset$ множеств.

Определение 1.3.11. Отношение σ называется *симметричным*, если для любых элементов $a, b \in A$ из истинности $a\sigma b$ следует истинность $b\sigma a$.

Примерами симметричных отношений являются отношения перпендикулярности, параллельности прямых и подобие фигур.

Определение 1.3.12. Отношение σ называется *транзитивным*, если для любых элементов $a, b, c \in A$ из истинности $a\sigma b$ и $b\sigma c$ следует истинность $a\sigma c$.

В качестве транзитивных отношений можно назвать отношения равенства отрезков, подобия фигур, отношение «меньше» для вещественных чисел.

Определение 1.3.13. Отношение σ называется *связным*, если для любых различных элементов $a, b \in A$ имеет место, по крайней мере, одно из отношений $a\sigma b$, $b\sigma a$. Если данные условия не выполняются, то отношение σ называется *несвязным*.

Примером несвязного отношения является отношение равенства отрезков. Отношение «правее» является связным.

Определение 1.3.14. Отношение ρ, заданное на множестве A (т.е. $\rho \subset \mathrm{A} \times \mathrm{A}$), называется отношением эквивалентности, если оно одновременно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Отметим, что отношение *эквивалентности* зачастую обозначают символом $\sim$. Отношениями эквивалентности являются, в частности, отношения равенства, подобия и равномощности множеств.

Замечание 1.3.3. Тождество (отношение тождества) является предельным случаем отношения эквивалентности, так как единственным элементом, равным какому-либо данному элементу, является этот же элемент.

Замечание 1.3.4. Произвольное отношение эквивалентности ρ на множестве A задает на A *обобщенную формулу равенства*, так как все элементы этого множества, которые находятся друг с другом в отношении ρ, могут считаться равными в обобщенном смысле (им присуще одно и то же свойство).

Замечание 1.3.5. Важной областью применения отношений эквивалентности является *формализация* математических и иных понятий.

1.4. Простейшие понятия математической логики

В математической логике в отличие от лингвистики рассматриваются только те понятия, на основе которых можно сформулировать разнообразные истинные или ложные утверждения (высказывания). Фактически высказывания представляют собой осмысленные утвердительные предложения. В данной логике выделяют «постоянные» и «переменные» высказывания. Первые высказывания характеризуются тем, что о них можно в рамках определенного контекста сказать, что они либо истинны, либо ложны. Переменные высказывания не являются, вообще говоря, только либо истинными, либо только ложными. Эти высказывания содержат элемент(ы) (переменную(ые)) из некоторой предметной области и их истинность, ложность зависит от конкретных значений переменной(ых). Данного рода высказывания называются *предикатами*. В математической логике постоянные высказывания обозначаются обычно прописными буквами какого-либо алфавита (например, A, B, C, D).

Определение 1.4.1. Говорят, что на множестве, элементами которого являются упорядоченные n–ки $(x_1, x_2, ...x_n)$, задан *предикат* $P(x_1, x_2, ...x_n)$, если каждой такой фиксированной n–ке соответствует определенное значение истинности: T (истина); F (ложь). При этом предикат называют *одноместным*, если $n=1$, и – многоместным, если $n \in \{2,3,4,...\}$.

В математической логике выделяют *исчисления высказываний* и *предикатов*. В исчислении высказываний рассматриваются самые разнообразные комбинации постоянных высказываний, которые могут быть простыми высказываниями (они не допускают расчленения) или являются *сложными высказываниями*. В свою очередь под сложными высказываниями понимаются высказывания, которые получены из простых высказываний посредством сентенциональных (логических) связок. Фактически данные связи определяют (задают) логические операции.

Определение 1.4.2. В рамках русского языка под сентенциональными связками понимают следующие пять слов или комбинаций слов: «не», «и», «или», «если…, то», «тогда и только тогда, когда».

Теперь можно уточнить понятие простого высказывания.

Замечание 1.4.1. В исчислении высказываний под *простыми высказываниями* понимают такие высказывания, которые не содержат сентенциональных связок или сами по себе рассматриваются в качестве нерасчленяемых (неразложимых) высказываний.

Определение 1.4.3. *Отрицанием* высказывания A называется высказывание $\overline{A}$ («не A»), которое является ложным, если A истинно, и – истинным, если A ложно (символ $\overline{}$ обозначает логическую операцию отрицания).

Определение 1.4.4. *Дизъюнкцией* высказываний A, B называется высказывание $C = (A \text{ или } B)$, которое является истинным, если истинно хотя бы одно из высказываний A, B, и – ложным, когда A и B ложны одновременно. При этом дизъюнкция обозначается $A \vee B$ ($\vee$ – знак логической операции дизъюнкции).

Определение 1.4.5. *Конъюнкцией* высказываний A, B называется высказывание $C = (A \text{ и } B)$, которое является истинным, если истинны оба высказывания A, B одновременно, и – ложным, когда хотя бы одно из высказываний A, B ложно. Конъюнкция обозначается символом $A \wedge B$ ($\wedge$ – знак логической операции конъюнкции).

Определение 1.4.6. *Импликацией* от высказывания A к высказыванию B называется высказывание $C = (\text{если } A \text{, то } B)$, которое ложно, когда A истинно, а B ложно, и истинно во всех других ситуациях. При этом высказывание A называется *посылкой*, а B – *заключением* импликации. Импликация обозначается символом $A \Rightarrow B$ ($\Rightarrow$ – знак логической операции импликации).

Определение 1.4.7. *Эквиваленцией* высказываний A, B называется высказывание $C = (A \text{ тогда и только тогда, когда } B)$, которое истинно, когда A, B истинны или ложны одновременно. Эквиваленция обозначается символом $A \Leftrightarrow B$ ($\Leftrightarrow$ – знак логической операции эквиваленции).

Определение 1.4.8. Множество всех высказываний, содержащее в рамках определенного контекста все простые высказывания и сложные высказывания, полученные из простых с помощью логических операций $\bar{\ },\vee,\wedge,\Rightarrow,\Leftrightarrow$ называется *алгеброй высказываний*.

Определение 1.4.9. Выражения, составленные из высказываний (простых и сложных), знаков логических операций и скобок (скобки определяют субординацию выполняемых операций) называются *формулами алгебры высказываний*.

Замечание 1.4.2. Любая формула высказываний $f(A_1,...,A_n)$, составленная из высказываний $A_1,...,A_n$ представляет собой функцию, область определения которой является конечным множеством, содержащим 2^n элементов. Область значений этой функции представляет собой множество $\{T, F\}$.

При рассмотрении высказываний весьма полезно использовать истинностные таблицы. Для иллюстрации на примере таблицы 1.1 приведем истинностные значения простейших формул высказываний, каковыми являются $\overline{A}$, $A \wedge B, A \vee B$, $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$.

Таблица 1.1

Операции над высказываниями и их истинностные значения

A	B	$\overline{A}$	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	$-$	T	F	F	F
F	T	T	T	F	T	F
F	F	$-$	F	F	T	T

Определение 1.4.10. Две формулы алгебры высказываний называются *эквивалентными*, если их истинностные таблицы одинаковы.

Обозначим через U высказывание, которое всегда истинно. Тогда отрицание этого высказывания (т.е. $\overline{U}$) будет всегда ложным. Приведем классические эквивалентные формулы (тождества) математической логики. Они имеют следующий вид:

$\overline{\overline{A}} = A$, $A \vee B = B \vee A$, $A \wedge B = B \wedge A$, $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$,

$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$, $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$,

$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$, $A \vee A = A$, $A \wedge A = A$, $A \vee \overline{U} = A$,

$A \vee U = U$, $A \wedge U = A$, $A \wedge \overline{U} = \overline{U}$, $A \vee \overline{A} = U$, $A \wedge \overline{A} = \overline{U}$, $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$,

$\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$, $A \Rightarrow B = \overline{A} \vee B$, $A \Leftrightarrow B = (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$, $A \Rightarrow B = \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$,

$B \Rightarrow A = \overline{A} \Rightarrow \overline{B}$.

Важную роль в математической логике играют тождественно истинные формулы. К таким формулам относятся, например, такие формулы:

$\overline{\overline{A}} \Leftrightarrow A$ (закон двойного отрицания);

$A \wedge A \Leftrightarrow A,\ A \vee A \Leftrightarrow A$ (законы идемпотентности);

$\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B},\ \overline{A \vee B} \Leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}$ (законы Де Моргана).

Замечание 1.4.3. При записи формул алгебры высказываний используется такая субординация для выполнения действий, порождаемых логическими связками: $\overline{}, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ (эта субординация нарушается, если есть скобки).

При проведении различного рода рассуждений, доказательств в математике кроме исчисления высказываний применяется исчисление предикатов. В этом исчислении вводится еще ряд важных дополнительных понятий.

Определение 1.4.11. Пусть $P(x)$ – предикат, заданный на множестве M. Тогда под символом $\exists x P(x)$ понимается такое утверждение: «существует такое $x \in M$, что $P(x)$ истинно, если область истинности не является пустой, и $P(x)$ ложно, если область истинности является пустой. При этом символ $\exists$ называется *квантором существования*.

Определение 1.4.12. Пусть $P(x)$ – предикат, заданный на множестве M. Тогда под символом $\forall x P(x)$ понимается *истинное высказывание*, когда $P(x)$ истинно для любых $x \in M$, и – *ложное высказывание* в противном случае. При этом символ $\forall$ называется *квантором всеобщности*.

Замечание 1.4.4. При отсутствии скобок в формулах символы $\exists$ и $\forall$ действуют как операция $\overline{}$ (отрицание) на ближайший объект этой формулы.

Следует особо подчеркнуть, что кроме исчислений высказываний и предикатов в математической логике при построении аксиоматических теорий используются процедуры вывода и доказательства. Допустим, что F_0 – совокупность аксиом некоторой математической теории, а F – некоторое утверждение данной теории. Тогда под символом $F \mid\!- A$ будем понимать такое утверждение: «из утверждения F (посылки вывода) и аксиом F_0 выводимо (следует) утверждение A (т.е. из истинности F_0 и F *автоматически следует* истинность утверждения A). При этом символ $\mid\!- A$ означает выводимость утверждения A из аксиом F_0. Отметим, что смысл понятия выводимости отличается от высказывания $(F \wedge F_0) \Rightarrow A$ (см. далее).

Определение 1.4.13. Установление факта связи двух высказываний B и Q посредством отношения $\mid\!-$ называется *выводом*. В записи $B \mid\!- Q$ высказывание B называется *условием*, а высказывание Q – *следствием* (в рамках аксиоматических теорий символ F_0 обычно опускается).

Определение 1.4.14. Пусть имеет место высказывание (утверждение) $B \mid\!- Q$. Тогда B называют *необходимым условием* истинности Q (для того, чтобы имело место Q, *необходимо*, чтобы имело место также и B), а Q – *достаточным условием* истинности B (для того, чтобы имело место B, вполне *достаточно*, чтобы было истинным Q).

Определение 1.4.15. Если имеют место $B \mid\!- Q$ и $Q \mid\!- B$, то говорят, что истинность B представляет собой *необходимое* и *достаточное условие* того, что Q имеет место (и наоборот).

Введем еще ряд понятий, которые используются в математической логике и математике при формулировке утверждений и доказательстве теорем.

Определение 1.4.16. Высказывание (утверждение) $B \Rightarrow A$ называют *обратным* к высказыванию $A \Rightarrow B$. Высказывание (утверждение) $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$ называют *противоположным* для высказывания (утверждения) $A \Rightarrow B$, а высказывание (утверждение) $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ – *противоположным к обратному*.

Приведем для иллюстрации истинностные таблицы для всех высказываний $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$, $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$, $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ в виде сводной таблицы 1.2.

Таблица 1.2

Прямые, обратные и противоположные импликации высказываний A и B.

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$	$\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F
F	T	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T

Из данной таблицы следует, что высказывания (утверждения) $A \Rightarrow B$ и $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$, а также $B \Rightarrow A$ и $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$, имеют одинаковые таблицы истинности. Следовательно имеют место равенства (эквивалентности) $(A \Rightarrow B) = (\overline{B} \Rightarrow \overline{A})$,$(B \Rightarrow A) = (\overline{A} \Rightarrow \overline{B})$. По этой причине утверждение (*прямая теорема*) $A | -B$ *равносильна противоположной к* обратному утверждению (*обратной теореме*) $\overline{B} | -\overline{A}$. Данный факт лежит в основе *метода доказательства от противного*. Его суть заключается в замене доказательства *прямой теоремы* $A | -B$ доказательством *обратной теоремы* $\overline{B} | -\overline{A}$.

Замечание 1.4.5. Если утверждение A является *необходимым* и *достаточным_условием* для утверждения B, то будут одновременно справедливы все утверждения $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$, $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$, $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ (см. таблицу 1.2).

Замечание 1.4.6. Все логические операции $\overline{}, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ допускают биективную и эффективную реализацию в рамках релейно-контактных схем и элементной базы современной компьютерной техники.

1.5. Простейшие сведения о комбинаторике

Определение 1.5.1. Пусть A – некоторое множество. Оно называется упорядоченным множеством, если на нем задано отношение порядка, которое обладает такими свойствами: 1) рефлексивность (любой элемент не превосходит самого себя); 2) антисимметричность (если $a \le b$ и $b \le a$, то элементы

$a, b \in A$ совпадают; отношение $\leq$ – «меньше или равно»); 3) транзитивность (если $a \leq b, b \leq c$, то $a \leq c$).

Вместо символа $\leq$ можно использовать также символ $\geq$ – «больше или равно» (т.е. записи $a \leq b$ и $b \geq a$ равноценны). Отметим, что пустое множество зачастую принимается упорядоченным множеством.

Замечание 1.5.1. Одно и то же множество может быть упорядочено различными способами. При этом упорядоченные (конечные или счетные) множества часто записывают в виде элементов, расположенных в круглых скобках.

Пусть $M = \{m_1, m_2, ..., m_n\}$ – конечное множество, которое по определению содержит только различные элементы и не является упорядоченным, т.е. изменение порядка расположения элементов $m_1, m_2, ..., m_n$ внутри фигурных скобок не изменяет множества M. Однако, при решении многих научно-технических задач приходится рассматривать различные комбинации элементов (в том числе упорядоченные комбинации), извлеченных из множества M, и находить число таких комбинаций. Решением такого рода задач занимаются в рамках комбинаторики, которая является одним из важных разделов математики.

Определение 1.5.2. Выборкой, содержащей k элементов ($k \in N = \{1,2,3,...\}$; $k-$ размерность выборки) из множества M, называется совокупность $S_k = [a_1, ..., a_k]$, такая, что любой элемент a_j, где $j = \overline{1,k} = \{1, ..., k\}$, из совокупности S_k принадлежит множеству M. При этом натуральные числа $k, n \in N$, и может реализовываться любое из неравенств $k \leq n$, $k > n$.

Определение 1.5.3. Выборка S_k из множества M, содержащего n элементов, называется *выборкой без повторений*, если любые два элемента этой выборки различны между собой (т.е. $a_i \neq a_j$, если $i \neq j; k \leq n$). В противном случае выборка S_k называется *выборкой с повторениями*.

Определение 1. 5.4. Выборка S_k из множества M называется *упорядоченной выборкой*, если в S_k задан порядок следования ее элементов. В противном случае выборка называется *неупорядоченной выборкой*.

Замечание 1.5.2. Упорядоченные выборки из одного и того же множества, содержащие одни и те же элементы, но расположенные в различном порядке, считаются различными.

Определение 1.5.5. Выборка S_k из множества M называется *упорядоченной выборкой без повторений*, если она – упорядоченная выборка, не имеющая повторений.

В рамках комбинаторики дается, в частности, ответ на следующий вопрос: «Какое число различных выборок определенных размерностей с заданными свойствами возможно сконструировать из элементов каких-либо конечных множеств?» При решении проблем комбинаторики используются некоторые процедуры, называемые правилами. К этим правилам, в частности относятся обобщенное правило суммы и правило произведения [20].

Определение 1.5.6. Под *размещениями без повторений* из n элементов по k понимаются упорядоченные k – выборки без повторений из n элементов.

Утверждение 1.5.1. Число размещений без повторений из n элементов по k равно $A_n^k = n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$ для $n \geq 2$ и $A_1^1 = 1$.

Определение 1.5.7. Под *перестановками* из n элементов понимаются упорядоченные выборки без повторений из n элементов по n.

Утверждение 1.5.2. Число перестановок из n элементов равно $P_n = n! = n(n-1)\cdot\ldots\cdot 1$ для $n \geq 2$ и $P_1 = 1$. При этом под символом $0!$ понимают также единицу.

Определение 1.5.8. Под *сочетаниями из n элементов* по k понимают неупорядоченные (без повторений) выборки k элементов из n.

Утверждение 1. 5.3. Число сочетаний из n элементов по k равно $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{P_k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix}$ $(n \geq 1, 1 \leq k \leq n)$.

Утверждение 1. 5.4. Пусть a и b – любые действительные числа. Тогда для любого натурального числа n (т.е. $n \in N$) верна формула *бинома* Ньютона

$$(a+b)^n=\sum_{s=0}^{n} C_n^s a^s b^{n-s}=C_n^0 a^0 b^n+C_n^1 a^1 b^{n-1}+C_n^2 a^2 b^{n-2}+\ldots+C_n^{n-1} a^{n-1} b+C_n^n a^n b^0=$$

$$=b^n+C_n^1 a^1 b^{n-1}+C_n^2 a^2 b^{n-2}+\ldots+C_n^{n-1} a^{n-1} b+C_n^n a^n,$$

причем в этих суммах $C_n^0=1$ и $C_n^n=1$.

Следует отметить, что приведенные в данном параграфе формулы и понятия широко используются во многих областях математики и ее приложениях. В частности, понятия размещения, перестановки и сочетания играют важную роль в теории вероятностей и математической статистике.

1.6. Метод математической индукции

Некоторые математические утверждения доказываются *методом математической индукции*, в основе которого лежит *принцип математической индукции*:

Пусть $A(n)$ – некоторое утверждение, имеющее смысл для натуральных чисел n, и пусть оно истинно для $n=1$. Тогда, если из истинности этого утверждения для $n=k$ $(k\in N, k>1)$ следует истинность утверждения для $n=k+1$, то утверждение $A(n)$ истинно для любого натурального числа n.

Доказательство методом математической индукции состоит в следующем:

1) доказывается, что утверждение $A(1)$ истинно;

2) предполагается, что утверждение $A(n)$ истинно для $n=k$, и доказывается его справедливость при $n=k+1$.

После этого на основании принципа математической индукции делается вывод, что утверждение $A(n)$ истинно для любого натурального n.

Методом математической индукции доказывается, например, *неравенство Бернулли*:

$$(1+a)^n\geq 1+an.$$

Обобщение принципа математической индукции:

Если утверждение $A(n)$, в котором n – целое число, истинно при $n = m$ и если из истинности этого утверждения для числа $n = k$, где $k \in Z, k \geq m$, вытекает, что оно истинно для следующего числа $n = k + 1$, то утверждение $A(n)$ истинно и для любого целого значения $n \geq m$.

2. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА. МЕТОД КООРДИНАТ. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Число – это важнейшее математическое понятие.

И. Ньютон во «Всеобщей арифметике» дал следующее определение понятия числа: «Под числом мы понимаем не столько множество единиц, сколько отвлеченное отношение какой-нибудь величины к другой величине того же рода, принятой нами за единицу». Эта формулировка дает единое (хотя и не строгое в математическом смысле) определение действительного числа, как рационального, так и иррационального.

Рассмотрим основные числовые множества.

2.1. Натуральные числа. Целые числа

Числа, употребляемые при счете предметов, называют натуральными. В порядке возрастания можно записать как ряд чисел 1, 2, 3, 4,... . Наименьшим натуральным числом является число 1. Наибольшего натурального числа не существует. Множество всех натуральных чисел обозначается символом N.

Любое число в десятичной позиционной системе счисления можно записать с помощью десяти цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Условились цифры 0, 2, 4, 6, 8 называть четными, а цифры 1, 3, 5, 7, 9 – нечетными. Соответственно, числа, заканчивающиеся четной цифрой, называют четными, а числа, заканчивающиеся нечетной цифрой,– нечетными. Значение цифры в записи числа зависит от ее позиции.

Любое натуральное число $a = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0}$ можно представить в виде суммы разрядных слагаемых (единиц, десятков, сотен и т.д.)

$$a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

где каждое из $a_0, a_1, ..., a_n$ есть цифра.

Для натуральных чисел определены следующие действия (алгебраические операции): сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня. Действия сложения и умножения выполнимы всегда, т. е. в результате этих действий получаются также натуральные числа.

Разделить число a на число b – значит найти такое число x, что $a:b=x$, если $x \cdot b = a$. Число a называется делимым (или кратным) числа b, число b – делителем числа a, число x – частным чисел a и b.

Деление одного натурального числа a на другое натуральное число b нацело не всегда выполнимо. Более общим действием является деление с остатком. В этом случае всякое натуральное число a единственным образом представляется в виде $a = bq + r$, где q и r – неотрицательные целые числа, причем $0 \le r < b$. Число q называют неполным частным, а число r – остатком от деления a на b. Равенство $r = 0$ будет верно тогда и только тогда, когда число b является делителем числа a.

Сформулируем *признаки делимости* чисел. К ним относятся следующие признаки:

1) На 2 делятся числа, оканчивающиеся нулем или четной цифрой;
2) На 3 (на 9) делятся те и только те числа, сумма цифр которых делится на 3 (на 9);
3) На 4 (на 25) делятся те и только те числа, у которых две последние цифры – нули или выражают число, делящееся на 4 (на 25);
4) На 5 делятся числа, оканчивающиеся нулем или цифрой 5;
5) На 6 делятся числа, которые одновременно делятся на 2 и на 3;
6) На 10 делятся числа, оканчивающиеся нулем.

Определение 2.1.1. Число a называется простым, если его делителями являются только единица и само число a. К простым относятся, например, такие числа: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17… .

Определение 2.1.2. Число a, имеющее более двух натуральных делителей (кроме 1 и a), называется составным.

Число 1 не относится ни к простым, ни к составным числам.

Теорема 2.1.1. (основная теорема арифметики). Всякое натуральное число a, кроме единицы, может быть единственным способом представлено в виде произведения простых чисел (если не учитывать порядок расположения множителей). При этом данное представление можно записать в виде:

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}.$$

Здесь $p_1, p_2, ..., p_n$ – различные простые делители числа a; $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ – некоторые натуральные числа, равные числу повторений простых делителей в разложении числа a. При этом данное представление называют каноническим разложением натурального числа a на простые множители.

Определение 2.1.3. Всякое натуральное число, на которое делятся одновременно несколько натуральных чисел, называют общим делителем этих чисел. Наибольший из общих делителей этих чисел называют их наибольшим общим делителем (НОД).

Определение 2.1.4. Всякое натуральное число, которое делится на каждое из данных натуральных чисел, называют общим кратным этих чисел. Наименьшее из общих кратных данных чисел называют их наименьшим общим кратным (НОК).

Чтобы найти НОД или НОК натуральных чисел надо выполнить такие действия:

1) разложить данные числа на простые множители;

2) для нахождения НОД следует составить произведение из всех общих простых множителей, входящих в каждое из разложений, причем, если множитель входит в разложение с разными показателями, то берут его с наименьшим показателем; для нахождения НОК следует составить произведение из всех простых множителей разложения одного из данных чисел и недостающих простых множителей из разложений других чисел;

3) найти значение полученного произведения.

Определение 2.1.5. Два натуральных числа, НОД которых равен единице, называют взаимно простыми. НОК двух взаимно простых чисел равно их произведению.

Определение 2.1.6. Множество натуральных чисел, дополненное нулем, называется множеством неотрицательных чисел, и его можно обозначить символом N_0 (или Z_0). Всякое натуральное число, взятое со знаком «–», называют целым отрицательным числом. Два числа, отличающиеся друг от друга только знаком, называются противоположными числами.

Определение 2.1.7. Числа натуральные, число нуль и целые отрицательные числа составляют множество целых чисел. Оно обозначается символом Z.

2.2. Рациональные числа. Иррациональные числа

Возникновение положительных рациональных чисел во многом было связано с необходимостью производить измерения, т.е. сравнивать различные величины с другой величиной того же рода, выбираемой в качестве эталона (единицы измерения).

Определение 2.2.1. *Рациональной дробью* называют упорядоченную пару целых чисел $(a;b)$, где число b отлично от нуля. Рациональную дробь обозначают символом $\frac{a}{b}$ или a/b. Число a называется *числителем* дроби, а число b – ее *знаменателем*.

Определение 2.2.2. Рациональная дробь $\frac{a}{b}$, где a – целое число, а b – натуральное, называется *положительной*, если a положительно, и *отрицательной*, если a отрицательно.

Знаменатель положительной рациональной дроби показывает на сколько равных частей разделена единица, а числитель – сколько взято таких частей.

Определение 2.2.3. Положительная рациональная дробь $\frac{a}{b}$ называется *правильной*, если ее числитель меньше знаменателя $(a<b)$ и *неправильной*, если ее числитель больше или равен знаменателю $(a \geq b)$.

Если дробь неправильная, то ее числитель может быть представлен в виде $a = bq + r$, где q – натуральное число, r – целое число, удовлетворяющее условию $0 \leq r < b$. Тогда будет верно равенство

$$\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b},$$

где число q – называется целой частью дроби, а $\frac{r}{b}$ – правильная дробь. Если $r \neq 0$, то неправильную рациональную дробь $\frac{a}{b}$ записывают иногда в виде смешанной дроби $q\frac{r}{b}$.

Определение 2.2.4. Две рациональные дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ называют *равными* или *эквивалентными* тогда и только тогда, когда $ad = bc$.

Рациональные дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k}$, где k – любое целое число, отличное от нуля, эквивалентны. Переход от дроби $\frac{a \cdot k}{b \cdot k}$ к эквивалентной дроби $\frac{a}{b}$ называют *сокращением* дроби на число k.

Определение 2.2.5. Дробь называется *несократимой*, если ее числитель и знаменатель – взаимно простые числа.

Всякую рациональную дробь важно записать в виде несократимой дроби. Равенство $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k}$ выражает основное свойство рациональной дроби: рациональная дробь не изменится, если ее числитель и знаменатель умножить (или разделить) на одно и то же целое число, отличное от нуля. Это равенство позволяет привести две рациональные дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ к общему знаменателю bd:

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}, \qquad \frac{c}{d}=\frac{c\cdot b}{d\cdot b}.$$

Числа d и b называют *дополнительными множителями* соответственно первой и второй дроби.

Чтобы привести дроби к наименьшему общему знаменателю, надо реализовать следующие действия:

1) найти НОК знаменателей данных дробей;

2) для каждой дроби найти дополнительный множитель;

3) числитель и знаменатель каждой дроби умножить на ее дополнительный множитель.

Положительная рациональная дробь $\frac{a}{b}$ считается больше (меньше) рациональной дроби $\frac{c}{d}$, если имеет место неравенство $ad>bc$ $\left(ad<bc\right)$.

Множество рациональных дробей есть упорядоченное множество: для любых двух дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, либо $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$, либо $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, либо $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$. При этом выполняются свойства рефлексивности, антисимметричности и транзитивности, а также симметричности, если дроби равны (эквивалентны).

Из двух положительных рациональных дробей с равными знаменателями больше та, числитель которой больше, и меньше та, числитель которой меньше:

$$\left(\frac{a}{b}>\frac{c}{b}\right)\Leftrightarrow\left(a>c\right).$$

Из двух положительных рациональных дробей с равными числителями больше та, знаменатель которой меньше, и меньше та, знаменатель которой больше:

$$\left(\frac{a}{b} > \frac{a}{d}\right) \Leftrightarrow (b < d).$$

Сложение (вычитание) дробей производится следующим образом

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}.$$

Умножение дробей выполняется таким образом:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Деление дробей выполняется по алгоритму:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Определение 2.2.6. Рациональные дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ называют *обратными*, если

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = 1.$$

Отметим, что для того, чтобы разделить дробь $\frac{a}{b}$ на дробь $\frac{c}{d}$, достаточно умножить дробь $\frac{a}{b}$ на дробь $\frac{d}{c}$, обратную дроби $\frac{c}{d}$.

Замечание 2.2.1. Эквивалентные рациональные дроби являются различными представлениями одного и того же числа.

Определение 2.2.7. Рациональным числом называется множество всех эквивалентных между собой рациональных дробей.

Среди всех записей данного положительного рационального числа r эквивалентными рациональными дробями $\frac{a}{b} \in r$ выделяют его представление в виде единственной несократимой дроби из этого класса эквивалентных дробей.

Определение 2.2.8. Рациональное число, содержащее рациональную дробь вида $\frac{0}{b}$, называют нулем.

Определение 2.2.9. Если r – рациональное число и $\frac{a}{b} \in r$, то рациональное число, содержащее рациональную дробь $\frac{-a}{b}$, называют рациональным числом, противоположным числу r, и обозначают $(-r)$. Рациональное число $\frac{a}{b}$ называют положительным, если a и b одного знака, и отрицательным, если a и b имеют разные знаки.

Определение 2.2.10. Рациональное число a называется *целым*, если в множестве всех эквивалентных дробей, задающих это число, содержится дробь вида $\frac{a}{1}$.

Множество всех рациональных чисел обычно обозначают Q. Множество Z целых чисел является подмножеством множества рациональных чисел, т.е. $Z \subset Q$. Таким образом, множество Q рациональных чисел может быть получено как естественное расширение множества целых чисел путем добавления новых элементов, так что расширенное множество представляет множество, замкнутое относительно операций сложения, умножения, вычитания и деления (кроме деления на нуль).

Определение 2.2.11. Дробь, знаменатель которой есть число, выраженное единицей с одним или несколькими нулями, т.е. дробь вида $\frac{a}{10^k}$, где a – целое, а k – натуральное, называют *десятичной*.

Десятичные дроби условились записывать без знаменателей: сначала пишут целую часть, а потом числитель дробной части. Целую часть отделяют точкой (или запятой) от числителя дробной части. С помощью деления числителя на знаменатель любое дробное неотрицательное число $\frac{a}{b}$ можно обратить в конечную или бесконечную десятичную дробь. Следовательно, любое неотрицательное рациональное число r можно представить в виде конечной или бесконечной десятичной дроби

$$r = a_0 .\, a_1 a_2 ... a_k \text{ или } r = a_0 .\, a_1 a_2 a_3 ...,$$

где a_0 – целая часть числа r, а $0.\, a_1 a_2 a_3 ...$ – его дробная часть.

В этом случае бесконечные десятичные дроби всегда оказываются *периодическими*. Такое представление возможно и для отрицательных рациональных чисел.

Определение 2.2.12. Бесконечную десятичную дробь $a_0 .\, a_1 a_2 a_3 ...$ называют *периодической*, если у нее, начиная с некоторого места, одна цифра или группа цифр повторяется, непосредственно следуя одна за другой. Повторяющуюся группу цифр называют *периодом* и записывают в скобках.

Например, вместо $1.23457457457...$ пишут $1.23(457)$.

Любая периодическая дробь является представлением некоторого рационального числа.

Обращение периодической дроби в обыкновенную проводят по правилу, описанному ниже. Чтобы записать данную периодическую дробь в виде обыкновенной дроби $\frac{a}{b}$, надо из числа, стоящего до второго периода, вычесть число, стоящее до первого периода и сделать эту разность числителем, а в знаменателе написать цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде и после девятки дописать столько нулей, сколько цифр между точкой (запятой) и первым периодом.

Замечание 2.2.2 Рациональные числа допускают запись в виде двух различных десятичных дробей, например, $\frac{1}{4}$ записывается как $0{,}25$ и $0{,}24(9)$.

Рациональных чисел недостаточно для выражения результатов различных измерений (несоизмеримые отрезки, например, нельзя выразить рациональным числом; например, длины диагоналей квадрата и длины окружностей, вообще говоря, не являются рациональными числами). Множество рациональных чисел не замкнуто относительно операции извлечения корня из неотрицательного числа (например, не существует рационального числа, квадрат которого равен двум и т.п). Можно привести ряд других примеров чисел, которые не могут быть представлены в виде $\frac{a}{b}$ $(a, b \in Z, b \neq 0)$, т.е. не являются рациональными числами. Такие числа представляются бесконечными десятичными *непериодическими* дробями.

Определение 2.2.13. Бесконечную десятичную непериодическую дробь называют *иррациональным* числом.

Известные в математике число $\mathrm{p} = 3{,}1415\ldots$, число $\mathrm{e} = 2{,}371828\ldots$ являются иррациональными.

Часто индивидуально заданные иррациональные числа обозначают в зависимости от их происхождения и роли. Примерами таких чисел являются такие числа: $\sqrt{2}, \log_2 3, \sin 1$ и т.п.

2.3. Действительные числа

Множество всех действительных чисел образуется посредством пополнения множества рациональных чисел множеством иррациональных чисел. Точнее говоря, множество действительных чисел является объединением этих множеств. Множество всех действительных чисел обозначают буквой R, множество неотрицательных действительных чисел обозначают символом R_0, положительные и отрицательные действительные числа обозначают соответственно символами R_+ и R_-. Множество R, пополненное элементами $(-\infty)$ и $(+\infty)$, обозначают символом $\overline{R}$ и называют расширенным множеством действительных чисел.

Определение 2.3.1. Действительные корни алгебраических уравнений $\sum_{s=0}^{n} a_s x^s = 0$ с целочисленными коэффициентами $a_0, a_1, ..., a_n$, где $n \in N$, называются действительными *алгебраическими* числами. Остальные действительные числа называют действительными *трансцендентными* числами.

Множество всех действительных (вещественных) чисел R может быть описано как множество, элементы которого удовлетворяют следующим перечисленным ниже свойствам:

1) для любых двух вещественных чисел a и b определено отношение порядка, т. е. либо $a = b$, либо $a < b$, либо $b < a$, причем если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$ (свойство транзитивности);

2) во множестве действительных чисел R определена внутренняя бинарная (общее определение таких операций будет дано в п. 2.5)алгебраическая операция сложения (+), т. е. любой упорядоченной паре действительных чисел (a,b) ставится в соответствие единственное вещественное число, называемое суммой чисел a и b и обозначаемое выражением $a + b$. При этом данная операция обладает такими свойствами:

2.1) для любой пары чисел $a,b \in R$ имеет место равенство

$$a + b = b + a$$

(свойство коммутативности операции сложения);

2.2) для любой тройки чисел $a,b,c \in R$ имеет место равенство

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

(свойство ассоциативности операции сложения);

2.3) существует действительное число, обозначаемое символом 0 и называемое нулем, такое, что для любого числа $a \in R$ имеет место равенство: $a + 0 = a$, при этом действительное число a, удовлетворяющее условию $a > 0$, называется положительным, а действительное число, удовлетворяющее неравенству $a < 0$, называется отрицательным числом;

2.4) для любого числа $a \in R$ существует действительное число, обозначаемое $(-a)$, такое, что

$$a + (-a) = 0,$$

при этом число $(-a)$ называется противоположным числу a;

2.5) если выполнено условие $a < b$, то для любого числа $c \in R$ имеет место неравенство

$$a + c < b + c;$$

2.6) сумма $a + (-b)$, где a, b – любые вещественные числа, является вещественным числом и обозначается символом $a - b$ (знак « $-$ » имеет смысл операции вычитания, которая является обратной операцией к операции « $+$ », причем действительное число $(a - b)$ называется разностью чисел a и b;

3) во множестве действительных чисел R определена внутренняя бинарная алгебраическая операция, называемая умножением, т. е. любой упорядоченной паре действительных чисел (a, b) ставится в соответствие единственное действительное число, называемое их произведением и обозначаемое выражением $a \cdot b$, причем имеют место такие свойства:

3.1) для любой пары действительных чисел $a, b \in R$ имеет место равенство

$$a \cdot b = b \cdot a \qquad \text{(свойство коммутативности);}$$

3.2) для любой тройки действительных чисел a, b, c верно равенство

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \qquad \text{(свойство ассоциативности);}$$

3.3) существует действительное число, обозначаемое символом 1 и называемое единицей, такое, что для любого числа $a \in R$ истинны равенства:

$$a \cdot 1 = a, \quad (-1) \cdot a = (-a) = -a;$$

3.4) для любого действительного числа a, отличного от нуля, существует действительное число, обозначаемое выражением $\frac{1}{a}$, такое, что истинно равенство

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1,$$

причем число $\frac{1}{a}$ называют обратным числу a, при этом для любых $a, b \in R$ (но $b \neq 0$) число $a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$ называется частным от деления числа a на число b;

3.5) если верны неравенства $a < b$ и $c > 0$, то $a \cdot c < b \cdot c$; если $a < b$, $c < 0$, то $a \cdot c > b \cdot c$;

4) для любой тройки действительных чисел a, b и c верно равенство:

$$(a + b) \cdot c = ac + bc$$

(свойство дистрибутивности операции умножения относительно операции сложения);

5) для любого действительного числа a существует такое целое число n, что $n > a$ (аксиома Архимеда);

6) если непустые множества $X \subset R, Y \subset R$ таковы, что для любых $x \in X$ и любых $y \in Y$ выполняется неравенство $x \leq y$, то существует число $c \in R$, такое, что $x \leq c \leq y$ (аксиома полноты (непрерывности)).

Замечание 2.3.1. Перечисленные выше свойства (1–5) присущи и рассмотренным ранее числовым множествам натуральных, целых, рациональных и иррациональных чисел (но только в рамках условий, при выполнении которых алгебраические операции не приводят в результате к числам, не принадлежащим указанным подмножествам действительных чисел).

Замечание 2.3.2. Аксиома непрерывности справедлива только в R.

Для действительного числа x в рамках десятичной позиционной системы исчисления верно представление $x = a_0.a_1a_2...a_n...$. Для числа x определяются приближения с точностью до 10^{-n} по недостатку $x_n = a_0.a_1a_2...a_n$ и по избытку $x_n' = a_0.a_1a_2...a_n + 10^{-n}$. Очевидно, верны отношения $x_n' = x_n + 10^{-n}$, $x_n \le x < x_n'$. Каждое из десятичных приближений x_n и x_n' действительного числа x является рациональным числом.

Определение 2.3.2. Абсолютной величиной (модулем) действительного числа a называется число a, если $a \ge 0$, и число $(-a)$, если $a < 0$.

Модуль числа a обозначают символом $|a|$ и записывают:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a > 0, \\ 0, \text{ если } a = 0, \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$$

Абсолютное значение числа a положительно как для положительных, так и для отрицательных чисел a и равно нулю только при $a = 0$.

Основные свойства абсолютной величины любого действительного числа следуют из определения. Эти свойства таковы:

1) $|a| \ge 0$;

2) $|a| = |-a|$;

3) $-|a| \le a \le |-a|$;

4) $|a| \le \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \le a \le \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$;

5) $|a + b| \le |a| + |b|$;

6) $|a - b| \ge |a| - |b|$;

7) $|ab| = |a| \cdot |b|$;

8) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$ при $b \neq 0$.

Определение 2.3.3. Для любого действительного числа a степень с натуральным показателем n определяется как произведение n чисел, равных a, т.е.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}.$$

При этом число a – основание степени, n – показатель степени. Если $a \neq 0$, то $a^0 = 1$, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, символ 0^0 не определен.

Определение 2.3.4. Корнем n-ой степени, где $n \in N$, $n \neq 1$, из действительного числа a называется такое действительное число b, $n-$ая степень которого равна a.

Корень $n-$ой степени из числа a обозначается символом $\sqrt[n]{a}$ или $a^{1/n}$. Согласно определению $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$ Нахождение корня $n-$ой степени из числа a называется извлечением корня. Число n называют показателем корня, число a – подкоренным выражением.

Замечание 2.3.3. Корень четной степени $\sqrt[2n]{a}$, где $n \in N, a < 0$, во множестве действительных чисел не существует. Корень нечетной степени извлекается и из отрицательного числа.

Чтобы устранить двузначность корня $n-$ой степени из числа a, вводится понятие арифметического корня.

Определение 2.3.5. Арифметическим корнем $n-$ой степени из неотрицательного числа a называется неотрицательное число b, $n-$ая степень которого равна a, где $n > 0$ – натуральное число.

Арифметический корень $\sqrt[n]{a}$ $\left(\text{или} + \sqrt[n]{a}\right)$ имеет смысл лишь при $a \geq 0$ и принимает только неотрицательные значения. При $a = 0$ $\sqrt[n]{0} = 0$ или $0^{\frac{1}{n}} = 0$.

Для арифметического квадратного корня из числа a принято обозначение $\sqrt{a}$ (или $+\sqrt{a}$).

Символ $\sqrt[n]{a}$ также называют радикалом $n-$ой степени.

Замечание 2.3.4. Если $n-$ нечетное число, то выражение $\sqrt[n]{a}$ имеет смысл при любом $a \in R$; если $n-$ четное, то выражение $\sqrt[n]{a}$ имеет смысл при $a \geq 0$ и не существует во множестве R при $a < 0$, так как четная степень любого действительного числа неотрицательна.

Замечание 2.3.5. Арифметический корень из неотрицательного числа всегда существует и единственен.

Если $a < 0$, то корень $n-$ой степени из a определяется лишь при нечетном $n = 2k+1$. В этом случае корень $n-$ой степени из a есть единственное действительное отрицательное решение уравнения: $x^n = a\,(a < 0)$.

Замечание 2.3.6. Корень нечетной степени из отрицательного числа можно выразить через арифметический корень той же степени из числа, противоположного данному, т.е., если $a < 0$ и $n = 2m-1$ – нечетное число, $m \in N$, то $\sqrt[2m-1]{a} = -\sqrt[2m-1]{-a}$.

Замечание 2.3.7. Пусть $a \geq 0$ и $b \geq 0$, а $n, k, m-$натуральные числа. Тогда арифметические корни обладают следующими свойствами:

1) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$;

2) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad b \neq 0$;

3) $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}; \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$;

4) $\sqrt[nm]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^k}$ (основное свойство корня);

5) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$;

6) $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$ (внесение множителя под знак корня);

7) $\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}$ (вынесение множителя из-под знака корня);

При любом значении a верно тождество:

8) $\sqrt[2m]{a^{2m}} = |a|$, $\sqrt{a^2} = |a|$, где $a \in R$ и $m-$ натуральное число.

Определение 2.3.6. *Рациональной степенью* $\frac{m}{n}$ ($m-$целое, $n-$натуральное) положительного действительного числа a называется число $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$. При этом рациональную степень числа a также записывают в виде:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

Следует отметить, что степень числа 0 определена только для показателей $\frac{m}{n} > 0$, в этом случае $0^{\frac{m}{n}} = 0$.

Замечание 2.3.8. Степень действительного числа с действительным показателем в рамках множества действительных чисел определяется только для положительных чисел.

Если $a > 0,\ b > 0-$ действительные положительные числа, а $\alpha, \beta -$ действительные числа, то справедливы следующие равенства:

1) $a^{\alpha} \cdot a^{\beta} = a^{\alpha+\beta}$;
2) $\left(a^{\alpha}\right)^{\beta} = a^{\alpha\beta}$;
3) $\dfrac{a^{\alpha}}{a^{\beta}} = a^{\alpha-\beta}$;
4) $a^{\alpha} \cdot b^{\alpha} = (ab)^{\alpha}$;
5) $\dfrac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\alpha}$;
6) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-\alpha} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{\alpha}$.

При этом полагают, что $1^{\alpha} = 1$ для любого α и $0^{\alpha} = 0$ для любого $\alpha > 0$.

2.4. Метод координат

Определение 2.4.1. *Координатами точки* называются величины, которые определяют положение этой точки на прямой или кривой линии, на плоской или на кривой поверхности, в пространстве и т.д.

Определение 2.4.2. *Координатной числовой осью X (осью координат)* называется прямая, на которой выбраны направление, принимаемое за положительное, точка – начало отсчета и единица измерения – масштабный отрезок, длина которого принимается равной единице (см. рис. 2.1).

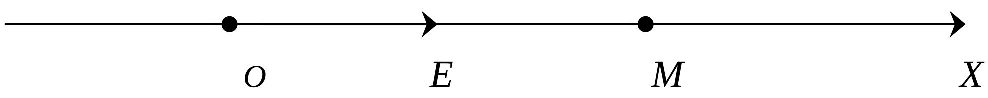


Рис. 2.1. Координатная числовая ось X

Определение 2.4.3. Начало отсчета точка O называется *началом координат*. Масштабный отрезок $\overrightarrow{OE}$ называют *единичным направленным отрезком* или *единичным вектором* (ортом) и обычно обозначают символом $\vec{e}$ или $\vec{i}$ (стрелка над символом OE имеет символический смысл и указывает направление).

Определение 2.4.4. Отрезок, ограниченный точками A и B (они лежат на оси X), называют *направленным отрезком* или *вектором*, если указано, какая из данных точек является началом (точка A), а какая – концом (точка B), и обозначают символом $\overrightarrow{AB}$. При этом *положительным* направлением оси координат считается направление луча, выходящего из точки O и содержащего точку E, противоположное направление называется *отрицательным*.

Определение 2.4.5. *Величиной* направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$, лежащего на некоторой координатной оси X называют его длину $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, взятую со знаком плюс, когда направление этого отрезка совпадает с положительным направлением данной оси, и со знаком минус, когда оно совпадает с отрицательным направлением оси.

Величину направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ обозначают символом AB.

Определение 2.4.6. *Координатой* точки M, лежащей на координатной оси X, называют действительное число x, определяемое равенством $x = \pm\frac{|\overrightarrow{OM}|}{|\overrightarrow{OE}|}$, причем перед дробью берется знак плюс, когда точки E и M лежат по одно сторону от точки O, и знак минус, когда точки E и M расположены по разные стороны относительно точки O. Если точка M совпадает с точкой O, то $x = 0$.

Запись $M(x)$, означает, что точка M имеет координату x. Координатную ось X зачастую обозначают символами Ox или OX.

Между множеством действительных чисел и множеством точек выбранной координатной оси установлено взаимно однозначное соответствие. Все действительные числа изображаются точками этой координатной оси, и обратно, каждой точке M координатной прямой соответствует определенное действительное число x – ее координата. При рассмотрении числовых множеств вместо слов «элемент», «число» употребляется также слово «точка».

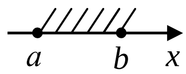
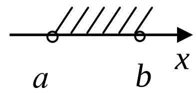
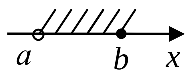
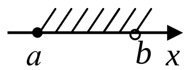
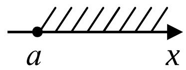
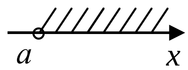
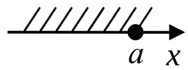
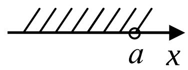
Множество действительных чисел R обозначается также символом $(-\infty,+\infty)$ и называется *числовой прямой*. Всякая координатная прямая является изображением числовой прямой.

Неравенства между действительными числами на координатной прямой получают простое истолкование. Если $x_1 < x_2$, то точка с координатой x_1 лежит левее точки с координатой x_2.

Пусть a и b – действительные числа, и $a < b$. В таблице 2.1 приведены названия, определения и обозначения числовых множеств, называемых *числовыми промежутками*, и их изображения на координатной прямой. Каждый из числовых промежутков определяется как множество действительных чисел x, удовлетворяющих определенным неравенствам.

Таблица 2.1

Числовые промежутки

Название	Неравенство, определяющее множество	Обозначение	Изображение
отрезок от a до b (замкнутый промежуток)	$a \le x \le b$	$[a;b]$	
интервал от a до b (открытый промежуток)	$a < x < b$	$(a;b)$	
открытый слева промежуток от a до b (полуинтервал)	$a < x \le b$	$(a;b]$	
открытый справа промежуток от a до b (полуинтервал)	$a \le x < b$	$[a;b)$	
числовой луч от a до $+\infty$	$a \le x$	$[a;+\infty)$	
открытый числовой луч от a до $+\infty$	$a < x$	$(a;+\infty)$	
числовой луч от $-\infty$ до a	$x \le a$	$(-\infty;a]$	
открытый числовой луч от $-\infty$ до a	$x < a$	$(-\infty;a)$	

Определение 2.4.7. Открытые либо слева, либо справа промежутки называются также полуоткрытыми промежутками, а числовые лучи – бесконечными промежутками.

Если даны две точки $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$, то величина направленного отрезка $\overrightarrow{M_1M_2}$ вычисляется по формуле:

$$M_1M_2 = x_2 - x_1,$$

а расстояние между точками M_1 и M_2 – по формуле:

$$\rho(M_1, M_2) = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = |x_2 - x_1|.$$

Определение 2.4.8. Простым отношением точек M_1, M_2, M, лежащих на одной прямой и взятых в указанном порядке, называют число

$$l = \frac{M_1M}{MM_2},$$

где M_1M и MM_2 – величины направленных отрезков $\overrightarrow{M_1M}$ и $\overrightarrow{MM_2}$.

Если точка M лежит между точками M_1, M_2, то $l > 0$. В этом случае говорят, что точка M делит направленный отрезок $\overrightarrow{M_1M_2}$ внутренним образом. Если точка M лежит вне отрезка $\overrightarrow{M_1M_2}$, то $l < 0$, а точка M делит направленный отрезок $\overrightarrow{M_1M_2}$ внешним образом. Если точки M_1 и M совпадают, то $l = 0$.

Пусть $M_1(x_1)$, $M_2(x_2)$, $M(x)$ – точки координатной оси Ox. Тогда

$$l = \frac{M_1M}{MM_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x},$$

откуда следует, что

$$x = \frac{x_1 + lx_2}{1 + l}.$$

Эта формула определяет координату точки M, делящей направленный отрезок $\overrightarrow{M_1M_2}$ в данном отношении l.

Если точка M совпадает с серединой отрезка $\overrightarrow{M_1M_2}$, то $l=1$ и координата точки M равна

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}.$$

Понятие о системе координат является достаточно общим и может использоваться для задания положения точек, геометрических фигур на плоскости и в пространстве.

Определение 2.4.9. *Прямоугольной правой декартовой системой координат* OXY *на плоскости* называется упорядоченная пара двух выбранных взаимно перпендикулярных координатных осей OX и OY, причем началом координат для каждой из осей служит точка их пересечения O, а оси OX и OY упорядочены следующим образом: если ось OX повернуть вокруг точки O на угол $\frac{\pi}{2}$ (общее определение угла дано в п. 3.3.6) против движения часовой стрелки, то она совпадет с осью OY. При этом масштабные направленные отрезки $\overrightarrow{OE_1}$ и $\overrightarrow{OE_2}$ координатных осей OX и OY выбираются таким образом, чтобы их длины были равны, т.е.:

$$\left|\overrightarrow{OE_1}\right|=\left|\overrightarrow{OE_2}\right|.$$

Из данного определения следует, что при повороте оси OX вокруг точки O на угол $\frac{\pi}{2}$ против движения часовой стрелки точки E_1 и E_2 совместятся.

Замечание 2.4.1. В общем случае можно рассматривать системы координат, для которых масштабные отрезки $\overrightarrow{OE_1}$ и $\overrightarrow{OE_2}$ могут выбираться не равными по длине.

Ось OX называется *осью абсцисс*, а ось OY – *осью ординат* определенной выше системы OXY.

Определение 2.4.10. Единичные векторы $\vec{e_1} = \overrightarrow{OE_1}$ и $\vec{e_2} = \overrightarrow{OE_2}$, определяющие положительные направления координатных осей OX и OY, называются *базисными векторами* прямоугольной правой декартовой системы координат OXY (или *ортами*) и обычно обозначаются символами $\vec{i}$ *и* $\vec{j}$, т.е. $\vec{e_1} = \vec{i}$ и $\vec{e_2} = \vec{j}$.

Таким образом, можно считать, что прямоугольная правая декартова система координат OXY на плоскости задается однозначно некоторой точкой O (началом координат) и упорядоченной парой взаимно перпендикулярных единичных векторов $(\vec{i}, \vec{j})$. Множество векторов $\{O; \vec{i}, \vec{j}\}$ обычно называют репером системы OXY

Координатные оси OX и OY разбивают плоскость на четыре четверти (*квадранты*). Часть плоскости, лежащая выше оси OX и правее оси OY, считается первым квадрантом. Далее по аналогии в направлении против движения часовой стрелки определяются второй, третий и четвертый квадранты. Отметим, что плоскость с построенной системой координат называется обычно *координатной плоскостью*.

При изложенном выше способе упорядоченности координатных осей систему координат, как уже было отмечено выше, называют *правой* прямоугольной декартовой системой координат. В *левой* прямоугольной декартовой системе координат оси упорядочены так, что первая ось (ось OX) совмещается со второй осью (осью OY) с помощью поворота на угол $\frac{\pi}{2}$ по движению часовой стрелки.

В приложениях также употребляются *косоугольные* (правые и левые) декартовы системы координат (см., например, [18], в которых совмещение осей происходит при повороте на угол, отличный от прямого.

Пусть OXY – прямоугольная правая декартова система координат на плоскости с началом O (см. рис. 2.2), а M – некоторая точка на этой плоскости.

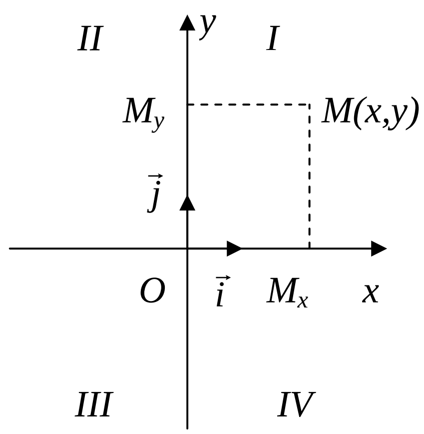


Рис. 2.2. Прямоугольная правая декартова система координат OXY на плоскости

Опустим из точки M перпендикуляры на оси OX и OY, которые пересекут указанные координатные оси в точках M_x и M_y соответственно. Обозначим еще координату точки M_x, лежащей на оси OX, через x, а координату точки M_y, лежащей на оси OY – через y.

Определение 2.4.11. *Координатами точки* M в прямоугольной правой декартовой системе координат OXY называется упорядоченная пара действительных чисел (x, y), которые имеют смысл координат точек M_x, M_y на координатных осях OX и OY соответственно.

Число x называют *абсциссой* точки M, а число y – *ординатой* точки M. При этом используют запись $M(x, y)$.

Каждой упорядоченной паре чисел (x, y) на заданной координатной плоскости соответствует единственная точка M, для которой эти числа являются координатами. Таким образом, между точками заданной координатной плоскости и упорядоченными парами действительных чисел (x, y) устанавливается взаимно однозначное (биективное) соответствие. Множество пар действительных чисел иногда называют *числовой плоскостью.*

Расстояние между точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ в прямоугольной правой декартовой системе координат выражается через их координаты по формуле:

$$\rho(M_1, M_2) = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$

Пусть даны точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ на числовой плоскости. Координаты точки $M(x, y)$, которая лежит на прямой, проходящей через точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, и делит отрезок этой прямой, ограниченный данными точками, в отношении l, определяются формулами:

$$x = \frac{x_1 + lx_2}{1 + l},\ \ y = \frac{y_1 + ly_2}{1 + l}.$$

Координаты точки M, которая делит направленный отрезок $\overrightarrow{M_1M_2}$ в отношении $l = 1$, вычисляются по формулам:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ \ y = \frac{y_1 + y_2}{2}\ .$$

Эти формулы позволяют найти координаты точки M ,которая определяет середину отрезка M_1M_2.

Кроме декартовых систем координат на плоскости $R^2 = R \times R$ используется также *полярная система координат*.

Полярная система координат задается: точкой O, называемой *полюсом*, лучом OP, называемым *полярной осью*, и выбранной на полярной оси единицей масштаба (см. рис. 2.3).

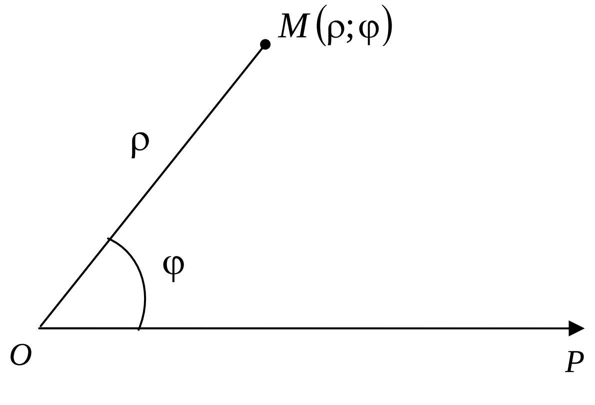


Рис. 2.3. Полярная система координат на плоскости

Отметим, что выписанные выше формулы дают решение простейших задач аналитической геометрии [18], основная идея которой состоит в изучении геометрических свойств фигур с помощью средств алгебры [17] и анализа [4].

Определение 2.4.12. *Полярными координатами точки* $M \in R^2$ (не совпадающей с полюсом) называют *полярный радиус* $\rho(M) = \left|\overrightarrow{OM}\right|$ точки M и *полярный угол* $\varphi(M)$, т.е. угол, на который надо повернуть луч OP до совпадения с направлением вектора $\overrightarrow{OM}$ ($\varphi(M) > 0$, если поворот совершается против хода часовой стрелки, и $\varphi(M) < 0$ в противном случае).

Запись $M(\rho;\varphi)$ означает, что точка M имеет полярные координаты ρ и φ.

Полярный угол $\varphi(M)$ принимает бесконечное множество значений, отличающихся друг от друга на $2k\pi$, где $k \in Z$. Значение полярного угла $0 \le \varphi < 2\pi$ называют *главным* (иногда в качестве главного значения принимают значение φ, удовлетворяющее неравенствам $-\pi < \varphi \le \pi$).

Положение любой точки M на заданной плоскости, которая не совпадает с точкой O, однозначно определяется координатами ρ и φ, причем $0 \le \rho < \infty, 0 \le \varphi < 2\pi$. Если точка M совпадает с полюсом O, то $\rho(M) = 0$, а полярный угол можно выбирать любым.

Иногда пользуются *обобщенными полярными координатами точки* M ρ и φ, где $-\infty < \rho < \infty,\ -\infty < \varphi < \infty$.

Совместим правую прямоугольную декартову систему координат и полярную систему координат так, чтобы полярная ось OP совпадала с осью абсцисс OX и оси OX, OY, OP имели бы общее начало координат (т.е. точка O являлась и полюсом) и общую единицу масштаба. Тогда зависимости между декартовыми координатами x и y точки M и ее полярными координатами ρ и φ будут выражаться такими формулами (см. рис. 2.4):

$$x = \rho\cos\varphi; \quad y = \rho\sin\varphi; \quad \rho = +\sqrt{x^2 + y^2};$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; \qquad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

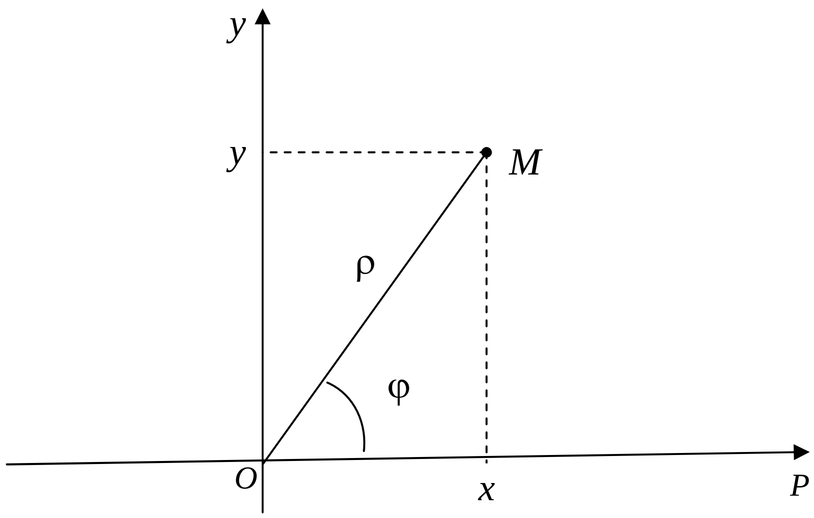


Рис. 2.4. Прямоугольные декартовы и полярные координаты точки M на плоскости

Свойства тригонометрических функций $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ будут подробно описаны в главе 3.

Системы координат, определенные выше для прямой и плоскости, допускают соответствующие обобщения на случай трехмерного пространства.

Пусть П – некоторая плоскость в трехмерном пространстве R^3 с выбранной на ней прямоугольной правой декартовой системой координат OXY. Проведем через начало координат (т.е. через точку O) прямую, перпендикулярную плоскости П. Выберем на этой прямой направление и масштабный отрезок $\overrightarrow{OE_3}$, равный по длине масштабным отрезкам $\overrightarrow{OE_1}$ и $\overrightarrow{OE_2}$. Полученную таким образом координатную ось обозначим OZ.

Определение 2.4.13. *Прямоугольной декартовой системой координат* $OXYZ$ в пространстве называется упорядоченная тройка взаимно перпендикулярных осей OX, OY и OZ. Прямоугольная декартова система координат $OXYZ$ называется правой, если OXY – правая прямоугольная декартова система координат, а ось OY совмещается с осью OZ поворотом на угол $\frac{\pi}{2}$ против движения часовой стрелки, если «смотреть» со стороны положительного направления оси OX. В иных случаях система координат называется левой. При этом ось OX называется *осью абсцисс*, ось OY – *осью ординат*, а ось OZ – *осью аппликат*. Плоскости, проходящие через каждые две координатные оси, называются *координатными плоскостями*. Пространство, в котором выбрана система координат, называют *координатным пространством*.

Рассмотренная выше полярная система координат является криволинейной системой координат, поскольку геометрическим местом точек, для которых $\rho = const$, является окружность.

В трехмерном пространстве R^3 также используются ортогональные криволинейные системы координат [19, 21]. Ниже введены в рассмотрение только простейшие из них.

Определение 2.4.14. Цилиндрическими координатами точки M в координатном пространстве называются числа ρ, φ, z, где ρ, φ – полярные координаты точки M' $(\rho \geq 0; 0 \leq \varphi < 2\pi)$; ($M'$ – проекция точки M на плоскость OXY правой прямоугольной декартовой системы координат $OXYZ$), $z = OM_z$ – величина направленного отрезка $\overrightarrow{OM_z}$ оси OZ (M_z – проекция точки M на ось OZ).

Запись $M(\rho, \varphi, z)$ обозначает, что точка M имеет цилиндрические координаты ρ, φ, z. Наименование «цилиндрические координаты» объясняется тем, что координатная поверхность $\rho = const$ является поверхностью бесконечного кругового цилиндра (см. рис. 2.5).

Если начало координат правой прямоугольной декартовой системы координат совместить с точкой O, ось OX – с полярной осью, а также совместить оси OZ, то декартовы координаты x, y, z точки M будут связаны с ее цилиндрическими координатами ρ, φ, z такими формулами:

$$x = \rho \cos \varphi,\ y = \rho \sin \varphi,\ z = z.$$

На плоскости П зафиксируем точку O и исходящий из нее луч OP (см. рис. 2.5). Через точку O проведем прямую, перпендикулярную плоскости П, и укажем на ней положительное направление. Полученную ось обозначим через OZ. Выберем масштаб для измерения длин. Пусть $M-$ произвольная точка пространства, а $M' -$ее проекция на плоскость П, M_z- проекция на ось OZ. Обозначим через ρ и φ полярные координаты точки M' на плоскости П относительно полюса O и полярной оси OP.

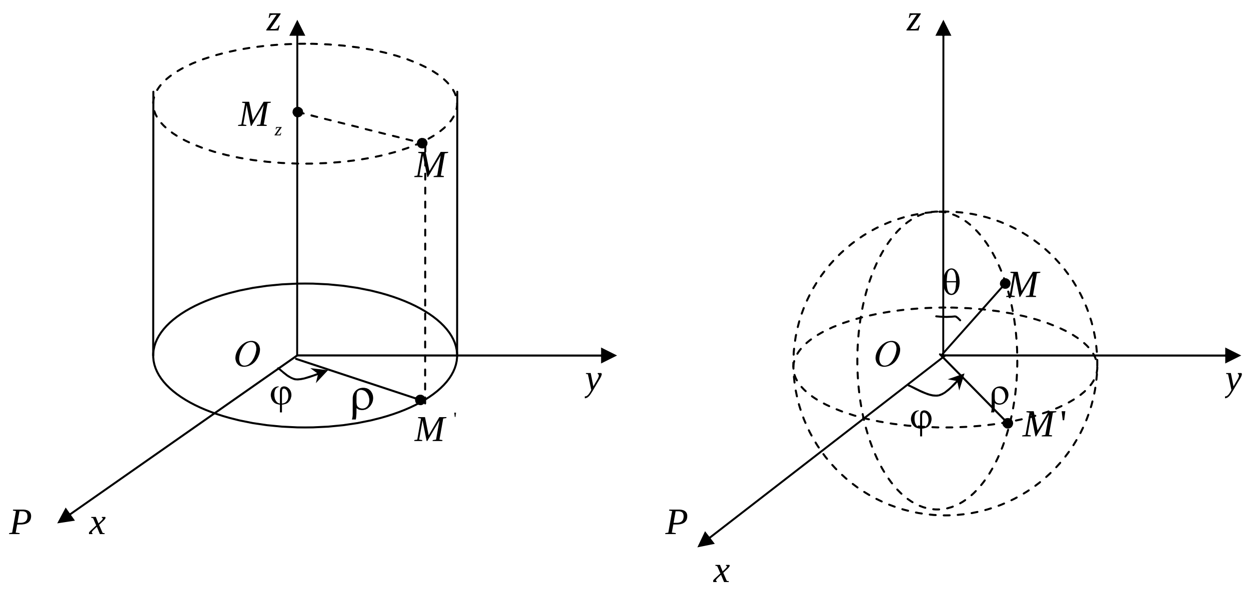


Рис. 2.5. Прямоугольная декартова, цилиндрическая и сферическая системы координат в пространстве

Дадим теперь определение второй ортогональной криволинейной системы координат в пространстве, каковой является сферическая система (см. рис. 2.5).

Определение 2.4.15. Сферическими координатами точки M называются числа r,θ,φ, где $r-$расстояние от точки M до начала координат O, $\theta-$ угол, который образует радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ точки M правой прямоугольной декартовой системы координат с осью OZ, $\varphi-$ азимутальный угол в полярной системе координат на плоскости OXY. При этом имеют место неравенства $0 \le r < +\infty;\ 0 \le \theta \le \pi; 0 \le \phi < 2\pi$ (или $-\pi < \varphi \le \pi$).

Прямоугольные декартовы координаты связаны со сферическими соотношениями:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta.$$

2.5. Алгебраические операции и их классификация

Определение 2.5.1. Пусть $X \times X \times \ldots \times X = X^n$ – декартово произведение всех n-ок $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $\forall s = \overline{1, n}$ элемент $x_s \in X$ (X – некоторое непустое множество). Тогда под *n-арной внутренней алгебраической операцией* в X понимается однозначная функция n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, областью определения которой является множество X^n, а областью значений – множество X.

Если n=2, то алгебраическая операция называется внутренней *бинарной*. Для обозначения таких операций используются различные символы. В частности, бинарные операции обозначают символами: $\circ, +, -, \cdot, *, \times$.

Определение 2.5.2. Бинарная внутренняя алгебраическая операция $*$, заданная на множестве M, называется *ассоциативной*, если $\forall a, b, c \in M$ имеет место равенство $a * (b * c) = (a * b) * c$.

Сложение и умножение вещественных чисел являются простейшими примерами ассоциативных бинарных внутренних алгебраических операций. Однако, бинарная алгебраическая операция возведения вещественных чисел в степень не является ассоциативной.

Определение 2.5.3. Бинарная алгебраическая операция $*$ называется *коммутативной*, если $\forall a, b \in M$ имеет место равенство $a * b = b * a$.

Определение 2.5.4. Пусть на множестве M заданы две бинарные внутренние алгебраические операции $*$ и $\circ$. Тогда говорят, что операция $\circ$

дистрибутивна относительно операции $*$, если $\forall a,b,c \in M$ имеют место равенства: $a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c)$, $(a * b) \circ c = (a \circ c) * (b \circ c)$.

В математике используют различные формы записи алгебраических операций. В частности, используются аддитивная и мультипликативная формы записи. В рамках аддитивной формы записи зачастую используют знак «+». При этом ассоциативность и коммутативность внутренних алгебраических операций выглядят таким образом: $(a + b) + c = a + (b + c)$, $a + b = b + a$ для любых $a,b,c \in M$. Когда используется мультипликативная форма записи, то знаки операций вовсе опускаются. В этом случае ассоциативность и коммутативность операций отражается в таком виде: $(ab)c = a(bc), ab = ba$ для любых $a,b,c \in M$.

Кроме бинарных алгебраических операций рассматриваются обратные алгебраические операции.

Допустим, что на множестве M задана внутренняя алгебраическая операция $\circ$, т.е. для любых элементов $u,r \in M$ поставлен в соответствие единственный элемент $(u,r) = b \in M$. Однако может иметь место равенство $(u_1 \circ r_1) = b$, где u_1 и r_1 не обязаны, вообще говоря, совпадать соответственно с элементами u и r. Поставим такую задачу: найти все такие $u,r \in M$, для которых $u \circ r = b$, где b – некоторый фиксированный элемент из M. Эта задача сводится к решению следующих двух уравнений: $a \circ x = b, y \circ a = b$, где x, y – неизвестные элементы из M, а элементы a,b – произвольные фиксированные элементы из M. Если данные уравнения имеют единственные решения для любых $a,b \in M$, то тогда можно любой паре $(a,b) \in M \times M = M^2$ поставить в соответствие однозначно определенные элементы $x, y \in M$. В такой ситуации исходная внутренняя бинарная алгебраическая операция $\circ$ порождает две внутренние бинарные операции, которые называются соответственно *правой и левой обратными алгебраическими операциями* по отношению к исходной операции $\circ$.

Замечание 2.5.1. Если исходная внутренняя алгебраическая операция $\circ$ коммутативна, то обе обратные операции (левая и правая) совпадают друг с другом.

В математике и ее приложениях широко используются и *внешние алгебраические операции* (законы композиции).

Определение 2.5.5. Рассмотрим два непустых множества M и A. Пусть любому элементу $m \in M$ и произвольному элементу $\alpha \in \mathrm{A}$ поставлен в соответствие по некоторому закону (правилу, алгоритму и т.д.) элемент $b \in M$.Тогда множество A называется множеством операторов на множестве M. При этом *внешний закон композиции* $\otimes$ (внешняя алгебраическая операция) определяется как отображение множества $\mathrm{A} \times M$ во множество M. Для любых выбранных $\alpha \in \mathrm{A}$ и $m \in M$ результат внешней алгебраической операции $\otimes$ можно формально записать в виде: $\alpha \otimes m = m_1$, где m_1 – некоторый элемент множества M.

Простейшим примером внешней алгебраической операции является операция умножения вещественных чисел на векторы силы, скорости и ускорения.

2.6. Поле комплексных чисел

Потребность в расширении понятия вещественных чисел естественным образом возникла при попытках аналитического решения квадратных уравнений $ax^2 + bx + c = 0$, где $a, b, c \in R$ и кубических уравнений вида $x^3 = px + q \quad (p, q \in R)$. Следует также отметить, что обычная операция возведения в натуральную степень вещественного числа не всегда имеет обратную операцию (операцию извлечения корня), если оставаться в рамках использования только вещественных чисел. Поскольку множество вещественных чисел обладает целым рядом замечательных свойств, которые широко используются как в самой математике, так и ее приложениях, то было бы весьма желательно, чтобы указанное расширение было произведено с сохранением общих алгебраических свойств, присущих множеству R. Оказалось, что такого рода обобщение можно произвести корректным образом.

Следует особо отметить, что обобщениями множества вещественных чисел являются множество (поле) комплексных чисел и множество кватернионов. Данные обобщения, являющиеся продуктом интеллектуальной деятельности, связанной с решением сугубо абстрактных математических задач, нашли глубокие и содержательные приложения при исследовании целого ряда проблем математики, физики (в частности, квантовой механики) и иных областей науки и техники.

Перейдем к построению множества комплексных чисел C.

Определение 2.6.1. Пусть C – множество, элементами которого являются все пары $(x, y) \in R \times R$ и на котором заданы две *внутренние бинарные алгебраические операции* «+» (сложение) и « · » (умножение), определяемые для любых пар $(a,b), (c,d) \in C$ с помощью равенств

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d), \qquad (2.6.1)$$

$$(a,b)\cdot(c,d)=(a\cdot c-b\cdot d, a\cdot d+b\cdot c), \qquad (2.6.2)$$

где знаки «+», «–» и « · » имеют смысл обычных операций сложения, вычитания и умножения вещественных чисел. Тогда множество C называется полем комплексных чисел, а пара $z=(x, y)$ – *комплексным числом*.

Замечание 2.6.1. Бинарные алгебраические операции «+» и « · », определенные равенствами (2.6.1), (2.6.2), обладают всеми основными свойствами, которые присущи операциям сложения и умножения действительных чисел. Эти операции коммутативны и ассоциативны. Кроме этого, операция умножения дистрибутивна относительно операции сложения, и существуют обратные операции вычитания «–» и деления. При этом деление на комплексное число (0,0), которое является *нулем* относительно операции сложения «+», не допускается.

Определение 2.6.2. Операции вычитания и деления комплексных чисел в C для любых $a,b,c,d \in R$ задаются соответственно посредством равенств

$$(a,b)-(c,d)=(a-c,b-d) \tag{2.6.3}$$

$$\frac{(a,b)}{(c,d)}=((a,b)/(c,d))=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right), \tag{2.6.4}$$

где для упрощения записи опущен знак умножения « $\cdot$ » вещественных чисел.

Из определений операций сложения «+» и умножения « $\cdot$ » комплексных чисел (см. формулы (2.6.1), (2.6.2)) следует, что комплексное число (0,0) играет роль нуля по отношению к операции сложения, и комплексное число (1,0) играет роль единицы по отношению к операции умножения. С формальной точки зрения сказанное выше означает, что для любого комплексного числа (a,b) имеют место равенства

$$(0,0)+(a,b)=(a,b)+(0,0)=(a,b), \tag{2.6.5}$$

$$(1,0)\cdot(a,b)=(a,b)\cdot(1,0)=(a,b). \tag{2.6.6}$$

Если рассмотреть подмножество множества комплексных чисел, которое содержит только все элементы вида $(a,0)$, где $a\in R$, то можно с учетом равенств (2.6.1), (2.6.2) убедиться в справедливости равенств

$$(a,0)+(b,0)=(a+b,0)=(b,0)+(a,0), \tag{2.6.7}$$

$$(b,0)(a,0)=(a,0)(b,0)=(ab,0). \tag{2.6.8}$$

Из (2.6.7), (2.6.8) следует, что любую пару вида $(a,\,0)$, где $a\in R$, можно интерпретировать как вещественное число. Следовательно, комплексное число вида $(a,0)$ только формой записи отличается от вещественного числа. Кроме этого, операции сложения и умножения комплексных чисел вида $(a,0)$ также отличаются только формой записи от такого же рода операций во множестве вещественных чисел.

Тем не менее множество комплексных чисел C обладает целым рядом дополнительных свойств, которые существенно расширяют возможности использования таких чисел для решения чисто математических и прикладных проблем. В качестве простейшего примера наличия такого рода свойств рассмотрим символическое квадратное уравнение $x^2 + q = 0$, где число $q \in R_+ = R \setminus (-\infty, 0]$ и является заданным вещественным числом, а x – некоторое «число», квадрат которого равен вещественному отрицательному числу $(-q)$. Очевидно, что «число» x не может быть вещественным числом, поскольку квадрат либо положительного, либо отрицательного числа является положительным вещественным числом (это число не может равняться числу $(-q)$). Перепишем теперь уравнение $x^2 + q = 0$ в общей форме с использованием понятия комплексных чисел. Такое уравнение тогда примет вид

$$(a,b)\cdot(a,b) + (q,0) = (0,0), \tag{2.6.9}$$

где a,b – неизвестные вещественные числа, а знак « $\cdot$ » имеет смысл операции умножения комплексных чисел. Используя равенство (2.6.2), преобразуем (2.6.9) к виду

$$(a^2 - b^2, 2ab) + (q,0) = (0,0). \tag{2.6.10}$$

Из (2.6.1) и (2.6.10) в свою очередь получим, что имеет место равенство

$$(a^2 - b^2 + q, 2ab) = (0,0). \tag{2.6.11}$$

Равенство (2.6.11) означает, что действительные числа a и b должны быть такими, чтобы они удовлетворяли системе уравнений

$$\left\{\begin{matrix} a^2 - b^2 + q = 0 \\ 2ab = 0 \end{matrix}\right\}. \tag{2.6.12}$$

При получении (2.6.12) было учтено также то, что комплексные числа $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ равны друг другу тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Из второго уравнения в (2.6.12) следует, что хотя бы одно из чисел a,b должно равняться нулю. Допустим сначала, что $b = 0$. Тогда второе уравнение системы (2.6.12) будет выполняться автоматически, а первое примет вид $a^2 + q = 0$. Так как q – положительное вещественное число, а квадрат любого вещественного числа является неотрицательным числом, то равенство $a^2 + q = 0$ не может иметь места для любого $a \in R$. Следовательно, допущение $b = 0$ приводит к противоречию. Поэтому теперь допустим, что $a = 0$. Тогда второе уравнение в (2.6.12) будет выполняться автоматически, а первое равнение в (2.6.12) примет вид $-b^2 + q = 0$ или $b^2 = q$, где $q-$положительное вещественное число. Из равенства $b^2 = q$ следует, что вещественное число b может принимать два значения: $b = \pm\sqrt{q}$. При этом число $\sqrt{q}$ имеет смысл вещественного положительного числа. Итак, доказано, что уравнение (2.6.9) имеет два таких решения:

$$\left(0, \pm\sqrt{q}\right). \tag{2.6.13}$$

Однако, решения (2.6.13) уравнения (2.6.9) являются элементами множества комплексных чисел C и *не принадлежат* множеству вещественных чисел R. Отметим, что, если $q = 1$, то решения (2.6.13) уравнения (2.6.9) примут вид $(0, \pm 1)$, и, естественно, будут выполняться равенства

$$(0, \pm 1) \cdot (0, \pm 1) + (1, 0) = (0, \pm 1)^2 + (1, 0) = (0, 0).$$

При этом, если переписать формально символическое квадратное уравнение $x^2 + q = 0$ в виде $x^2 = -q$ и формально же извлечь квадратный корень, то получим $x = \pm\sqrt{-q}$. В данной формальной записи присутствует квадратный корень из отрицательного числа $(-q)$. Поэтому «числа» $x = \pm\sqrt{-q}$ первоначально в математике называли воображаемыми (мнимыми) числами. Так как выше было строго доказано, что уравнение (2.6.9), которое было получено из символического уравнения $x^2 + q = 0,\ (q \in R_+)$, имеет два решения во множестве комплексных чисел, то уже можно дать определения ряда важных понятий, используемых при описании свойств комплексных чисел.

Определение 2.6.3. Комплексное число $(0,1)$ называется мнимой единицей и обычно обозначается символом $i=(0,1)$. При этом $i\cdot i=(0,-1)$.

Определение 2.6.4. Действительные числа x и y называются соответственно действительной и мнимой частями комплексного числа $z=(x,y)\in C$. При этом используются обозначения $x=\operatorname{Re} z,\ y=\operatorname{Im} z$. Комплексные числа вида $(0,y)$, где $y\in R$, называются чисто мнимыми комплексными числами.

Замечание 2.6.2. Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их вещественные и мнимые части.

Определение 2.6.5. Комплексное число $\bar{z}$ называется комплексно сопряженным к комплексному числу z, если выполнены равенства $\operatorname{Re}\bar{z}=\operatorname{Re} z, \operatorname{Im}\bar{z}=-\operatorname{Im} z$.

Замечание 2.6.3. Произведение действительного числа $(a,0)$ на чисто мнимое число $(0,b)$ представляет собой чисто мнимое число $(0,ab)$.

Определение 2.6.6. Представление комплексного числа $z=(x,y))$ в виде

$$z=(x,y)=(x,0)+(0,y)=(x,0)+(y,0)\cdot(0,1)=(x,0)+(y,0)i$$

называется алгебраической формой записи комплексного числа.

Замечание 2.6.4. В силу биективного соответствия между элементами множества вещественных чисел R и множеством $R\times\{0\}$ строгую алгебраическую форму записи комплексного числа z можно упростить и записать это число в виде $z=x+iy$.

Используя упрощенную алгебраическую форму записи комплексного числа $z=x+iy$ и равенства $i\cdot i=i^2=-1$ (под символом (-1) следует, строго говоря, понимать комплексное число (–1,0)), можно в достаточно простой форме записать результаты алгебраических операций сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел, смысл которых был дан в определениях 2.6.1, 2.6.2. Имеют место следующие равенства:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)i\,, \tag{2.6.14}$$

$$\begin{gathered} z_1 \cdot z_2 = z_1 z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = \\ = x_1 x_2 + ix_1 y_2 + ix_2 y_1 + i^2 y_1 y_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1), \end{gathered} \tag{2.6.15}$$

$$\begin{gathered} \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2) \cdot (x_2 - iy_2)} = \frac{x_1 x_2 - ix_1 y_2 + ix_2 y_1 - i^2 y_1 y_2}{x_2^2 - i^2 y_2^2} = \\ = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + (x_2 y_1 - x_1 y_2)i}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2},\ x_2^2 + y_2^2 \neq 0. \end{gathered} \tag{2.6.16}$$

Определение 2.6.7. Под модулем $|z|$ комплексного числа $z = x + iy$ понимают неотрицательное число $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Перечислим теперь ряд свойств операции комплексного сопряжения и модулей комплексных чисел. Из определений 2.6.5 и 2.6.7 следует справедливость следующих равенств и неравенств:

$$\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z_1} + \overline{z_2},\ \overline{(z_1 \cdot z_2)} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2},\ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \tag{2.6.17}$$

($z_2 \neq 0;\ 0$– комплексное число $(0,0)$),

$$\overline{\left(\overline{z}\right)} = z, \quad x = \operatorname{Re} z = \frac{\overline{z} + z}{2},\ y = \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i};$$

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|,\ |z_1 - z_2| \ge \big||z_1| - |z_2|\big|,\ |z_1 \cdot z_2| = |z_1||z_2|,\ \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}\ \ (z_2 \neq 0), \tag{2.6.18}$$

$$|z^n| = |z|^n = |\overline{z}|^n \quad n \in \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}, \quad z \cdot \overline{z} = |z|^2 = x^2 + y^2.$$

Наиболее широкое использование множества комплексных чисел началось тогда, когда удалось дать геометрическую интерпретацию этому множеству и операциям над комплексными числами. Подобно тому как действительным числам можно биективно сопоставить точки числовой оси, комплексным числам можно биективно сопоставить точки плоскости, на которой введена прямоугольная правая декартова система координат.

Будем сопоставлять комплексному числу $z = x + iy$ точку P на плоскости, которая имеет координаты (x, y) в указанной выше системе координат OXY (см. рис. 2.6)

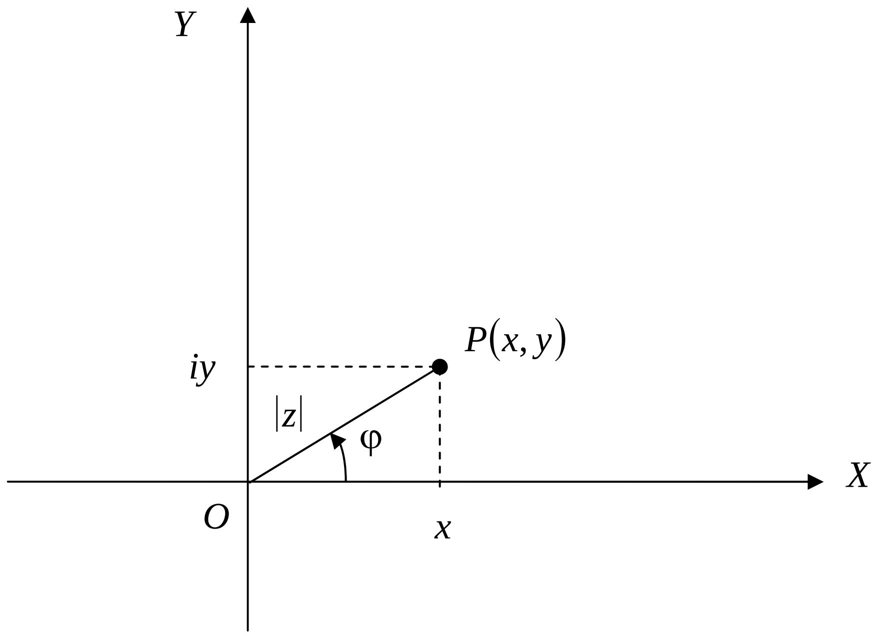


Рис. 2.6. Изображение комплексного числа на плоскости

Точки, лежащие на оси X, изображают вещественные числа, которые в рамках множества комплексных чисел C задаются парами $(x,0)$. Точки, лежащие на оси Y, изображают чисто мнимые числа, которые в свою очередь задаются парами $(0.y)$. Символ i перед ординатой y точки P имеет символический смысл. Он отображает тот факт, что точке с координатами $(0, y)$ сопоставляется чисто мнимое число iy. Абсцисса x и ордината y каждой точки $P(x, y)$ изображают соответственно действительную часть $\mathrm{Re}\, z$ и мнимую часть $\operatorname{Im} z$ комплексного числа $z = x + iy$. Плоскость, являющаяся геометрической моделью множества комплексных чисел *C*, называется комплексной плоскостью. При этом ось OX является действительной осью, а ось OY – мнимой осью.

Определение 2.6.8. Угол φ, который образует радиус-вектор $\overrightarrow{OP}$ точки $P(x, y)$ с положительным направлением оси OX, называется аргументом комплексного числа $z = x + iy$. Для $z \neq 0$ аргумент z определяется равенствами

$$\cos\varphi = \frac{x}{|z|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{|z|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \qquad (2.6.19)$$

Модуль комплексного числа определяется однозначно, а аргумент– с точностью до слагаемого $2k\pi$, где $k \in \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$. Модуль комплексного числа $z = 0$ равен нулю, а аргумент не определен.

Определение 2.6.9. Значение аргумента, удовлетворяющее условиям $-\pi < \varphi \leq \pi$, называется *главным* и обозначается символом $\arg z$, а множество всех возможных значений аргумента – $\operatorname{Arg} z$. При этом $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, k \in Z$.

Если комплексные числа равны друг другу, то их модули также равны, а аргументы либо равны, либо отличаются на $2k\pi$, где $k \in Z$. Имеют место равенства $|\overline{z}| = |z|$ и $\arg \overline{z} = -\arg z$.

Для главного значения аргумента справедливы такие соотношения:

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, \forall x > 0, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi, \forall x < 0, \forall y \geq 0, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} - \pi, \forall x < 0, \forall y < 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, \qquad x = 0, \forall y > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, \qquad x = 0, \forall y < 0. \end{cases} \qquad (2.6.20)$$

Подробное описание свойств обратной тригонометрической функции $arctgx$, использованной в (2.6.20) будет произведено в главе 3.

Кроме алгебраической формы представления комплексных чисел используются также тригонометрическая и показательная формы представления комплексных чисел. Из (2.6.19) следует, что $x = |z|\cos\varphi,\ y = |z|\sin\varphi$. Следовательно, $z = x + iy = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Именно данное представление называется *тригонометрической формой записи комплексного числа* z. В свою очередь представление комплексного числа $z = x + iy$ с помощью использования формулы Эйлера [17, 19]

$$\mathrm{e}^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,\ \varphi \in \mathrm{R}, \tag{2.6.21}$$

где число e – основание натуральных логарифмов (e=2,7182818…– иррациональное число), называется *показательной формой* числа z. Из тригонометрической формы комплексного числа и формулы (2.6.21) получим такую общую формулу:

$$z = |z|\mathrm{e}^{i\varphi},\ \varphi \in R,\ \varphi = \arg z + 2k\pi,\ k \in Z. \tag{2.6.22}$$

Это и есть общая *показательная форма* комплексного числа $z = x + iy$. Использование тригонометрической и показательной форм комплексных чисел позволяет легко выполнять операции умножения, деления, возведения в целую степень и извлечения корней.

Пусть $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = |z_1|\mathrm{e}^{i\varphi_1},\ z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = |z_2|\mathrm{e}^{i\varphi_2}$. Тогда посредством использования формул (2.6.15), (2.6.16), (2.6.22) и тригонометрических тождеств можно показать, что справедливы такие равенства:

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = |z_1||z_2|\mathrm{e}^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \tag{2.6.23}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)) = \frac{|z_1|}{|z_2|}\mathrm{e}^{i(\varphi_1-\varphi_2)}. \tag{2.6.24}$$

Если $z_1 = z_2$, то из (2.6.23) получим, что $z^2 = |z|^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) = |z|^2 e^{2i\varphi}$. Обобщением данной формулы является *формула Муавра* [17, 19]:

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = |z|^n e^{in\varphi}.$$

(2.6.25) В частности, при $|z| = 1$ получим

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi. \tag{2.6.26}$$

Определение 2.6.10. Под корнем n-ой степени $\sqrt[n]{z}$, где $n \in N = \{1,2,3...\}$, из комплексного числа понимается любое комплексное число w, для которого выполняется равенство $w^n = z$.

Используя формулу Муавра, несложно найти все числа w, которые удовлетворяют равенству $w^n = z$. Пусть

$$z = |z|e^{i\varphi},\ w = |w|e^{i\psi}.$$

Тогда

$$w^n = |w|^n e^{in\psi} = |w|^n(\cos n\psi + i\sin n\psi).$$

Следовательно,

$$|z|e^{i\varphi} = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |w|^n(\cos n\psi + i\sin n\psi).$$

Так как два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части, то будут справедливы равенства:

$$\begin{aligned} |z|\cos\varphi &= |w|^n \cos n\psi, \\ |z|\sin\varphi &= |w|^n \sin n\psi. \end{aligned} \tag{2.6.27}$$

Возведем оба равенства (2.6.27) в квадрат и результаты сложим. Получим в итоге $|z|^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = |z|^2 = |w|^{2n}(\cos^2 n\psi + \sin^2 n\psi) = |w|^{2n}$. Следовательно, верны равенства:

$$|z| = |w|^n,\ |w| = \sqrt[n]{|z|}. \tag{2.6.28}$$

В (2.6.28) под корнем $\sqrt[n]{|z|}$ понимается обычный действительный и неотрицательный корень n-ой степени из действительного числа. Итак, модуль комплексного числа определяется однозначно формулой (2.6.28). Из (2.6.28) следует, что равенства (2.6.27) примут вид $\cos\varphi = \cos n\psi,\ \sin\varphi = \sin n\psi.$ В силу того, что синус и косинус (общие свойства тригонометрических функций описаны в главе 3) являются периодическими функциями с периодами $2k\pi$, где $k \in Z$, должно иметь место любое из равенств $\varphi + 2k\pi = n\psi.$ Следовательно, аргумент $\psi = \arg w$ должен удовлетворять одному из равенств:

$$\psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n},\ k \in Z. \tag{2.6.29}$$

С учетом выписанных выше формул получаем, что все корни n-ой степени из комплексного числа z должны иметь вид:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \tag{2.6.30}$$

где $n \in N$ и $k \in Z$. Так как синус и косинус являются периодическими функциями, то будут существовать только n различных корней $w_{1,},\ldots,w_n$ из комплексного числа z. При этом для получения этих корней достаточно положить в (2.6.30) $k = 0,\ldots,n-1.$

Следует отметить, что точки на комплексной плоскости, соответствующие различным значениям корня n-ой степени из комплексного числа z, располагаются в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность с центром в точке O и радиусом равным $\sqrt[n]{|z|}$.

Замечание 2.6.5. Корень n–ой степени из действительного числа также имеет n корней. Корень n–ой степени из нуля имеет только одно значение, равное нулю.

3. ФУНКЦИИ ОДНОЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

3.1. Общие сведения о действительных функциях одной действительной переменной

В естествознании используются разнообразные величины, например, время, длина, масса, давление, температура и т.п., которые принимают либо различные численные значения, либо одинаковые значения. Величина, которая может принимать разные значения, называется переменной. Величина, численные значения которой не меняются, называется постоянной. Величины, которые сохраняют значения при любых условиях, называются абсолютными постоянными. Такими величинами являются, например, число π и основание натуральных логарифмов.

В математике, вообще говоря, отвлекаются от физического или иного смысла рассматриваемой величины и интересуются лишь числом, которым она выражается, т.е. изучают числовую переменную. Ее обозначают каким-либо символом или буквой (например $x, y, \ldots$), которым приписываются числовые значения. Однако, физический или иной характер величины имеют смысл в рамках разнообразных приложений математики.

Переменная x считается заданной, если указана ее область *изменения*, т.е. множество $X = \{x\}$ ее значений, которые она может принимать. Постоянную величину удобно рассматривать как частный случай переменной, множество значений которой состоит из одного элемента. Различают дискретные и непрерывные переменные.

Пусть даны две действительные переменные x и y с областями изменения X и Y, где X и Y – произвольные непустые подмножества множества действительных чисел $(X \subseteq R, \quad Y \subseteq R)$. Хотя ранее уже было дано общее определение понятия соответствия (отображения, функции), конкретизируем его для случая действительных переменных.

Определение 3.1.1. Действительная переменная y называется действительной функцией от действительной переменной x в области ее изменения X, если по некоторому правилу, алгоритму или закону каждому значению $x \in X$ ставится в соответствие одно определенное значение y (из $Y \subset R$).

Замечание 3.1.1. Определенную выше функцию одной действительной переменной называют *однозначной*. Если же каждому значению $x \in X$ ставится в соответствие не одно, а несколько или бесконечное множество значений y, то функцию называют *многозначной*.

Для указания того факта, что y есть функция от x, используют такую запись: $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$, $y = y(x)$ и т.п. Символы f, φ,... характеризуют именно то правило, по которому определяется значение y, отвечающее заданному x. Переменную x называют *независимой переменной* или *аргументом* функции, а переменную y – зависимой переменной.

Определение 3.1.2. Все значения $x \in X$, которые принимает независимая переменная, образуют область определения функции, которую принято обозначать символом $D(f)$ или $D(y)$. Все те значения $f(X) = \{y \in Y \mid y = f(x), x \in X\}$, которые принимает зависимая переменная, образуют множество значений функции, для которого принято обозначение $E(f)$ или $E(y)$.Очевидно, что $f(X) \subseteq Y$. Запись $f(x_0)$ или $y(x_0)$ определяет значение функции в точке x_0.

Для действительных функций одной действительной переменной имеют место отношения $D(f) \subseteq R, E(f) \subseteq R$.

Чтобы определить (задать) действительную функцию $y = f(x)$ действительного аргумента, необходимо указать множество X значений аргумента и соответствие f, переводящее (отображающее) элементы x множества X в элементы y некоторого множества Y $(X \subseteq R, Y \subseteq Y)$.

Наиболее распространенными способами задания функции являются аналитический, табличный и графический.

Аналитический способ задания функции состоит в том, что с помощью формул(ы) устанавливается алгоритм вычисления значений функции $f(x)$ для каждого из значений $x \in D(f)$. При этом область определения $D(f)$ либо указывают, либо под $D(f)$ понимают множество значений аргумента x, при которых выражения, входящие в формулы, имеют смысл. В последнем случае говорят о *естественной области определения* функции. Аналитическое задание функции связано с выбранной системой координат. Представление функции в виде $y = f(x)$ в декартовых координатах или $r = r(\varphi)$ в полярных координатах называют *явным* заданием функции. Функция $y = f(x)$ может быть задана *неявно* уравнением $F(x, y) = 0$, если для любого $x \in D(f)$ $F(x, f(x)) \equiv 0$. Иногда удобно функциональную зависимость от x задавать в параметрическом виде, где $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ – две функции одной независимой переменной $t \subseteq T \subseteq R$, которую называют *параметром* (например, параметр t может иметь смысл времени или угла поворота).

Табличный способ задания функции осуществляется табличным перечислением n значений аргумента $x_1, x_2, ..., x_n$ и соответствующих им значений функции $y_1, y_2, ..., y_n$.

Графический способ задания функции состоит в представлении функции $y = f(x)$ графиком в некоторой системе координат (см. определение 3.1.3).

Определение 3.1.3. Графиком Γ функции $y = f(x)$ называется множество точек $M(x, y)$ плоскости R^2, координаты которых связаны данной функциональной зависимостью, т.е. $\Gamma = \{M(x, y) \in R^2 \mid y = f(x)\}$.

Чаще всего график функции есть некоторая линия. Множество точек координатной плоскости является графиком некоторой функции, если любая прямая, параллельная оси OY, пересекает указанное множество точек не более чем в одной точке.

Опишем основные свойства и характеристики поведения функций.

Определение 3.1.4. Значение $x \in D(f)$, при котором функция $f(x)$ обращается в нуль, называется *нулем этой функции*.

Нули функции являются корнями уравнения $f(x)=0$. В нуле функции ее график имеет общую точку с осью OX. В интервале, на котором функция положительна, график ее расположен над осью OX, а в интервале, где она отрицательна – под осью OX. Указанные интервалы называют *интервалами знакопостоянства функции*.

Определение 3.1.5. Функция называется *четной* (*нечетной*), если

1) область определения функции симметрична относительно точки O – начала координат (если точка $x_0 \in D(f)$, то существует $(-x_0) \in D(f)$);

2) для любого x из области определения выполняется равенство $f(-x)=f(x)$ для четной ($f(-x)=-f(x)$ для нечетной) функции.

Определение 3.1.6. Если хотя бы одно из условий определения 3.1.5 не выполняются, то функцию $y=f(x)$ называют функцией общего вида (рис.3.1 в)

График четной функции симметричен относительно оси ординат (рис. 3.1 а), а график нечетной функции симметричен относительно начала координат (рис. 3.1 б). При изучении поведения четной или нечетной функции достаточно изучить ее при любом $x \geq 0 (x>0), x \in D(f)$ и продолжить это изучение с учетом ее симметрии на любые $x<0$ из области определения.

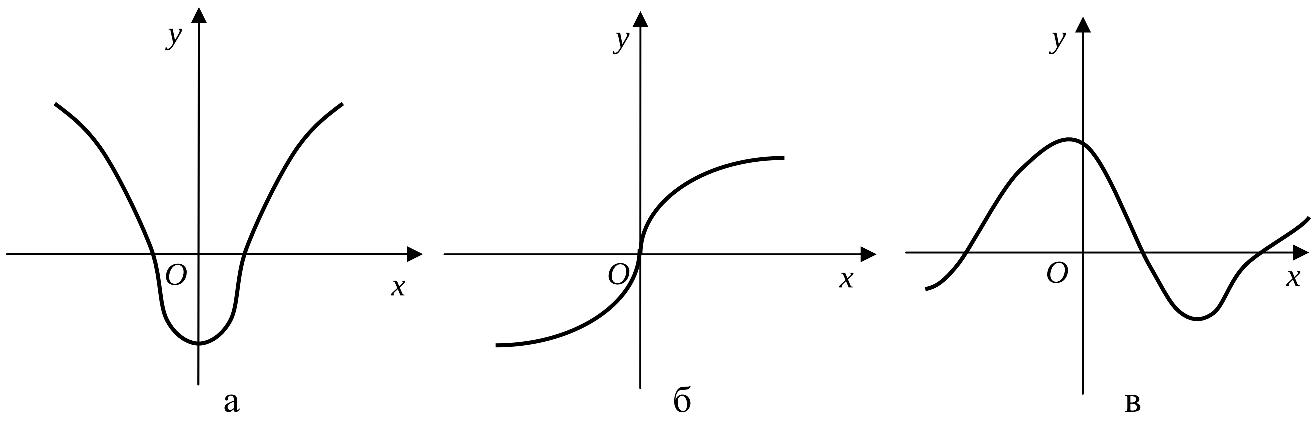


Рис.3.1. Графики функций $y=f(x)$: а – четной; б – нечетной; в – общего вида

Замечание 3.1.2. Сумма, разность, произведение и частные двух четных функций есть четная функция. Сумма и разность нечетных функций – нечетная функция, а произведение и частное – четная функция. Произведение и частное четной и нечетной функций есть нечетная функция.

Определение 3.1.7. Функция $f(x)$ называется периодической с периодом $T, T \in R, T \neq 0$, если

1) для любого значения аргумента x из области определения функции существует такое число T, что значения $x-T$ и $x+T$ также принадлежат области определения функции;

2) при любом x из области определения функции $f(x) = f(x-T) = f(x+T)$ (рис 3.2).

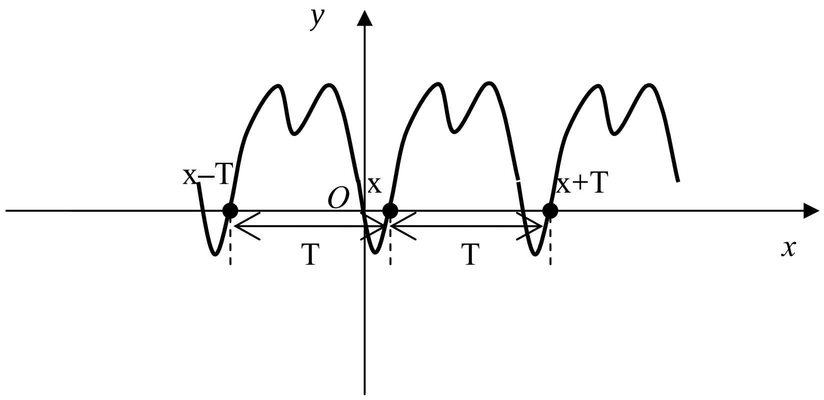


Рис. 3.2. График периодической функции

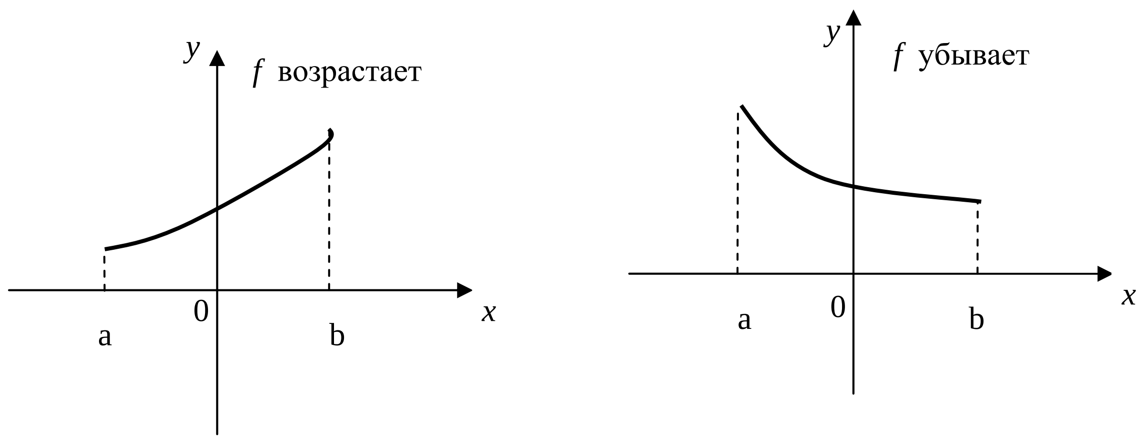
Замечание 3.1.3. Если число T является периодом функции $f(x)$, то и число nT для любого $n \in Z$ также период этой функции. Если существует наименьший положительный период функции, то его называют *основным периодом*. Если $T-$ период функции $y = f(x)$, то достаточно построить ее график на одном из интервалов длиной T, а затем произвести параллельный перенос его вдоль оси Ox на $\pm Tk, k \in Z$.

Замечание 3.1.4. Если функция $f(x)$ – периодическая и ее период равен T, то функция $f(wx)$ – тоже периодическая с периодом $\frac{T}{w}$ $\left(w \in R \setminus \{0\}\right)$.

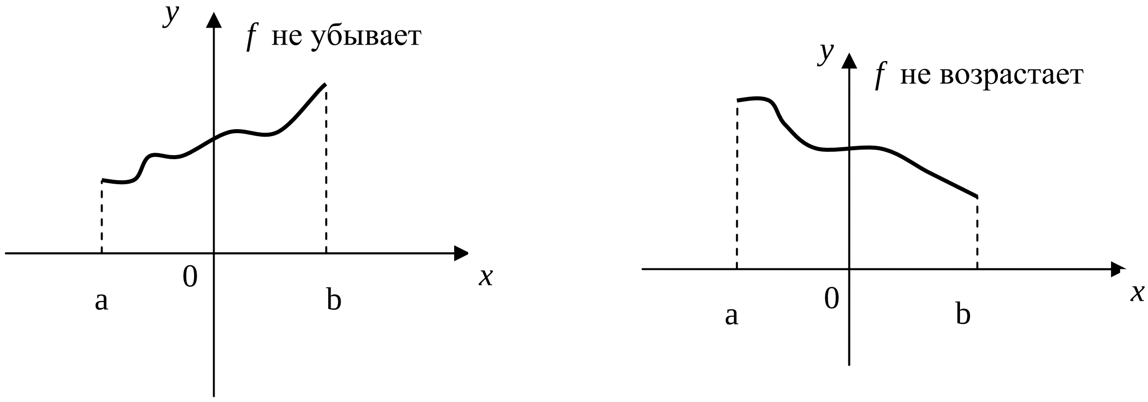
Определение 3.1.8. Функция $f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на множестве X $(X \subseteq R)$, если большему значению аргумента из этого множества соответствует большее (меньшее) значение функции (рис. 3.3 а, 3.3 б). Функция $f(x)$ называется неубывающей (невозрастающей) на множестве X, если большему значению аргумента из этого множества соответствует не меньшее (не большее) значение функции (рис. 3.3 в, 3.3 г).

Таким образом, имеют место следующие эквиваленции: $f(x)$ возрастает (убывает) на $X \Leftrightarrow \forall\, x_1, x_2 \in X$ $(X \subseteq R): x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$ $\quad (f(x_2) < f(x_1))$; $f(x)$ не убывает (не возрастает) на $X \Leftrightarrow \forall\, x_1, x_2 \in X$ $(X \subseteq R): x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$ $\quad (f(x_2) \leq f(x_1))$.

Определение 3.1.9. Возрастающие и убывающие на множестве функции называют монотонными (или строго монотонными) на этом множестве, а неубывающие и невозрастающие – монотонными в широком смысле.



а б



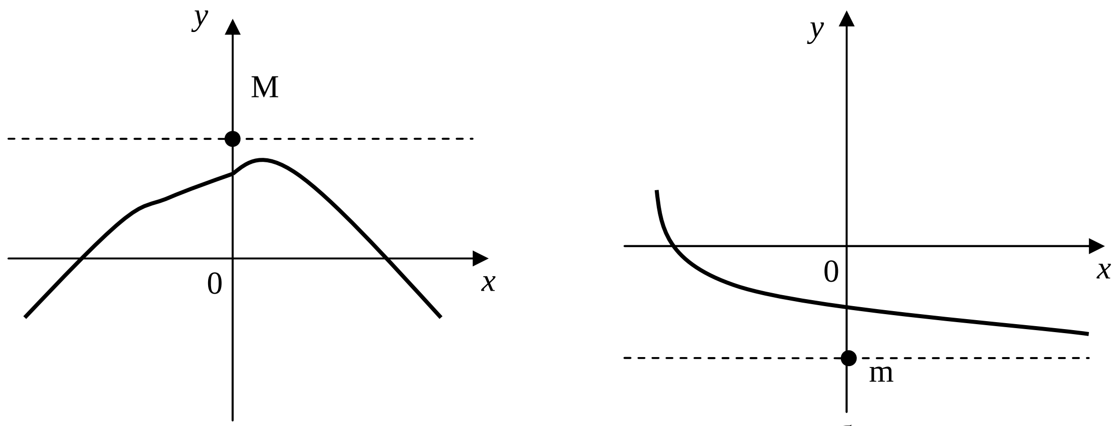
в г

Рис. 3.3 Графики монотонных функций:

а – возрастающей; б – убывающей; в – неубывающей; г – невозрастающей

Определение 3.1.10. Функция $f(x)$ называется ограниченной сверху (снизу) на множестве $X \subseteq D(f) \subseteq R$, если существует такое конечное число $M \in R\,(m \in R)$, что при любых $x \in X$ выполняется условие $f(x) \leq M$ ($f(x) \geq m$) (рис. 3.4 а, 3.4 б).

Определение 3.1.11. Функция $f(x)$ называется ограниченной на множестве $X \subseteq D(f) \subseteq R$, если существует такое конечное положительное число $M^* = \max(|M|, |m|)$, что для любых $x \in D(f)$ выполняется условие $|f(x)| \leq M^*$.



а б

Рис. 3.4. Графики функций:

а – ограниченной сверху; б – ограниченной снизу

Определение 3.1.12. Функция $f(x)$ называется неограниченной сверху (снизу) на множестве $X \subseteq D(f) \subseteq R$, если для любого числа M существует $x \in D(f)$ такое, что $f(x) \geq M$ ($f(x) \leq M$).

Дадим определение и разъясним понятие сложной функции. Пусть на некотором множестве D ($D \subseteq R$) определена вещественная функция $u = \varphi(x)$ и $E(u)$ – множество значений этой функции. Допустим еще, что на множестве $E(u)$ задана функция $y = f(u)$ $(D(f) \subseteq E(u))$. Итак, функция φ отображает (ставит в соответствие) элементы x в элементы u, а функция f отображает элементы u в элементы y. Таким образом, в конечном итоге каждому значению $x \in D(f)$ ставится в соответствие (посредством промежуточной переменной u) одно вполне определенное значение (для однозначных функций φ и u) $y \in E(f)$, где $E(f)$ – множество значений функции $y = f(u)$. Саму функцию y тогда называют *сложной функцией* аргумента x или *функцией от функции* (ее записывают $y = f(\varphi(x))$). Сложную функцию иначе еще называют *композицией* или *суперпозицией* функций f и φ и иногда записывают в виде $f \circ \varphi$. При этом функцию $u = \varphi(x)$ называют промежуточным аргументом (зависимой переменной), а x – независимой переменной.

Следует отметить, что весьма существенным является условие, что значения функции $\varphi(x)$ в суперпозиции функций $f \circ \varphi$ не выходят за пределы той области, в которой определена функция $f(u)$.

Сложную функцию $y = f(\varphi(x))$ можно записать в виде «цепочки» равенств $y = f(u), u = \varphi(x)$. Сложными функциями называют также функции, которые содержат два и более промежуточных аргументов. Например, сложная функция $y = f(\varphi(\psi(x)))$ двух промежуточных аргументов $t = \varphi(u)$ и $u = \psi(x)$ понимается как «цепочка» равенств (вложений функций) $y = f(t), t = \varphi(u), u = \psi(x)$. При этом область значений функции u должна полностью (или частично) совпадать с областью определения функции t, а область значений функции $t = \varphi(\psi(x))$ должна полностью (или частично) совпадать с областью определения функции y.

Кроме сложных функций в математике важную роль играет понятие обратной функции. Пусть функция $y = f(x)$ является отображением множества $D(f) \to E(f)$, где $D(f)$ и $E(f)$ – область определения и множество значений функции. Допустим, что отображение f – биективное, т.е. взаимно однозначное. При взаимно однозначном отображении множества D на множество E каждый элемент $y \in E(f)$ является образом одного и только одного элемента $x \in D$ и наоборот. Так как каждому элементу $y \in E(f)$ ставится в соответствии единственный элемент $x \in D(f)$, то говорят, что на множестве E определена *функция, обратная к функции* $y = f(x)$, которую обозначают выражением $x = \varphi(y)$ (или $x = f^{-1}(y)$).

Заметим, что, если функция f^{-1} является обратной для функции f, то функция f является обратной к f^{-1}, т.е. верно равенство $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$. Функции f и f^{-1} называют взаимно обратными. Функция, имеющая обратную, называется *обратимой*. Не всякая функция $y = f(x)$ имеет обратную функцию.

Теорема 3.1.1. Если числовая функция $y = f(x)$ монотонна, то существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$. При этом, если f – возрастающая функция, то и f^{-1} – возрастающая, а если f – убывающая функция, то и f^{-1} – убывающая.

Монотонность функции является лишь достаточным условием ее обратимости, т.е. существуют немонотонные обратимые функции.

Замечание 3.1.5. Функции $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ по существу выражают одну и ту же зависимость между переменными x и y. Только при функциональной зависимости $y = f(x)$ x есть аргумент, а y – функция. При функциональной зависимости $x = f^{-1}(y)$ аргументом служит y, а x является функцией. Поэтому графики прямой и обратной функций совпадают. Если же у обратной функции, так же как и у исходной функции, аргумент обозначить через x, а зависимую переменную – через у (как обычно принято), то обратная функция запишется в виде $y = f^{-1}(x)$. График обратной функции $y = f^{-1}(x)$ симметричен графику данной функции $y = f(x)$ относительно биссектрисы $y = x$ первого координатного угла.

Для того, чтобы найти обратную функцию для взаимно однозначной функции $y = f(x)$, следует решить уравнение $y = f(x)$ относительно переменной x, т.е. найти функцию $x = f^{-1}(y)$, а затем поменять обозначения переменной x на y, а y на x и тем самым получить функцию $y = f^{-1}(x)$ обратную к данной.

Замечание 3.1.6. В общем случае обратную функцию для функции $y = f(x)$ определяют как многозначную, если значению $y \in E(f)$ соответствует несколько или бесконечное множество значений $x \in D(f)$.

На графике, если любая прямая, параллельная оси Ox пересекает график функции $y = f(x)$ лишь в одной точке, то обратная для нее функция будет однозначной. Если же некоторые из таких прямых пересекают график в нескольких точках, то обратная функция будет многозначной. В подобных случаях выбирают такие промежутки изменения x, которым отвечают однозначные «ветви» многозначной обратной функции.

3.2. Геометрические преобразования графиков функций

Если график функции $y = f(x)$ известен, то с помощью некоторых преобразований плоскости (параллельного переноса, осевой и центральной симметрии, растяжения и т.п.) можно построить графики более сложных функций.

3.2.1. График функции $f(\omega x)$, где $\omega \in (0, +\infty)$, получается сжатием графика функции $f(x)$ вдоль оси Ox в ω раз к оси Oy при $\omega > 1$ или растяжением функции $f(x)$ вдоль оси Ox в $\frac{1}{\omega}$ раз от оси Oy при $0<\omega<1$ (рис. 3.5 а, б, в)

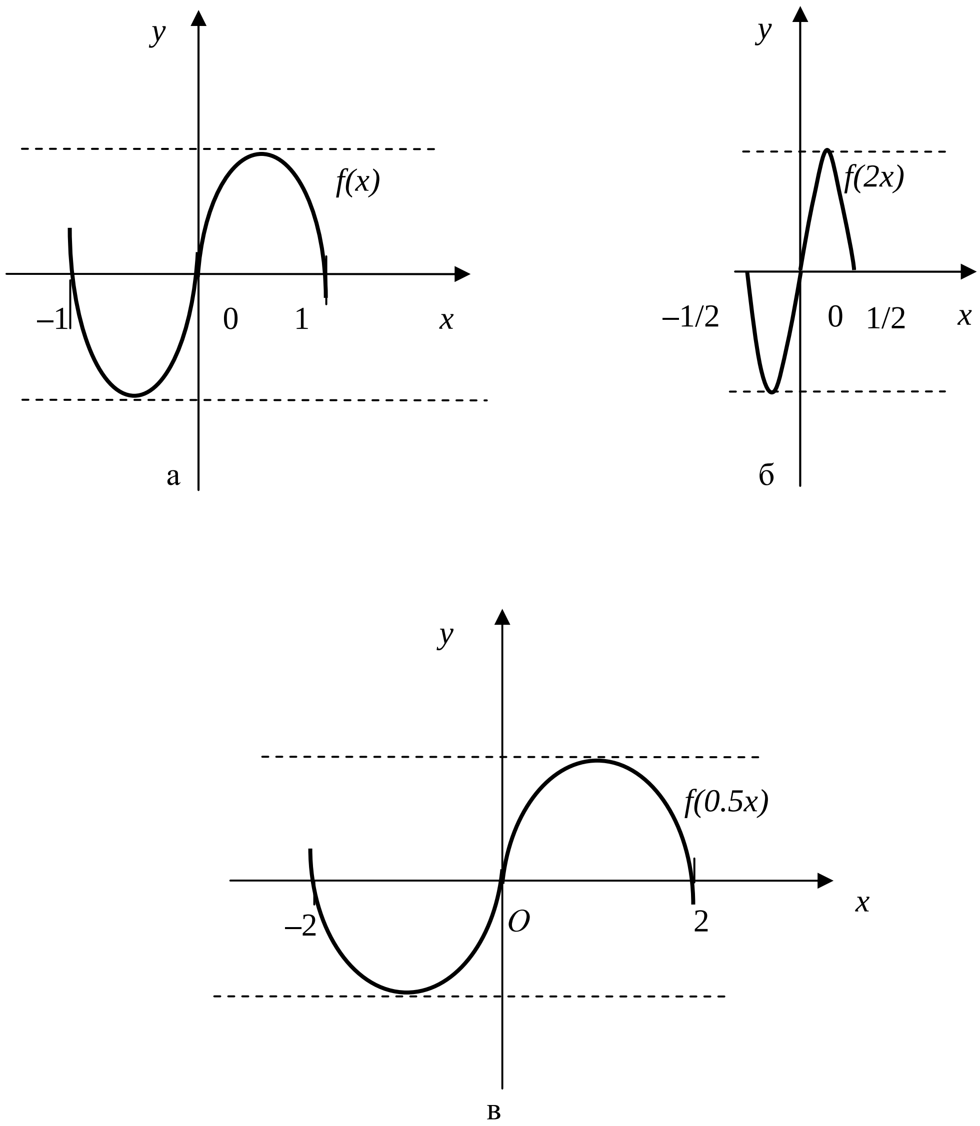


Рис. 3.5. Графики функций:

а – $y=f(x)$; б – $y=f(2x)$; в – $y=f(0.5x)$

3.2.2. График функции $Af(x)$, где $A\in(0,+\infty)$, получается растяжением графика функции $f(x)$ вдоль оси Oy в A раз при $A>1$ и сжатием вдоль этой оси в $\frac{1}{A}$ раз при $0<A<1$ (рис. 3.6 а, б, в)

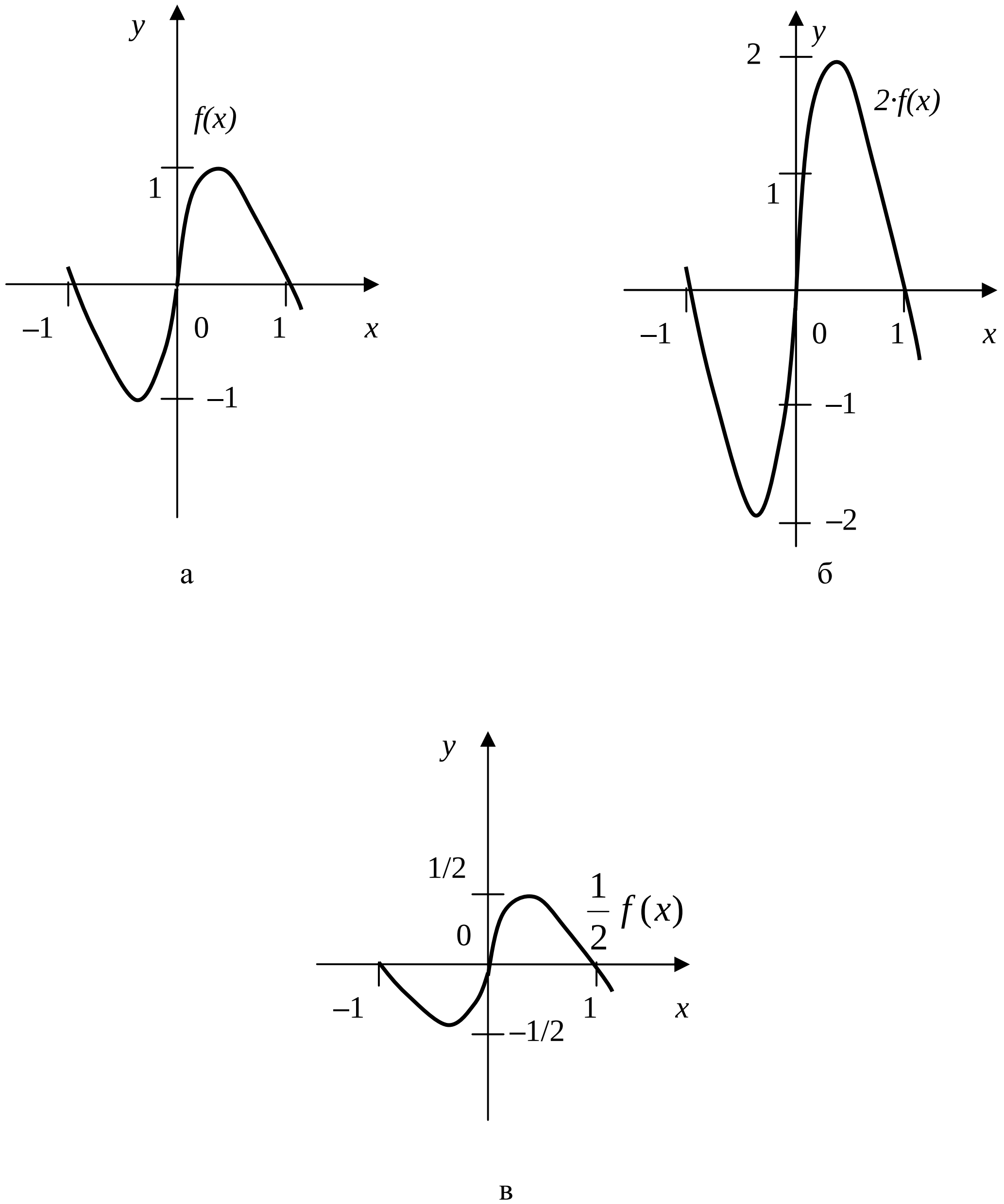
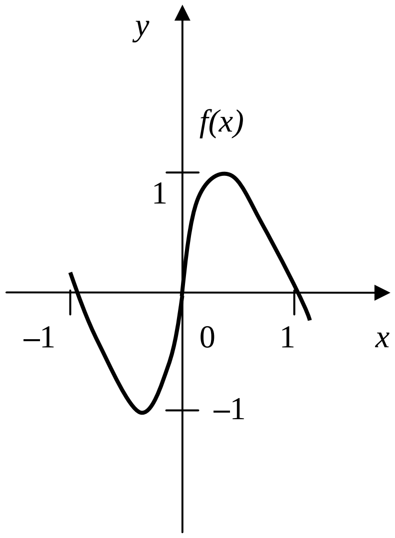


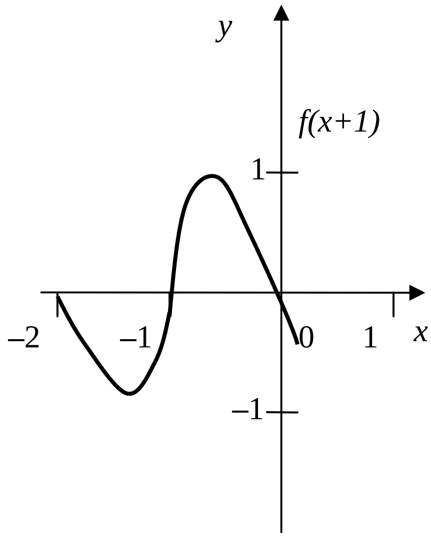
Рис. 3.6. Графики функций:

а – $y = f(x)$; б – $y = 2f(x)$; в – $y = \frac{1}{2}f(x)$

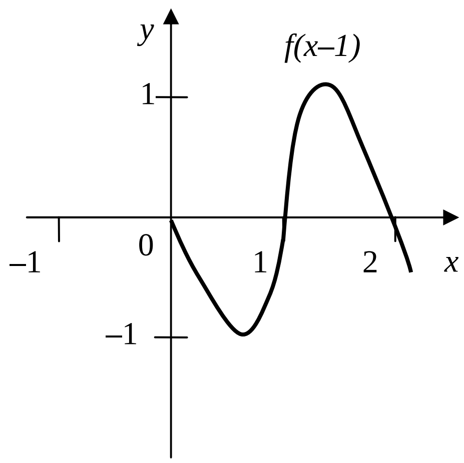
3.2.3. График функции $f(x+a)$, получается параллельным переносом графика функции $f(x)$ в отрицательном направлении оси Ox на $|a|$ при $a>0$ и в положительном направлении при $a<0$ (рис. 3.7 а, б, в)



а



б



в

Рис. 3.7. Графики функций:

а – $y = f(x)$; б – $y = f(x+1)$; в – $y = f(x-1)$

3.2.4. График функции $f(x) + b$, получается параллельным переносом графика функции $f(x)$ в положительном направлении оси Oy на величину b

при $b > 0$ и в отрицательном направлении этой оси на величину $|b|$ при $b < 0$ (рис. 3.8 а, б, в)

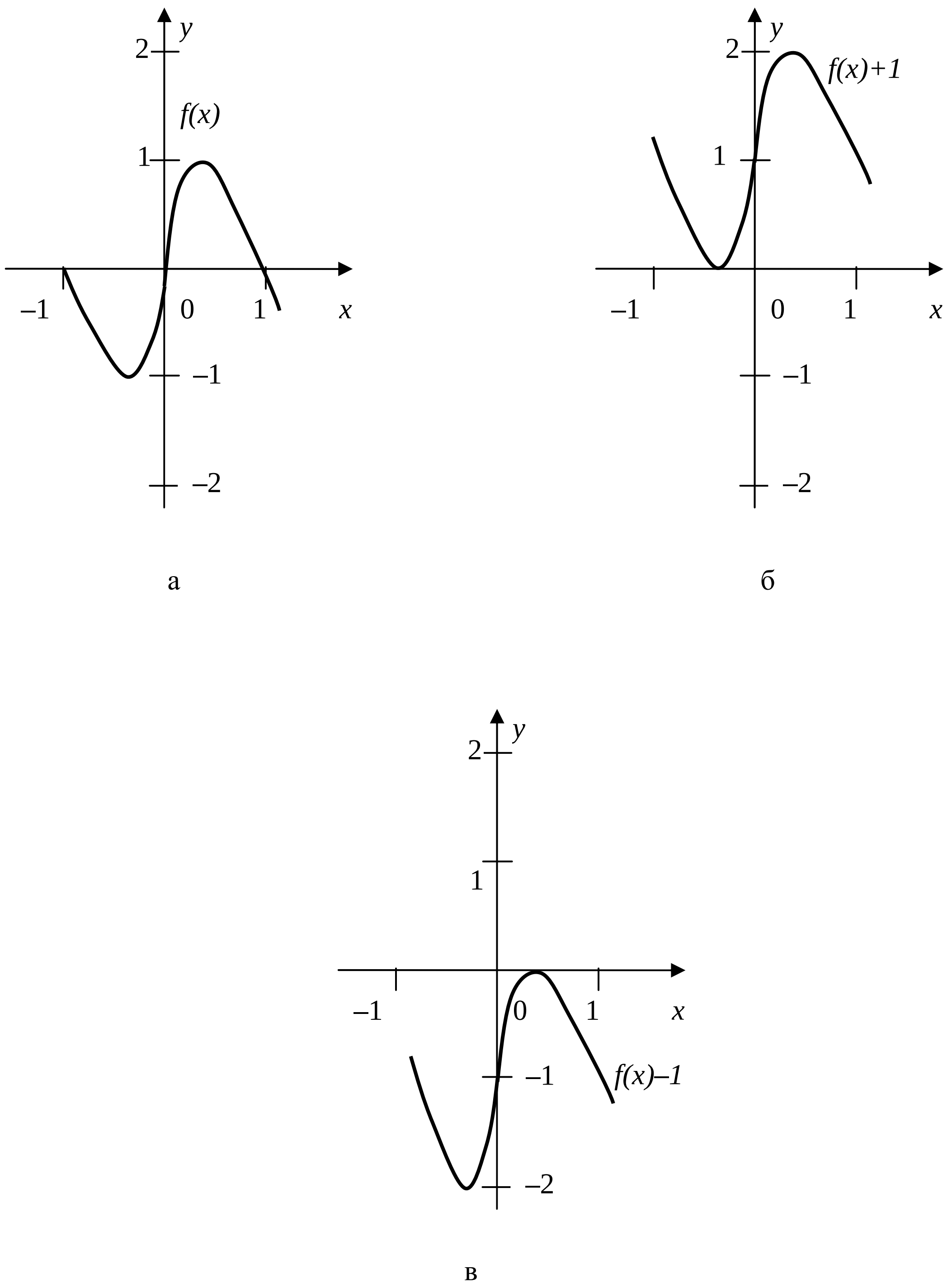


Рис. 3.8. Графики функций:

а – $y = f(x)$; б – $y = f(x) + 1$; в – $y = f(x) - 1$

3.2.5. График функции $f(-x)$, получается симметричным отображением графика функции $f(x)$ относительно оси Oy (рис. 3.9. а)

3.2.6. График функции $-f(x)$, получается симметричным отображением графика функции $f(x)$ относительно оси Ox (рис. 3.9 б).

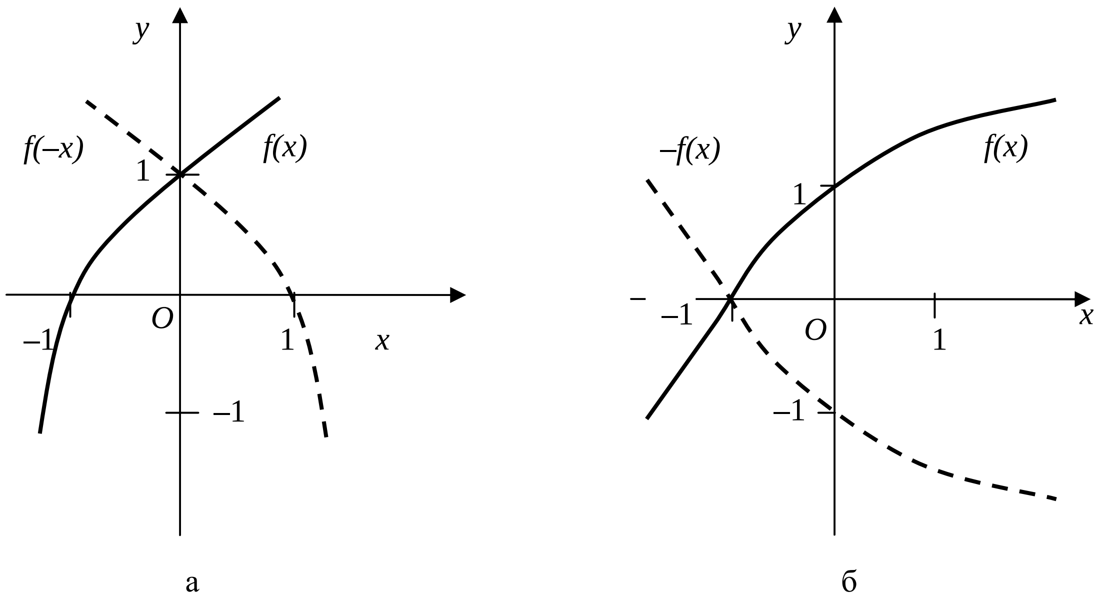


Рис. 3.9. Графики функций:

а – $y = f(x)$ и $y = f(-x)$; б – $y = f(x)$ и $y = -f(x)$

3.2.7. График функции $|f(x)|$ получается из графика функции $f(x)$ следующим образом: часть графика $f(x)$, лежащая над осью OX, сохраняется, часть его, лежащая под осью OX, отображается симметрично относительно оси OX (рис. 3.10 а, б). Указанное правило преобразования графика функции $f(x)$ следует из формулы:

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), \text{если } f(x) \geq 0, \\ -f(x), \text{если } f(x) < 0. \end{cases}$$

3.2.8. График функции $f(|x|)$ получается из графика функции $f(x)$ таким образом: часть графика $f(x)$ при $x \geq 0$ сохраняется, а при $x < 0$ полученная для

$x > 0$ часть графика отображается симметрично относительно оси OY (рис. 3.11 а, б). Данное преобразование выполняется согласно формуле:

$$y = f|x| = \begin{cases} f(x), \text{если } x \geq 0, \\ f(-x), \text{если } x < 0. \end{cases}$$

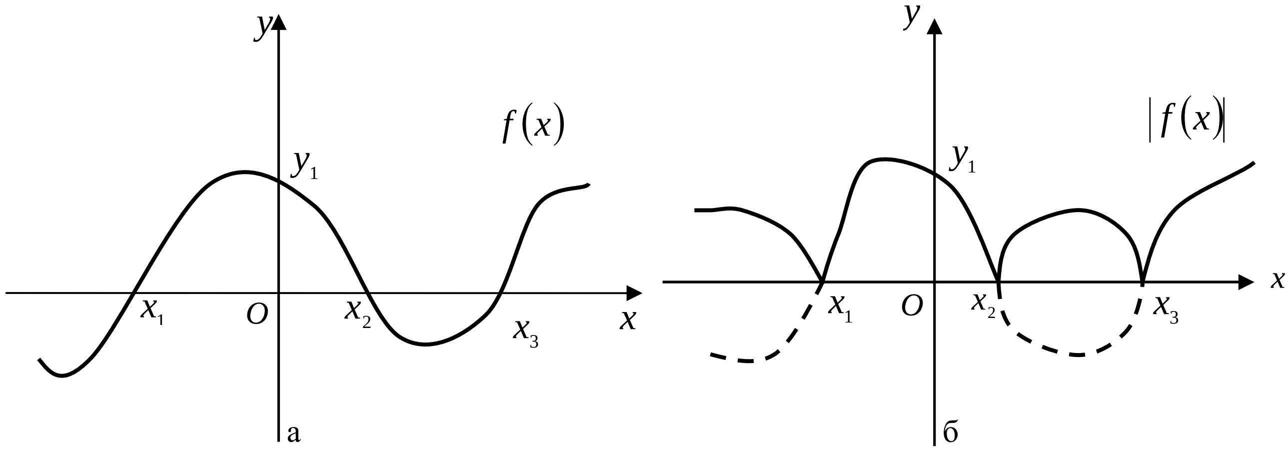


Рис. 3.10. Графики функций:

а – $y = f(x)$; б – $y = |f(x)|$

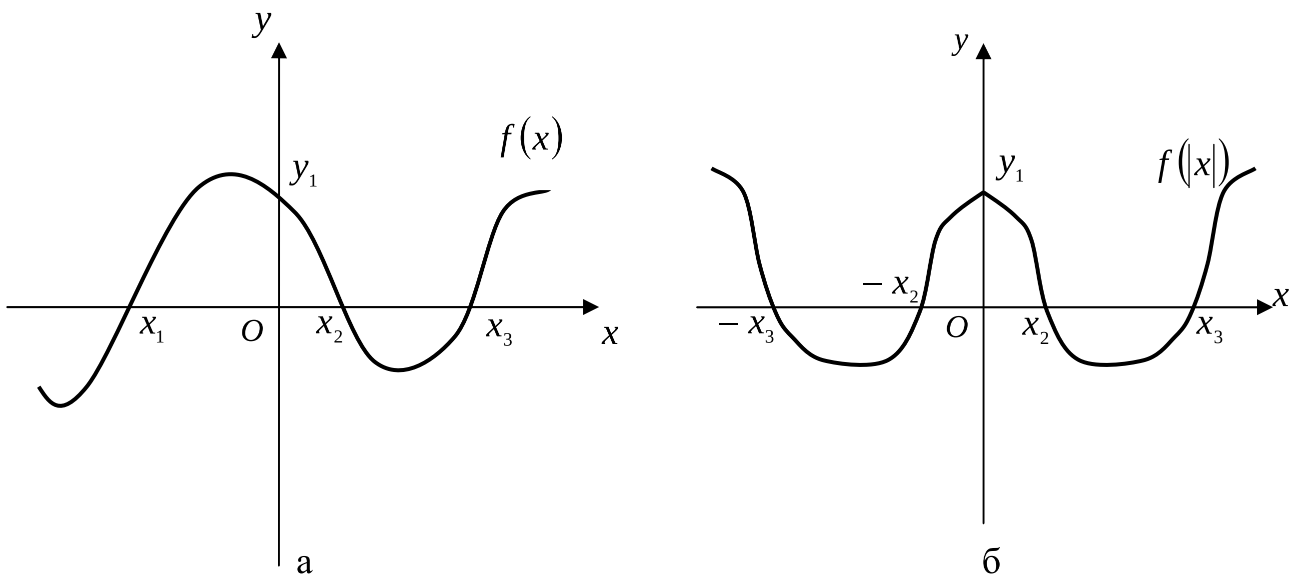


Рис. 3.11. Графики функций:

а – $y = f(x)$; б – $y = f(|x|)$

3.3. Действительные элементарные функции

3.3.1. Линейная функция. Прямая пропорциональная зависимость

Линейной функцией называется функция $y = f(x)$, определяемая равенством $y = ax + b$, где a и b – некоторые действительные числа.

Областью определения линейной функции является множество всех действительных чисел R. Областью изменения (множеством значений) этой функции при $a \neq 0$ является множество всех действительных чисел R. При $a = 0$ множество значений состоит из одного числа b.

Если $b = 0$, то линейная функция будет нечетной функцией.

Линейная функция является непрерывной на всей числовой оси (определение непрерывной функции дано, например, в учебниках [4, 8]).

При $a > 0$ ($a < 0$) линейная функция возрастает (убывает) при всех $x \in R$, а при $a = 0$ линейная функция является постоянной величиной $y = b$.

Равенство $ax + b = 0$ имеет место при $x = -\dfrac{b}{a}$; при $x = 0$ $y = b$. Если $a > 0$, $ax + b > 0$ при $x > -\dfrac{b}{a}$, $ax + b < 0$ при $x < -\dfrac{b}{a}$; если $a < 0$, $ax + b > 0$ при $x < -\dfrac{b}{a}$, $ax + b < 0$ при $x > -\dfrac{b}{a}$.

График линейной функции $y = ax + b$ есть прямая линия. Коэффициент a характеризует угол α, который образует прямая с положительным направлением оси OX (рис. 3.12). При этом величина $a = \operatorname{tg}\alpha$ называется угловым коэффициентом. Если $a > 0$, то этот угол острый, если $a < 0$ – тупой, если $a = 0$, то прямая $y = b$ параллельна оси OX.

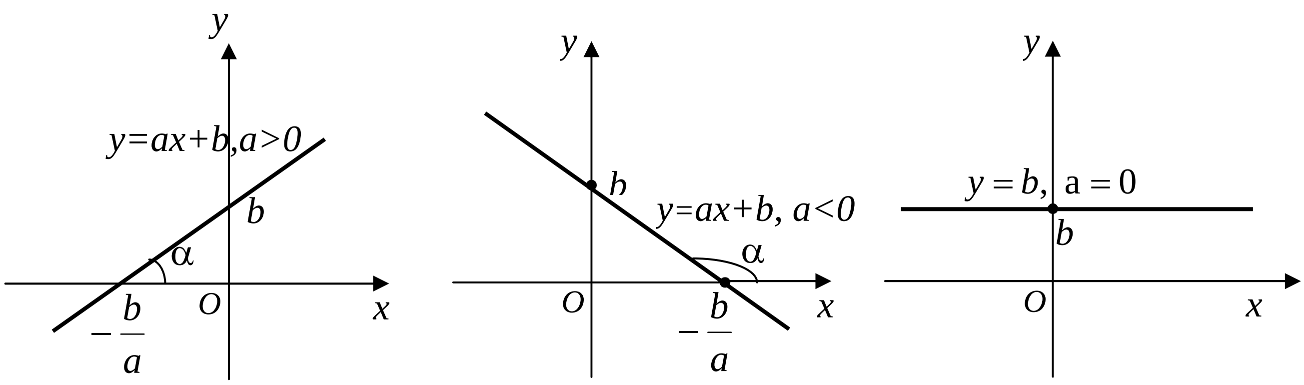


Рис. 3.12. Графики функции $y = ax + b$:

а – $a > 0$; б – $a < 0$; в – $a = 0$

Если $b = 0$, то прямая $y = ax$ проходит через начало координат.

Переменную y называют *прямо пропорциональной* переменной x с коэффициентом пропорциональности $k = a$, если эти переменные связаны соотношением $y = ax, a \neq 0$. Прямая пропорциональная зависимость является частным случаем линейной функции.

3.3.2. Квадратичная функция

Квадратичной функцией называется функция $y = f(x)$ вида:
$y = ax^2 + bx + c$, где $a, b, c -$ некоторые действительные числа, $a \neq 0$.

Квадратичная функция может быть приведена к виду:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}. \qquad (3.3.1)$$

Выражение $D = b^2 - 4ac$ называется дискриминантом квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$. Представление $ax^2 + bx + c$ в виде (3.3.1) называется выделением полного квадрата.

Опишем основные свойства квадратичной функции и ее график.

Область определения квадратичной функции – множество всех действительных чисел R.

При $b \neq 0$ квадратичная функция имеет общий вид, а при $b = 0$ квадратичная функция является четной функцией.

Рассматриваемая функция непрерывна [4, 8] на всей числовой оси. При $a > 0$ функция убывает от $+\infty$ до $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$ для всех $x \in \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ и возрастает от значения y_0 до $+\infty$ для всех $x \in \left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$; множество значений функции: $y \in \left[\frac{4ac - b^2}{4a}, +\infty\right)$. При $a < 0$ функция возрастает от $-\infty$ до y_0 для всех $x \in \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ и убывает от значения y_0 до $-\infty$ для всех $x \in \left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$; функция принимает значения, принадлежащие множеству $\left(-\infty, \frac{4ac - b^2}{4a}\right]$.

Квадратичная функция удовлетворяет равенству $ax^2 + bx + c = 0$ при $x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ или $x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, если дискриминант $D = b^2 - 4ac \geq 0$. Если же $a > 0$ и $D > 0$, то имеет место неравенство $ax^2 + bx + c > 0$ при $x < x_1$ или $x > x_2$; $ax^2 + bx + c < 0$ при $x_1 < x < x_2$; если $D = 0$, то $ax^2 + bx + c > 0$ для всех $x \neq -\frac{b}{2a}$; если $D < 0$, то $ax^2 + bx + c > 0$ для всех $x \in R$. Если $a < 0$ и $D > 0$, то $ax^2 + bx + c > 0$ при $x_1 < x < x_2$; $ax^2 + bx + c < 0$ при $x < x_1$ или $x > x_2$; если $D = 0$, то $ax^2 + bx + c < 0$ для всех $x \neq -\frac{b}{2a}$; если $D < 0$, то $ax^2 + bx + c < 0$ для всех $x \in R$ (см рис. 3.13 – 3.16). При $x = 0$ $y = c$.

График квадратичной функции называется параболой. Если $a > 0$ ($a < 0$), то ветви параболы направлены вверх (вниз). Осью симметрии параболы служит прямая $x = -\frac{b}{2a}$. Точка графика функции с абсциссой $x_0 = -\frac{b}{2a}$ и ординатой

$y_0 = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$ называется вершиной параболы. Если $b = 0$, $c = 0$, вершина параболы $y = ax^2$ находится в начале координат (см. рис. 3.13). Графики функции $y = ax^2 + bx + c$ изображены на рис. 3.14 – 3.16).

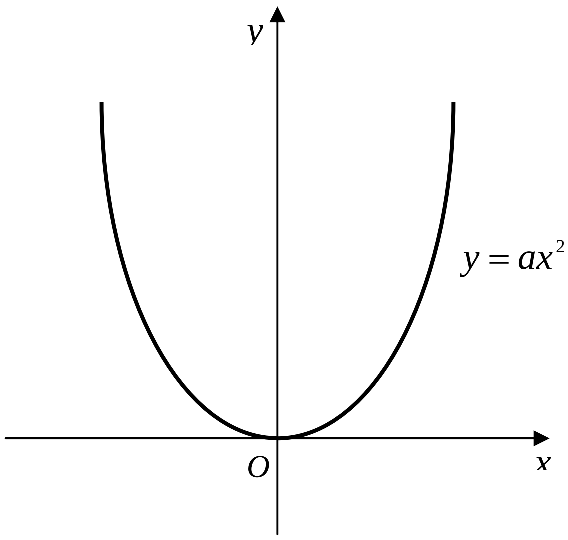
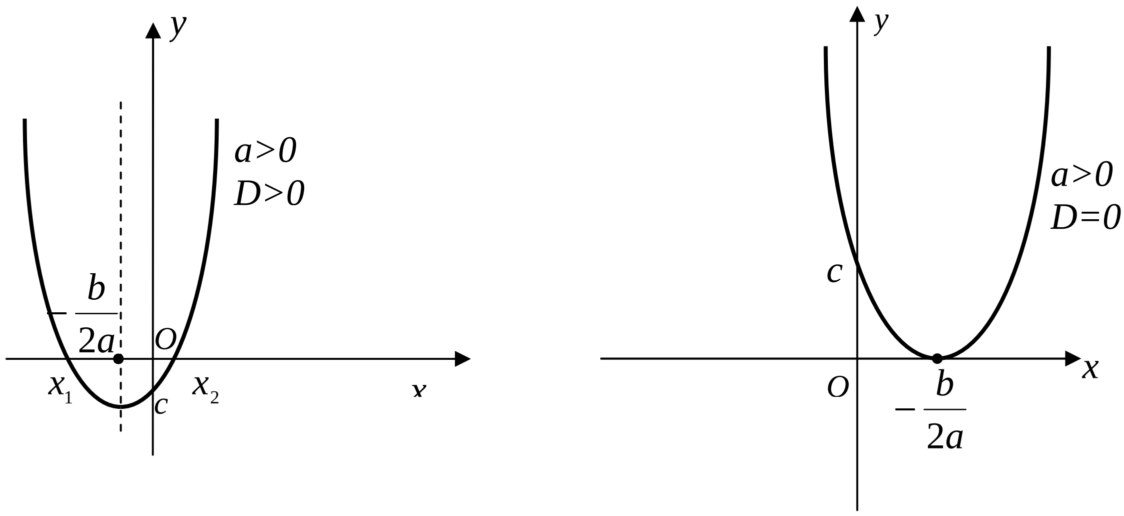


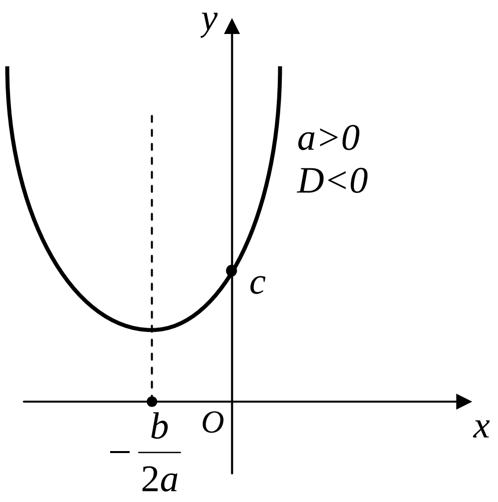
Рис. 3.13 Парабола $y = ax^2, a > 0$



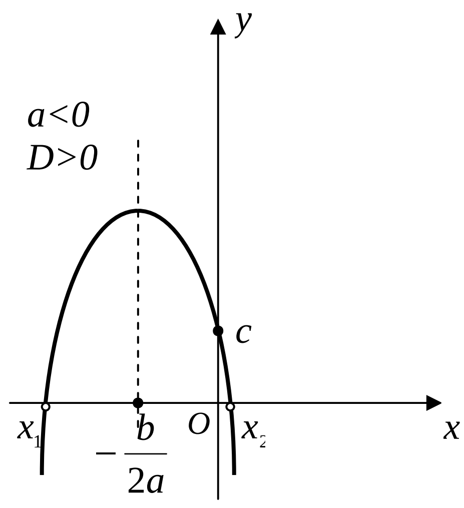
а

б

Рис. 3.14 Парабола $y = ax^2 + bx + c, a > 0$:
а – $D > 0$; б – $D = 0$

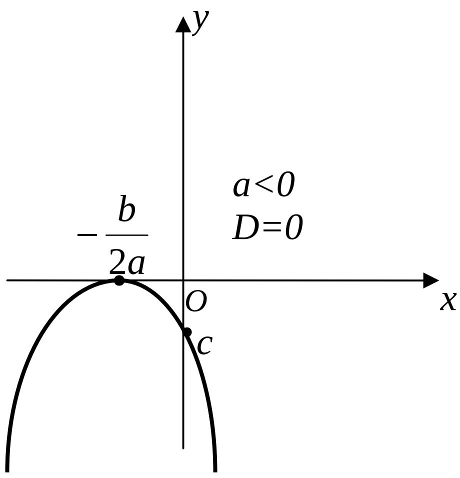


а

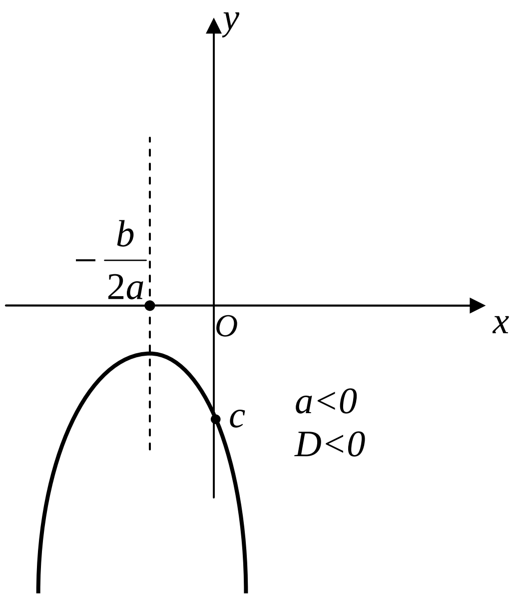


б

Рис. 3.15 Парабола $y = ax^2 + bx + c$:
а – $a > 0, D < 0$; б – $a < 0, D > 0$



а



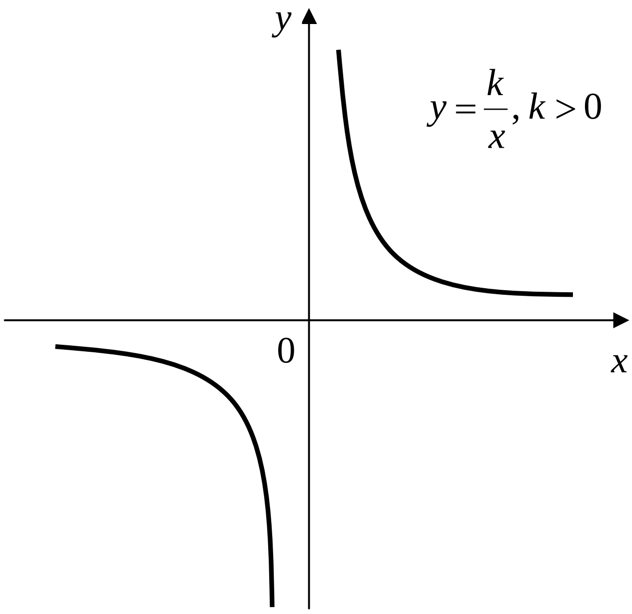
б

Рис. 3.16 Парабола $y = ax^2 + bx + c$:
а – $a < 0, D = 0$; б – $a < 0, D < 0$

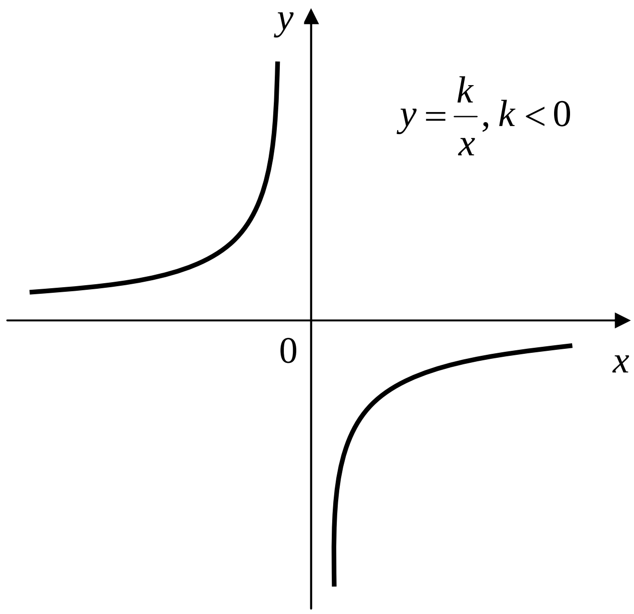
3.3.3. Функция $y = \frac{k}{x}$. Обратно пропорциональная зависимость. Дробно-линейная функция

Функция $y = \frac{k}{x}$ выражает *обратно пропорциональную* зависимость переменной y от переменной x. Здесь k – действительное число, отличное от нуля, которое называют коэффициентом обратной пропорциональности.

Область определения данной функции $D(y) = R \setminus \{0\}$, а область изменения $E(y) = R \setminus \{0\}$. Эта функция нечётная и её график симметричен относительно начала координат. При $k > 0$ $y < 0$ при $x < 0$ и $y > 0$ при $x > 0$. При $k < 0$ $y > 0$ при $x < 0$ и $y < 0$ при $x > 0$. При $k > 0$ данная функция монотонно убывает в $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$, а при $k < 0$ монотонно возрастает в тех же промежутках. Функцию $y = \frac{k}{x}$ можно рассматривать как частный случай степенной функции $y = x^{\alpha}$ при $\alpha = -1$. График функции называется гиперболой (см. рис. 3.17 а, б).



а



б

Рис. 3.17. Гипербола $y = \frac{k}{x}$:

а – $k > 0$; б – $k < 0$

Оси координат OX и OY являются соответственно горизонтальной и вертикальной асимптотами графика функции $y = \frac{k}{x}$.

Дробно-линейной функцией называется функция $y = f(x)$ вида

$$y = \frac{ax+b}{cx+d},$$

где a, b, c, d – некоторые действительные числа, $c \neq 0$ и $ad \neq bc$.

При $c = 0$ эта функция становится линейной, а при $ad = bc$ $y = const$.

Для исследования свойств и построения графика дробно-линейной функции удобно представить ее в виде

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} = n + \frac{k}{x+m},$$

где $n = \frac{a}{c}$, $k = \frac{bc-ad}{c^2}$, $m = \frac{d}{c}$.

Тогда график функции можно получить из графика функции $y = \frac{1}{x}$ с помощью геометрических преобразований (параллельных переносов и сжатий (растяжений) вдоль координатных осей).

Дробно линейная функция $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ определена всюду, кроме точки $x = -\frac{d}{c}$ и принимает значения в области $E(y) = \left(-\infty, \frac{a}{c}\right) \cup \left(\frac{a}{c}, +\infty\right)$. При $a \neq 0$ и $d \neq 0$ она является функцией общего вида, а при $a = 0$ и $d = 0$ – нечётной функцией. Свойства данной функции следуют из свойств функции $y = \frac{k}{x}$ согласно приведённым выше преобразованиям функции и её графика. Прямые $y = \frac{a}{c}$ и $x = -\frac{d}{c}$ являются горизонтальной и вертикальной асимптотами графика этой функции.

3.3.4. Степенная функция

Степенной функцией называется функция $y = x^{\alpha}$, где α – любое действительное число. Если α – число рациональное, то функция $y = x^{\alpha}$ называется алгебраической, если же α – иррациональное, то функция $y = x^{\alpha}$ называется трансцендентной.

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся ситуации:

3.3.4.1. Пусть $\alpha = 2n, n \in N, y = x^{2n}$, тогда $D(y) = R; E(y) = [0,+\infty); y = 0$ при $x = 0$. Функция $y = x^{2n}$ – четная, она на промежутке $(-\infty,0)$ убывает, а на промежутке $(0,+\infty)$ возрастает. График – парабола порядка $2n$ (см. рис. 3.18 а). При $n = 1$ имеем $y = x^2$ – квадратичную функцию.

3.3.4.2. Пусть $\alpha = 2n + 1$, $n \in N$, т.е. $y = x^{2n+1}$. Тогда $D(y) = R$; $E(y) = R$ и $y = 0$ при $x = 0$. Функция $y = x^{2n+1}$ – нечетная, возрастает на R от $-\infty$ до $+\infty$. График этой функции – парабола порядка $2n + 1$ (см. рис. 3.18 б).

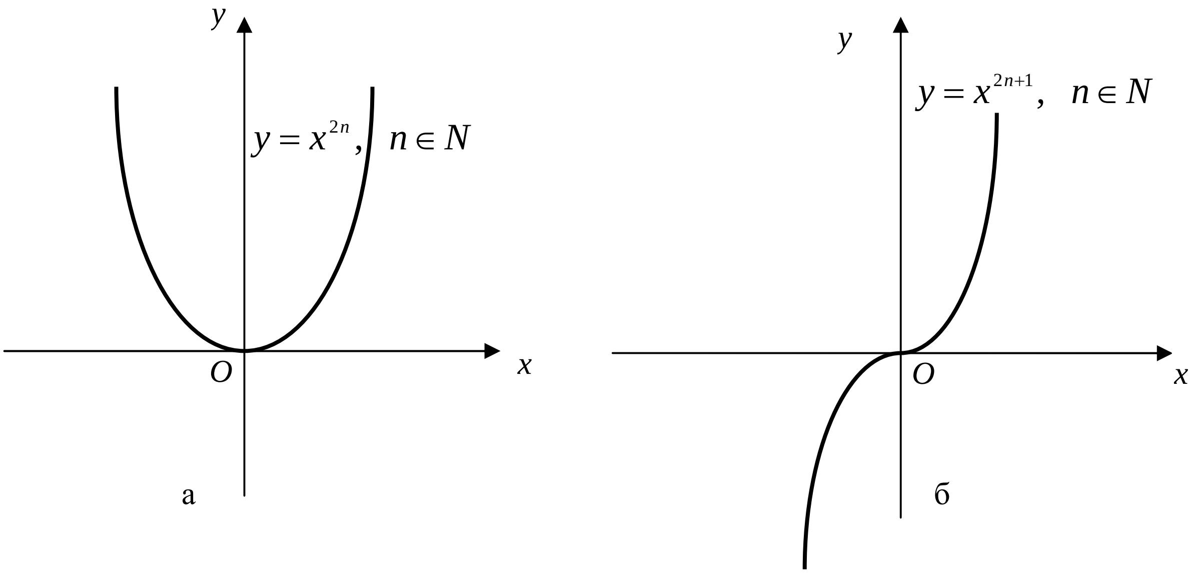


Рис. 3.18. Графики функций: а – $y = x^{2n}$; б – $y = x^{2n+1}$

Отметим, что при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ функция $y = x^{\alpha}$ совпадает с частными случаями $y = 1$ и $y = x$ линейной функции.

3.3.4.3. Пусть $\alpha=-2n$, $n\in N$, $y=\dfrac{1}{x^{2n}}$. Тогда $D(y)=R\setminus\{0\}, E(y)=(0,+\infty)$. Данная функция знакоположительная, четная, возрастает на промежутке $(-\infty,0)$ и убывает на промежутке $(0,+\infty)$. Ось OX является горизонтальной, а ось OY – вертикальной асимптотой для этой функции. График функции $y=\dfrac{1}{x^{2n}}$ имеет вид, приведенный на рис. 3.19 а.

3.3.4.4. Пусть $\alpha=-2n+1$, $n\in N$, $y=\dfrac{1}{x^{2n-1}}$. Тогда $D(y)=R\setminus\{0\}, E(y)=R\setminus\{0\}$. При $x<0$ эта функция принимает отрицательные значения, а при $x>0$ – положительные значения. Функция нечетная, убывает на промежутках $(-\infty,0)$ и $(0,+\infty)$. Координатные оси OX и OY являются соответственно горизонтальной и вертикальной асимптотами графиков функции (определение и смысл понятия асимптоты изложены, например, в [4, 8, 18, 20]). График функции $y=\dfrac{1}{x^{2n-1}}$ имеет вид, приведенный на рис. 3.19 б. Частный случай $y=\dfrac{1}{x}$, соответствующий значению $n=1$, будет рассмотрен выше.

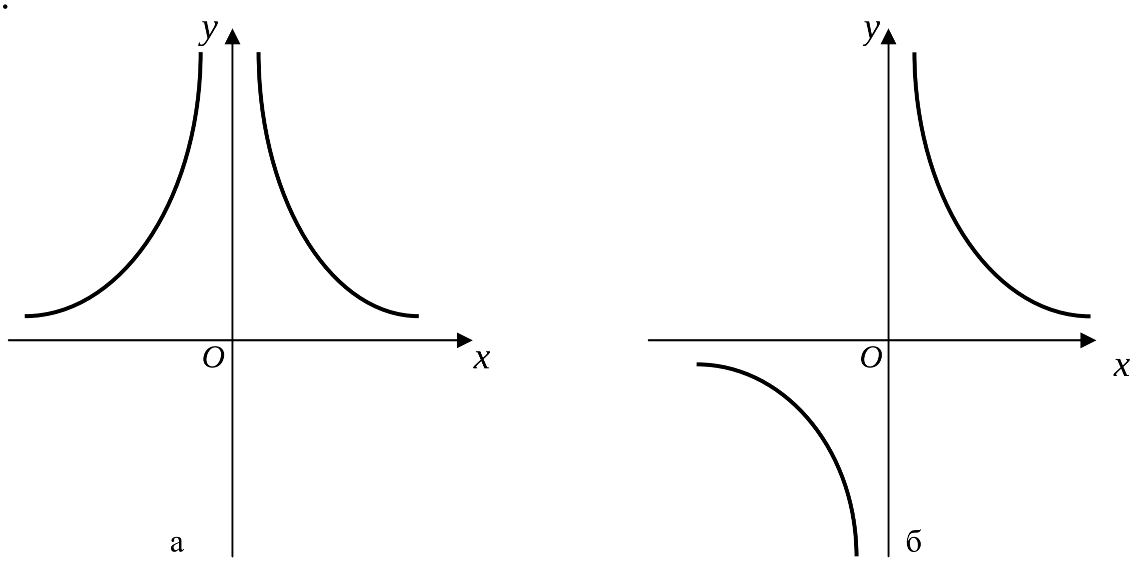


Рис. 3.19. Графики функций: а – $y=\dfrac{1}{x^{2n}}, n\in N$; б – $y=\dfrac{1}{x^{2n-1}}, n\in N$

3.3.4.5. Пусть $\alpha = r-$ рациональное число. Если $r = \frac{1}{2n}$, где $n \in N$, то $y = \sqrt[2n]{x}$. Тогда $D(y) = [0,+\infty)$, $E(y) = [0,+\infty)$ и $y = 0$ при $x = 0$. Функция возрастает при всех $x \geq 0$. График функции $y = \sqrt[2n]{x}$ получается как график обратной функции с помощью симметричного отображения относительно прямой $y = x$ правой ветви графика функции $y = x^{2n}$ (рис. 20 а.) Если $r = \frac{1}{2n+1}$, $n \in N$, то $y = \sqrt[2n+1]{x}$. Тогда $D(y) = R,$ $E(y) = R$, $y = 0$ при $x = 0$, $y < 0$ при $x < 0$ и $y > 0$ при $x > 0$. Такая функция нечетная, возрастает при всех $x \in R$. График функции $y = \sqrt[2n+1]{x}$ получается как график обратной функции, симметричный графику функции $y = x^{2n+1}$ относительно биссектрисы $y = x$ первого и третьего координатных углов (рис. 3.20 б.).

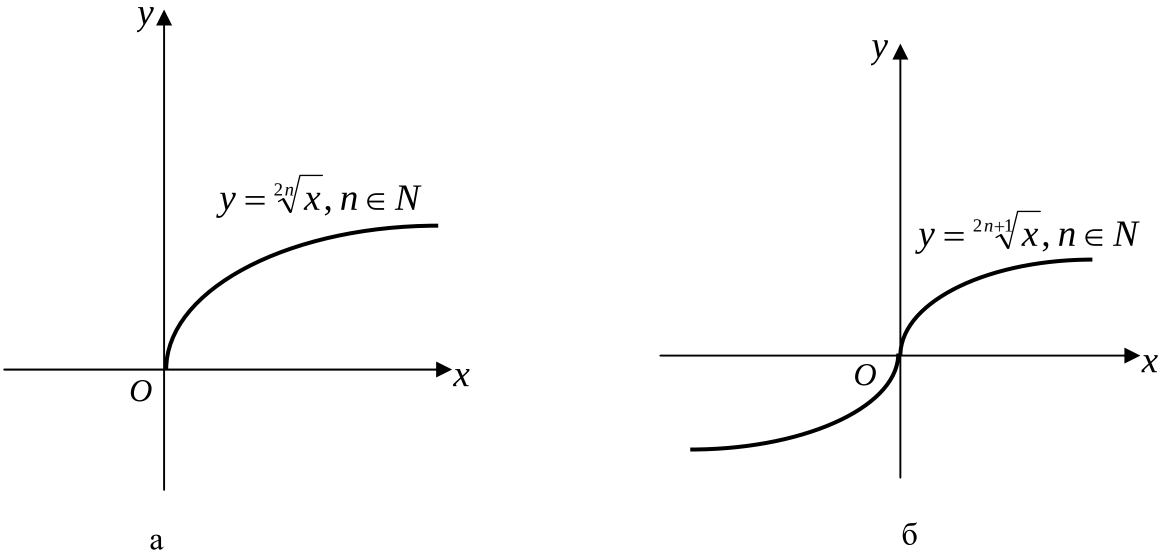
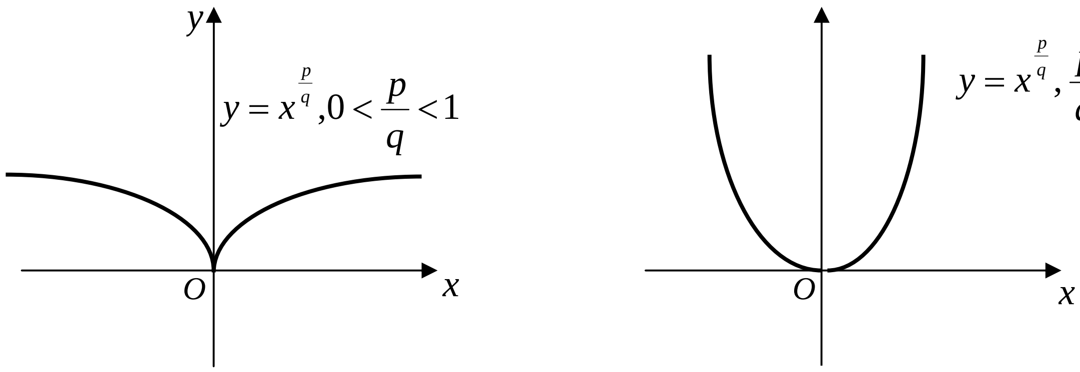


Рис. 3.20. Графики функций:

а – $y = \sqrt[2n]{x}$; б – $y = \sqrt[2n+1]{x}$

3.3.4.6. Пусть $r = \frac{p}{q}$, где p и $q-$ натуральные и взаимно простые числа. График функции $y = \sqrt[q]{x^p}$ зависит от чисел p и q. Если $p-$ четное, $q-$ нечетное, то функция $y = \sqrt[q]{x^p}$ определена на R, является неотрицательной и

$y=0$ при $x=0$. При $x<0$ она убывает, а при $x>0$ – возрастает. График функции имеет вид, изображенный на рис. 3.21 а, б.



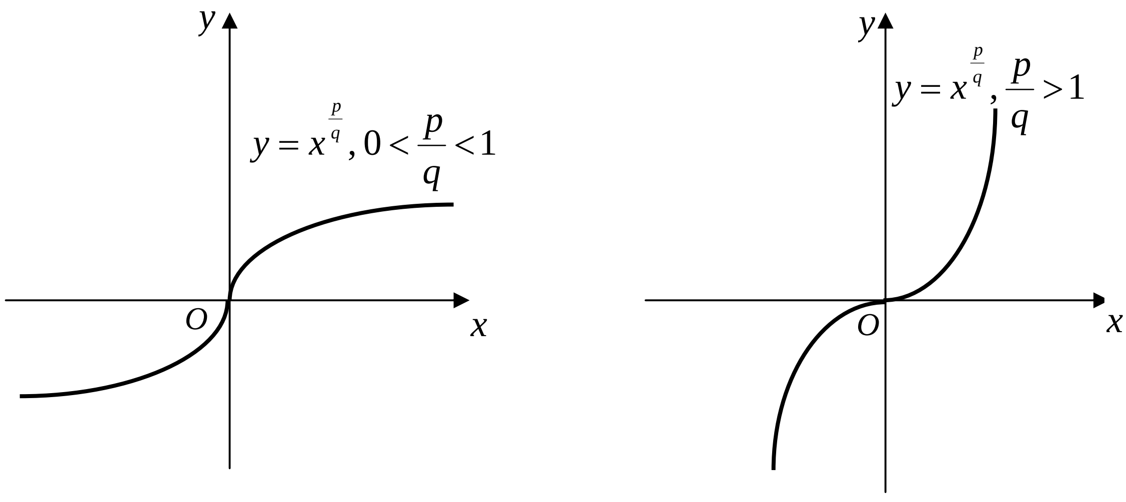
а б

Рис. 3.21. Графики функций $y=x^{\frac{p}{q}}$, p – четное, q – нечетное:

а – $0<\frac{p}{q}<1$; б – $\frac{p}{q}>1$

Если p и q – нечетные числа, то функция $y=\sqrt[q]{x^p}$ определена при $x\in R$, $E(y)=R$; $y=0$ при $x=0$, $y<0$ при $x<0$, $y>0$ при $x>0$. Функция y – нечетная, возрастающая при всех x.

График функции имеет вид, приведенный на рис. 3.22 а, б.



а б

Рис. 3.22. Графики функций $y=x^{\frac{p}{q}}$, p и q – нечетные:

а – $0<\frac{p}{q}<1$; б – $\frac{p}{q}>1$

Если $p-$ нечетное число, $q-$ четное, то функция $y=x^{\frac{p}{q}}=\left(x^p\right)^{\frac{1}{q}}=\sqrt[q]{x^p}$ определена на промежутке $\left[0,+\infty\right)$ и $y=0$ при $x=0$. Функция y возрастает при $x>0$ от 0 до $+\infty$. График функции имеет вид, приведенный на рис. 3.23 а, б.

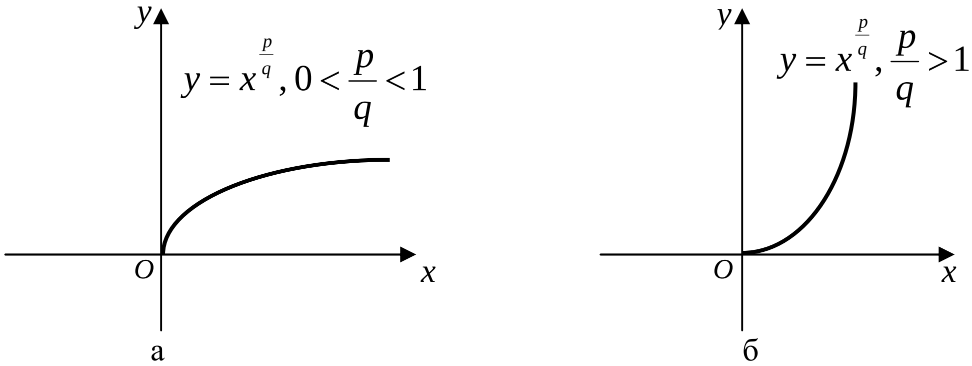


Рис. 3.23. Графики функций $y=x^{\frac{p}{q}}$, p – нечетное, q – четное:

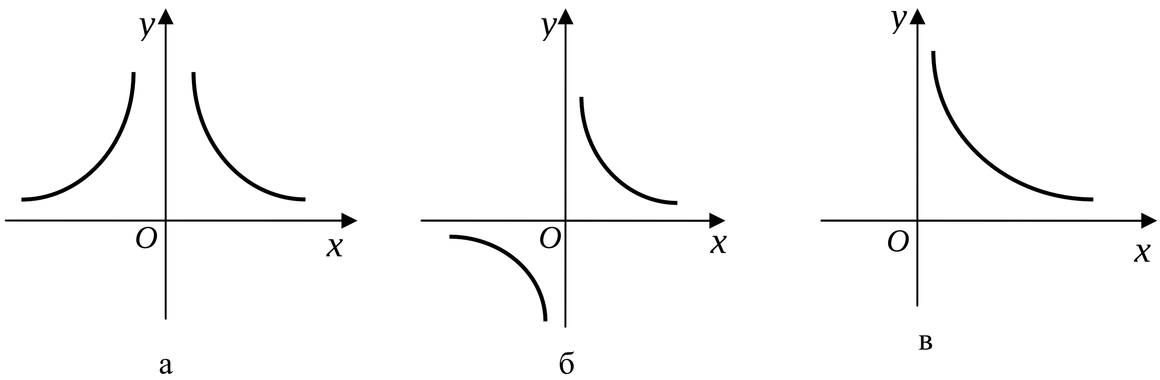
а – $0<\dfrac{p}{q}<1$; б – $\dfrac{p}{q}>1$

В частности, при $\dfrac{p}{q}=\dfrac{3}{2}$ имеем $y=x^{3/2}$ (или $y^2=x^3$) – ветвь полукубической параболы.

3.3.4.7. Пусть $r=-\dfrac{p}{q}$, где p и $q-$ натуральные и взаимно простые числа. Тогда $y=x^{-p/q}=\dfrac{1}{x^{p/q}}=\dfrac{1}{\sqrt[q]{x^p}}$. Если $p-$ четное, $q-$ нечетное, то $D(y)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. При этом функция $y-$ четная, знакоположительная, возрастающая при $x<0$ и убывающая при $x>0$. Координатные оси являются горизонтальной и вертикальной асимптотами графика данной функции. График изображен на рис. 3.24 а.

Если p и $q-$ нечетные числа, то $D(y)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, $E(y)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, $y<0$ при $x<0$, $y>0$ при $x>0$. Функция $y-$ нечетная, убывающая на промежутках $x \in (-\infty, 0)$ и $x \in (0, +\infty)$. Оси координат являются асимптотами графика функций (см. рис. 3.24 б).

Если p – нечетное, q – четное, то $D(y) = (0, +\infty)$, $E(y) = (0, +\infty)$. Функция убывающая, а координатные оси являются асимптотами ее графика (рис. 3.24 в).



3.24. Графики функций $y = \dfrac{1}{\sqrt[q]{x^p}}$:

а – p – четное, q – нечетное; б – p и q – нечетные;

в – p – нечетное, q –четное

3.3.4.8. Под функцией $y = x^{\alpha}$, где x положительное число, а α – иррациональный показатель, понимается предел (понятие предела является одним из базовых понятий математического анализа; смысл этого понятия подробно разъяснен в [4]) $\lim\limits_{\frac{p}{q} \to \alpha} x^{\frac{p}{q}} = x^{\alpha}$, к которому стремится последовательность чисел $x^{\frac{p}{q}}$, когда последовательность рациональных степеней $\dfrac{p}{q}$ стремится к числу α.

Функция $y = x^{\alpha}$ при $\alpha > 0$ определена для любых $x \geq 0$; $y = 0$, если $x = 0$; она знакоположительна и возрастает при $x > 0$. Графики функции имеют вид, приведенный на рис. 3.25 а, б.

При $\alpha < 0$ для функции $y = x^{\alpha}$ верны равенства: $D(y) = (0, \infty)$, $E(y) = (0, \infty)$. Эта функция убывающая и знакоположительная. График данной функции имеет вид, изображенный на рис. 3.25 в.

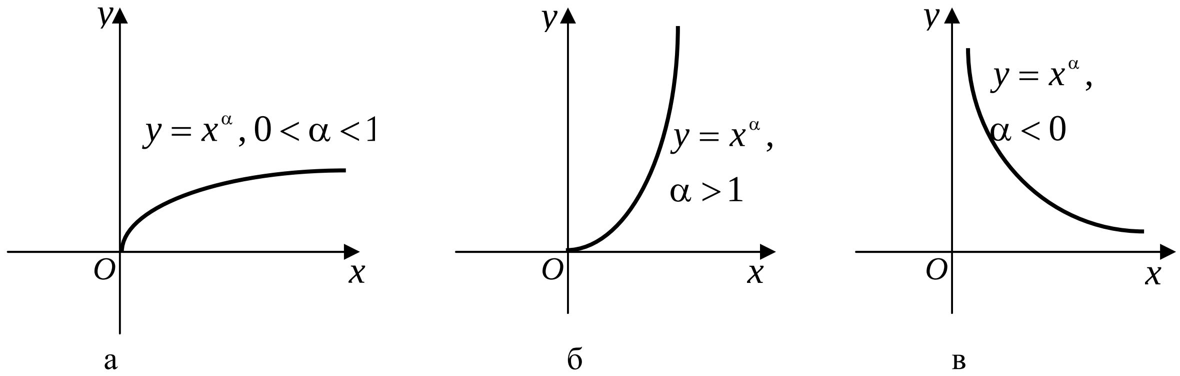


Рис. 3.25. Графики функций $y = x^{\alpha}$, α – иррациональное число:

а – $0 < \alpha < 1$; б – $\alpha > 1$; в – $\alpha < 0$

Важно подчеркнуть, что всюду выше в случаях, когда степенная функция многозначная, рассматривались только их главные ветви.

3.3.5. Показательная и логарифмическая функции. Преобразование показательных и логарифмических выражений

3.3.5.1. *Показательной функцией* называется функция, заданная формулой $y = a^{x}$, где a – некоторое положительное число, не равное единице, x – независимая переменная. Данная функция обладает следующими свойствами:

1) $D(y) = R$ – область определения функции;

2) $E(y) = (0, +\infty)$ – область значений функции;

3) функция является непериодической;

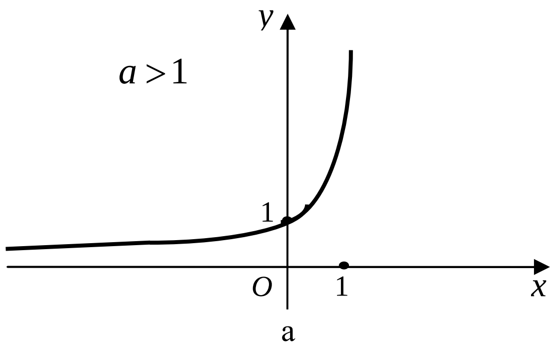
4) $a^{x} > 0$ для всех $x \in R$, причем при $x = 0$ $a^{0} = 1$;

5) при $a>1$ функция возрастает от 0 до $(+\infty)$ (значения, равного нулю, она не принимает) для всех $x \in R$; если $x>0$, то $a^x>1$, если же $x<0$, то $0<a^x<1$; при $0<a<1$ функция убывает от $(+\infty)$ до 0, не достигая 0, для всех конечных $x \in R$; если же $x>0$, то $0<a^x<1$, если $x<0$, то $a^x>1$;

6) функция не имеет минимумов и максимумов (экстремумов).

Частным случаем показательной функции является функция $y=\mathrm{e}^x$, где число е = 2,718281828… имеет смысл основания натуральных логарифмов (см. ниже).

Графики функции $y=a^x$ изображены на рис. 3.26 а, б.



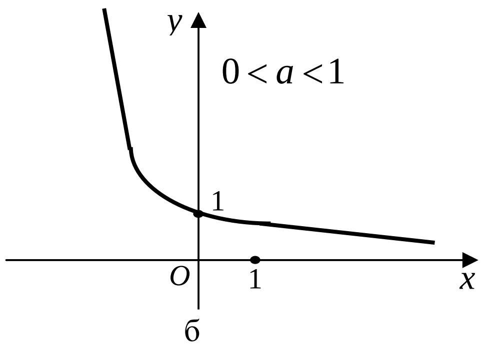


Рис. 3.26. Графики функции $y=a^x$:

а – $a>1$; б – $0<a<1$

3.3.5.2. *Логарифмом* $\log_a b$ числа b по основанию a, где $a>0, a\neq 1$, $b>0$ называется показатель степени, в которую надо возвести основание a, чтобы получить число b.

Имеет место основное логарифмическое тождество:

$$a^{\log_a b}=b, \text{ где } a>0, a\neq 1, b>0.$$

Это тождество равносильно равенствам $a^c=b$ и $\log_a b=c$, где $a>0, a\neq 1, b>0$.

Логарифм $\lg b = \log_{10} b$ числа b по основанию 10 называют десятичным. Логарифм по основанию е называют натуральным и обозначают $\ln b$, т.е. $\log_{e} b = \ln b$.

Логарифмы обладают следующими свойствами (при условии, что $a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0$):

$$\log_a 1 = 0; \qquad \log_a a = 1;$$

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c;$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c;$$

$$\log_a b^p = p \log_a b; \qquad \log_{a^p} b = \frac{1}{p} \log_a b;$$

$$\log_{a^n} b^m = \frac{m}{n} \log_a b; \qquad a^{\log_b c} = c^{\log_b a},\ b \neq 1;\ c \neq 1;$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a},\ c \neq 1; \qquad \log_a b = \frac{1}{\log_b a},\ b \neq 1.$$

3.3.5.3. *Логарифмической функцией* называется функция, заданная формулой $y = \log_a x$, где $a -$ некоторое положительное число, не равное единице, $x -$ независимая переменная.

Логарифмическая и показательная функции при одном и том же основании являются взаимно обратными.

При преобразовании выражений, содержащих логарифмические функции, используются такие соотношения:

$$\log_a \left(f(x) \cdot g(x) \right) = \log_a |f(x)| + \log_a |g(x)|,$$

$$\log_a \frac{f(x)}{g(x)} = \log_a |f(x)| - \log_a |g(x)|,$$

$$\log_a\left(f(x)\right)^{2k} = 2k\cdot\log_a\left|f(x)\right|,$$

где $a>0,\ a\neq1,\ f(x)\cdot g(x)>0,\ k\in Z.$

Имеют место следующие свойства логарифмических функций:

1) $D(y)=(0,+\infty)$; 2) $E(y)=R$;

3) логарифмическая функция является функцией общего вида, непериодическая;

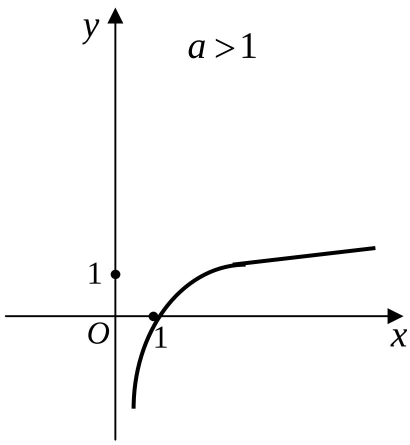
4) число $x=1$ является нулем функции; при $a>1$ $\log_a x>0$ для всех $x>1$ и $\log_a x<0$ для $0<x<1$; при $0<a<1$ $\log_a x>0$ для $0<x<1$ и $\log_a x<0$ для $x>1$;

5) при $a>1$ логарифмическая функция возрастает от $(-\infty)$ до $(+\infty)$ для всех $x>0$; при $0<a<1$ эта функция убывает от $(+\infty)$ до $(-\infty)$ для всех $x<0$;

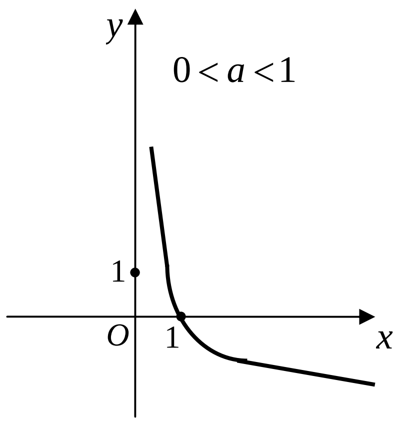
6) данная функция не имеет экстремумов.

Важным частным случаем логарифмической функции является функция $y=\ln x$.

Графики функции $y=\log_a x$ изображены на рис. 3.27 а, б.



а



б

Рис. 3.27. Графики функции $y=\log_a x$:

а – $a>1$; б – $0<a<1$

3.3.6.Тригонометрческие функции

3.3.6.1. Тригонометрческие функции угла α

Плоская фигура, состоящая из двух различных лучей с общим началом и ограниченной ими части плоскости, называется углом.

Отметим на оси OX справа от точки O (начало координат) точку A и проведем через нее окружность с центром в точке O (рис. 3.28).

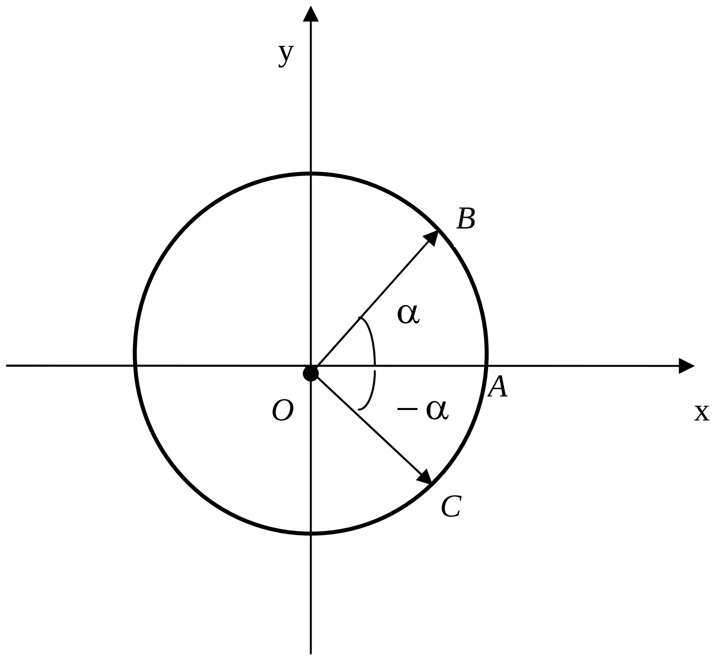


Рис. 3.28. Изображение углов α и $-\alpha$
в системе координат OXY на плоскости

Если повернуть радиус OA около точки O против часовой стрелки, то угол поворота считают положительным, а если повернуть по часовой стрелки – отрицательным.

За единицу измерения углов и дуг принимают соответственно угол в 1 градус и дугу в 1 градус (обозначают 1^o). Угол в 1^o – это угол, который опишет радиус OA, совершив $\frac{1}{360}$ часть полного оборота вокруг своей начальной точки O против часовой стрелки.

Напомним, что $\frac{1}{60}$ часть градуса называется минутой (обозначают $1'$), а $\frac{1}{60}$ часть минуты называется секундой (обозначают $1''$).

Величину угла также измеряют в радианах.

Угол в 1 радиан есть по определению угол, опирающийся на дугу окружности, длина которой равна радиусу этой окружности.

Если радиус OA совершит один полный оборот, то получится угол, равный 360^o или 2π радиан.

Радианная мера 1^o равна $\frac{\pi}{180}$. Если угол содержит n^o, то его радианная мера равна $\alpha = \frac{\pi n}{180}$. Угол, равный α радианам, содержит число градусов, которое равно $n^o = \frac{180\alpha}{\pi}$.

Рассмотрим единичную окружность, т.е. окружность с центром в начале координат и радиусом R, равным 1 (рис. 3.29).

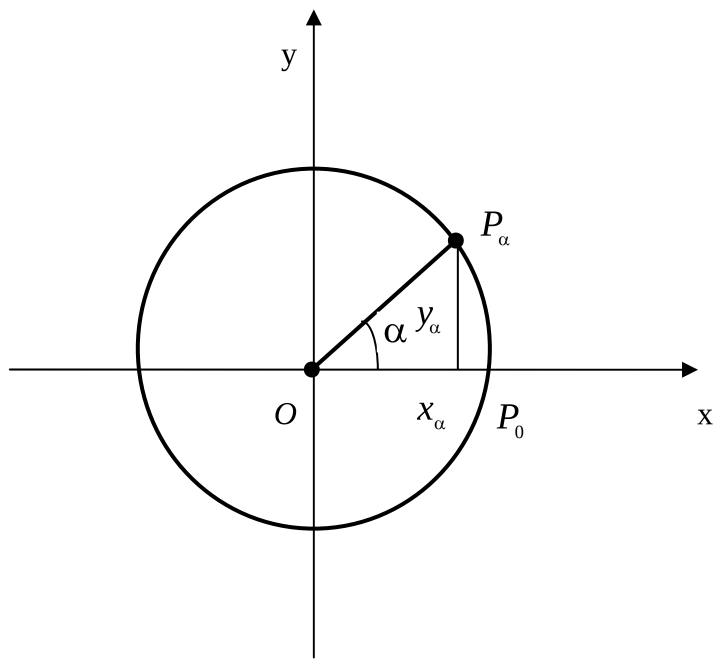


Рис. 3.29. Тригонометрические функции угла α

На окружности отметим точку $P_0(1;0)$. При повороте радиуса OP_0 около центра O на угол α радиан точка $P_0(1;0)$ перейдет в некоторую точку $P_\alpha(x_\alpha; y_\alpha)$.

Синусом угла α называется отношение ординаты точки P_α к радиусу. Таким образом,

$$\sin\alpha = \frac{y_\alpha}{R} = y_\alpha, \text{ если } R = 1.$$

Косинусом угла α называется отношение абсциссы точки P_α к радиусу. Таким образом,

$$\cos\alpha = \frac{x_\alpha}{R} = x_\alpha, \text{ если } R = 1.$$

Тангенсом угла α называется отношение ординаты точки P_α к ее абсциссе

$$tg\,\alpha = \frac{y_\alpha}{x_\alpha}, \quad \alpha \neq 90^o + 180^o n \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n\right), \quad n \in Z.$$

Котангенсом угла α называется отношение абсциссы точки P_α к ее ординате

$$ctg\,\alpha = \frac{x_\alpha}{y_\alpha}, \quad \alpha \neq 180^o n \quad (\alpha \neq \pi n), \quad n \in Z.$$

Секансом угла α называется величина, обратная $\cos\alpha$, т.е.

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \ \cos\alpha \neq 0.$$

Косекансом угла α называется величина, обратная $\cos\alpha$, т.е.

$$\text{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}, \ \sin\alpha \neq 0.$$

Отметим, что определенные выше величины называют тригонометрическими функциями угловой величины α.

Знаки, которые принимают значения тригонометрических функций в координатных четвертях изображен на следующих рис. 3.30:

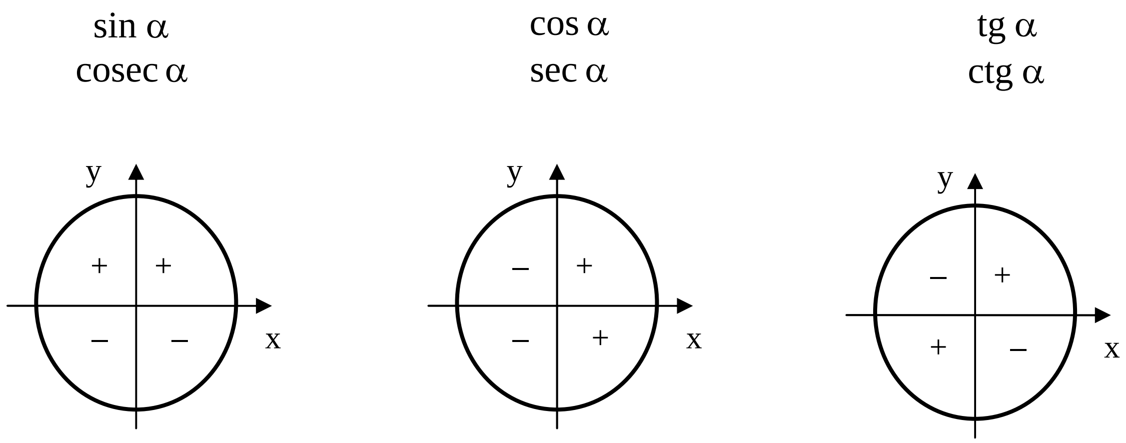


Рис. 3.30. Знаки тригонометрических функций в четвертях координатной плоскости

3.3.6.2. Основные тригонометрические тождества

Тригонометрические функции удовлетворяют следующим основным тригонометрическим тождествам:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\qquad \alpha\in R,$$

$$\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha},\qquad \cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha},$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\qquad x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\qquad n\in Z,$$

$$\mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\qquad x\neq\pi n,\qquad n\in Z,$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha=1,\qquad x\neq\frac{\pi}{2}n,\qquad n\in Z,$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{1}{\mathrm{ctg}\,\alpha},\qquad \mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha},\qquad x\neq\frac{\pi}{2}n,\qquad n\in Z,$$

$$1+\mathrm{tg}^2\,\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}=\sec^2\alpha,\qquad x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\qquad n\in Z,$$

$$1+\mathrm{ctg}^2\,\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}=\mathrm{cosec}^2\,\alpha,\qquad x\neq\pi n,\qquad n\in Z.$$

Ряд значений углов тригонометрических функций можно представить в явной форме (см. табл. 3.1).

Таблица 3.1

Значения тригонометрических функций

Аргумент α		Функции			
градусы	радианы	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$
0°	0	0	1	0	не существует
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	не существует	0
120°	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
135°	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
150°	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
180°	π	0	-1	0	не существует
210°	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
225°	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
240°	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	не существует	0
300°	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
315°	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
330°	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
360°	2π	0	1	0	не существует

3.3.6.3. Формулы приведения

Формулами приведения называют соотношения, с помощью которых значения тригонометрических функций аргументов $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$ выражаются через значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$, $\mathrm{ctg}\alpha$.

Все формулы приведения можно свести в табл. 3.2:

Таблица 3.2

Формулы приведения

Функция α	Аргумент α							
	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2\pi - \alpha$	$2\pi + \alpha$
$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	− tgб	$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	− tgб	$\mathrm{tg}\alpha$
$\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	− tgб	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	− tgб	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$

При преобразовании тригонометрических выражений полезно использовать следующие правила приведения:

а) при переходе от функций углов $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ к функциям угла α название функции изменяют: синус на косинус, тангенс на котангенс и наоборот; при переходе от функций углов $\pi \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$ к функциям угла α название функции сохраняют;

б) считая α острым углом (т.е. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$), перед функцией угла α ставят такой знак, какой имеет приводимая функция углов $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$.

3.3.6.4. Формулы сложения

Имеют место следующие равенства:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\mathrm{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\text{tgб} \pm \mathrm{tg}\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}, \quad \mathrm{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{1 \mp \mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}\alpha \pm \mathrm{tg}\beta}.$$

3.3.6.5. Формулы двойного и половинного угла

Справедливы такие соотношения:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1,$$

$$\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \qquad \alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, \qquad n \in Z.$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2}, \qquad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2},$$

$$\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}, \qquad \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}, \ \alpha \neq \pi n, \quad n \in Z.$$

3.3.6.6. Формулы преобразования суммы функций в произведение и произведения функций в сумму

Эти формулы сводятся, в основном, к следующим тождествам:

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha \pm \beta}{2}\cos\frac{\alpha \mp \beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\mathrm{tg}\alpha \pm \mathrm{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \qquad \begin{matrix} \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k \\ \beta \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n \end{matrix}, \qquad \begin{matrix} k \in Z \\ n \in Z \end{matrix};$$

$$\mathrm{ctg}\alpha \pm \mathrm{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha \sin\beta}, \qquad \begin{matrix} \alpha \neq \pi k \\ \beta \neq \pi n \end{matrix}, \qquad \begin{matrix} k \in Z \\ n \in Z \end{matrix};$$

$$a \cdot \sin\alpha + b \cdot \cos\alpha = r \cdot \sin(\alpha + \varphi),$$

где $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, аргумент φ определяется из условий

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2},$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2},$$

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2},$$

$$\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{\mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{ctg}\beta}, \qquad \mathrm{ctg}\alpha\mathrm{ctg}\beta = \frac{\mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{ctg}\beta}{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}.$$

3.3.6.7. Формулы универсальной тригонометрической подстановки

Формулами универсальной тригонометрической подстановки называют такие соотношения:

$$\sin\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \qquad \alpha \neq \pi + 2\pi n, \quad n \in Z;$$

$$\cos\alpha = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \qquad \alpha \neq \pi + 2\pi n, \quad n \in Z;$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \qquad \alpha \ne \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad \alpha \ne \pi + 2\pi n, \quad n \in Z;$$

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}, \qquad \alpha \ne \pi n, \quad n \in Z.$$

3.3.6.8. Графики и некоторые общие свойства тригонометрических функций

Функция $y = \sin x$ характеризуется такими общими свойствами:

1) $D(y) = R$, 2) $E(y) = [-1;1]$, следовательно, синус – функция ограниченная;

3) функция нечетная, т.е. $\sin(-x) = -\sin x$;

4) функция периодическая с наименьшим положительным периодом 2π, т.е. $\sin(x + 2\pi) = \sin x$;

5) $\sin x = 0$ при $x = \pi n$, $n \in Z$;

6) $\sin x > 0$ для всех $x \in (2\pi n, \pi + 2\pi n)$;

$\sin x < 0$ для всех $x \in (\pi + 2\pi n, 2\pi + 2\pi n)$, $n \in Z$;

7) функция возрастает от –1 до 1 на промежутках $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$ и убывает от 1 до –1 на промежутках $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$;

8) функция принимает наибольшее значение, равное 1, в точках $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ и наименьшее значение, равное –1, в точках $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$.

График функции $y = \sin x$ имеет вид:

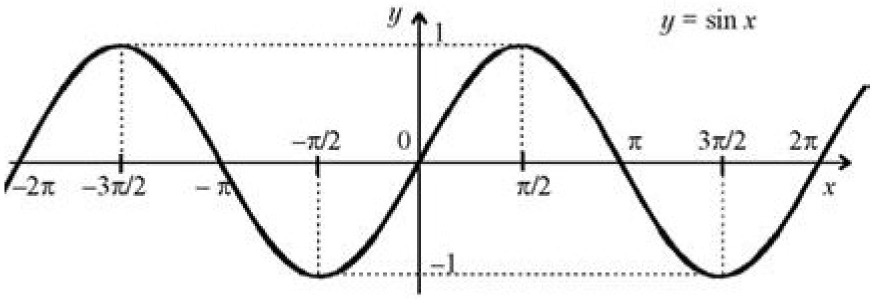


Рис. 3.31. График функции $y = \sin x$

Функция $y = \cos x$ обладает следующими общими свойствами:

1) $D(y) = R$, 2) $E(y) = [-1;1]$, значит, косинус – функция ограниченная;

3) функция четная: $\cos(-x) = \cos x$;

4) функция периодическая с наименьшим положительным периодом 2π, т.е. $\cos(x + 2\pi) = \cos x$;

5) $\cos x = 0$ при $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$;

6) $\cos x > 0$ для всех $x \in (-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n)$;

$\cos x < 0$ для всех $x \in (\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n)$, $n \in Z$;

7) функция возрастает от –1 до 1 на промежутках $[-\pi + 2\pi n; 2\pi n]$ и убывает от 1 до –1 на промежутках $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$, $n \in Z$;

8) функция принимает наибольшее значение, равное 1, в точках $x = 2\pi n$ и наименьшее значение, равное –1, в точках $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$.

График функции $y = \cos x$ имеет вид:

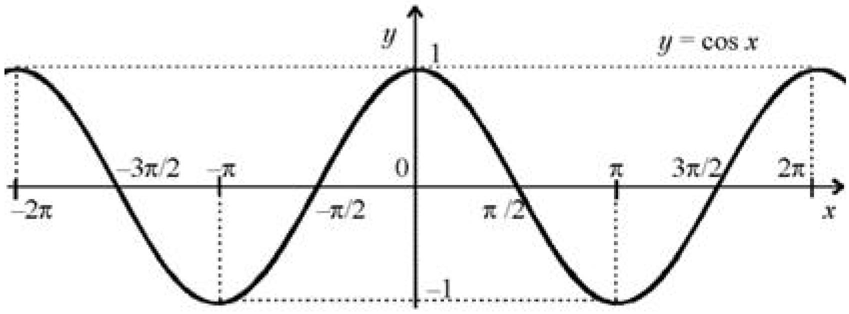


Рис. 3.32. График функции $y = \cos x$

Функция $y = \mathrm{tg}x$ определена при всех x, кроме чисел вида $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in Z$. Область значений $E(y) = R$, т.е. функция неограниченная. Функция $y = \mathrm{tg}x$ нечетная, т.е. $\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}x$ для $x \in D(y)$. Она является периодической с наименьшим положительным периодом $T = \pi$, т.е. $\mathrm{tg}(x + \pi) = \mathrm{tg}x$ для $x \in D(f)$. Кроме этого $\mathrm{tg}x = 0$ при $x = \pi n$, $n \in Z$; $\mathrm{tg}x > 0$ для всех $x \in \left(\pi n, \dfrac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$; $\mathrm{tg}x < 0$ для всех $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi n, \pi n\right)$, $n \in Z$. Функция $y = \mathrm{tg}x$ возрастает на промежутках $\left[-\dfrac{\pi}{2} + \pi n; \dfrac{\pi}{2} + \pi n\right]$, $n \in Z$. Прямые $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$ являются вертикальными асимптотами графика функции $y = \mathrm{tg}x$.График функции $y = \mathrm{tg}x$ изображен на рис. 3.33

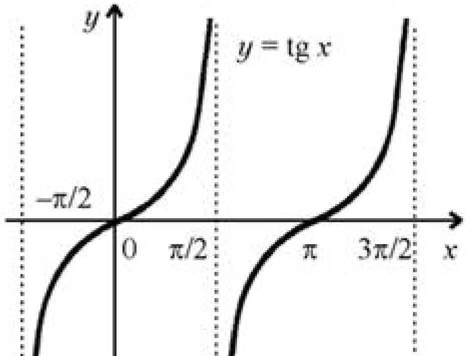


Рис. 3.33. График функции $y = tgx$

Функция $y = \mathrm{ctg}x$ определена при всех x, кроме чисел вида $x = \pi n$, где $n \in Z$. Область значений $E(y) = R$, т.е. функция неограниченная. Функция $y = \mathrm{ctg}x$ нечетная, т.е. $\mathrm{ctg}(-x) = -\mathrm{ctg}x$ для любых $x \in D(f)$, периодическая с наименьшим положительным периодом $T = \pi$, т.е. $\mathrm{ctg}(x + \pi) = \mathrm{ctg}x$ для всех

$x \in D(y)$. Имеют место соотношения $\text{ctg}x = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$; $\text{ctg}x > 0$ для всех $x \in \left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$; $\text{ctg}x < 0$ для всех $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \pi n\right)$, $n \in Z$. Функция $y = \text{ctg}x$ убывает на каждом из промежутков $[\pi n; \pi + \pi n]$, $n \in Z$. Прямые $x = \pi n$, $n \in Z$ являются вертикальными асимптотами графика этой функции. График функции $y = \text{ctg}x$ изображен на рис. 3.34

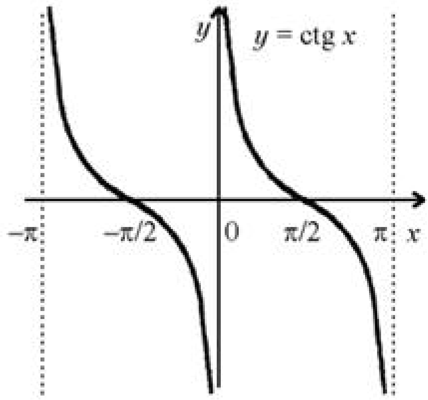


Рис. 3.34. График функции $y = \text{ctg}x$

3.3.6.9. Обратные тригонометрические функции

Функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \text{tg}\, x$, $y = \text{ctg}\, x$ в областях их определения являются периодическими функциями. В силу этого обратные им функции $y = \text{Arcsin}\, x$, $y = \text{Arccos}\, x$, $y = \text{Arctg}\, x$, $y = \text{Arcctg}\, x$ являются многозначными функциями.

Дадим определения и опишем соответствующие им главные ветви указанных обратных тригонометрических функций.

По определению арксинусом $(\arcsin a)$ числа a называется такое число α из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, для которого $\sin\alpha = a$. В соответствии с этим определением под обратной тригонометрической функцией $y = \arcsin x$ понимается однозначная функция с областью определения $D(y) = [-1, 1]$ и областью значений $E(y)=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Данная функция является нечётной и возрастающей на $D(y)$ от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. При этом $\arcsin 0 = 0$; при $x \in [-1, 0)$ $y < 0$, а при $x \in (0, 1]$ $y > 0$. График функции $y = \arcsin x$ изображён на рис. 3.35.

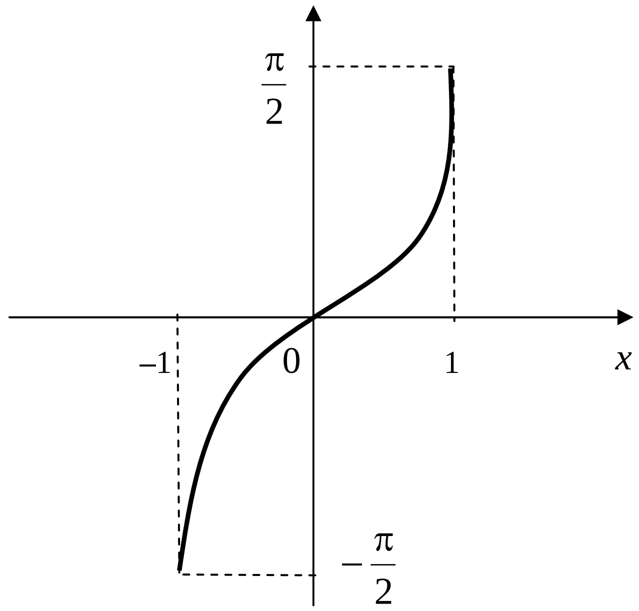


Рис. 3.35. График функции $y = \arcsin x$

Другие значения ветвей многозначной функции $y = \mathrm{Arcsin}\, x$ выражаются через главное его значение формулой $\mathrm{Arcsin}\, x = \arcsin x + 2\pi k$, $k \in Z$.

Аналогичным образом вводятся другие обратные тригонометрические функции. По определению арккосинусом $(\arccos a)$ числа a называется такое число α из отрезка $[0, \pi]$, для которого $\cos\alpha = a$. Из данного определения следует, что для функции $y = \arccos x$ имеют место отношения $D(y) = [-1, 1]$, $E(y) = [0, \pi]$. Функция $y = \arccos x$ является монотонно убывающей и убывает от π до 0 на отрезке $[-1, 1]$. При этом $\arccos 1 = 0$, $\arccos(-1) = \pi$ и $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$. График функции $y = \arccos x$ изображён на рис. 3.36

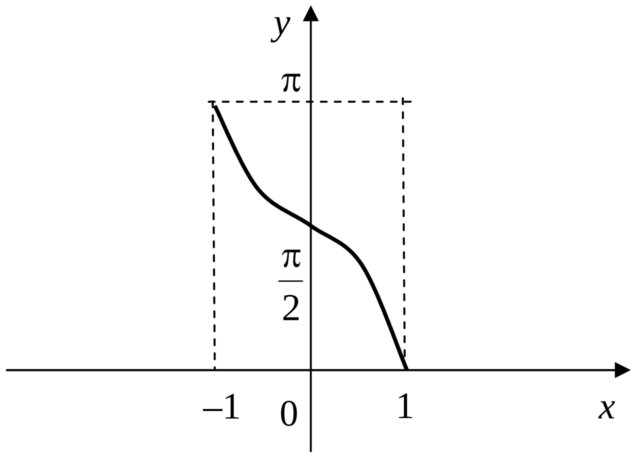


Рис. 3.36. График функции $y = \arccos x$

Другие значения ветвей многозначной функции $y = \mathrm{Arccos}\,x$ выражаются через главное его значения посредством формулы $\mathrm{Arccos}\,x = \arccos x + 2\pi k$, $k \in Z$.

По определению арктангенсом числа a ($\mathrm{arctg}\,a$) называется такое число α из интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, для которого имеет место равенство $\mathrm{tg}\alpha = a$. В соответствии с этим определением для функции $y = \mathrm{arctg}\,x$ справедливы отношения $D(y) = R$, $E(y) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Функция $y = \mathrm{arctg}\,x$ является нечётной и возрастающей от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ на интервале $(-\infty, +\infty)$. При этом $y = 0$ при $x = 0$; $y < 0$, если $x < 0$, $y > 0$, если $x > 0$. График функции, изображённый на рис. 3.37, имеет две горизонтальные асимптоты $y = -\frac{\pi}{2}$ и $y = \frac{\pi}{2}$.

Другие значения ветвей многозначной функции $y = \mathrm{Arctg}\,x$ выражаются через главное его значение посредством формулы $\mathrm{Arctg}\,x = \mathrm{arctg}\,x + k\pi$, $k \in Z$.

По определению арккотангенсом $(\mathrm{arcctg}\,a)$ числа a называется такое число α из интервала $(0, \pi)$, для которого $\mathrm{ctg}\,\alpha = a$. В соответствии с этим определением для функции $y = \operatorname{arcctg} x$ имеют место соотношения $D(y) = R$, $E(y) = (0, \pi)$. Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ убывает от π до 0 на всей области определения. При этом верно равенство $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$. Прямые $y = 0$ и $y = \pi$ являются горизонтальными асимптотами [4] графика функции. График изображён на рис. 3.38.

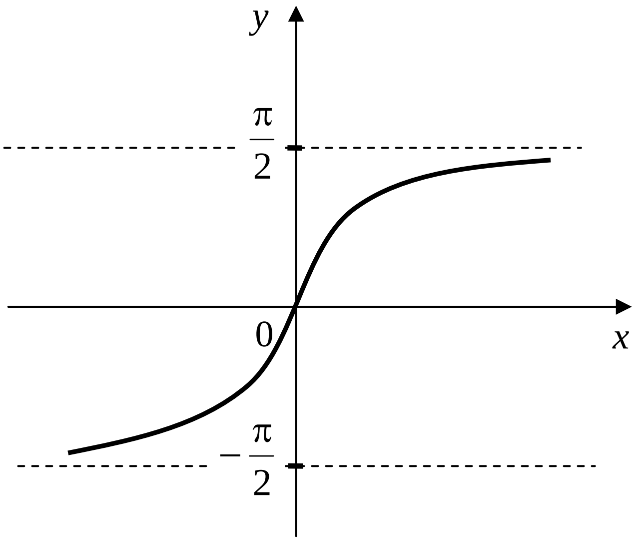


Рис. 3.37. График функции $y = \operatorname{arctg} x$

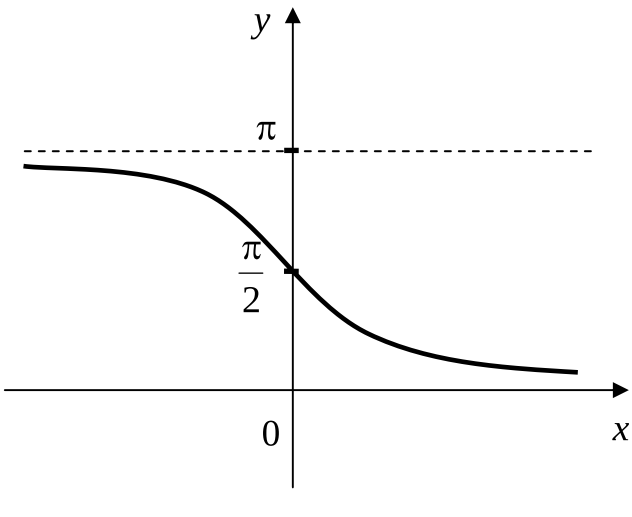


Рис. 3.38. График функции $y = \operatorname{arcctg} x$

Другие значения ветвей многозначной функции $y = \operatorname{Arcctg} x$ выражают через главное значение посредством формулы $\operatorname{Arcctg} x = \operatorname{arcctg} x + k\pi$, $k \in Z$.

Для обратных тригонометрических функций при всех допустимых значениях аргумента *x* справедливы следующие тождества:

$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, если $|x| \le 1$;

$\sin(\arcsin x) = x$, если $-1 \le x \le 1$;

$\cos(\arccos) = x$, если $-1 \le x \le 1$;

$\arcsin(\sin x) = x$, при $|x| \le \frac{\pi}{2}$;

$\arccos(\cos x) = x$, при $0 \le x \le \pi$;

$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$;

$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$, $x \in R$;

$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$, $x \in R$;

$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$, если $|x| < \frac{\pi}{2}$;

$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x$, если $0 < x < \pi$.

3.3.7. Гиперболические функции, обратные гиперболические функции

Гиперболический синус является функцией, которая задаётся аналитическим выражением $y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, в котором $D(y) = R$ и $E(y) = R$. Функция $y = \operatorname{sh} x$ нечётная, монотонно возрастающая от $-\infty$ до $+\infty$. При этом $\operatorname{sh} x = 0$ при $x = 0$, $\operatorname{sh} x < 0$ при $x < 0$, $\operatorname{sh} x > 0$ при $x > 0$. График функции (см. рис. 3.39) центрально симметричен относительно начала координат. Точка $(0, 0)$ является точкой перегиба кривой.

Гиперболический косинус определяется посредством формулы $y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, в которой $D(y) = R$ и $E(y) = [1, +\infty)$. Функция $y = \operatorname{ch} x$

чётная. Она в промежутке $(-\infty, 0]$ монотонно убывает от $+\infty$ до 1, а при $x \in [0, +\infty)$ монотонно возрастает от 1 до $+\infty$. Кроме этого $\operatorname{ch} x > 0$ для любых $x \in (-\infty, +\infty)$. График функции симметричен относительно оси OY (рис. 3.40).

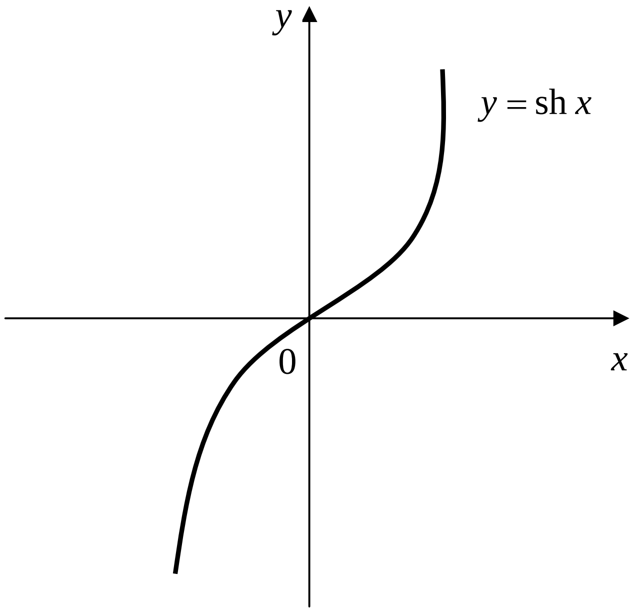


Рис. 3.39. График функции $y = \operatorname{sh} x$

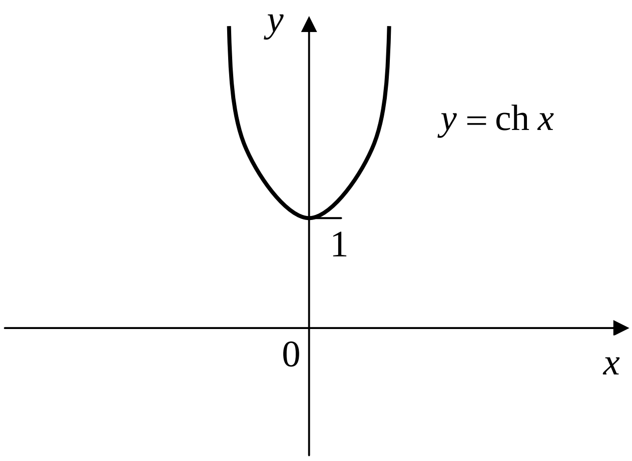


Рис. 3.40. График функции $y = \operatorname{ch} x$

Гиперболический тангенс задаётся следующим образом: $y = \operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, где $D(y) = R$ и $E(y) = (-1, 1)$. Функция $y = \operatorname{th} x$ нечётная, возрастает на $D(y)$ и $\operatorname{th} 0 = 0$. Прямые $y = \pm 1$ являются горизонтальными асимптотами графика функции (см. рис. 3.41).

Гиперболический котангенс определяется с помощью таких соотношений: $y = \operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$, $D(y) = R \setminus \{0\}$, $E(y) = R \setminus [-1, 1]$.

Функция $y = \operatorname{cth} x$ нечётная, убывает на промежутках $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$. При этом $y < -1$ при $x < 0$ и $y > 1$ при $x > 0$. Прямые $y = \pm 1$, $x = 0$ – асимптоты графика функции (см. рис. 3.42).

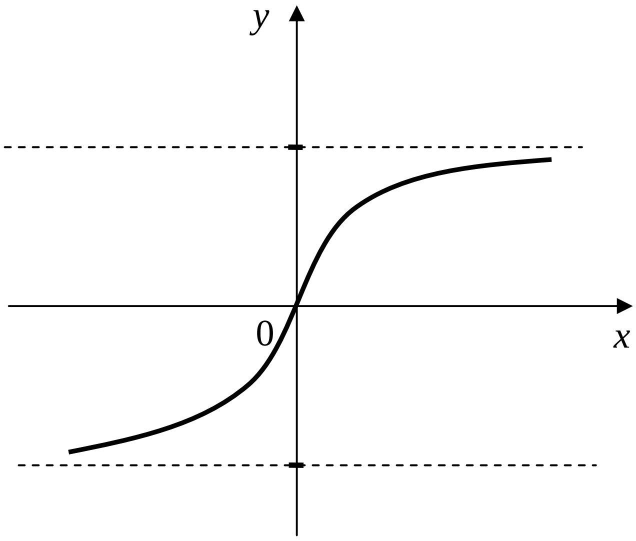


Рис. 3.41 График функции $y = \operatorname{th} x$

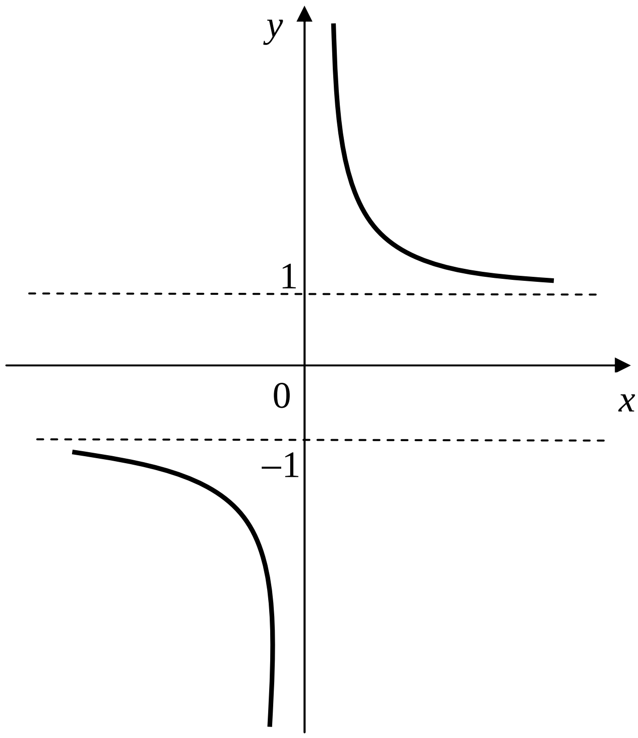


Рис. 3.42. График функции $y = \operatorname{cth} x$

Перейдём к определению обратных гиперболических функций.

Обратной функцией к гиперболическому синусу является функция $y = \operatorname{arsh} x$ (ареа – синус), для которой $D(y) = R$, $E(y) = R$. Функция $y = \operatorname{arsh} x$ нечётная и возрастает на $D(y)$. Она определяется как функция, для которой значение функции y связано со значением её аргумента y равенством $x = \operatorname{sh} y$. Используя это равенство, определение гиперболического синуса и неравенства $e^{\pm y} > 0$ (y – любое конечное вещественное число), можно доказать, что $y = \operatorname{arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$. График этой функции изображён на рис. 3.43.

Для функции $y = \operatorname{arch} x$ (ареа – косинус) имеют место отношения $D(y) = [1, +\infty)$, $E(y) = [0, +\infty)$. Данная функция возрастает на $D(y)$. Она определяется как функция, для которой значение функции y связано со значением её аргумента x равенством $x = \operatorname{ch} y$. По сути посредством использования этого равенства и определения функций $\operatorname{ch} y$ и $e^{\pm y}$ можно показать, что имеет место равенство $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) = \operatorname{arch} x$.

График функции $y = \operatorname{arch} x$ изображён на рис. 3.44

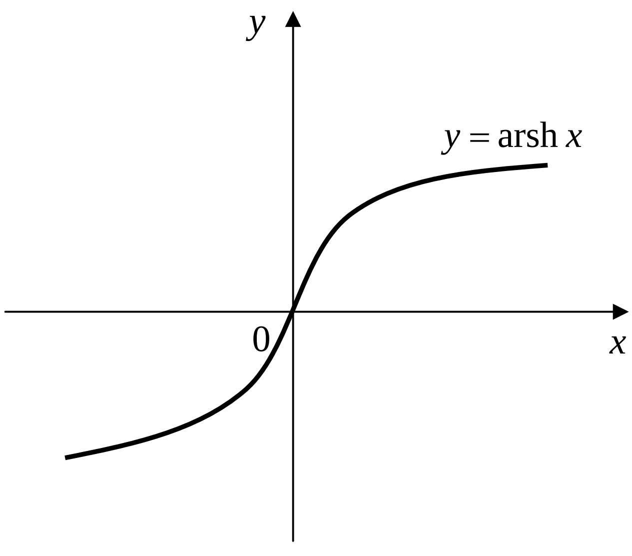


Рис. 3.43. График функции $y = \operatorname{arsh} x$

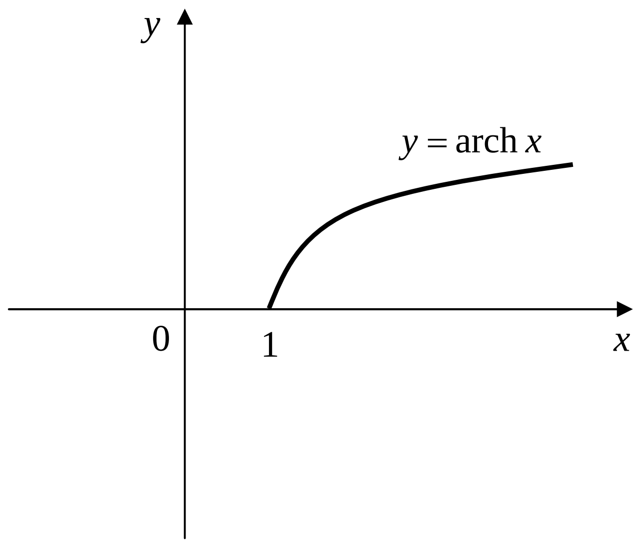


Рис. 3.44. График функции $y = \operatorname{arch} x$

Функция $y = \operatorname{arth} x$ (ареа – тангенс) характеризуется отношениями $D(y) = (-1, 1)$, $E(y) = R$. Эта функция нечётная, возрастает на $D(y)$. При этом $y = 0$ при $x = 0$, $y < 0$ при $x < 0$, $y > 0$ при $x > 0$. Данная функция определяется как функция для которой её значение y связано со значением аргумента x равенством $x = \operatorname{th} y$. Из этого равенства следует справедливость формулы $y = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = \operatorname{arth} x$. График функции $y = \operatorname{arth} x$ изображён на рис. 3.45.

Функция $y = \operatorname{arcth} x$ (ареа – котангенс) в свою очередь характеризуется отношениями $D(y) = R \setminus [-1, 1]$, $E(y) = R \setminus \{0\}$. Эта функция является нечётной, убывает на промежутках $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$. При этом $y < 0$ при $x < -1$, $y > 0$ при $x > 1$. Функция $y = \operatorname{arcth} x$ определяется как функция, для которой её значение y и её аргумент x связаны равенством $x = \operatorname{cth} y$. Из данного равенства следует истинность такого аналитического представления этой функции: $y = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} = \operatorname{arcth} x$. График функции $y = \operatorname{arcth} x$ изображён на рис. 3.46.

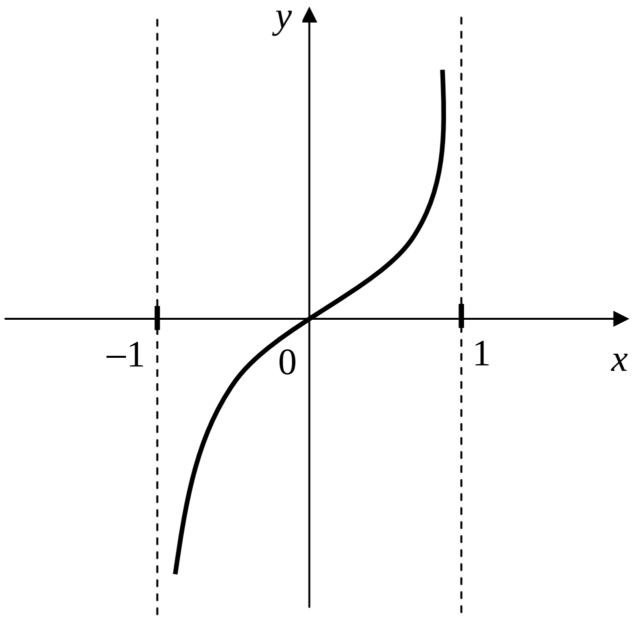


Рис. 3.45. График функции $y = \mathrm{arth}x$

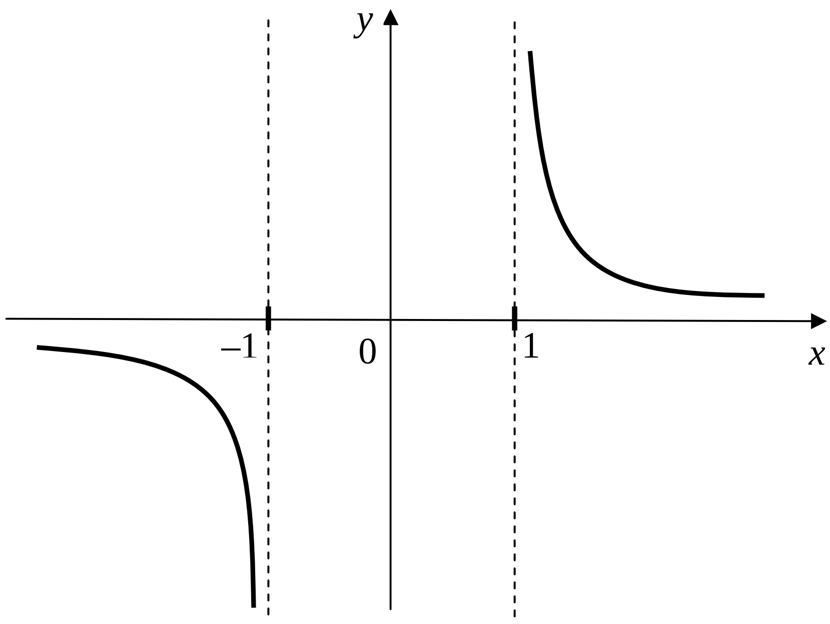


Рис. 3.46. График функции $y = \mathrm{arcth}x$

3.3.8. Функции знака, Хевисайда, Дирихле и антье

В математике при решении различных задач и записи аналитических представлений, формул, неравенств, условий и т.п. зачастую используют ряд достаточно простых и одновременно полезных функций. Дадим определения только некоторых из этих функций.

Под функцией сигнум $y = \operatorname{sgn} x$ (функция знака) понимают функцию, которая определяется следующим образом: $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, \text{ если } x < 0, \\ 0, \text{ если } x = 0, \\ 1, \text{ если } x > 0. \end{cases}$

График функции $y = \operatorname{sgn} x$ приведён на рис. 3.47.

Единичная функция Хевисайда определяется такой формулой: $y = \eta(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 0, \\ 1, \text{ если } x \geq 0. \end{cases}$

График этой функции приведён на рис. 3.48.

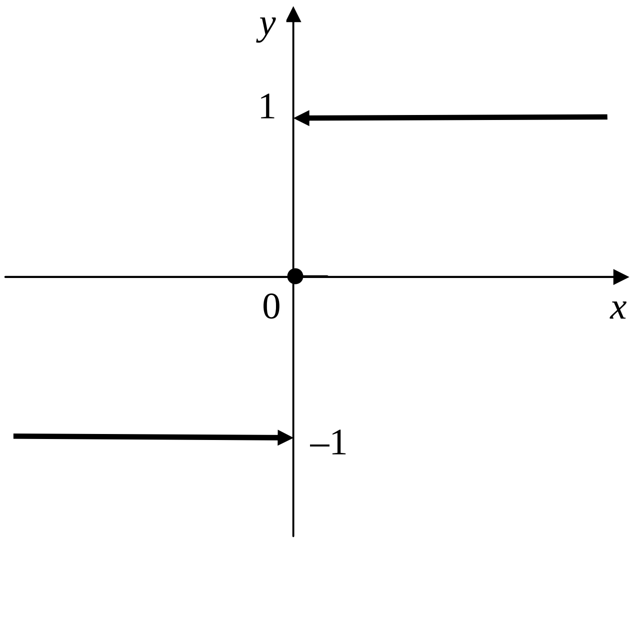


Рис. 3.47. График функции знака

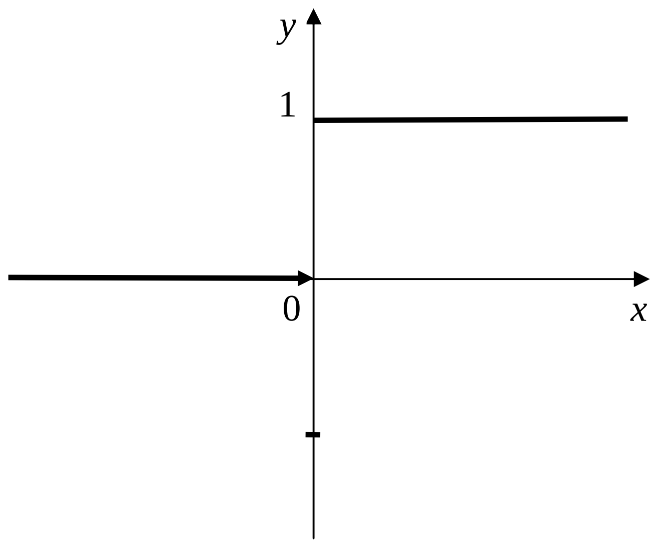


Рис. 3.48. График функции Хевисайда

Существенно более сложной функцией является функция Дирихле. Она определяется таким образом: $y = f(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x - \text{рациональное число}, \\ 0, \text{ если } x - \text{иррациональное число}. \end{cases}$

Под функцией “антье от *x*” понимается наибольшее целое число, не превосходящее *x*. Для неё используется обозначение $y = E(x)$ и она определяется равенствами $E(x) = [x] = n$, если $x \in [n, n+1),\ n \in Z$.

4. ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ ГРАФИКОВ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ РЕШЕНИИ РАЗЛИЧНЫХ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИХ ПРОБЛЕМ

4.1 Порядок исследования функций и схема построения их графиков

Отметим, что обычно в математике и ее приложениях используется следующий порядок исследования функций и построения их графиков[11]:

1) находится область определения функции;
2) определяется область значений функции;
3) выясняется является ли функция четной или нечетной функцией, а также выясняется вопрос о периодичности или не периодичности функции;
4) находятся характерные точки графика функции (точки локальных и глобальных экстремумов, точки перегиба, точки разрыва), области монотонности и выпуклости функции;
5) отыскиваются асимптоты (горизонтальные, наклонные и вертикальные) графика функции, если они существуют;
6) строится график функции с использованием информации из п.1−5 и численных значений этой функции в характерных точках.

Построение графика функции удобно выполнять параллельно с исследованием функции. Чтобы эскиз графика функции на больших по длине интервалах ее области определения, в которых нет особенностей этой функции, был более точным (уровень точности определяется сутью задачи), надо взять достаточно большое число точек и вычислить значения функции в них.

4.2 Графики простейших элементарных функций

Хотя выше был приведен целый ряд графиков основных элементарных функций, с целью более тщательного описания свойств функций и построения их графиков, которые рассматриваются в рамках школьной программы по математике, ниже приведем дополнительные сведения по этому вопросу.

4.2.1 Примеры графиков степенных функций с натуральными показателями

На рис. 4.1 представлен график прямой пропорциональности при положительном значении углового коэффициента, на рис.4.2–4.3 приводятся графики четной и нечетной степенных функций

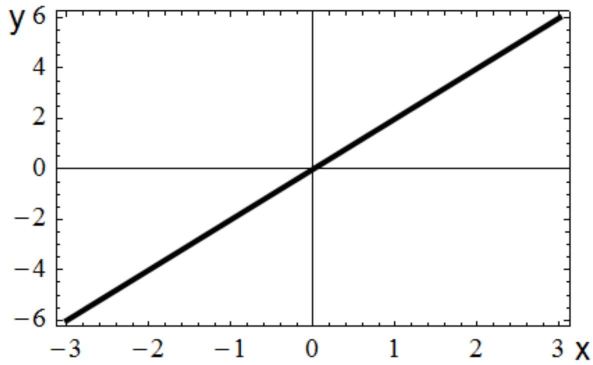


Рис.4.1. Прямая пропорциональность $y = ax, a > 0$ (на рис. $a = 2$)

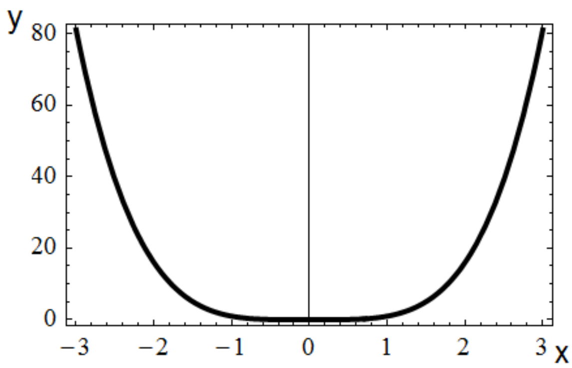


Рис.4.2. Степенная функция $y = x^{2n}, n \in \mathrm{N}$ (на рис. $n = 4$)

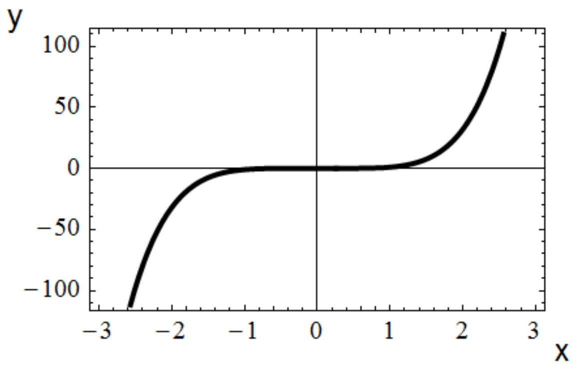


Рис.4.3. Степенная функция $y = x^{2n+1}, n \in \mathrm{N}$ (на рис. $n = 5$)

4.2.2 Примеры графиков степенных функций с рациональными показателями

На рис.4.4–4.5 представлены графики четной и нечетной степенных функций с рациональными показателями

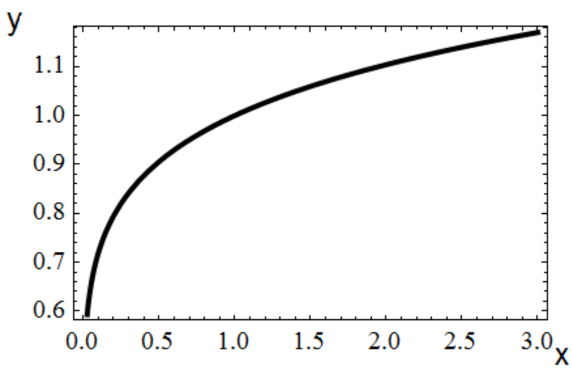


Рис.4.4. Степенная функция с положительным рациональным показателем

$y = x^{1/m}, m - нечетная$ (на рис. $m = 7$)

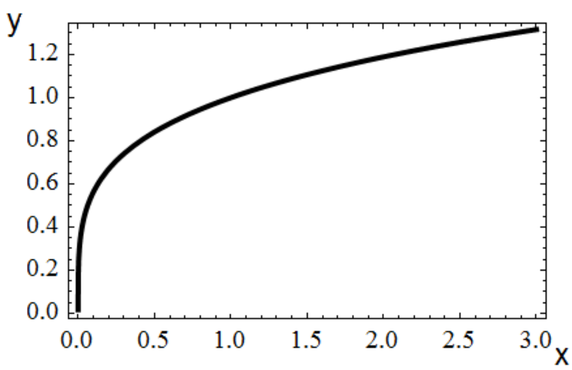


Рис.4.5. Степенная функция с положительным рациональным показателем

$y = x^{1/m}, m - четная$ (на рис. $m = 4$)

4.2.3 Примеры графиков показательных функции и логарифмической функции

На рис.4.6–4.8 приводятся графики конкретных показательной (в частности, экспоненциальной) и логарифмической функций.

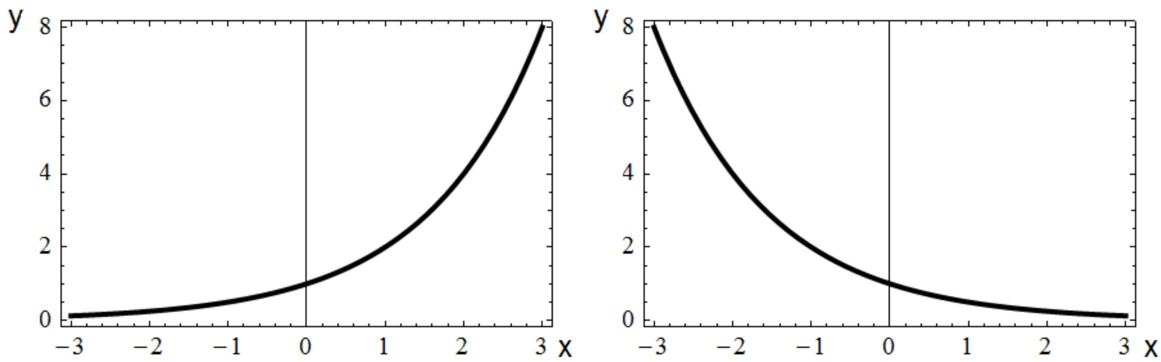


Рис.4.6. Показательная функция $y = a^x, a > 1$ (на рис. $a = 2$), $a < 1$ (на рис. $a = 1/2$)

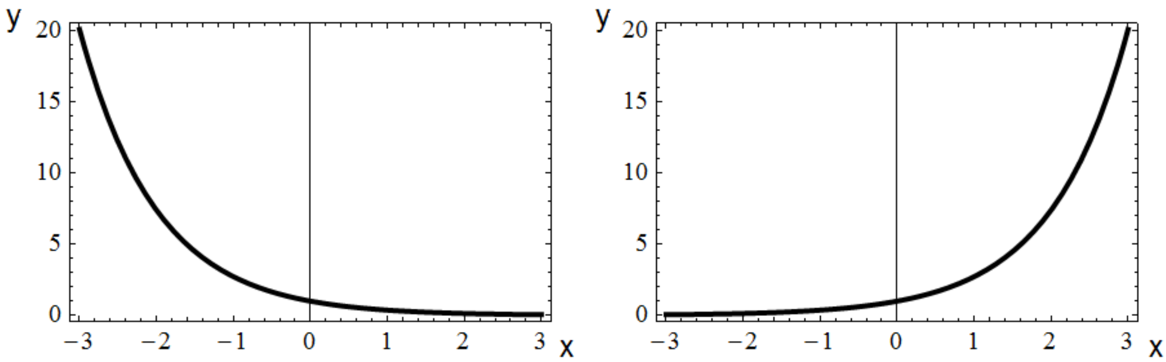


Рис.4.7. График функции $y = e^{-x}$, $y = e^x$

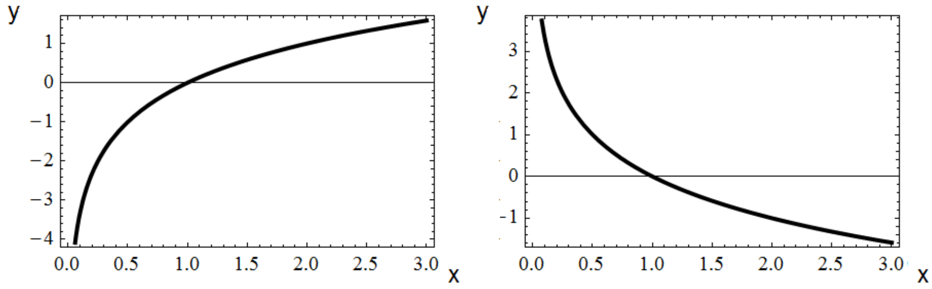


Рис.4.8. График функции $y = \log_2 x$, $y = \log_{1/2} x$

4.2.4 Части графиков синуса и косинуса

На рис.4.9 показаны части графиков основных тригонометрических функций.

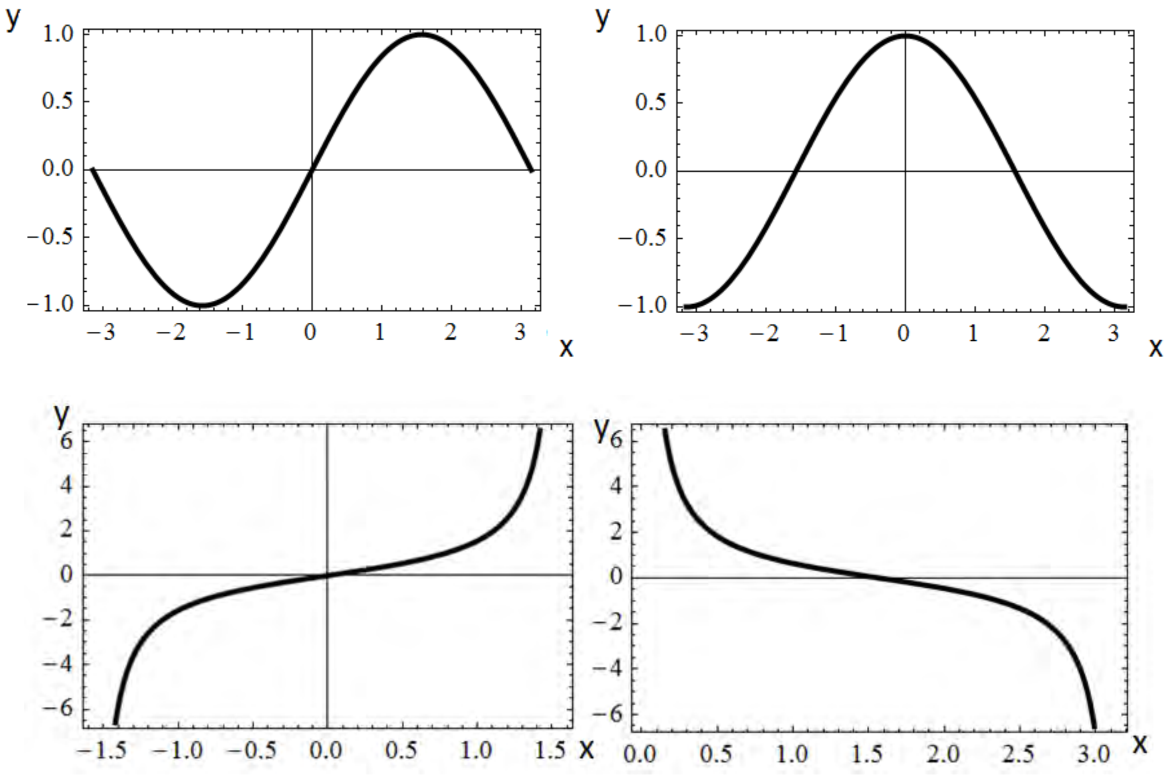


Рис.4.9. Графики функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = ctgx$

4.3 Графики параметрически заданных функций. Графики функций, содержащих знак модуля

4.3.1 Графики функций, заданных параметрически, и некоторые их научно-технические приложения

Пусть функция задана параметрически, т.е. задана с помощью системы равенств $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, t − параметр, $t \in [t_0, t_1]$. В этом случае исследование и построение графика функции проводятся, по сути, также как для функции,

заданной уравнением $y = f(x)$. Сначала строят графики $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ соответственно в системах координат OTX и OTY
($t \in T = (-\infty,+\infty); X = (-\infty,+\infty); Y = (-\infty,+\infty)$). На основе графиков функций $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, исследуют функцию $y = f(x)$ по приведенной выше схеме. Далее даны определения и построены графики такого рода функций.

Кардиоида – плоская кривая, описываемая произвольной точкой M окружности радиуса r, катящейся без проскальзывания по другой, неподвижной, окружности того же радиуса (рис.4.10–4.11). В полярной системе координат уравнение кардиоиды принимает вид $\rho = a\cos^2\dfrac{\varphi}{2}$.

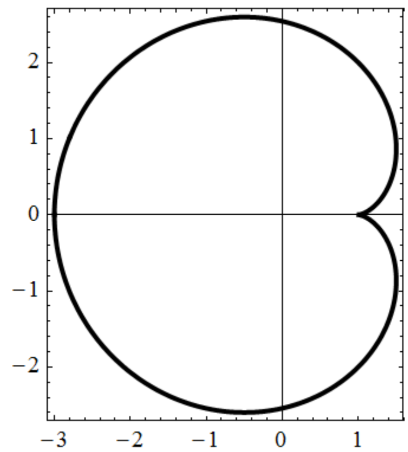


Рис.4.10. График кардиоиды в полярной системе координат для случая, когда $a = 1$

При построение графика, представленного на рис. 4.10, использовались также параметрические уравнения кардиоиды, которые имеет вид при
$t \in (-\infty,+\infty)$: $x = 2a\cos t - a\cos 2t$, $y = 2a\sin t - a\sin 2t$.

Математик И.И. Блох (математик, представлявший математическую школу Санкт - Петербургского университета) привел ряд примеров применения свойств кардиоиды. Так, изучая фотографию обратной стороны Луны, он выявил, что вершины гор и обособленные кратеры единственным образом укладываются в последовательность, представляющую собой две сопряженные кардиодические линии. Центр этого изображения совпадает с центром диска Луны, а его длина равна половине диаметра диска. Отметим, что одна из экономичных траекторий полета с одной планеты на другую планету с возвращением обратно представляет собой кардиоиду. На рис. 4.11 приведена схема построения графика кардиоиды.

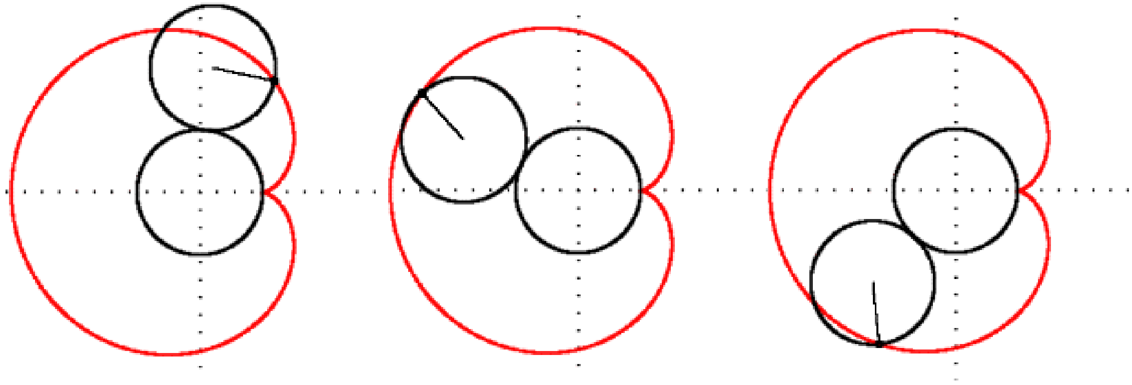


Рис.4.11. Схема построения кардиоиды

Отметим еще несколько свойств кардиоиды. Она используется как линия для вычерчивания профилей, если требуется, чтобы скользящий по профилю стержень совершал гармонические колебания. При этом скорость поступательного движения стержня будет изменяться без скачков. Этим свойством она выгодно отличается от спирали Архимеда (см. далее), у которой, благодаря постоянству скорости стержня, в конце каждого его хода происходят удары (при этом скорость скачком меняет свое направление на противоположное), что вызывает быстрое изнашивание механизма.

Одна из составных частей в механизме для поднятия и опускания железнодорожного семафора очерчена по кардиоиде. При этом скорость поднятия или опускания достигает максимального значения в середине хода семафора.

Заметим, что кардиоиду можно использовать для описания возвратно-поступательных движений стержней в двигателях.

Кроме этого, кардиоидные микрофоны можно использовать в помещениях, куда попадают посторонние шумы или где имеются звуковые отражения.

Однонаправленный микрофон («направленный») проявляет чувствительность к звуку, который приходит с одного направления, и меньшую чувствительность к остальным. Типичной картиной для таких микрофонов является кардиоидная характеристика (своеобразная диаграмма в форме кардиоиды). Наибольшая чувствительность, при этом, достигается на направлении вдоль оси микрофона, а наименьшая - в противоположном направлении. Эффективный угол работы кардиоидного микрофона составляет 130°.

Циклоида – это кривая, описываемая точкой окружности, катящейся без скольжения по прямой линии. Циклоида состоит из дуг, каждая из которых соответствует полному обороту катящегося круга(рис. 4.12–4.13).

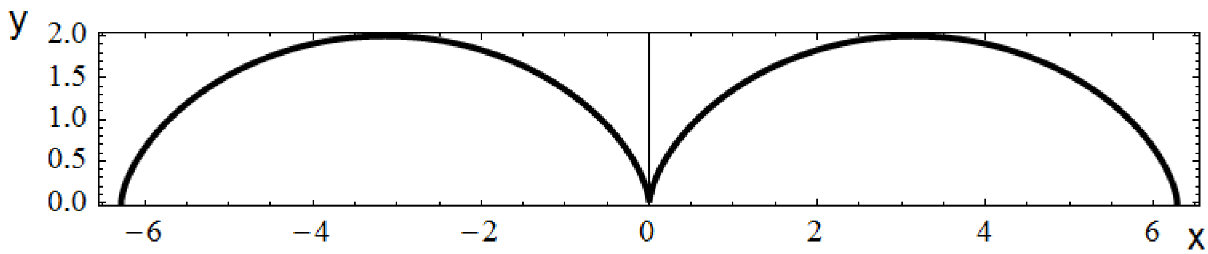


Рис.4.12. Циклоида $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ (на рис. $a = 1$)

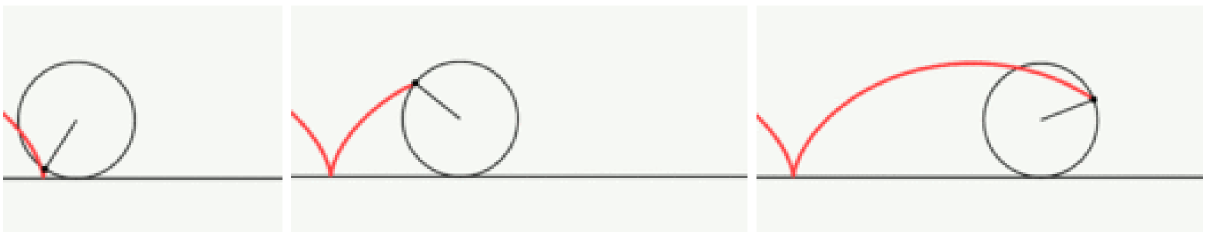


Рис.4.13. Схема построения циклоиды

Особо подчеркнем, что необходимо придать форму циклоиды отшлифованному (чтобы практически исключить трение) желобу, соединяющему две точки, чтобы шарик скатился вниз от одной точки к другой за кратчайшее время.

Циклоидальные кривые широко используются в технике и их свойства их применяются, например, при построении профилей зубьев шестерен, в циклоидальных маятниках, в оптике и т.д.

Например, заряженная электричеством частица, попадая в наложенные друг на друга стационарные электрическое и магнитное поля, движется по кривой, которая является циклоидой.

Астроида – замкнутая линия, являющаяся траекторией точки, лежащей на окружности круга радиусом r, который катится по внутренней стороне неподвижного круга радиусом a (рис. 4.14–4.15).

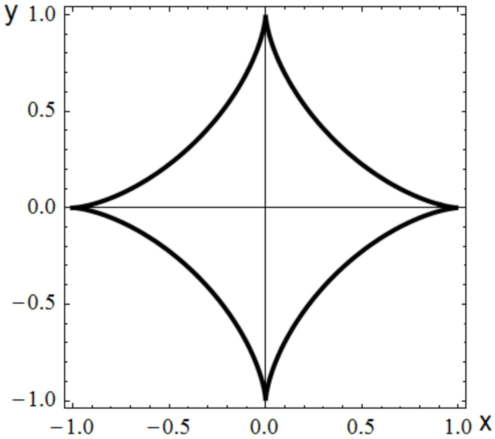


Рис.4.14. Астроида $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ (на рис $a = 1$)

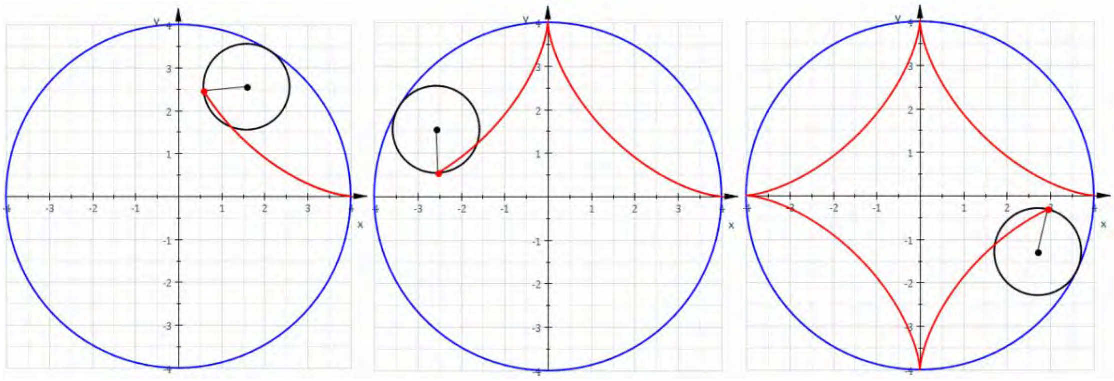


Рис.4.15. Схема построение астроиды

Уравнение астроиды в декартовой системе координат имеет вид: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = \rho^{\frac{2}{3}}$.

4.3.2 Построение графиков функций в полярной системе координат

Построение графика функции $\rho = f(\varphi)$, заданной в полярной системе координат, осуществляют так: а) строят для функции $\rho = f(\varphi)$ соответствующую функцию $y = f(x)$ б) исследуют функцию $\rho = f(\varphi)$, сравнивая с соответствующей функцией $y = f(x)$, затем выполняют построение графика функции $\rho = f(\varphi)$ по графику функции $y = f(x)$ в полярной системе координат.

Спираль Архимеда определяется как траектория точки, участвующей одновременно в двух равномерных движениях, одно из которых совершается вдоль прямой, а другое – по окружности. Данная кривая состоит из двух ветвей, одна из которых раскручивается против хода часовой стрелки и соответствует положительным значениям φ (рис. 4.16), другая – по ходу часовой стрелки и соответствует отрицательным значениям φ. Спираль Архимеда симметрична относительно перпендикуляра к полярной оси, на котором лежат точки пересечения ее ветвей. На рис. 4.17 дана иллюстрация процедуры построения этой спирали.

Спираль названа в честь известного древнегреческого ученого, математика и механика, одного из основоположников статики и гидростатики. Архимед разработал предвосхитившие интегральное исчисление методы нахождения площадей, поверхностей и объемов различных фигур и тел. В основополагающих трудах по статике и гидростатике (закон Архимеда) Архимед дал образцы применения математики в естествознании и технике. Архимеду принадлежит множество технических изобретений (архимедов винт, определение состава сплавов взвешиванием в воде, системы для поднятия больших тяжестей, военные метательные машины), завоевавших ему необычайную популярность среди современников.

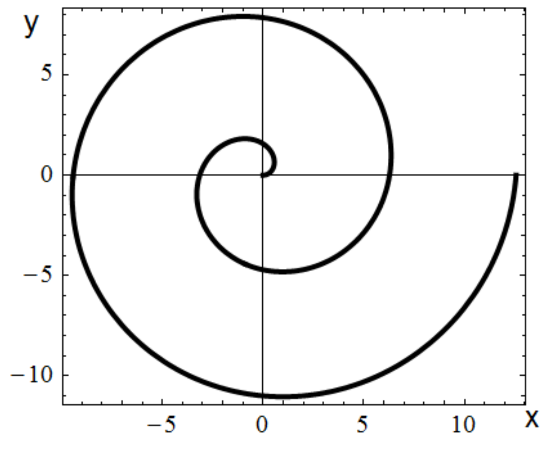


Рис.4.16. Спираль Архимеда $\rho = a\varphi$ (на рис. $a = 1$; $\varphi \in [0, 4\pi]$)

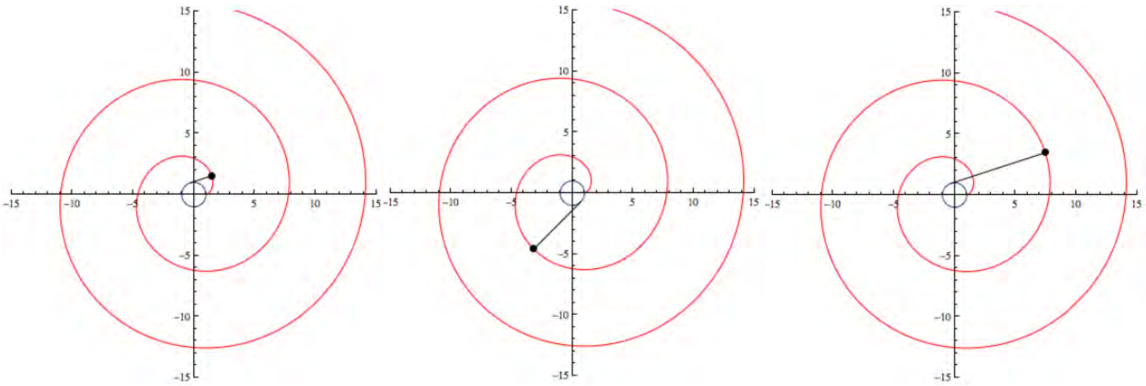


Рис.4.17. Схема построения спирали Архимеда

Отметим некоторые технические приложения свойств спирали Архимеда. По спирали Архимеда идет на грампластинке звуковая дорожка. Перемещение острия корундовой иглы по этой дорожке будет результирующим двух равномерных движений: приближения к полюсу и вращения вокруг полюса.

Металлическая пластина с профилем в виде половины витка архимедовой спирали часто используется в конденсаторе переменной емкости. Одна из деталей швейной машины (механизм для равномерного наматывания ниток на шпульку) имеет форму спирали Архимеда.

Предположим, что полный заход нарезки на станке совершается равномерно при повороте винта на 360°. В рамках этих условий проекцией захода на плоскость, перпендикулярную винтовой оси, является спираль Архимеда.

В приборах, фиксирующих ход времени, используются спиральные пружины. Если требуется получить уравнения малых колебаний спиральной пружины постоянного сечения в плоскости чертежа, то осевая линия пружины есть спираль Архимеда.

Спираль Архимеда применяется в технике при проектировании самоцентрирующих патронов, кулачковых механизмов, зажимных эксцентриковых приспособлений.

Одним из изобретений ученого является винт (прообраз объемной спирали). Это изобретение использовалось как механизм для передачи воды в оросительные каналы из низколежащих водоемов. Винт Архимеда стал прообразом устройства, широко используемого в различных машинах для перемешивания жидких, сыпучих и тестообразных материалов. Самая распространенная его разновидность – винтовой ротор в обычной мясорубке.

Еще один важный тип кривых на плоскости называют **розами**. К ним относится семейство кривых, уравнение которых в полярных координатах записывается в виде: $\rho = a\sin k\varphi$ или $\rho = a\cos k\varphi$. Все кривые располагаются внутри круга радиуса a. Вследствие периодичности синуса и косинуса розы состоят из лепестков, симметричных относительно наибольших радиусов, каждый из которых равен a. Количество лепестков зависит от значения параметра k (рис.4.18).

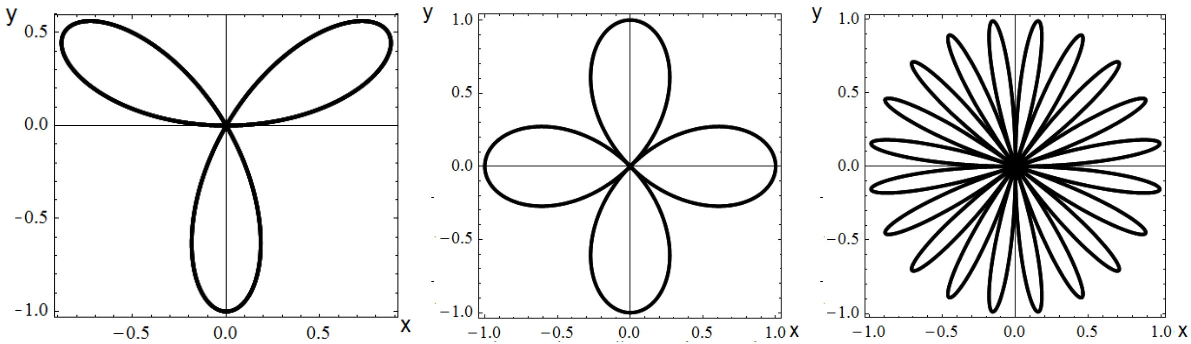


Рис.4.18. Розы $\rho = \sin 3\varphi$, $\rho = \cos 2\varphi$, $\rho = \sin 10\varphi$

Логарифмическая спираль – это кривая, полярное уравнение которой имеет вид $\rho = a^{\varphi}$ (рис.4.19). Она пересекает все свои радиусы – векторы под одним и тем же углом.

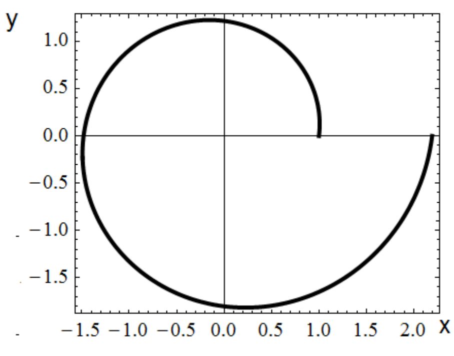


Рис.4.19. Логарифмическая спираль $\rho = e^{a\varphi}$ (на рис. $a = 1/8$)

Свойства логарифмической спирали также используется в технических устройствах. Например, вращающиеся ножи нередко имеют профиль, очерченный по логарифмической спирали (т.е. под постоянным углом к разрезаемой поверхности). Благодаря этому лезвие ножа стачивается равномерно. На рис. 4.20–4.21 представлены еще некоторые кривые, свойства которых нашли свое применение в технике. Уравнение литууса (Lituus – загнутый посох, жезл.) в полярных координатах имеет вид $\rho^2 = \dfrac{a^2}{\varphi}$ (рис.4.20). На рис. 4.21 представлена **улитка Паскаля,** заданная уравнением $\rho = 1 + \cos k\varphi$.

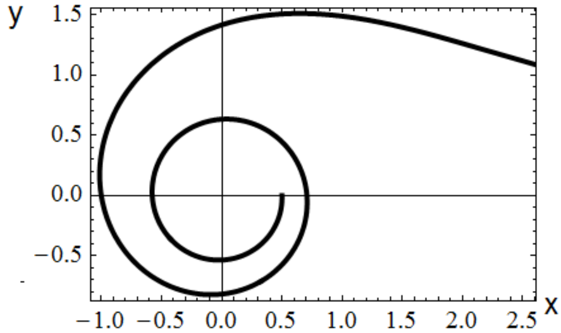


Рис.4.20. Часть литууса $\rho = \sqrt{\dfrac{\pi}{\varphi}}$

Кратко опишем применение улитки Паскаля(рис. 4.21) в технике на следующем примере: кулачки, вращающиеся с постоянной угловой скоростью ω, у которых профиль вычерчен по улитке, а центр вращения расположен в ее полюсе. Выполнив толкатель в виде стержня с острием или роликом, сообщим ему перемещение по исходящей из полюса прямой. Получается движение, подчиняющееся гармоническому закону, с плавным нарастанием скорости от нуля к середине хода толкателя и таким же плавным ее снижением к концу хода.

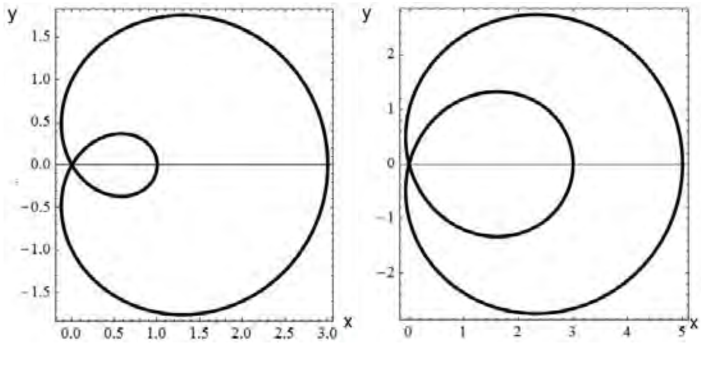


Рис.4.21. Улитка Паскаля $\rho = 1 + \cos 2\varphi$, $\rho = 1 + \cos 4\varphi$

В названии этой замечательной кривой 4-го порядка увековечено имя Этьена Паскаля (1588-1651) − отца Блеза Паскаля. Отметим некоторые интересные исторические сведения из жизни его семьи. Рано овдовев, Этьен Паскаль посвящает себя главным образом воспитанию своих детей. Этьен Паскаль тщательно продумывает систему воспитания детей. На первых порах он решительно исключает математику из числа предметов, которым обучает сына Блеза: отец боялся, что увлеченность математикой помешает гармоничному развитию, а неизбежные напряженные размышления повредят слабому здоровью сына. Однако 12-летний мальчик, узнав о существовании таинственной геометрии, которой занимался отец, уговорил его рассказать немного о запретной науке. Полученных сведений оказалось достаточно для того, чтобы начать увлекательную "игру в геометрию", доказывать теорему за теоремой. В этой игре участвовали "монетки" - круги, "треуголки" - треугольники, "столы" - прямоугольники, "палочки" - отрезки. Мальчик был застигнут отцом в тот момент когда он обнаружил, что углы треуголки составляют столько же, сколько два угла стола. Следует отметить, что Б.Паскаль является одним из основоположников проективной геометрии(основные утверждения этой геометрии используются в инженерной графике).

Приведем схему построения улитки Паскаля. Она представлена на рис.4.22.

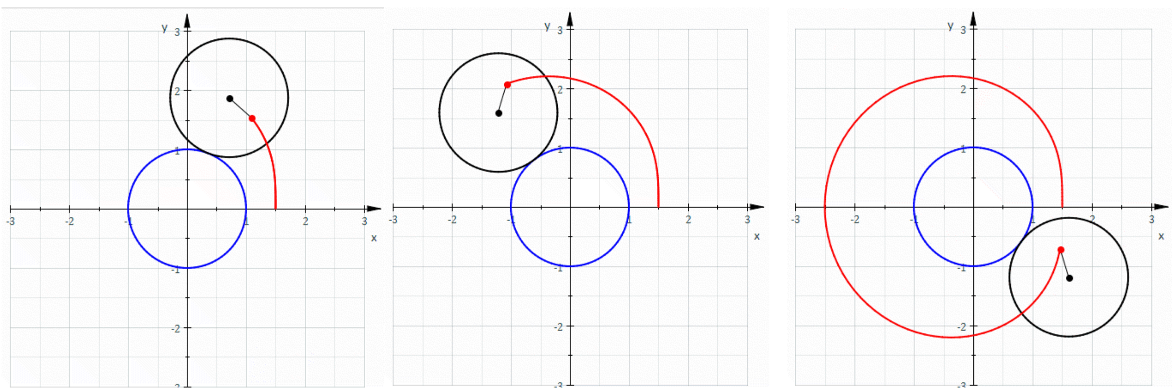


Рис.4.22. Схема построения Улитки Паскаля

Гиперболическая спираль – это кривая, полярное уравнение которой имеет вид $\rho = a/\varphi$, $a > 0$. Прямая, параллельная полярной оси и удаленная от нее на расстоянии a, является асимптотой гиперболической спирали(рис.4.23).

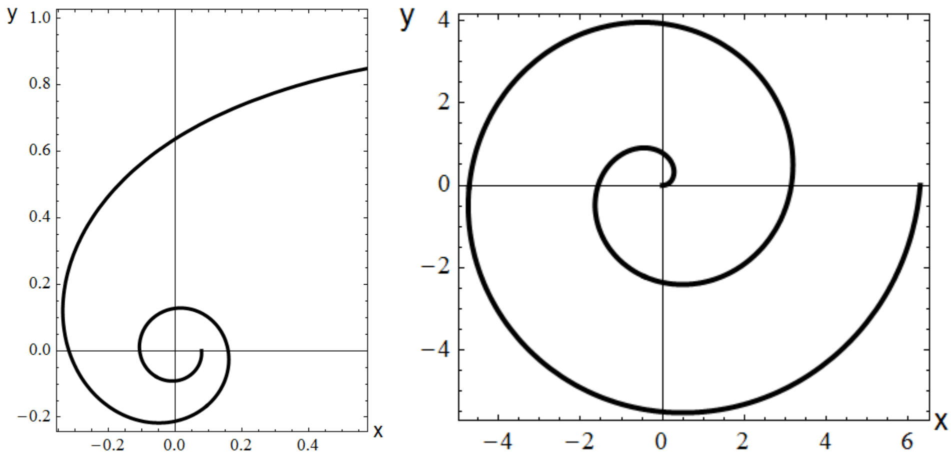


Рис.4.23. Гиперболическая спираль $\rho = \dfrac{1}{t}$, $\rho = \dfrac{1}{2t}$

4.3.3. Графики кривых в декартовой системе координат

Лемниската Бернулли в декартовой системе задается уравнением $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$. Ее представление изображено на рис. 4.24. А некоторые из способов построения указаны на рис.4.25–4.26.

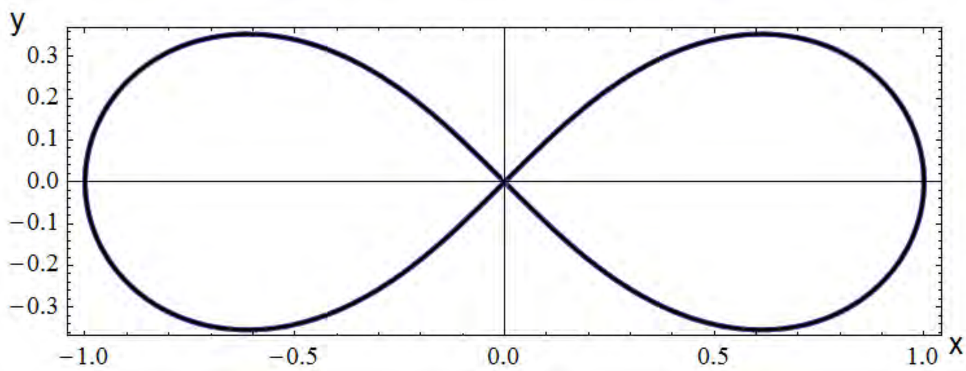


Рис.4.24. Лемиската Бернулли $\rho^2 = \cos 2\varphi$

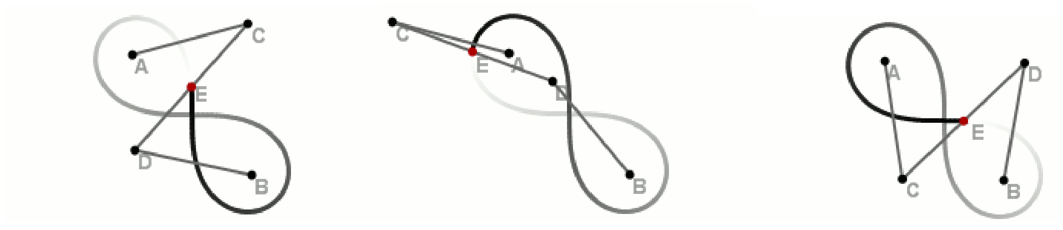


Рис.4.25. Схема построения Лемискаты Бернулли с помощью трех отрезков

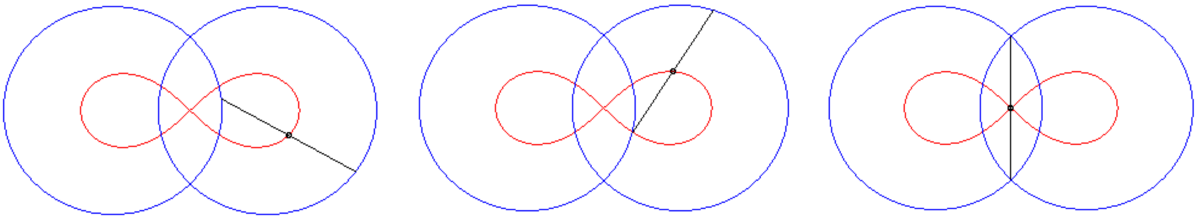


Рис.4.26. Схема построения Лемнискаты Бернулли с помощью одного отрезка

В технике лемниската используется, в частности, в качестве переходной кривой на закруглениях малого радиуса, как это имеет место на железнодорожных линиях в горной местности и на трамвайных путях. Таким образом, она обеспечивает плавность закругления, без которой центробежная сила, действующая на поезд, возрастала бы резко, доставляя неудобство пассажирам.

В качестве примера применения лемнискаты в области физики можно указать, что векторная линия поля, создаваемого двумя параллельными токами, текущими по бесконечно длинным проводникам на плоскости, к ним перпендикулярной, является лемнискатой.

Приведем пример функции, которая задана неявно аналитическим выражением и которая содержит знак модуля. В качестве такой функции возьмем функцию, определенную уравнением $|x|+|y|=1$. Эта функция чётная относительно координатных осей и поэтому достаточно рассмотреть функцию только в первом квадранте, т.е. при $x \geq 0, y \geq 0$. Поскольку при этом $|x|=x$ и $|y|=y$ заданная функция примет вид $y=1-x$. Следовательно, строим график прямой. Графику заданной функции принадлежит лишь отрезок прямой $y=1-x$, который лежит в первом квадранте. Учитывая симметрию график заданной функции, строим график функции во II-IV квадранте.

Множество точек, декартовы координаты которых удовлетворяют уравнению $|x|+|y|=1$, изображено на рис.4.27.

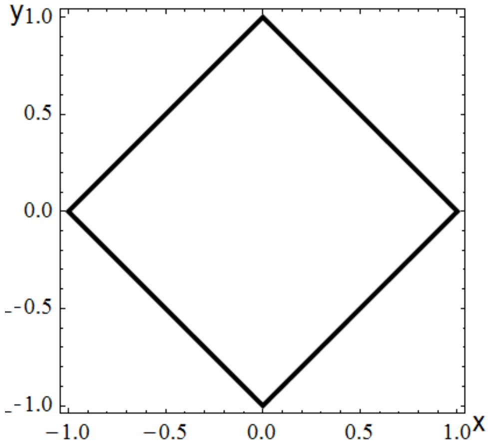


Рис.4.27. Множество точек, удовлетворяющих условию $|x|+|y|=1$

На рис.4.28 изображены графики двух других функций, заданных соотношениями, содержащими модули.

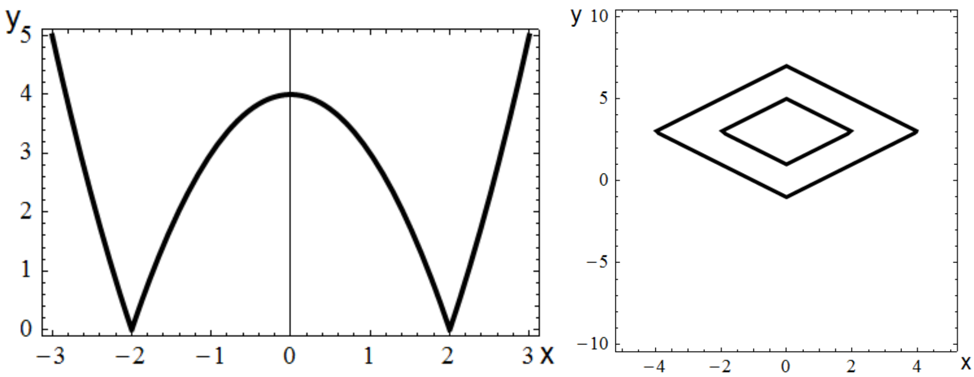


Рис.4.28. Множество точек, удовлетворяющих условию $y=\left|x^2-4\right|$, $\left||x|+|y-3|-3\right|=1$

Очень важными классами кривых на плоскости являются кривые второго порядка относительно декартовых координат точек, лежащих на них.

Окружность с центром в точке C и радиусом r – это геометрическое место точек плоскости, удаленных от точки C на расстоянии r. Уравнение окружности $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$, где $C(x_0,y_0)$ – центр окружности, r – радиус(рис.4.29).

Эллипс – геометрическое место точек(рис.4.29). Для которых сумма расстояний от двух заданных точек (фокусов) является величиной постоянной $2a$,каждое из этих расстояний (фокальный радиус-вектор) равно $r_1=MF_1=a-\varepsilon x$, $r_2=MF_2=a+\varepsilon x$, $r_1+r_2=2a$, большая ось $2a$, малая ось $2b$.

Уравнение эллипса в декартовой системе координат имеет вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Директрисы – прямые, параллельные малой оси и расположенные на расстоянии $d=\frac{a}{\varepsilon}$.

Заметим, что планеты солнечной системы движутся по эллиптическим орбитам, кольца Сатурна также имеют эллиптическую форму.

Если представить, что эллипс, подобно зеркалу, может отражать световые лучи, и поместить в один из его фокусов источник света, то лучи, отражаясь от эллипса, соберутся в другом его фокусе. Так же распространяются и акустические волны, что используют архитекторы для создания поразительных звуковых эффектов: «говорящих» бюстов, «магического» шепота, «потусторонних» звуков.

Это свойство лежит в основе акустического эффекта, наблюдаемого в пещерах и искусственных сооружений, своды которых имеют эллиптическую форму.

Гипербола – геометрическое место точек, для каждой из которых разность расстояний для двух заданных точек (фокусов) является величиной постоянной $2a$ (рис.4.30). Уравнение в декартовых координатах: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Парабола – геометрическое место точек(рис.4.30), равноудаленных от данной точки (фокуса) и от данной прямой (директрисы). Уравнение параболы в декартовых координатах: $y^2=2px$.

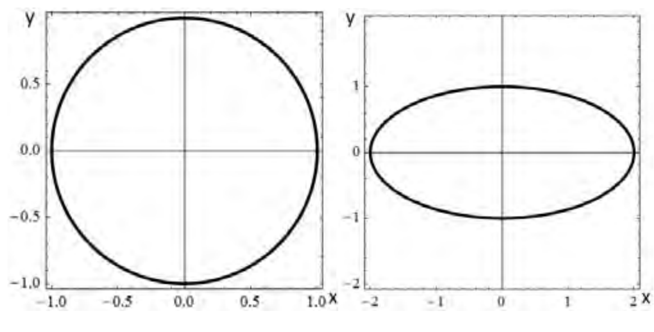


Рис.4.29. Окружность $x^2+y^2=1$, эллипс $(\frac{x}{2})^2+(\frac{y}{1})^2=1$

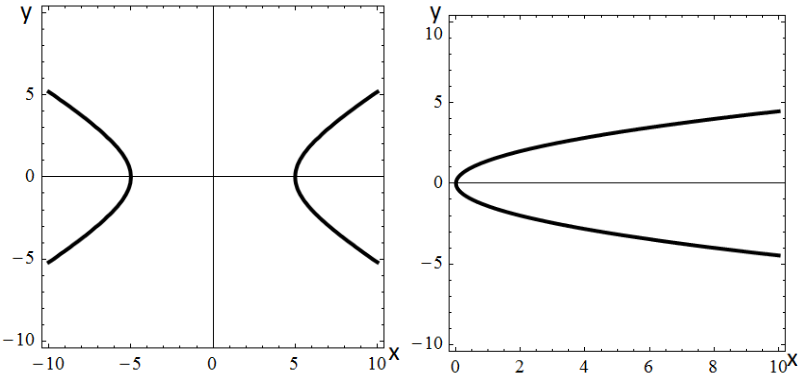


Рис.4.30. Гипербола $(\frac{x}{5})^2 - (\frac{y}{3})^2 = 1$, парабола $y^2 = 2x$

4.3.4 Кривые третьего порядка

Декартов лист – кривая третьего порядка, уравнение которой в декартовой системе координат имеет вид: $x^3 + y^3 - 3axy = 0$. Эта кривая симметрична относительно биссектрисы $y = x$ (рис.4.31).

Приведем некоторые исторические сведения о самом Р.Декарте. Известный философ и математик Р. Декарт родился во Франции, в небольшом городке Лаэ. Декарт первый ввел в математику понятие переменной величины. Он обратил внимание на то, что кривая на плоскости характеризуется уравнением, обладающим тем свойством, что координаты любой точки, лежащей на этой линии, удовлетворяют данному уравнению. Он разделил кривые, заданные алгебраическим уравнением, на классы в зависимости от наибольшей степени неизвестной величины в уравнении. Декарт ввел в математику знаки плюс и минус для обозначения положительных и отрицательных величин, ввел знак бесконечности для обозначения бесконечно большой величины.

В физике Декарт открыл некоторые законы отражения и «деформации» волн и частично объяснил причины появления радуги. На протяжении многих лет математика развивалась благодаря ряду идей и понятий, введенных в науку Р.Декартом.

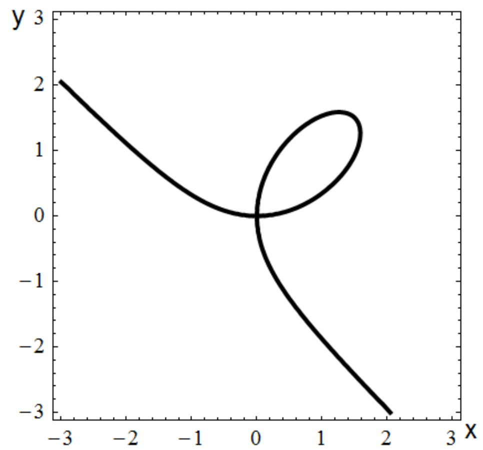


Рис.4.31. Декартов лист $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (на рис. $a = 1$)

Данную кривую можно определить также с помощью параметрических уравнений: $x = \frac{3at}{1+t^3}$, $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$. А в полярной системе координат уравнение Декартова листа примет вид $\rho = \frac{3a\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}$ (часть графика этой кривой третьего порядка изображена на рис.4.31).

Циссоида Диокла. Пусть OA - диаметр некоторой окружности, а AB - касательная к окружности, проведенная в конце диаметра. Через точку O проведена прямая, пересекающая окружность в точке P, а касательную AB в точке Q. На луче OP от точки O отложен отрезок $OM = PQ$. Геометрическое место точек M называется циссоидой Диоклеса. Уравнение кривой в декартовой системе координат имеет следующий вид: $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$ (рис.4.32).

Впервые циссоиду исследовал греческий математик Диокл (2 в. до н.э.). Отрывки из работы Диокла «О зажигательных зеркалах» сохранились в комментарии Евтокия к трактату Архимеда «О шаре и цилиндре». В одном из отрывков решается задача о делении шара плоскостью таким образом, чтобы получившиеся объёмы имели между собой данное отношение. В другом отрывке рассматривается предложенное Диоклом решение задачи об удвоении куба с помощью специальной геометрической кривой — циссоиды. В ещё одном отрывке циссоида используется для решения более общей задачи о вставки двух средних пропорциональных между двумя данными величинами.

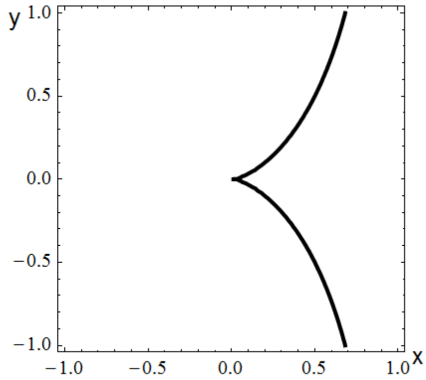


Рис.4.32. Циссоида Диокла $y^2 = \dfrac{x^3}{a-x}$ (на рис. $a=1$)

Среди кривых третьего порядка следует отметить **трисектрису Лоншама** – геометрическое место точек P пересечения касательных к окружности радиуса a, проведенных в точках C и B этой окружности , если эти точки являются концами дуг $AB=\omega$ и $AC=\omega$, где ω– любой центральный угол, а точка A – фиксированная.

Полярное уравнение трисектрисы имеет вид: $\rho = \dfrac{a}{\cos 3\varphi}$. Данная кривая может быть использована для деления угла на три равные части(рис.4.33). Схема построения кривой представлена на рис.4.34.

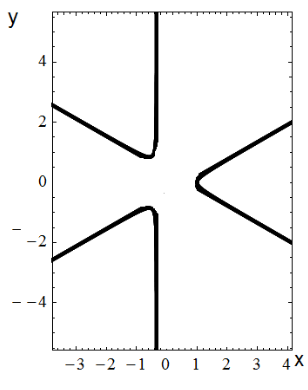


Рис.4.33. Трисектриса Лоншама $\rho = \dfrac{a}{\cos 3\varphi}$ (на рис. $a=1$)

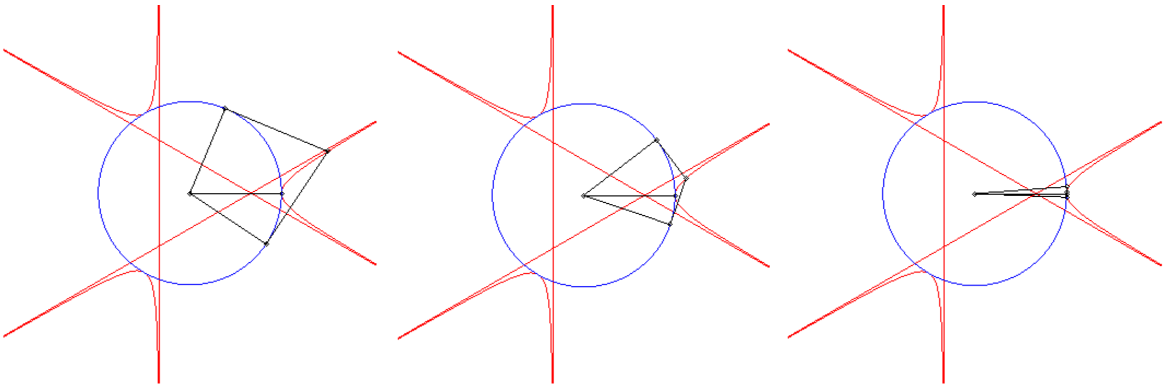


Рис.4.34. Схема построения трисектрисы Лоншама

Строфоида – это геометрическое место точек M_1 и M_2(рис.4.35), которые лежат на произвольных лучах, проходящих через точку A, и для которых $PM_1 = PM_2 = OP$ (P – произвольная точка оси ординат).

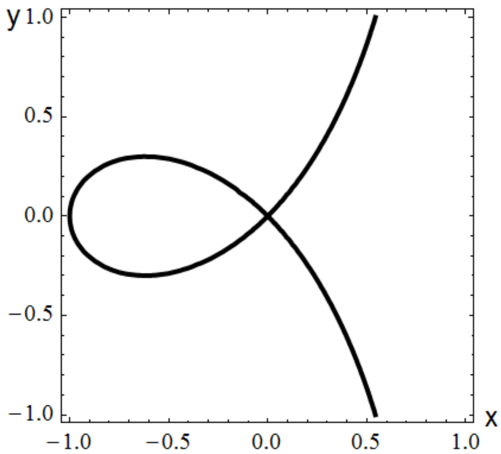


Рис.4.35. Строфоида $y^2 = x^2\left(\dfrac{a+x}{a-x}\right)$ (на рис. $a=1$)

Свойства строфоиды впервые исследовал итальянский математик и физик Э.Торичелли (1645). Наиболее известны труды Торричелли в области пневматики и механики. Он изобрёл ртутный барометр. Торричелли обнаружил изменение высоты ртутного столба в зависимости от погодных условий, объяснил возникновение ветра изменениями атмосферного давления. Открытие и исследование атмосферного давления вызвало большой резонанс среди учёных-современников.

Вирзиера Аньези. На отрезке $OC = a$ как на диаметре построим окружность. Продлим полухорду BD до точки M, определяемой из пропорции

$BM : BD = OC : OB$, геометрическое место точек M является **вирзиерой**(рис.4.36).

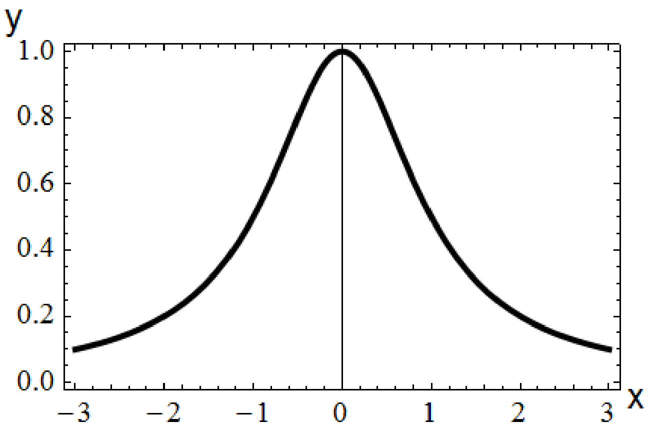


Рис.4.36. Верзиера Аньези $y = \dfrac{a^3}{a^2 + x^2}$ (на рис. $a = 1$)

Пьер Ферма в 1630 году нашёл площадь области между кривой и её асимптотой (она совпадает с осью абсцисс). В 1703 году Гвидо Гранди, независимо от Ферма, описал построение этой кривой, а в работе 1718 года назвал её верзьерой (итал. Versiera, от лат. Versoria), так как в его конструкции использовалась функция синус-верзус(обращённый синус $ver\sin x = 1 - \cos x$). В 1748 году был опубликован известный обобщающий труд «Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana», в котором кривая, как и в работе Гранди, именовалась верзьерой.

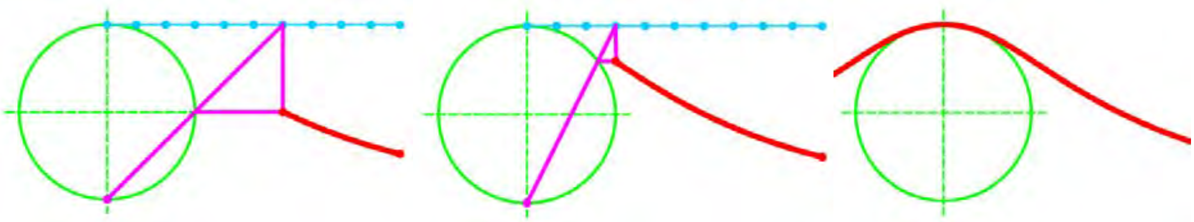


Рис.4.37. Схема построения верзиеры Аньези

Отметим, например, что трамплин-рампа российского авианосца «Адмирал флота Советского Союза Кузнецов» имеет форму верзьеры Аньези. Когда самолет «сходит» с рампы, он имеет идеальный угол атаки при скорости

180-200 км/ч. Отметим, что с теоретической точки зрения, с такой рампы-трамплина может взлететь самолет «любой» взлетной массы.

Подерой данной кривой K относительно любой точки плоскости называется новая кривая, которая является геометрическим местом оснований перпендикуляров, опущенных из этой точки на касательные к заданной кривой.

Офиурида − кривая, определяемая как подера параболы относительно какой-либо точки, лежащей на касательной в вершине этой параболы(рис.4.38).

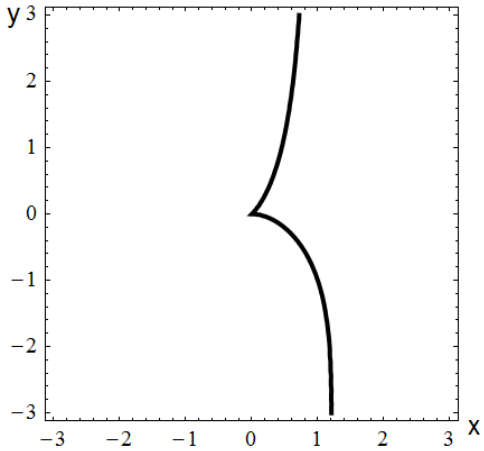


Рис.4.38. Офиурида $x(x^2+y^2)=y(cy-bx)$ (на рис. $a=1$)

Трисектриса Маклорена – кривая, которую определяют как **подеру параболы** относительно такой точки ее оси, которая равно удалена от директрисы от фокуса(рис.4.39). Её можно определить как геометрическое место точек пересечения двух прямых, каждая из которых вращаются равномерно вокруг двух различных точек (полюсов) с отношением угловых скоростей 1:3 (рис.4.40), при этом первоначально прямые совпадают с прямой, проходящей через эти полюса. Свойства этой кривой изучены шотландским математиком Колином Маклореном (1698-1746) в связи с решением задачи о трисекции угла. В возрасте 21 года Маклорен был избран в члены Лондонского королевского общества. Поводом к такому раннему избранию были обратившие на себя внимание математиков две его работы, опубликованные в «Philosophical Transactions» в 1718 и 1719 годах. Первая из них была посвящена изложению нового взгляда автора на происхождение кривых, который привёл его к открытию кривых различных порядков, представляемых геометрическими местами основания перпендикуляра, опущенного из данной точки на касательную к данным кривым. Вторая работа была посвящена построению кривых. Особый исторический интерес представляет «Трактат флюкций» (флюкция является синонимом понятия производной), в котором автор старается заполнить важный пробел, допущенный как самими творцами анализа бесконечно малых, Ньютоном и Лейбницем, так и их первыми последователями, и состоявший в отсутствии доказательств даже самых важных положений упомянутого анализа. Доказательства, данные Маклореном, отличаются строгостью и построены по образцу древнегреческих геометров. Кроме них, автор дает в этом сочинении обширные и разнообразные приложении исчисления флюкций к решению различных задач геометрии, механики и астрономии.

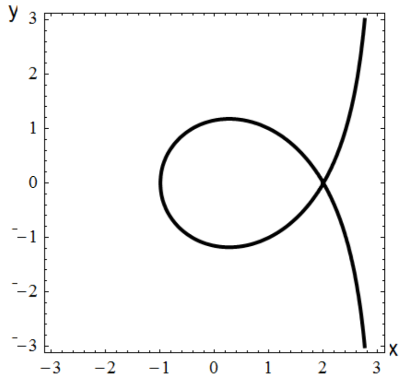


Рис.4.39. Трисектриса Маклорена $(x-3a)(x^2+y^2)+4a^3=0$

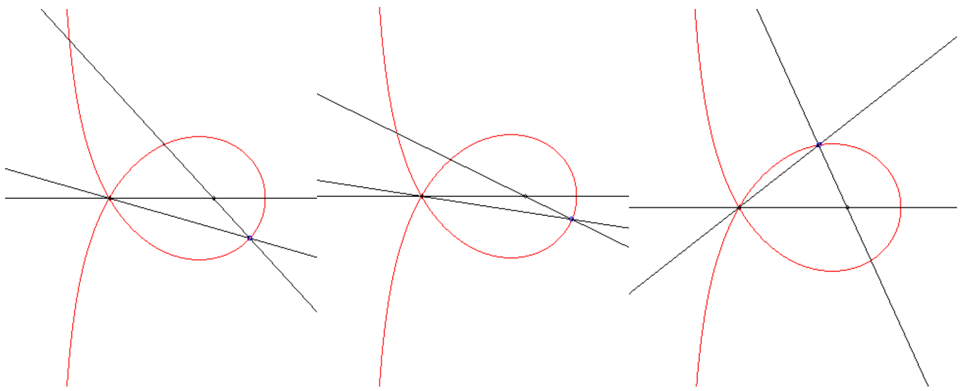


Рис.4.40. Схема пострения трисектрисы Маклорена

Кубика Чирнгауза – кривая, для которой парабола является подерой. Кубика Чирнгауза является огибающей отраженных от параболы световых лучей, перпендикулярных к ее оси(рис.4.41).

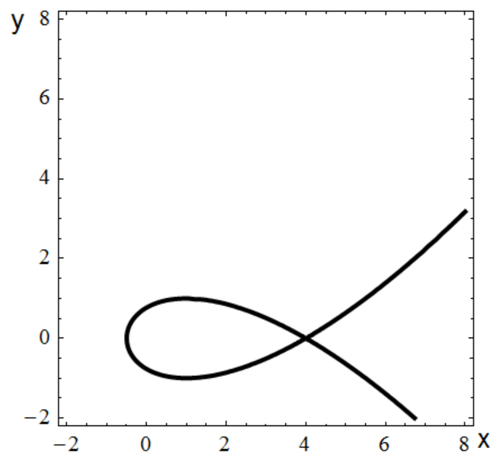


Рис. 4.41. Кубика Чирнгауза $2(2p+x)^3 = 27p(x^2+y^2)$

В полярных координатах кубика Чирнгауза задается следующим уравнением $r = a\sec^3\frac{\varphi}{3}$. Схема построения кубики представлена на рис.4.42.

Следует напомнить, что Эренфрид Вальтер фон Чирнгаус − немецкий философ, математик, экспериментатор, изобретатель европейского белого фарфора.

Прибыв в 1675 году в Париж, он познакомился там с Лейбницем, которому сообщил о своем первом исследовании по алгебре. Позднее, в 1683 году, это исследование было напечатано в «Acta eruditorum» под заглавием: «Methodus auferendi omnes terminos intermedios ex data equatione», то есть метод удаления всех промежуточных членов из данного алгебраического уравнения. Предполагается, что дано алгебраическое уравнение n-й степени с n+1 членами. Посредством вспомогательного уравнения (n-1)-й степени, заключавшем в себе другую неизвестную величину, из этих двух уравнений составлялось новое уравнение, состоявшее только из двух членов: n-й степени введенной неизвестной величины и постоянного члена. Таким путем автор полагал решить алгебраическое уравнение какой угодно степени. Применение этого метода к уравнениям 3-й и 4-й степени оказалось удачным. В сочинении под заглавием: «Medicus mentis seu tentamen genuina logicae, in qua disseritur de methodo detegendi incognitas veritates», посвящённом логике и философии, этот автор описал свойства кривых линий со многими фокусами, предложил способы вычерчивания этих кривых с помощью нитей и определил направления касательных к этим прямым. Ему же принадлежат исследования свойств зажигательных (катакаустических) кривых, образуемых параллельными лучами, отраженными от сферических вогнутых зеркал и от зеркал, меридиональное сечение которых есть циклоида. После 1681 года Чирнгаус долго жил в Саксонии, где основал три стеклянных завода, изготовлявших оптические стекла невиданных до того времени размеров. Чирнгаус был изобретателем европейского белого фарфора, однако после его смерти в 1708 году лавры достались Иоганну Бёттгеру.

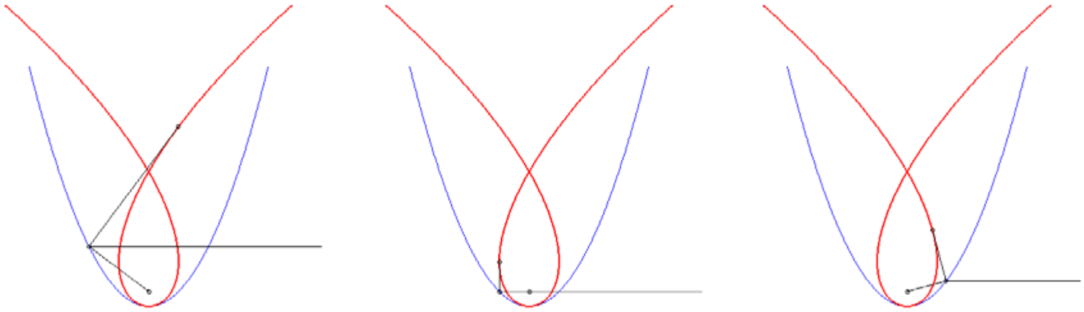


Рис.4.42. Схема построения Кубики Чирнгауза

4.3.5 Кривые четвертого порядка

Конхоида Никомеда. **Конхоидой** данной кривой называется кривая, которую можно получить при увеличении или уменьшении радиуса-вектора каждой точки данной кривой на постоянный отрезок l (рис.4.43). Если уравнение кривой в полярных координатах $\rho = f(\varphi)$, то уравнение ее конхоиды $\rho = f(\varphi) \pm l$.

Конхоида Никомеда – конхоида прямой, т.е. кривая, получающаяся увеличением (вторая ветвь − уменьшением) радиус-вектора точек прямой на некую постоянную величину. Уравнение конхоиды Никомеда в декартовых координатах: $(x-a)^2 + (x^2 + y^2) - l^2 x^2 = 0$. Конхоида Никомеда в параметрической форме: $x = a + l\cos\varphi$, $y = a tg\varphi + l\sin\varphi$. В полярных координатах: $\rho = \dfrac{a}{\cos\varphi} \pm l$.

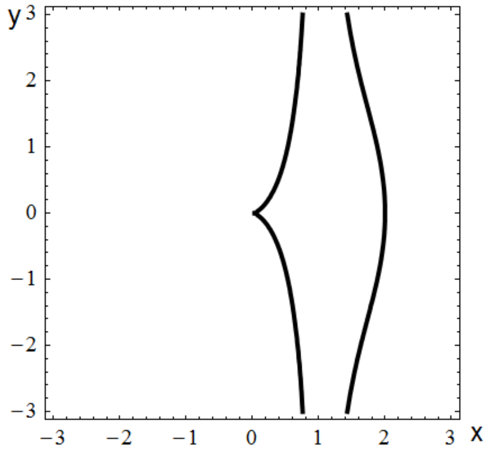


Рис.4.43. Конхоида Никомеда $(x-a)^2+(x^2+y^2)-l^2x^2=0$ (на рис. $a=l=1$)

Никомед (III век до н. э.) — древнегреческий математик. Время жизни Никомеда определено, исходя из следующих соображений. С одной стороны, Никомед критиковал Эратосфена за предложенный этим математиком метод удвоения куба. С другой стороны, Аполлонию Пергскому конхоида Никомеда была уже известна.

Никомед занимался классическими математическими проблемами — квадратурой круга и удвоением куба. Для удвоения куба он использовал приём вставок. Для выполнения этого приёма он построил специальную механическую кривую — конхоиду, которую описал в не дошедшем до нас сочинении. Никомед изобрёл и особый механизм для вычерчивания конхоиды.

Циклоидальные кривые. Пусть некоторая кривая катится без скольжения по другой кривой. При этом любая точка, неизменно связанная с первой кривой, описывает новую линию. Среди кривых, образованных таким способом, выделяют кривые, являющиеся тректориями точки, неизменно связанной с окружностью, которая катится без скольжения по второй окружности. Полученные при этом линии называются **циклоидальными**.

Эпициклоида – кривая, описываемая точкой окружности, которая катится без скольжения по другой окружности извне (рис.4.44).

В параметрической форме уравнение эпициклоиды имеет вид:

$$x=(A+a)\cos\varphi-a\cos(\frac{A+a}{a}\varphi),\ y=(A+a)\sin\varphi-a\sin(\frac{A+a}{a}\varphi),$$

где A – радиус неподвижной окружности, a – радиус подвижной окружности. Схема построения эпициклоиды представлена на рис.4.45. Кроме этого, эпициклоида может быть записана в комплексной форме следующим образом: $z=(a+b)e^{it}-be^{i(q+1)t}$. На рис. 4.46 изображены эпициклоиды для различных значений параметра q.

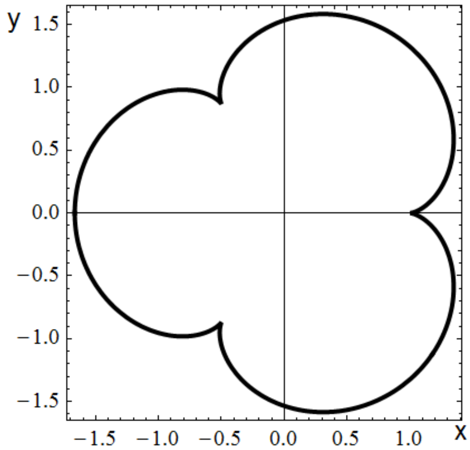


Рис.4.44. Эпициклоида $x=(A+a)\cos\varphi-a\cos(\frac{A+a}{a}\varphi)$,

$y=(A+a)\sin\varphi-a\sin(\frac{A+a}{a}\varphi)$ (на рис. $A=1,\ a=0.333$)

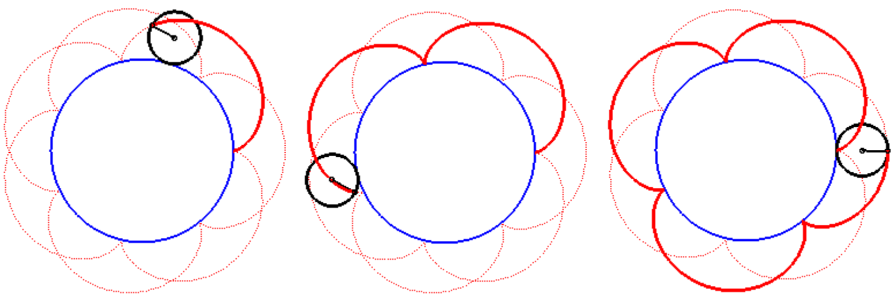


Рис.4.45. Схема построения эпициклоиды

Эпициклоида применяется при проектировании механизмов со взаимоогибаемыми профилями.

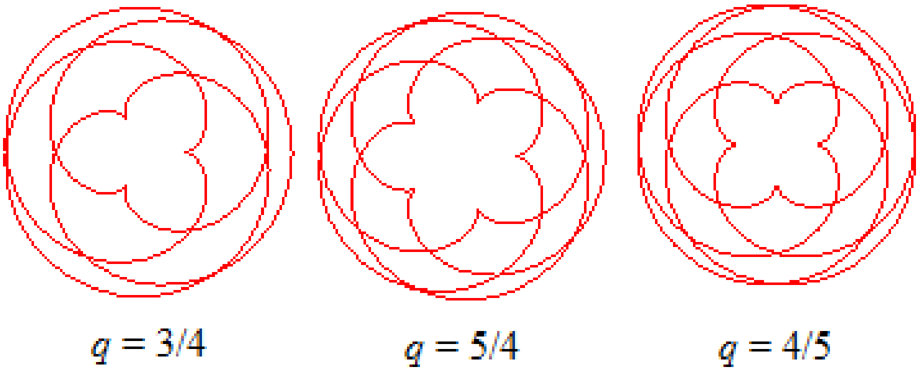


Рис.4.46. Эпициклоиды при разных q

Гипоциклоида – кривая, описываемая точкой окружности, которая катится без скольжения по другой окружности внутри нее(рис.4.47). Способ построения пояснен на рис.4.48.

Уравнение гипоциклоиды:

$$x=(A-a)\cos\varphi+a\cos(\frac{A-a}{a}\varphi),\ y=(A-a)\sin\varphi+\sin(\frac{A-a}{a}\varphi).$$

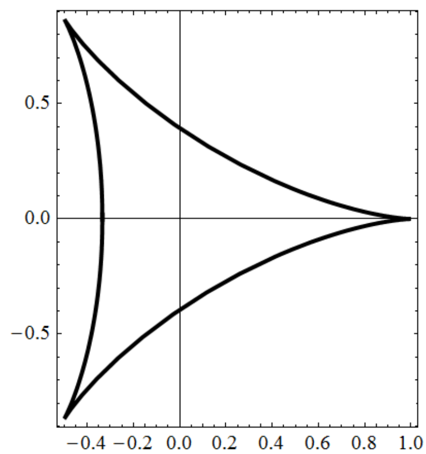


Рис.4.47. Гипоциклоида $x=(A-a)\cos\varphi+a\cos(\frac{A-a}{a}\varphi)$,

$y=(A-a)\sin\varphi+\sin(\frac{A-a}{a}\varphi)$ (на рис. $A=1,\ a=0.333$)

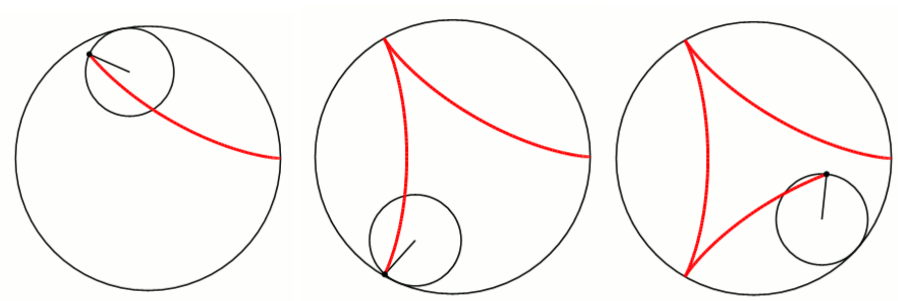


Рис.4.48. Схема построения гипоциклоиды

Удлиненные и укороченные эпи- и гипоциклоиды (их называют также эпи- и гипоциклоидами) – это кривые, образованные точкой, лежащей снаружи или внутри окружности, которая перекатывается без скольжения по другой окружности снаружи или внутри ее.

Уравнения этих кривых в параметрической форме имеют вид:

$$x = (A \pm a)\cos\varphi - \lambda a \cos(\frac{A \pm a}{a}\varphi), \; y = (A \pm a)\sin\varphi - \lambda a \sin(\frac{A \pm a}{a}\varphi),$$

где A – радиус неподвижной окружности, a – радиус подвижной окружности, причем эпициклоиде соответствует знак «+», а гипоциклоиде − знак «-». Для удлиненной кривой $\lambda > 1$, а для укороченной $\lambda < 1$(рис.4.49–4.50).

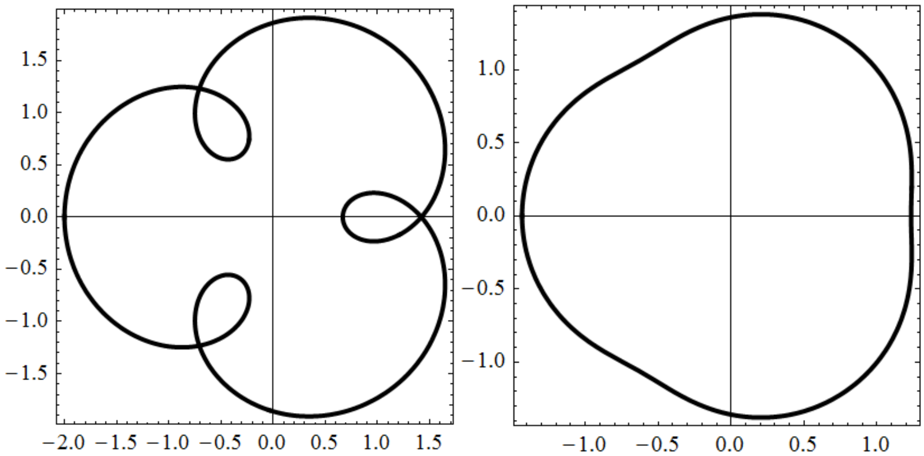


Рис.4.49. Эпициклоида $\lambda = 2$, $\lambda = 0.3$

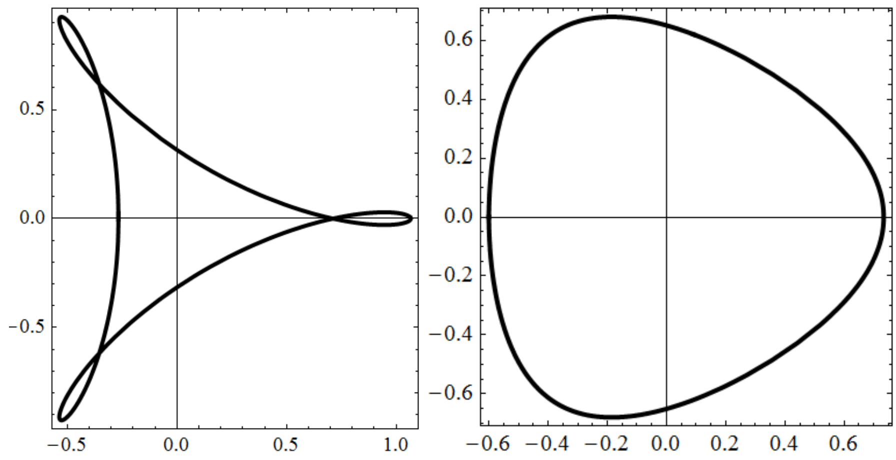


Рис.4.50. Гипоциклоида $\lambda = 1.2$, $\lambda = 0.2$

Кардиоиду можно определить как эпициклоиду, у которой диаметры подвижной и неподвижной окружностей равны.

Существуют кривые, изображения которых достаточно широко используются в орнаментах. Одни из них похожи на сердце, другие на лист клевера и т.д. (рис.4.51–4.52). В 1895 г. была найдено уравнение $r = 1 + \cos n\varphi + \sin^2 n\varphi$, позволяющее построить клевер, где параметр n задает количество лепестков.

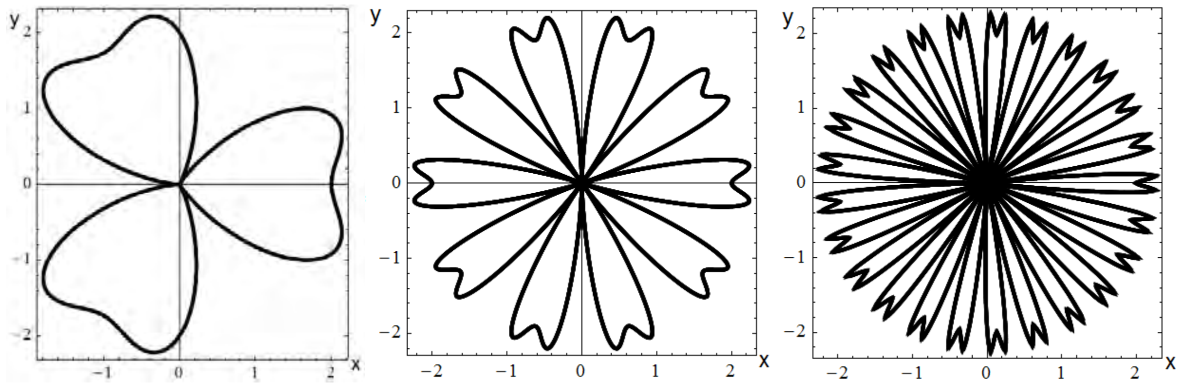


Рис.4.51. Кривая $r = 1 + \cos n\varphi + \sin^2 n\varphi$ (n=3,10,25)

В 1903 г. была построена кривая, напоминающая сечение сердца: $(x^2 + y^2 - 1)^3 = x^2 y^3$, $\begin{cases} x = \sin^3 t \\ y = \cos t - \cos^4 t \end{cases}$ (1993), $\rho = |tg\varphi|^{|ctg\varphi|}$ (2008) (рис.4.52).

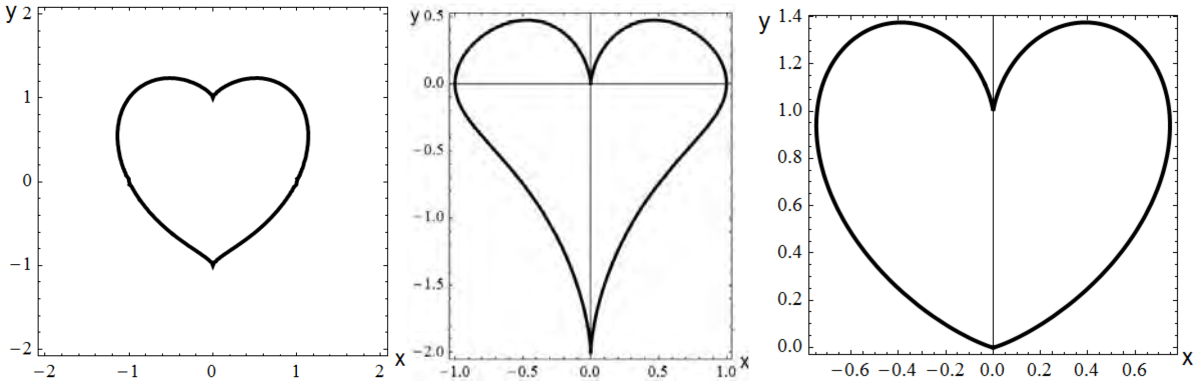


Рис.4.52. Кривые $(x^2 + y^2 - 1)^3 = x^2 y^3$, $\begin{cases} x = \sin^3 t \\ y = \cos t - \cos^4 t \end{cases}$, $\rho = |tg\varphi|^{|ctg\varphi|}$

Кривая, напоминающая бабочку(рис.4.53), задается в полярной системе координат следующим соотношением:

$$\rho = e^{\cos\varphi} - 2\cos 4\varphi + \sin^5 \frac{\varphi}{12}.$$

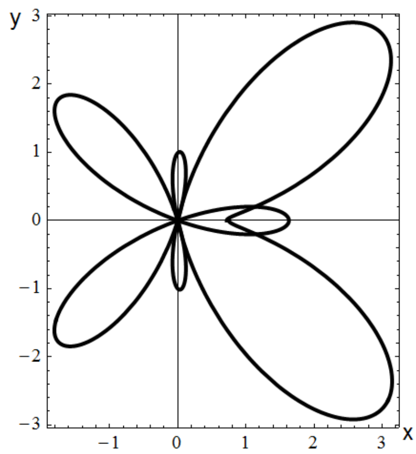


Рис.4.53. Кривая $\rho = e^{\cos\varphi} - 2\cos 4\varphi + \sin^5 \dfrac{\varphi}{12}$

Выше были рассмотрена и проиллюстрирована небольшая часть плоских кривых, используемых в науке и технике.

Дополнительные сведения о типах кривых можно, например, почерпнуть в литературных источниках [22−23].

5. ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯХ ВЕЛИЧИН И НЕКОТОРЫХ ИХ ПРИЛОЖНИЯХ К МЕХАНИКЕ

В первых четырех главах данного учебно-методического пособия был изложен целый ряд сведений о математических структурах, при построении которых практически не использовались понятия и подходы, относящиеся к дискретной математике и приближенным методам решения теоретических и прикладных задач.

В данной главе будут кратко описаны некоторые конструкции из этих областей математики и приведены конкретные примеры их использования в механике.

Следует особо отметить, что при использовании современных вычислительных средств для решения теоретических и прикладных научно-технических проблем необходимо учитывать наличие принципиальных различий между «законами» машинной (компьютерной) арифметики и континуальной арифметики[24].

В компьютерной арифметике используются правила обращения не с отдельными числами, а с целыми совокупностями чисел, которые принадлежат некоторым достаточно малым отрезкам (длины этих отрезков зачастую определяют точность выполнения арифметических операций). Такое положение дел возникает в силу необходимости учета наличия ошибок при проведении реальных вычислений и присутствия таковых, например, в результатах практически всех экспериментов.

Асимптотические разложения различных величин (в частности, вещественных функций вещественного аргумента) широко используются при получении как строгих решений важных теоретических и прикладных проблем математики, механики, математической физики и т.д., так и получении приближенных, аналитических и численных оценок решений.

Полезно подчеркнуть, что применение такого рода разложений зачастую являются единственным возможным способом получения важных сведений (в аналитической или численной формах) о решениях тех или иных сложных проблем.

5.1 Асимптотические разложения

Введем ряд понятий и конструкций, широко используемых при получении асимптотических разложений искомых величин и решений. Пусть вещественные функции $f(x)$, $g(x)$ определены на множестве M точек x вещественной прямой. Введем в рассмотрение соотношение порядка между этими функциями. Поясним сначала смысл соотношений порядка вида $f(x)=o(g(x))$ и $f(x)=O(g(x))$. Пусть выбрана некоторая предельная точка x_0 из множества M.

Определение 5.1. Если $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in M}}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$, то говорят, что $f(x)$ есть «о малое» от $g(x)$ при $x\to x_0$ на M ($x\in M$).

Замечание. Символ $o(1)$ используется для обозначения величины, которая стремится к нулю (при $x\to x_0$).

Определение 5.2. Если существует такое число C ($0<C<\infty$), что при всех $x\in M$ из достаточно малой окрестности x_0, принадлежащей M, выполняется неравенство $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|<C$, то говорят, что $f(x)$ есть «о большое» от $g(x)$ при $x\to x_0$ на множестве M, и пишут $f(x)=O(g(x)), x\to x_0$ (точка x_0 может не принадлежать этой окрестности).

Приведем несколько примеров:

1) $x^2=O(x), x\to 0$, 2) $\sin(x)=O(1), x\to 0$,

4) $x^2=o(x), x\to 0$, 5) $e^{-x^2}=o(x^{-1}), x\to +\infty$, 6) $\cos(x)=1+o(x), x\to 0$.

Сформулируем теперь определение асимптотической эквивалентности функций.

Определение 5.3. Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются асимптотически эквивалентными при $x \to x_0$ ($x, x_0 \in M$) и пишут $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$ на M, если $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in M}} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Из опр.5.3. следует, что функцию $f(x)$ можно представить следующим образом: $f(x) = g(x) \cdot (1 + o(1))$ при $x \to x_0$. Такое представление называется асимптотическим представлением функции $f(x)$ в окрестности точки x_0. Примерами асимптотических представлений функций являются следующие равенства: $\sin x = x(1 + o(1))$, $e^x - 1 = x(1 + o(1))$ при $x \to 0$.

Остановимся более подробно на вопросе об асимптотическом разложении функции $f(x)$. Часто для функции $f(x)$ при $x \to x_0$ (x_0 может равняться $\pm\infty$) имеется бесконечная последовательность O – оценок, причем каждая следующая оценка «как бы усовершенствует» (уточняет) предыдущую. Особенно часто встречаются последовательности такого вида: имеется последовательность функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), ...$ (называемые асимптотическими последовательностями), удовлетворяющих условиям $\varphi_1(x) = o(\varphi_0(x)), (x \to x_0)$, $\varphi_2(x) = o(\varphi_1(x)), (x \to x_0)$, ... и последовательность постоянных $c_0, c_1, ...$, таких что для $f(x)$ имеет место последовательность O – оценок

$$f(x) = O(\varphi_0(x)), x \to x_0,$$

$$f(x) = c_0\varphi_0(x) + O(\varphi_1(x)), x \to x_0$$
$$f(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + O(\varphi_2(x)), x \to x_0$$
$$...$$

Тогда при $x \to x_0$ можно формально представить функцию $f(x)$ в виде $f(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + ...$.

Правую часть этого выражения называют асимптотическим рядом для $f(x)$, или асимптотическим разложением функции $f(x)$ в окрестности точки x_0.

Это понятие было строгим образом впервые введено Пуанкаре. Приведем некоторые примеры последовательностей $\{\varphi_k\}_{k\in N_0}$ ($N_0 = 0 \cup N = \{0,1,2,...\}$):

1) $1, x, x^2,..., x^n,...$ при $x \to 0$, 2) $1, x^{-1}, x^{-2},..., x^{-n},...$ при $x \to \pm\infty$.

Определение 5.4. Если $\{\varphi_n(x)\}_{n\in N_0}$ – бесконечная асимптотическая последовательность при $x \to x_0$, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$ с любыми постоянными коэффициентами c_k называется (формально) асимптотическим рядом при $x \to x_0$.

Определение 5.5. Пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n\in N_0}$ – конечная или бесконечная асимптотическая последовательность при $x \to x_0$. Если для функции $f(x)$, заданной на множестве M ($x, x_0 \in M$), выполняется соотношение $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\varphi_k(x) + o(\varphi_n(x))$ при $x \to x_0$, где $a_1, a_2,..., a_n$ – некоторые константы, то его называют асимптотическим разложением $f(x)$ в окрестности точки x_0 по последовательности $\{\varphi_n(x)\}$ до n-ого члена включительно. Разложение записывают также в следующем виде: $f(x) \sim \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\varphi_k(x)$ при $x \to x_0$. Асимптотический ряд не обязательно сходится. Причина этого заключается в том, что сходимость является некоторым свойством ряда при фиксированном x_0, в то время как O – оценка относится не к фиксированному числу x, а к «процессу» $x \to x_0$. Более того, даже если асимптотический ряд сходится, его сумма не обязательно равна $f(x)$.

Необходимо подробнее остановится на различии между разложением функции $f(x)$ в сходящийся к ней функциональный ряд и ее разложением в асимптотический ряд. В первом случае требуется, чтобы разность между $f(x)$ и частичной суммой ряда стремилась к нулю при любом фиксированном x и $n \to \pm\infty$.

Предположим, что функция $f(x)$ имеет все производные до $(n+1)$-ого порядка включительно в некотором промежутке, содержащем точку x_0. Представление функции $f(x)$ в виде многочлена по степеням $x-x_0$ называется формулой Тейлора и записывается в виде:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+$$
$$+r_n(x),$$

где $r_n(x)=\dfrac{f^{(n)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \theta\in(0,1).$

Ряд Тейлора может расходиться, если $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)$ не существует. Тем не менее, для конечных n формула Тейлора иногда может использоваться в качестве асимптотического разложения функции

При разложении функций в степенные ряды часто используются следующие разложения функций в ряды Маклорена:

$$\mathrm{e}^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+... \quad (-\infty<x<+\infty)$$

$$\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+... \quad (-\infty<x<+\infty)$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+... \quad (-\infty<x<+\infty)$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+... \quad (-1<x\le 1)$$

$$(1+x)^{б}=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+... \quad (-1<x<1)$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+...+x^n+... \quad (-1<x<1)$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+...+(-1)^n\cdot x^n+... \quad (-1<x<1)$$

В случае асимптотического разложения требуется что разность $f(x)-\sum\limits_{k=0}^{n} a_k\varphi_k(x)$ при каждом n стремилась к нулю при $x\to x_0$, имея более высокий порядок малости, чем последний член в частичной сумме. Выписанные выше степенные ряды являются асимптотическими разложениями.

Для технических приложений важно оценить погрешность асимптотического разложения, которая допускается при замене функции на ее частичную сумму $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k\varphi_k(x)$ асимптотического ряда. На практике для выяснения области применимости асимптотических разложений пользуются контрольными расчетами, проведенными какими-либо другими методами.

Заметим, что асимптотическое разложение любой функции $f(x)$ по заданной асимптотической последовательности $\{\varphi_n(x)\}_{n\in N_0}$, если оно существует, определяется однозначно. Имеет место следующая теорема.

Теорема 5.1. Пусть каждый член асимптотической последовательности $\{\varphi_n(x)\}_{n\in N_0}$ отличен от нуля при всех x в некоторой окрестности x_0 и пусть для любого $n\in N_0$ имеет место асимптотическое разложение $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n} a_k\varphi_k(x)+o(\varphi_n(x))$ для функции $f(x)$. Тогда его коэффициенты a_k однозначно определяются по формулам: $a_n=\begin{cases} \underset{x\to x_0}{Lim}\dfrac{f(x)}{\varphi_0(x)}=a_0 \\ \underset{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}}{Lim}\dfrac{f(x)-\sum\limits_{m=0}^{k-1} a_m\varphi_m(x)}{\varphi_k(x)}, k\in N. \end{cases}$

Отметим, что в качестве x_0 можно взять также $\pm\infty$.

Определение 5.6. Две функции $f(x)$ и $g(x)$ называются асимптотически эквивалентными относительно данной асимптотической последовательности $\{\varphi_n(x)\}_{n\in N_0}$ при $x\to x_0$, если при всех n выполняется соотношение

$f(x)-g(x)=o(\varphi_n(x))$ при $x\to x_0$.

Остановимся теперь кратко на вопросе об операциях над асимптотическими разложениями.

Если при $x\to x_0$ имеют место асимптотические разложения $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\varphi_k(x)$, $g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k\varphi_k(x)$, то при любых α,β имеет место также асимптотическое разложение $\alpha\, f(x)+\beta\, g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha a_k+\beta b_k)\varphi_k(x)$ при $x\to x_0$.

Заметим, что перемножать асимптотические разложения двух функций по одной и той же асимптотической последовательности, вообще говоря, нельзя, так как уже для произведения $\varphi_m(x)\varphi_n(x)$ не всегда можно построить асимптотическое разложение по системе функций $\{\varphi_n(x)\}_{n\in N_0}$.

Сформулируем теорему о почленном интегрировании асимптотических разложений.

Теорема 5.2. Пусть последовательность $\{\varphi_n(x)\}_{n\in N_0}$ положительных функций вещественной переменной x, определенных на интервале $a<x<b$, является асимптотической при $x\to b$ и пусть имеет место асимптотическое разложение

$f(x)\approx\sum_{k=0}^{\infty}C_k\varphi_k(x)$ при $x\to b-0$. Если сходится интеграл $\int_x^b f(t)dt$ и для любого конечного $k\in N_0$ сходится интеграл $\int_x^b\varphi_k(t)dt$, то имеет место также асимптотическое разложение $\int_x^b f(t)dt=\sum_{k=0}^{\infty}C_k\int_x^b\varphi_k(t)dt$.

Почленное дифференцирование асимптотических разложений, вообще говоря, недопустимо. Однако, можно указать важные частные виды асимптотических разложений, допускающих почленное дифференцирование. Пусть, например, для функции $f(x)$ имеет место степенное асимптотическое разложение $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{-k}$ при $x \to \pm\infty$. Тогда ее производная также допускает такое степенное асимптотическое разложение: $f'(x) \approx -\frac{a_1}{x^2}-\frac{2a_2}{x^3}-...-\frac{na_n}{x^{n+1}}-...$ при $x \to \pm\infty$.

Более подробные сведения об особенностях асимптотических разложений функции можно найти в работах [25–27].

Разложения функций в ряды широко используются при выполнении приближённых вычислений. С помощью рядов с заданной точностью можно вычислить значения корней, тригонометрических функций, логарифмов чисел, определённых интегралов. Ряды применяются также при интегрировании дифференциальных уравнений. Они нашли широкое применение при решении инженерных задач. На основе использования теории рядов созданы таблицы числовых значений логарифмических, тригонометрических, показательных функций, таблицы квадратных и кубических корней и т.д. Данные справочные таблицы, в частности, используются инженерами при выполнении конкретных расчетов и оценок. Например, ряды различных типов используются при обработке сигналов и при анализе воздействия фильтра на сигнал в частотной области.

В следующем пункте кратко изложим некоторые общие сведения о применении асимптотических разложений для решения задач механики разрушения.

5.2 Метод асимптотических разложений в задачах механики разрушения

В качестве иллюстрации полезности асимптотических разложений, рассмотрим их применение при решении прикладных задач механики. В механике выделяют раздел, называемый механикой разрушения. В данном разделе механики изучаются конструкционные материалы и их способность сопротивляться разрушению под действием внешних сил при наличии трещин и различных технологических и эксплуатационных дефектов. Основные исследования посвящены разработке методов предотвращения разрушения материалов при эксплуатации. При решении такого рода задач используется комплексный подход, основанный на сочетании методов механики сплошных сред с методами экспериментальной и теоретической физики, химического металловедения, математической теории упругости и строительной механики.

Результаты исследований, основанные на методах, предлагаемых механикой разрушения, используются в процессе проектирования и эксплуатации, а также при решении проблем, связанных с обеспечением прочности конструкции.

Рассмотрим для простоты плоскую задачу применительно к механике разрушения. В рамках этой задачи следует рассматривать два случая: 1)плоскую деформацию; 2)плоское напряженное состояние.

Плоская деформация представляет собой такое напряженно-деформированное состояние, когда все перемещения точек тела происходят параллельно одной плоскости OXY. Такое состояние испытывают призматические или цилиндрические тела, высота которых (длина тела) существенно превышает размеры основания. Нагрузка при этом приложена только на гранях параллельно основаниям и не меняется вдоль высоты (длины) тела.

Плоское напряженное состояние характеризуется отсутствием нормальных напряжений (перпендикулярных заданной плоскости) на площадках, параллельных одной из координатных плоскостей (OXY). Такое напряженное состояние появляется в тонких пластинках, нагрузка к которым приложена только на боковой поверхности силами, параллельными основаниям и равномерно распределенными по толщине пластинки. Заметим, что, пластинку можно рассматривать как призматическое тело, высота которого (толщина пластинки) мала по сравнению с размерами основания. В таком случае при одинаковых условиях нагружения призматических тел (только на боковых поверхностях нагрузкой, параллельной основаниям и не меняющейся вдоль высоты тела) для тел с высотой, значительно превышающей размеры основания, имеем плоскую деформацию, а для тел с высотой, значительно меньшей размеров основания, имеем плоское напряженное состояние.

При анализе конструкций, содержащих трещины, необходимо учитывать способ приложения нагружения на нее. В общем случае при действии произвольной нагрузки на деформируемое твердое тело с трещиной, смещение поверхности трещины можно представить в виде суммы трех типов смещений: нормального разрыва, поперечного сдвига и антиплоского сдвига. В соответствии с этим, как известно, в механике разрушения различают трещины трех типов[28].

При нормальных напряжениях возникает трещина нормального разрыва (тип I): смещения берегов трещины перпендикулярны ее плоскости.

При плоском сдвиге образуется трещина поперечного сдвига (тип II): смещения берегов происходят в плоскости трещины и перпендикулярно ее фронтальной линии.

Трещина продольного сдвига, или типа III, образуется при антиплоском сдвиге: смещения берегов совпадают с плоскостью трещины и параллельны ее направляющей кромке(рис.5.1).

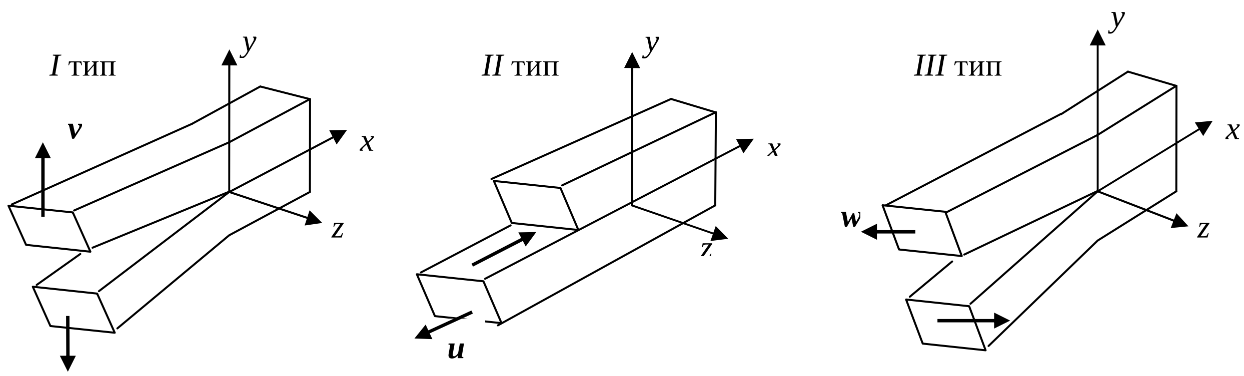


Рис.5.1. Три основных типа трещины

Поскольку напряжения «привязаны» к координатным плоскостям и осям, где они действуют, то приходится при решении проблем механики разрушения использовать понятие тензора напряжений[29]. Часто тензор представляют как многомерную $d \times d \times ... \times d$ таблицу, заполненную числами — компонентами тензора (где d — размерность векторного пространства, над которым задан тензор, а число сомножителей совпадает с так называемой валентностью или рангом тензора). Вырежем теперь бесконечно малый параллелепипед (элемент) в окрестности произвольной точки тела. Действие на параллелепипед окружающей среды заменим внутренними силами, которые по отношению к элементу являются внешними. Интенсивности приложенных сил – напряжения[30].

Так как напряжения – функции координат x, y, z, то при переходе от одной грани элемента к другой данные функции получают следующие приращения(рис.5.2):

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz. \qquad (5.2.1)$$

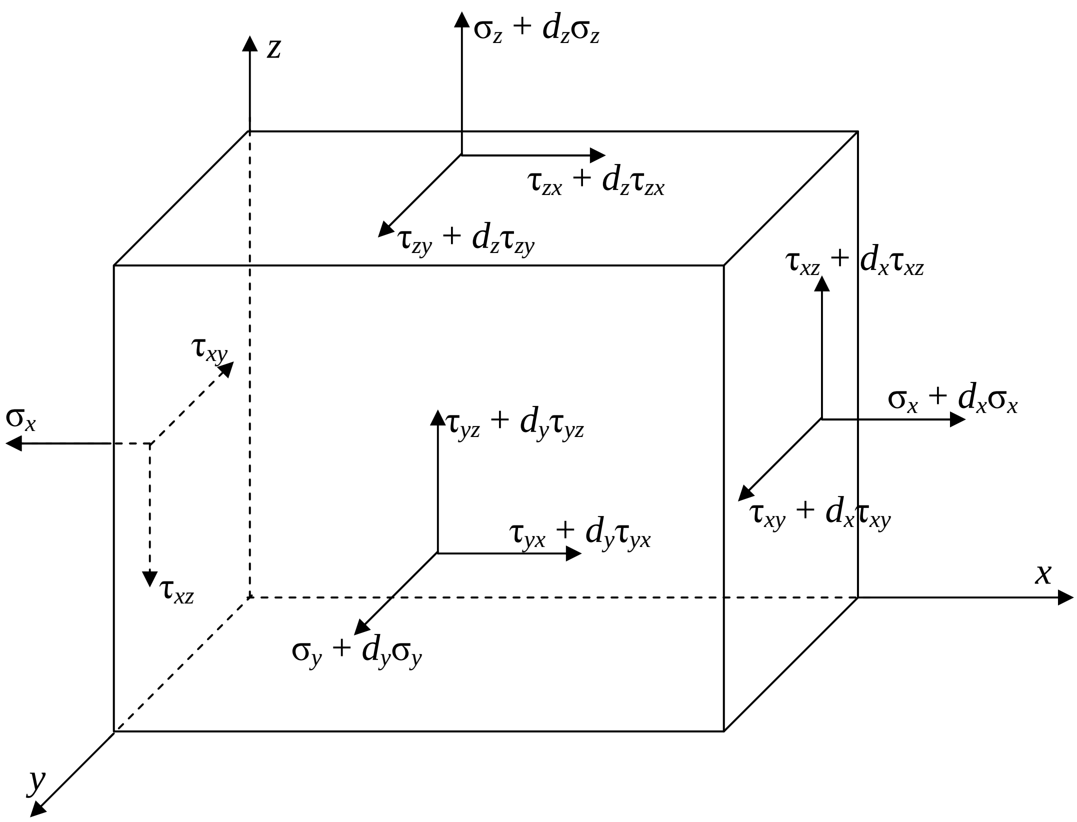


Рис.5.2. Равновесие элементарного параллелепипеда

Нормальные напряжения имеют один индекс, соответствующий направлению нормали к площадке, на которой действует напряжение. У касательных напряжений два индекса: первый соответствует направлению нормали к площадке, второй – направлению оси координат, параллельно которой действует касательное напряжение.

Пусть заданы компоненты тензора напряжений, приложенные на гранях элементарного параллелепипеда, окружающего выбранную точку в теле.

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}. \qquad (5.2.2)$$

Теперь подробнее остановимся на деформации. Рассмотрим точку M в деформируемом теле. Под действием внешних нагрузок точка M переходит в положение M', $M \to M'$, $M(x,y,z) \to M'(x',y',z')$, $x' = x + u$, $y' = y + v$, $z' = z + w$. Здесь u, v, w – проекции вектора перемещений на оси координат (рис.5.3).

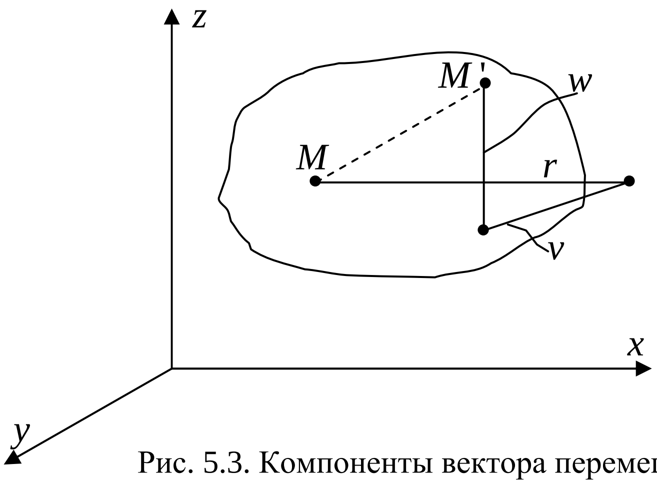


Рис. 5.3. Компоненты вектора перемещений

Линейные деформации ε_x, ε_y, ε_z положительны, если дают удлинения ребер. Деформации сдвига γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zx} соответствуют тому, в какой из координатных плоскостей происходит сдвиг между ребрами. Данные деформации положительны, если они уменьшают угол между гранями.

Введем еще тензор деформаций[31]

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}. \quad (5.2.3)$$

T_ε полностью определяет деформированное состояние в выбранной точке тела, т.е. в точке М.

Тензор деформаций T_ε можно представить в виде суммы шарового тензора $Ш_\varepsilon$ и девиатора D_ε. По определению [32]

$$Ш_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\text{ср}} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\text{ср}} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\text{ср}} \end{pmatrix}, \quad (5.2.4)$$

$$\varepsilon_{\text{ср}} = \frac{1}{3}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z\right), \quad (5.2.5)$$

$$D_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_{\text{ср}} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y - \varepsilon_{\text{ср}} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & \varepsilon_z - \varepsilon_{\text{ср}} \end{pmatrix}. \quad (5.2.6)$$

Тензор $Ш_\varepsilon$ характеризует объемную деформацию θ в точке М тела

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 3\varepsilon_{\text{ср}} = I_1. \quad (5.2.7)$$

Заметим, что девиатор деформации отвечает за изменение формы тела. Задавая перемещения в точке конструкции можно определить деформации с помощью следующих соотношений (соотношения Коши):

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}. \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

После сделанных выше очень кратких пояснений перейдем к рассмотрению задачи об оценке напряженно-деформированного состояния в окрестности конца трещины нормального отрыва при условии плоской деформации в рамках теории пластичности[33].

Разработка и применение методов асимптотических разложений представляет интерес для решения проблем механики разрушения, т.к. такие задачи разложения занимают промежуточное «положение» между точными аналитическими подходами, применяемыми в задачах линейной теории упругости и прямыми численными методами, которые используются при решении сложных конкретных проблем.

Рассмотрим метод асимптотических разложений [34,35], который позволяет отыскать первые члены рядов разложений напряжений и деформаций.

Декартову систему координат отнесем к концу трещины. Оси $\xi_i\,(i=1,2)$ расположим таким образом, что ось ξ_1 ориентирована вдоль трещины в направлении ее конца (рис. 5.4). Искомые функции задачи зависят от нагрузки только посредством безразмерных переменных [36] $x_i = \xi_i G^2/K^2 \quad (i=1,2),\ r=\sqrt{x_1^2+x_2^2};\ \varphi = arctg\,\dfrac{x_2}{x_1},$ где K – коэффициент интенсивности напряжений, G – модуль сдвига.

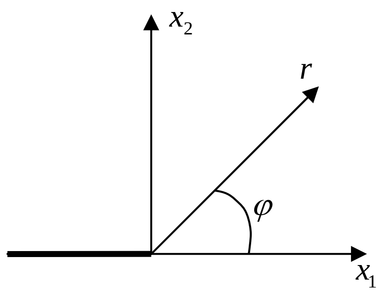


Рис. 5.4. Система координат, берущая начало в вершине трещины

По своей природе закон пластического деформирования устанавливает связь между приращениями (изменениями) напряжений $\delta\sigma$ и деформаций $\delta\varepsilon$. Тогда уравнения задачи в полярной системе координат в приращениях имеют вид[37]:

$$\delta\sigma_{rr,r} + \left(\delta\sigma_{rr} - \delta\sigma_{\varphi\varphi}\right)/r + \delta\sigma_{r\varphi,\varphi}/r = 0,\ \delta\sigma_{r\varphi,r} + 2\delta\sigma_{r\varphi}/r + \delta\sigma_{\varphi\varphi,\varphi}/r = 0,$$

$$\delta\varepsilon_{rr}=\delta u_{r,r},\ \delta\varepsilon_{\varphi\varphi}=\delta u_{\varphi,\varphi}/r+\delta u_r/r,\ \delta\varepsilon_{r\varphi}=\frac{1}{2}\left(\delta u_{\varphi,r}+\delta u_{r,\varphi}/r-\delta u_{\varphi}/r\right), \qquad (5.2.9)$$

$$\delta s_{ij}=\delta e_{ij}-\delta\Phi(\Gamma)e_{ij},\ i,j=r,\varphi.$$

Здесь $\delta\sigma_{ij},\delta\varepsilon_{ij},\delta u_i$ – приращения напряжений, деформаций и перемещений[38], запятая в нижнем индексе означает частную производную функции по заданной переменной; $\delta\sigma_{ij},\ \delta e_{ij}$ – приращения девиаторов напряжений и деформаций[39]; $\Phi(\Gamma)=\sum_{k\geq 1}B_{2k}\Gamma^{2k}$ – функция интенсивности касательных деформаций $\Gamma=\sqrt{\frac{2}{3}e_{ij}e_{ij}}$, G, B_{2k} – постоянные материала[40].

Компоненты тензоров и девиаторов напряжений и деформаций связаны между собой соотношениями[41]

$$\varepsilon_{ij}=e_{ij},\ e_{rr}+e_{\varphi\varphi}+e_{zz}=0,\ s_{rr}+s_{\varphi\varphi}=0,$$
$$\sigma=\frac{1}{3}\left(\sigma_{rr}+\sigma_{\varphi\varphi}\right),\ s_{rr}=\frac{1}{3}\left(2\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}\right), \qquad (5.2.10)$$
$$s_{\varphi\varphi}=\frac{1}{3}\left(2\sigma_{\varphi\varphi}-\sigma_{rr}\right), s_{r\varphi}=\sigma_{r\varphi}.$$

Нагрузки на кромках трещины равны нулю. Отсюда следуют граничные условия задачи:

$$\delta\sigma_{r\varphi}\Big|_{\varphi=\pm\pi}=0,\ \delta\sigma_{\varphi\varphi}\Big|_{\varphi=\pm\pi}=0. \qquad (5.2.11)$$

Решение поставленной задачи будем искать в виде разложений по параметру нагружения в окрестности вершины трещины[42]:

$$u_r(r,\varphi)=\sum_{n\geq 0}U_n(\varphi)r^{\lambda_n};\ u_{\varphi}(r,\varphi)=\sum_{n\geq 0}V_n(\varphi)r^{\lambda_n}. \qquad (5.2.12)$$

После разделения переменных, последовательность чисел $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ определяется в процессе решения задачи наряду с функциями $U_n(\varphi)$, $V_n(\varphi)$.

Для компонент деформаций имеем:

$$\varepsilon_{rr}=u_{r,r}=\sum_{n\geq 0}\lambda_n U_n r^{\lambda_n-1};\ \varepsilon_{\varphi\varphi}=\frac{1}{r}\left(u_{\varphi,\varphi}+u_r\right)=\sum_{n\geq 0}\left(V_n'+U_n\right)r^{\lambda_n-1}; \qquad (5.2.13)$$

$$\varepsilon_{r\varphi}=\frac{1}{2}\left(u_{\varphi,r}+\frac{1}{r}u_{r,\varphi}-\frac{u_{\varphi}}{r}\right)=\frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\left(U_n'+(\lambda_n-1)V_n\right)r^{\lambda_n-1}.$$

Интенсивность деформаций можно записать в форме[27]:

$$\Gamma = \left(\frac{2}{3} \left(e_{rr}^2 - e_{rr} e_{\varphi\varphi} + e_{\varphi\varphi}^2 + 3 e_{r\varphi}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.2.14)$$

Среднее напряжение σ представим в виде

$$\sigma = \sum_{n \geq 0} W_n(\varphi) r^{\lambda_n - 1}, \quad (5.2.15)$$

где $W_n(\varphi)$ – неизвестные функции, подлежащие определению в процессе решения задачи. Эти асимптотические разложения подставляются в уравнения равновесия[29], затем находятся неизвестные члены разложений.

Приведем графики компонент тензора напряжений в случае плоской деформации для трех приближений, в зависимости от угла φ для трещины нормального отрыва: 1 – соответствует графику функции $\sigma_{rr}(\varphi)$, линия 2 – графику функции $\sigma_{\varphi\varphi}(\varphi)$ и линия 3 – графику функции $\sigma_{r\varphi}(\varphi)$.

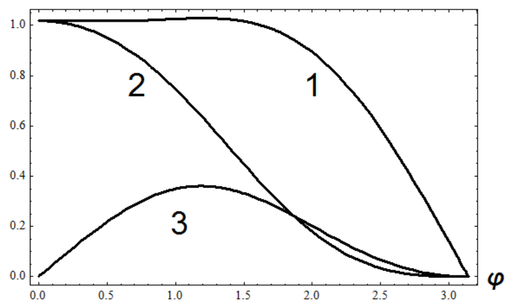


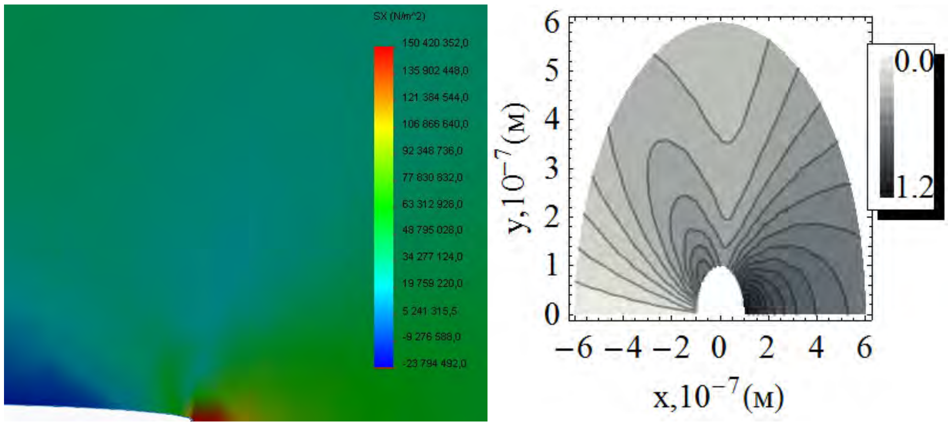
Рис.5.5. Графики компонент напряжения

Для получения более полного представления о картине напряженного состояния тела, необходимо учесть зависимость напряжений от радиуса. Поэтому весьма полезно представить графики при различных значениях радиуса.

С целью исследования основных закономерностей деформирования стали X6CrNiTi18-10 у вершины трещины при растяжении для сравнения используем решение, полученное численно в пакете прочностного анализа Solidworks, а также аналитическое решение, полученное методом асимптотических разложений (т.е представлений напряжений в виде функционального ряда, члены которого зависят от радиуса и угла).

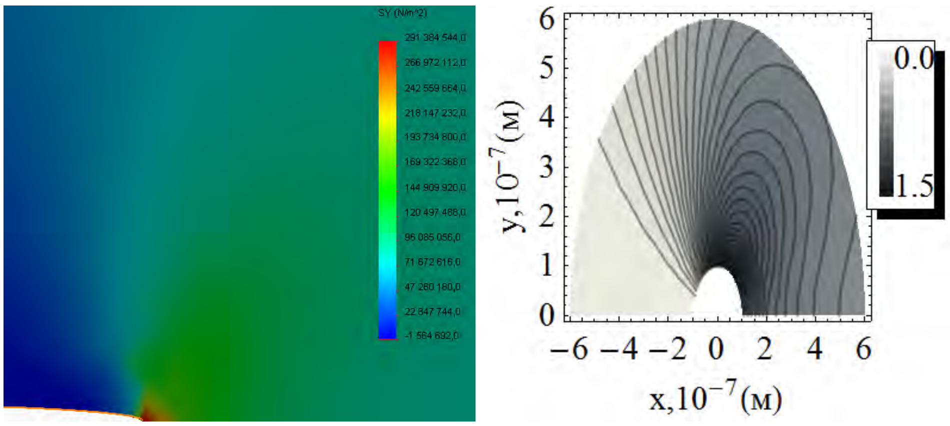
На рис. 5.6–5.8 представлены распределения компонент напряжений для стали X6CrNiTi18-10 при нагрузке $P = 70 МПа$.

Подробные сведения о методе конечных элементов приведены в работе [43].



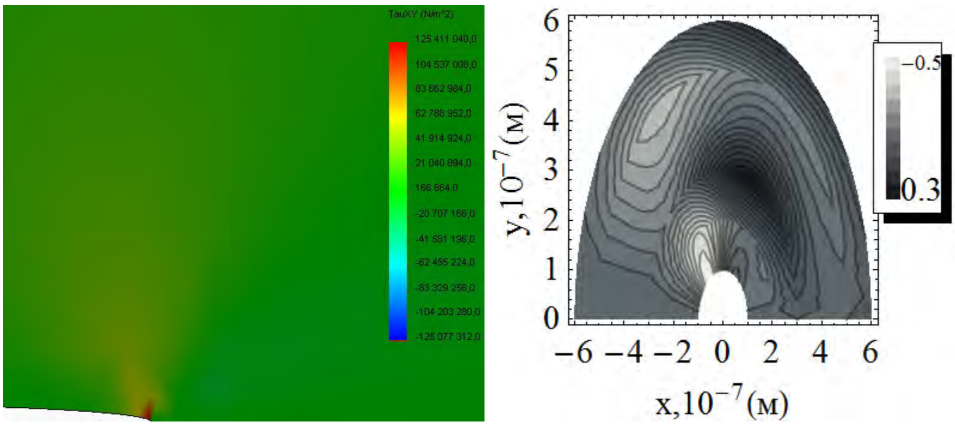
а б

Рис. 5.6. Распределение напряжений σ_{11}, а) полученные методом конечных элементов; б) найденные аналитически методом асимптотических разложений



а б

Рис.5.7. Распределение напряжений σ_{22}, а) полученные методом конечных элементов; б) найденные методом асимптотических разложений



а б

Рис.5.8. Распределение напряжений σ_{12} , а) полученные методом конечных элементов; б) найденные методом асимптотических разложений

Из рис. 5.6–5.9 видно, что проявляется существенная зависимость величины нормальных напряжений от расстояния от вершины трещины в связи с учетом пластических свойств материала. На удалении от вершины по длине трещины наблюдается более равномерное распределение напряжений за счет более полного учета пластических свойств материала.

Дополнительные сведения о понятиях и методах, используемых в теории упругости и механике разрушения, можно найти в публикациях [44,45,46].

Невозможно представить анализ напряженного состояния материла без построения графиков функциональных зависимостей длины трещины от нагрузки, нахождения диаграммы разрушения (зависимость напряжения от деформации). Графики позволяют оценить изменения параметров разрушения с течением времени и визуализировать результаты аналитических исследований и достаточно трудоемких численных экспериментов.

Использование асимптотических разложений функций и графический материал позволяют существенно «улучшить понимание» закономерностей, имеющих место в реальных конструкциях, подверженных различным нагрузкам, воздействиям и т.д.

ЛИТЕРАТУРА

1. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн – М.: Наука, 1981.
2. Бронштейн, И.Н. Справочник по математике / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М.: Наука, 1981.
3. Анго, А. Математика для электро- и радиоинженеров / А. Анго. – М.: Наука, 1965.
4. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.1 / Г.М. Фихтенгольц. – М.: Физматгиз, 1962.
5. Цыпкин, А.Г. Справочник по математике для средней школы / А.Г. Цыпкин. – М.: Наука, 1980.
6. Выгодский, М.Я. Справочник по высшей математике / М.Я. Выгодский. – М.: Наука, 1969.
7. Виленкин, Н.Я. Математика / Н.Я. Виленкин.– М.: Просвещение, 1977.
8. Герасимович, А.И. Математический анализ, ч.1. / А.И. Герасимович, Н.А. Рысюк. – Мн.: Вышэйшая школа, 1989.
9. Герасимович, А.И. Математический анализ, ч.2. / А.И. Герасимович, Н.П. Кеда, М.Б. Сугак. – Мн.: Вышэйшая школа, 1990.
10. Сачков, В.Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики / В.Н. Сачков.– М.: Наука, 1982.
11. Гусак, А.А. Справочник по высшей математике / А.А. Гусак, Г.М. Гусак. – Мн.: Навука і тэхніка, 1991.
12. Гусак, Г.М. Математика для подготовительных отделений вузов / Г.М. Гусак, Д.А. Капуцкая. – Мн.: Выщэйшая школа, 1989.
13. Вирченко, Н.А. Графики функций. Справочник / Н.А. Вирченко, И.И. Ляшко, К.И. Швецов.– Киев: Наукова думка, 1979.

14. Яковлев, Г.Н. Пособие по математике для поступающих в вузы / Г.Н. Яковлев, А.Д. Кутасов, Т.С. Пиголина, В.И. Чехлов, Т.Х. Яковлева. – М.: Наука, 1981.

15. Яремчук Г.Н., Алгебра и элементарные функции / Г.Н. Яремчук, П.А. Рудченко. – К.: Наукова думка, 1987.

16. Крамор, В.С. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа / В.С. Крамор.– М.: ОНИКС, 2008.

17. Роговцов, Н.Н. Курс лекций по высшей математике для студентов специальностей Т.06.01, Т.06,02, Т.23.03,… Часть 1 / Н.Н. Роговцов. – Мн.: БГПА, 2000.

18. Ефимов, Н.В. Краткий курс аналитической геометрии / Н.В. Ефимов. М.: Физматгиз, 1965.

19. Будак, Б.М., Кратные интегралы и ряды / Б.М .Будак, С.В. Фомин. – М.: Физматгиз, 1967.

20. Минюк, С.А.,. Высшая математика. Т. 1 /С.А. Минюк, В.И. Булгаков, А.В. Метельский, З.М. Наркун. – Минск: ООО «Элайда, 2004.

21. Тихонов, А.Н., Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Физматгиз, 1966.

22. Берман, Г.Н., Циклоида. Об одной замечательной кривой линии и некоторых других, с ней связанных / Г.Н. Берман. − М.: ЛКИ, 2007.

23. Савелов, А.А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применения / А.А. Савелов. – М.: Эдиториал УРСС, 2010.

24. Дубровина, О.В. Прикладная математика: метод. Пособие по выполнению практических и лабораторных работ для студентов заочного отделения специальности 1-54 01 01 «Метрология, стандартизация и сертификация» / О.В. Дубровина, Н.К. Прихач, В.М. Романчак. – Мн.: БНТУ, 2009.

25. Прусова, И.В. Основы механики разрушения: методическое пособие для студентов специальности 1-52 02 01 «Технология и оборудованиек

ювелирного производства» / И.В. Прусова, В.М. Романчак, А.Б. Севрук. – Мн.: БНТУ, 2008.

26. Ибрагимов, В.А. Напряженно-деформированное состояние вблизи конца растущей трещины в упругопластической среде / В.А. Ибрагимов // ПММ. – 1976. – Т. 40, №2. − С. 337−345.

27. Степанова, Л.В. Математические методы механики разрушения / Л.В. Степанова. – М: Физматлит, 2009.

28. Морозов, Н. Ф. Математические вопросы теории трещин / Н.Ф. Морозов. − М.: Наука, 1984.

29. Клюшников, В.Д. Математическая теория пластичности / В.Д. Клюшников. – М.: МГУ, 1978.

30. Астафьев, В.И., Распределение напряжений вблизи вершины наклонной трещины в нелинейной механике разрушения / В.И. Астафьев, А.Н. Крутов // Вестник СамГу. − 1999. − №4. − С.56−69.

31. Партон, В. З. Механика упругопластического разрушения. Часть 1. Основы механики разрушения / В. З. Партон, Е.М. Морозов. − М.: ЛКИ, 2008.

32. Разрушение. Математические основы теории разрушения / Г. Либовиц (гл. ред.) [и др.]. − М.: Мир, 1975. − Т.2. − С. 204−335.

33. Слепян, Л. И. Механика трещин / Л.И. Слепян. – Л.: Судостроение, 1990.

34. Черепанов, Г.П. Об одном методе решения упругопластической задачи / Г.П. Черепанов // Прикл. матем. и мех. − 1963. − Т. 27, №3. − С. 428−436.

35. Nifagin, V. Quasistatic stationary growth of elastoplastical single crack / V. Nifagin, M. Hundzina // International Journal of Engineering, Business and Enterprise Applications. – 2014. − №10. – P. 6−12.

36. Nifagin, V. Asymptotic of stresses in the problem of the subcritical crack propagation / V. Nifagin, M. Hundzina // Short Papers of Conference on Computer Methods in Mechanics. − Poznan, 2013. – P. 477−478.

37. Ивлеев, Д.Д. Теория упрочняющегося пластического тела / Д.Д. Ивлеев, Г.И. Быковец. − М.: Наука, 1971.

38. Hutchinson, J.W. Plastic stress and strain fields at a crack tip / J.W. Hutchinson // Journ. Mech. Phys. Solids. – 1968. − V. 16, №5. – P.337−347.

39. Rice, I.R. Stresses due to a sharp notch in a workhardening elastic-plastic material loaded by longitudinal shear / I.R. Rice // Journ. App. Mech. – 1967. − P. 287–289.

40. Rice, I.R. Plane strain deformation near a crack tip in a power-low hardening material / J.R. Rice, G.F. Rosengren // Journ. Mech. Phys. Solids. – 1968. − V.16., №1. − P. 1−12.

41. Качанов, Л. М. Основы механики разрушения / Л.М. Качанов. − М.: Наука, 1974. − 312 с.

42. Гундина, М.А. Асимптотика напряжений на этапе страгивания трещины нормального отрыва в теории течения с упрочнением // Сборник материалов Международной научно-практической конференции молодых ученых «Научные стремления – 2012», Минск : [в 2 т.] / НАН Беларуси, Совет молодых ученых.– Минск, 2012. – Т.1. − С. 389 – 392.

43. Морозов, Е.М. Метод конечных элементов в механике разрушения / Е.М. Морозов, Г.П. Никишков. – М.: Наука, 1980.

44. Orowan, E.O. Fundamentals of brittle behavior of metals / E.O. Orowan // Fatigue and fracture of metals. – 1952. − P. 139–167.

45. Hutchinson, J.W. Singular behavior at the end of tensile crack in a hardening material / J.W. Hutchinson // J. Mech. Phys. Solids. − 1968. − V. 16, №1. – P.13−31.

46. Griffith, A. A. The Theory of Rupture / A.A. Griffith // Proc. of First Int. Congress of Applied Mechanics. − 1924. − P. 55–63.