ОСОБЕННОСТИ РАСПРОСТРОНЕНИЯ ВОЛН В УПРУГОМ ИЗОТРОПНОМ СЛОЕ

Акимов В.А.

Белорусский национальный технический университет, Минск

In the present paper the peculiar features of the waves extension in the elastic isotropic area have been described by two theorems.

Рассмотрим бесконечный упругий изотропный слой. Оси *OX* и *OУ* направим внутри слоя в его середине, а ось *OZ* перпендикулярно слою. Тогда нулевые граничные условия примут вид $\tau_{ZX} = \tau_{ZY} = \sigma_Z = 0$ Докажем следующую теорему.

Теорема 1 В изотропном слое для первой основной динамической задачи теории упругости возможно выполнение только касательных или только нормальных однородных напряжений. Совместное равенство нулю касательных и нормальных напряжений на границах слоя невозможно.

В работе [1] были построены ряды перемещений для упругого слоя, которые обеспечивали тождественное выполнение нулевых касательных напряжений в задачах А и В, а также найдены выражения для нормальных напряжений . Полагая $\sigma_Z = 0$ в задаче А получим

$$\frac{\left(\nabla_2^2 + \nabla^2\right)^2}{4\nabla_1\nabla_2\nabla^2} = tg\left(h\nabla_1\right)ctg\left(h\nabla_2\right) \tag{1}$$

В задаче *B* будем иметь

$$\frac{\left(\nabla_2^2 + \nabla^2\right)^2}{4\nabla_1\nabla_2\nabla^2} = tg\left(h\nabla_2\right)ctg\left(h\nabla_1\right) \tag{2}$$

Так как левые части выражений (1) и (2) равны, то приравняем и их правые части. Тогда получим

$$tg\left(h\nabla_1\right)ctg\left(h\nabla_2\right) = tg\left(h\nabla_2\right)ctg\left(h\nabla_1\right) \tag{3}$$

Используя известное тождество $ctgx = \frac{1}{tgx}$, перепишем (3) в виде $tg^2\left(h\nabla_1\right) = tg^2\left(h\nabla_2\right)$, откуда устанавливаем равенства $tg\left(h\nabla_1\right) = tg\left(h\nabla_2\right)$ и $tg\left(h\nabla_1\right) = -tg\left(h\nabla_2\right)$ или $tg\left(h\nabla_1\right) = tg\left(-h\nabla_2\right)$. В результате получим невозможное в динамике соотношение $\nabla_1 = \pm\nabla_2$. Отсюда и следует доказываемое утверждение.

Кроме этого, по аналогии, можно сформулировать и доказать еще одну теорему.

Теорема 2. В изотропном слое для второй основной динамической задачи теории упругости возможно выполнение только касательных или только нормальных однородных перемещений. Совместное равенство нулю касательных и нормальных перемещений на границах слоя невозможно.

В работе [2] было построено общее решение 2-ой основной динамической задачи теории упругости в котором касательные перемещения в задачах А и В были тождественно равны нулю.

Полагая теперь w=0 в задаче А получим

$$\frac{\nabla^2}{\nabla_1\nabla_2} = tg(h\nabla_1)ctg(h\nabla_2). \qquad (4)$$

Аналогично в задаче В имеем

$$\frac{\nabla^2}{\nabla_1\nabla_2} = tg(h\nabla_2)ctg(h\nabla_1). \qquad (5)$$

Приравнивая в (4) и (5) правые части с учетом $ctgx = \frac{1}{tgx}$, получим $tg^2(h\nabla_1) = tg^2(h\nabla_2)$.

На основании последней формулы устанавливаем равенства $tg(h\nabla_1) = tg(h\nabla_2)$ и $tg(h\nabla_1) = -tg(h\nabla_2)$ или $tg(h\nabla_1) = tg(-h\nabla_2)$. В результате получим соотношение $\nabla_1 = \pm\nabla_2$, которое в динамике не имеет смысла. Что и доказывает исходное утверждение.

Литература

1. Акимов В.А., Кожушко В.В., Куриленко А.В. Устранение плеоназмов в операторном методе решения первой основной динамической задачи теории упругости. // Теоретическая и прикладная механика ./Межведомственный сборник научно- методических статей. Выпуск 23.Минск 2008. с.41-43.
2. Акимов В.А., Кожушко В.В., Куриленко А.В. Решение второй основной задачи теории упругости методом устранения лишних элементов. // Теоретическая и прикладная механика ./Межведомственный сборник научно- методических статей. Выпуск 23.Минск 2008. с.44-45.