ПОСТРОЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ СТАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ МЕТОДОМ УСТРАНЕНИЯ ЛИШНИХ ЭЛЕМЕНТОВ

Акимов В.А., Кожушко В.В., Гончарова С.В.

Белорусский национальный технический университет, Минск

Our paper presents a general solution of the first basic static problem in the elasticity theory that has been constructed for the infinite isotropic area. Zero tangent tensions on the boundary are accomplished identically.

Рассмотрим статическую задачу теории упругости для области, ограниченной двумя бесконечными параллельными плоскостями.

Представим систему дифференциальных уравнений для перемещений в операторной форме записи.

$$\begin{aligned}
&\Delta^2 u_1 + (\gamma-1)\partial_1(\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3) = 0\\
&\Delta^2 u_2 + (\gamma-1)\partial_2(\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3) = 0\\
&\Delta^2 u_3 + (\gamma-1)\partial_3(\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3) = 0
\end{aligned} \qquad (1)$$

Здесь $\Delta^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$, $\partial_1 = \dfrac{\partial}{\partial x}$, $\partial_2 = \dfrac{\partial}{\partial y}$, $\partial_3 = \dfrac{\partial}{\partial z}$, $\lambda = \dfrac{\lambda + 2\mu}{\mu}$; λ, μ - коэффициенты Ламе.

Решение системы уравнений будем разыскивать в виде

$$\begin{aligned}
&u_1 = \gamma\Delta^2\varphi_1 - (\gamma-1)\partial_1(\partial_1\varphi_1 + \partial_2\varphi_2 + \partial_3\varphi_3)\\
&u_2 = \gamma\Delta^2\varphi_2 - (\gamma-1)\partial_2(\partial_1\varphi_1 + \partial_2\varphi_2 + \partial_3\varphi_3)\\
&u_3 = \gamma\Delta^2\varphi_3 - (\gamma-1)\partial_3(\partial_1\varphi_1 + \partial_2\varphi_2 + \partial_3\varphi_3)
\end{aligned} \qquad (2)$$

Нетрудно установить, что

$$\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3 = \gamma\Delta^2(\partial_1\varphi_1 + \partial_2\varphi_2 + \partial_3\varphi_3) - (\gamma-1)\Delta^2\ (\partial_1\varphi_1 + \partial_2\varphi_2 + \partial_3\varphi_3) = \Delta^2\ \ (\partial_1\varphi_1 + \partial_2\varphi_2 + \partial_3\varphi_3)$$

и тогда

$$\Delta^2\gamma\Delta^2\varphi_1 - \Delta^2(\gamma-1)\partial_1(\partial_1\varphi_1 + \partial_2\varphi_2 + \partial_3\varphi_3) + (\gamma-1)\partial\Delta^2(\partial_1\varphi_1 + \partial_2\varphi_2 + \partial_3\varphi_3) = 0$$

$\gamma\Delta^2\Delta^2\varphi_1 = 0$ или $\Delta^4\varphi_1 = 0$.

Аналогично получим $\Delta^4\varphi_2 = 0$ и $\Delta^4\varphi_3 = 0$. Таким образом функции $\varphi_i(x, y, z)$ i=1,2,3 должны удовлетворять уравнению $\Delta^4\varphi_i = 0$.

В задаче А полагаем $\varphi_1 = \left[\mathrm{A}_1\cos(z\nabla)\sin^{-1}(h\nabla) + \mathrm{B}_1 z\sin(z\nabla)\sin^{-1}(h\nabla)\right] * f(x, y)$

$\varphi_2 = \left[\mathrm{A}_2\cos(z\nabla)\sin^{-1}(h\nabla) + \mathrm{B}_2 z\sin(z\nabla)\sin^{-1}(h\nabla)\right] * f(x, y)$

$\varphi_3 = \left[\mathrm{A}_3\sin(z\nabla)\sin^{-1}(h\nabla) + \mathrm{B}_3 z\cos(z\nabla)\sin^{-1}(h\nabla)\right] * f(x, y)$, где $\nabla = \sqrt{\partial_1^2 + \partial_2^2}$, $\Delta^2 = \nabla^2 + \partial_3^2$

Предварительно устанавливаем

$$\partial_1\varphi_1 + \partial_2\varphi_2 + \partial_3\varphi_3 = (\partial_1\mathrm{A}_1 + \partial_2\mathrm{A}_2 + \nabla\mathrm{A}_3 + \mathrm{B}_3)\cos(z\nabla)\sin^{-1}(h\nabla) + (\partial_1\mathrm{B}_1 + \partial_2\mathrm{B}_2 - \nabla\mathrm{B}_3)z\sin(z\nabla)\sin^{-1}(h\nabla)$$

$$\frac{\sigma_{31}}{\mu} = \partial_1 u_3 + \partial_3 u_1 = \gamma\Delta^2(\partial_3\varphi_1 + \partial_1\varphi_3) - 2(\gamma-1)\partial_1\partial_3(\partial_1\varphi_1 + \partial_2\varphi_2 + \partial_3\varphi_3).$$

С учетом $\Delta^2[\ \cos(z\nabla)\ ] = \Delta^2[\sin(z\nabla)] = 0$

получим $\Delta^2[\sin(z\nabla)] = 2\nabla\cos(z\nabla)$; $\Delta^2[z\cos(z\nabla)] = -2\nabla\sin(z\nabla)$

$$\gamma\Delta^2(\partial_3\varphi_1 + \partial_1\varphi_3) = \gamma\partial_3[2\mathrm{B}_1\nabla\cos(z\nabla)]\sin^{-1}(h\nabla) - \gamma\partial_1[2\mathrm{B}_3\nabla\sin(z\nabla)]\sin^{-1}(h\nabla) = -2\gamma\nabla(\nabla\mathrm{B}_1 + \partial_1\mathrm{B}_3)\sin(z\nabla)\sin^{-1}(h\nabla)$$

$$-2(\gamma-1)\partial_1\partial_3(\partial_1\varphi_1 + \partial_2\varphi_2 + \partial_3\varphi_3) = 2(\gamma-1)\partial_1\left[(\partial_1\nabla\mathrm{A}_1 + \partial_2\nabla\mathrm{A}_2 + \nabla^2\mathrm{A}_3) + 2\nabla\mathrm{B}_3 - (\partial_1\mathrm{B}_1 + \partial_2\mathrm{B}_2)\right]\sin(z\nabla)\sin^{-1}(h\nabla) -$$
$$-2(\gamma-1)\partial_1\nabla(\partial_1\mathrm{B}_1 + \partial_2\mathrm{B}_2 - \nabla\mathrm{B}_3)z\cos(z\nabla)\sin^{-1}(h\nabla)$$

Подобным образом расписываем напряжения σ_{32} и σ_{33}. Устраняя в них общие операторные сомножители, после преобразований получим:

Задача А

$$U = \frac{\partial_1}{\sqrt{\Delta}} F\, f\,(x_1 y), V = \frac{\partial_2}{\sqrt{\Delta}} F\, f\,(x, y),$$

$$W = \left(2\gamma \sin\left(z\sqrt{\Delta}\right) \sin^{-1}\left(h\sqrt{\Delta}\right) + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \frac{\partial\ F}{\partial z} \right) f\,(x, y)$$

где

$$F\ = \cos\left(z\sqrt{\Delta}\right)\sin^{-1}\left(h\sqrt{\Delta}\right) - (\gamma - 1)\left(z\sqrt{\Delta}\sin\left(z\sqrt{\Delta}\right)\sin^{-1}\left(h\sqrt{\Delta}\right) + h\sqrt{\Delta}\cos\left(z\sqrt{\Delta}\right)\cos^{-1}\left(h\sqrt{\Delta}\right)\right)$$

Аналогично решается задача В.

Задача В

$$U = \partial_1 \left(2\sin\left(z\sqrt{\Delta}\right)\sin^{-1}\left(h\sqrt{\Delta}\right) + \frac{\partial G}{\partial z} \right) g\ (x, y),$$

$$V = \partial_2 \left(2\sin\left(z\sqrt{\Delta}\right)\sin^{-1}\left(h\sqrt{\Delta}\right) + \frac{\partial G}{\partial z} \right) g\ (x, y),$$

$$W = -\sqrt{\Delta} G\ g\ (x, y)$$

где

$$G\ = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \cos\left(z\sqrt{\Delta}\right)\sin^{-1}\left(h\sqrt{\Delta}\right) + (\gamma - 1)\left(z\sin\left(z\sqrt{\Delta}\right) sih^{-1}\left(h\sqrt{\Delta}\right) + h\cos\left(z\sqrt{\Delta}\right)\cos^{-1}\left(h\sqrt{\Delta}\right)\right)$$

В результате построено общее операторное решение статической задачи теории упругости для бесконечного изотропного слоя, в которой тождественно удовлетворяется нулевые касательные напряжения, а нормальные напряжения отличны от нуля.

Литература

1. Акимов В.А., Кожушко В.В., Куриленко А.В. Устранение плеоназмов в операторном методе решения первой основной динамической задачи теории упругости. // Теоретическая и прикладная механика ./Межведомственный сборник научно- методических статей. Выпуск 23.Минск 2008. с.41-43.