РАСЧЕТ НА УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМЫ «КОСТЬ-ИМПЛАНТАНТ»

Куриленко А.В.

Белорусский национальный технический университет, Минск

In this article the system stability «bones- implant» has been under consideration. The value of the critical load for that system was found.

Одним из методов частично или полностью восстанавливающих функции пострадавшего органа опорно-двигательного аппарата является использование инородных имплантантов.

В данной работе в первом приближении решается задача об устойчивости системы «кость-имплантант». В первую очередь нас интересует влияние физико-механических свойств титанового имплантанта и его геометрических размеров на потерю устойчивости, а также самого значения критической нагрузки.

На рис. 1 приведено схематическое изображение потери устойчивости в системе «кость-имплантант». Изобразим тазобедренную кость с имплантантом, для этого разделим ее на два участка.

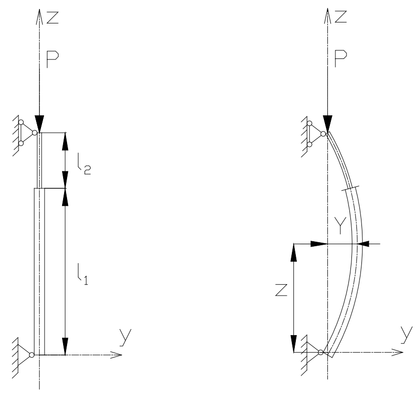

Рис. 1. Схематическое изображение потери устойчивости в системе «кость-имплантант»

Запишем физико-механические и геометрические характеристики кости и имплантанта. Кость: $E_1 = 10^{10}\,Па \quad I_1 = 2{,}5 см^4 \quad l_1 = 45 см \quad d_1 = 2{,}7 см$. Имплантант: $E_2 = 1{,}1\cdot 10^{11}\,Па \quad I_2 = 0{,}14 см^4 \quad l_2 = 15 см \quad d_2 = 1{,}3 см$.

Составим два дифференциальных уравнения изгиба для имплантанта и кости соответственно:

$$1.7EIy_1'' + Py_1 = 0,$$

$$EIy_2'' + Py_2 = 0,$$

где $E_1I_1 / E_2I_2 = 1{,}7$ - отношение жесткостей в системе «кость-имплантант» при изгибе.

Обозначим: $$P / 1{,}7EI = k^2. \tag{1}$$

Перепишем дифференциальные уравнения в виде:

$$y_1'' + k^2 y_1 = 0, \tag{2}$$

$$y_2'' + (1{,}33k)^2 y_2 = 0. \tag{3}$$

Решения уравнений (2) и (3) имеют вид:

$$y_1 = c_1 \sin kz + c_2 \cos kz,$$

$$y_2 = c_3 \sin 1{,}33kz + c_4 \cos 1{,}33kz .$$

Запишем начальные условия:

$$z = 0: \qquad y_1 = 0 \ ,$$
$$z = \frac{3}{4}l: \qquad y_1 = y_2 ,$$
$$z = \frac{3}{4}l: \qquad y_1' = y_2' ,$$
$$z = l: \qquad y_2 = 0 \ .$$

Из первого начального условия получаем $c_2 = 0$, а для оставшихся выписываем соответственно три уравнения:

$$c_1 \sin\frac{3}{4}kl = c_3 \sin 1{,}33k\frac{3}{4}l + c_4 \cos 1{,}33k\frac{3}{4}l ,$$
$$\frac{3}{4}c_1 \cos\frac{3}{4}kl = c_3 \cos 1{,}33k\frac{3}{4}l - c_4 \sin 1{,}33k\frac{3}{4}l \quad ,$$
$$c_1 \sin\frac{3}{4}kl = c_3 \sin 1{,}33k\frac{3}{4}l + c_4 \cos 1{,}33k\frac{3}{4}l .$$

Для того чтобы получить ненулевое решение следует составить определитель этой системы и приравнять его к нулю:

$$\begin{vmatrix} \sin\frac{3}{4}kl & -\sin 1{,}33k\frac{3}{4}l & -\cos 1{,}33k\frac{3}{4}l \\ \frac{3}{4}\cos\frac{3}{4}kl & -\cos 1{,}33k\frac{3}{4}l & \sin 1{,}33k\frac{3}{4}l \\ 0 & \sin 1{,}33kl & \cos 1{,}33kl \end{vmatrix} = 0 . \qquad (4)$$

Обозначим $kl = x > 0$, перепишем (4) в виде:

$$\begin{vmatrix} \sin 0.75x & -\sin x & -\cos x \\ 0{,}75\cos 0{,}75x & -\cos x & \sin x \\ 0 & \sin 1{,}33x & \cos 1{,}33x \end{vmatrix} = 0 .$$

Раскрыв определитель получаем уравнение:

$$ctg 0{,}33x + 0{,}75 ctg 0{,}75x = 0 ,$$

решая которое находим $kl = 3 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{3}{l}$.

Подставляя полученное значение в (1), определяем критическую силу:

$$P_{кр} = \frac{15{,}3EI}{l^2} = \frac{15{,}3 \cdot 0{,}14 \cdot (10^{-2})^4 \cdot 1{,}1 \cdot 10^{11}}{0{,}6^2} = 6{,}5 кН$$

Полученное значение $P_{кр}$ для кости с имплантантом близки по значению для кости без имплантанта [1], что подтверждает достоверность полученных результатов.

Литература

1. Бегун П.И. Шукейло Ю.А. Биомеханика: Учебник для вузов.-СПб.:Политехника, 2000.-463с.

2. Вольмир А.С. Устойчивость деформированных систем.-М: Наука, 1967.-984с.