

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПУЛЬСОВОЙ ВОЛНЫ И ЕЕ ВЛИЯНИЕ НА ГЕМОДИНАМИКУ СОСУДОВ

Чигарев А.В., Орловская А.А.

Белорусский национальный технический университет, Минск

The problems of the processes definition of the pulse wave propagation down the vessels of the circulatory system and its interaction with blood flow are widely researched theoretically and experimentally in the recent years.

Эффекты деформирования спирально-анизотропных тел.

При растяжении стержня из спирально-анизотропного материала возникает моторный эффект, т.е. возникает крутящий момент. Этот эффект некоторые авторы считают определяющим в винтообразном течении крови. Не отрицая подобной возможности, особенно в области аорты в данной работе предлагается другой возможный механизм возникновения моторного эффекта, обусловленного не растяжением оболочки, а ее раздуванием и реакцией армирующих волокон.

Рассмотрим элемент кровеносного сосуда как цилиндрическую трубку, армированную волокнами. Пусть трубка находится под действием некоторого постоянного давления, не вызывающего существенных деформаций. Пусть материал трубки армирован волокнами, жесткость которых значительно больше жесткости самой трубки, причем каждое волокно представляет собой винтовую линию. Эксперименты на эластичных трубках, армированных волокнами по винтовым линиям показывают, что при создании избыточного внутреннего давления сверх P_0 характер деформации трубки зависит от угла армирования (угол между осью трубки и волокном). Существует такой критический угол армирования, при котором дополнительное давление не меняет формы трубки. При углах меньших критического трубка принимает форму бочонка (максимальная деформация в центре), а при углах больших критического (максимальная деформация у краев) поверхность трубки вогнута в середине.

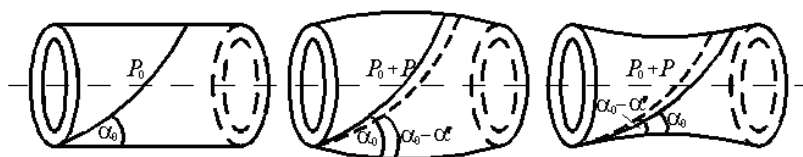


Рис.1. Трубка, армированная волокнами вдоль ее оси. P_0 -номинальное давление, α^0 -критический угол, α' -дополнительный угол.

Формулы (1) дают зависимость эффективных упругих модулей от модулей λ_c^* при армировании вдоль оси трубки ($\alpha = 0$), а формулы (2) дают формулы для λ_r^* при армировании в окружном направлении ($\alpha = \frac{\pi}{2}$) рис. 2., а, б.

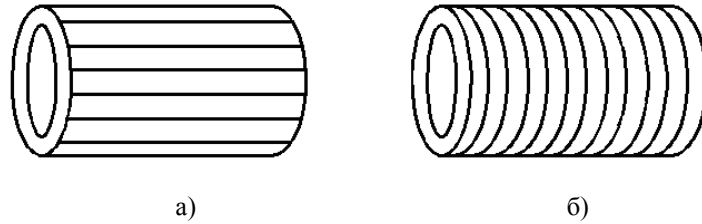


Рис.2.

Естественно, что в случае а) сопротивление внутреннему давлению меньше, чем в случае б).

Эффективные упругие модули зависят от упругих модулей материала трубки, волокон, длины и радиуса.

$$\lambda_l^3 = \lambda_l^* (1 + f(l, r)) \quad (1)$$

В случае армирования поперек можем записать

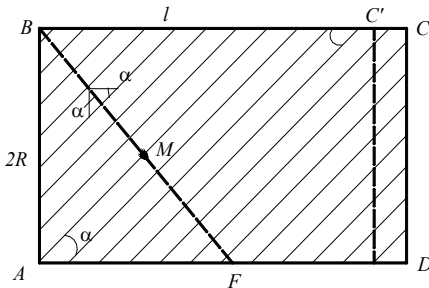
$$\lambda_t^3 = \lambda_t^* (1 + \varphi(l, r)) \quad (2)$$

где λ_l^*, λ_t^* – модули упругости трубки, армированной вдоль и поперек оси трубы.

Тогда при армировании под углом α к оси трубки можем записать

$$\lambda_\alpha^3 = \lambda_l^3 \cos \alpha + \lambda_t^3 \sin \alpha \quad (3)$$

Рассмотрим нахождение критического угла армирования $\alpha_{кр}$. Вначале рассмотрим сосуд на участке, где его радиус остается постоянным вдоль длины. Выделим элемент длины l . Пусть расстояние между армируемыми волокнами равно δ , тогда на стороне AB количество волокон равно $(BM: \delta) = 2R \sin(B/2 - \alpha) = 2R \cos \alpha$.



Количество волокон на стороне BC равно $l: \delta$. пользуясь произволом выбора l можем выбрать l таким образом, чтобы число волокон на AB и BC было равным, т.е. возьмем дину $BC' = 2R \cdot \text{ctg} \alpha$. Действительно, в этом случае расстояние между волокнами на AB равно $\delta_{AB} = \frac{\delta}{\cos \alpha}$, а на BC'

будет равно $\delta_{BC'} = \delta / \sin \alpha$.

Обозначим среднее за цикл усилие в волокне при прохождении пульсовой волны через $\langle P \rangle = \int_t^{t+T} P$. Рассмотрим условие равновесия элемента в течение цикла. Средняя равнодействующая сила в сечении AD будет

$$\langle P_{AD} \rangle = \langle P \rangle n \sin \alpha \quad (4)$$

где n – число волокон в сечении AD .

Средняя равнодействующая в сечении CD равна

$$\langle P_{CD} \rangle = \langle P \rangle n \cos \alpha \quad (5)$$

Поскольку при нагружении цилиндра внутренним давлением окружное напряжение больше осевого в два раза, то можем записать

$$\frac{\langle P_{CD} \rangle}{\operatorname{tg} \alpha} = 2 \frac{\langle P_{AD} \rangle}{l} \quad (6)$$

Из (5) с учетом (3), (4) находим α , при котором оболочка под действием внутреннего давления сохраняет цилиндрическую форму.

Пусть давление в оболочке обусловлено выбросом крови в стадии систолы и возникновению пульсовой волны.

При угле армирования $\alpha < \alpha_{кр}$ при прохождении пульсовой волны оболочка принимает бочкообразную форму, а при $\alpha > \alpha_{кр}$ она принимает вогнутую форму. Таким образом, происходит сначала запасание (резервирование) крови, а затем ее проталкивание. Угол α зависит от времени, и движение каждого волокна можно моделировать как колебания около положения равновесия равного $\alpha_{кр}$.

Обозначим $\alpha - \alpha_{кр} = q$, а изменение q во времени будем описывать уравнением

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + p^2 q = P(t) \quad (7)$$

где $P(t)$ моделирует цикл систолы и диастолы сердца

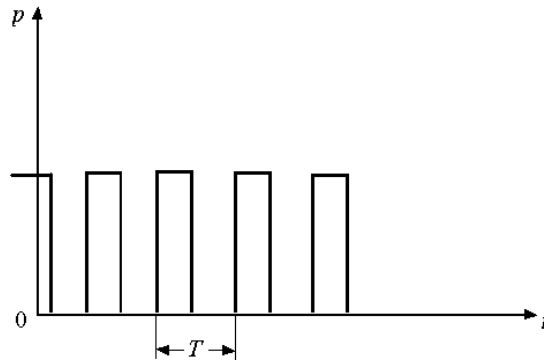


Рис. 3. Модель последовательных импульсов в артерии.

Тогда решение имеет вид

$$q = \frac{\langle p \rangle}{2mp} \left(\sin pt + \operatorname{ctg} \frac{pT}{2} \cos pt \right), \quad \langle p \rangle = \int_t^{t+T} P(t) dt$$

Если рассматривать нарастание и падение давления в пульсовой волне как непрерывный процесс, описываемой функцией $P(t) = P_0 |\sin \omega t|$, то решение имеет вид

$$q = \frac{P_0}{mp} \left[\frac{p\omega}{\omega^2 - p^2} \left(\sin pt + \operatorname{ctg} \frac{pT}{2} \cos pt \right) - \frac{p^2 \sin \omega t}{\omega^2 - p^2} \right]$$

Таким образом, можно описать крутильные колебания цилиндрической оболочки, которые могут закручивать поток крови при прохождении пульсовой волны.

Процесс возникновения винтообразного течения крови можно представить следующим образом. В фазе систолы из левого желудочка в аорту поступает кровь под давлением p , которое изменяется во времени согласно рис.3, а изменение объемной скорости \bar{V} представлено на рис.4.

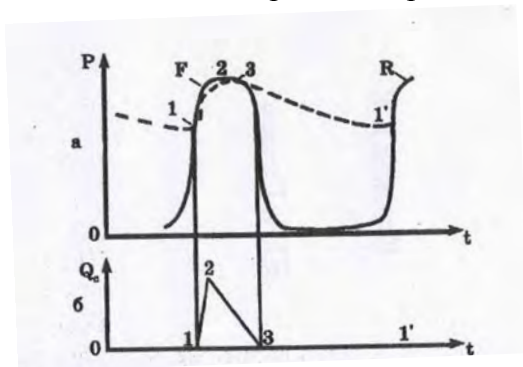


Рис.4.

Согласно теореме Стокса, поток вектора скорости \bar{V} через площадку S аортального клапана сердца связан с циркуляцией \bar{V} по контуру C , охватывающему поверхность крышки отверстия клапана

$$\int_C u_i dx_i = \iint_S l_i \varepsilon_{ikm} \frac{\partial u_m}{\partial x_k} ds$$

где l_i - направляющие косинусы нормали к элементу поверхности ds .

Отсюда следует, что если в левом желудочке сердца кровь в силу его асимметрии строения приобретает винтообразное движение, то на контуре возникает циркуляция крови. Далее кровь поступающая аорту-артерии создает избыточное давление, под действием которого сосуд увеличивает свой объем за счет скручивания волокон меди (уменьшение угла α) до некоторого значения α' . При этом запасается потенциальная энергия упругой деформации сосудов, за счет скручивания спиралевидных волокон которая в стадии диастолы проталкивает кровь дальше. При этом в силу того, что запасается энергия в форме крутильного колебания, то при закручивании волокон они придадут стенке и граничным частицам крови вращательное движение, т.е. возникает циркуляция вектора скорости на контуре C_1 , а, следовательно, возникает соленоидальное поле течения крови. В векторном виде это можно записать следующим образом

$$\int_{C_1} \bar{V} dx_i = \iint_{S_1} l \cdot \text{rot} \bar{V} ds,$$

где C_1, S_1 - контур и поверхность в некотором сечении сосуда.

Обычно, в гемодинамике широко используются формулы гидравлики, в соответствии с которыми закон сохранения массы записывается как условие несжимаемости.

Предлагаемая модель образования винтообразного течения не противоречит известной модели Франка эластичного резервуара. Франк предлагал модель резервуара из однородной изотропной эластичной ткани, результатом чего являлось ламинарное течение в кровеносном сосуде.

Использование модели армированного эластичного резервуара позволяет, не опровергая опытных данных об изменении макроскопических параметров течения

(давление, объемная скорость), описать эффект винтообразного течения, который в модели Франка получить нельзя.

В предложенной модели кровеносная система играет роль рекуператора энергии сердечных сокращений.

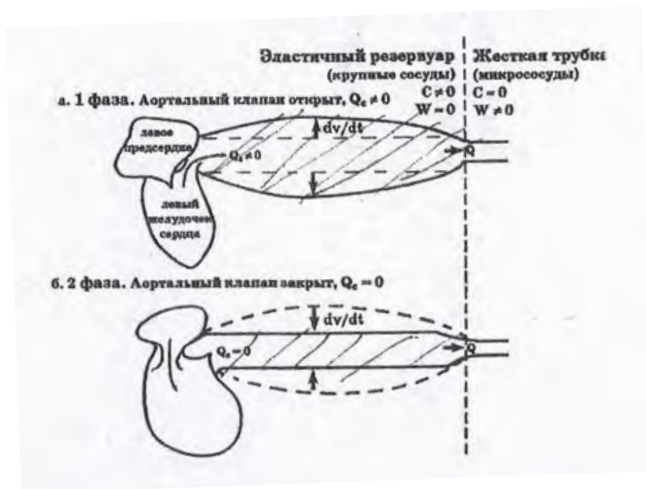


Рис.5. Модель Франка армированная

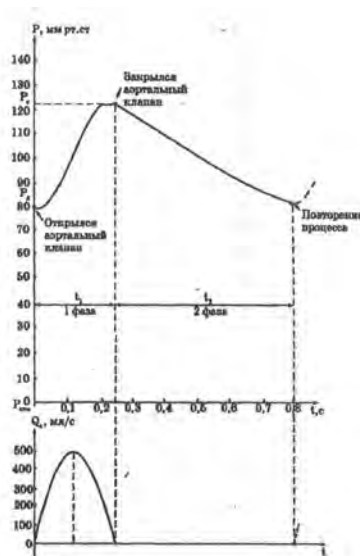


Рис. 5. Модель работы эластичного резервуара

Действительно, в фазе систолы энергия упруго запасается, а в фазе диастолы используется для сообщения крови дополнительного крутильного импульса. Однако, в силу вязкости крови часть энергии будет диссипировать, что должно приводить к уменьшению массовой скорости течения. Как известно, скорость течения крови на порядок меньше скорости пульсовой волны, распространяющейся по меди, имеющей достаточно высокие параметры упругости ($E = 3,7 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$). Поскольку средняя скорость течения крови считается равной 0,5 м/с, а пульсовой волны 5-6 м/с, то пульсовые волны от более поздних фаз систолы проходят через выбранный текущий объем крови порядка 10 и более раз.

$$V_{II} = \sqrt{\frac{Eh}{2r\rho}},$$

где E -модуль Юнга стенки сосуда, h -ее толщина, r -радиус просвета, ρ -плотность крови.

В свете предлагаемой модели пульсовая волна представляет собой волну крутильных колебаний оболочки, распространяющихся со скоростью $V_{II} = 6-8$ м/с.

Чтобы исключить скорость течения, будем проводить рассмотрение в системе координат, связанной с движущимся выделенным объемом, тогда влияние пульсовой волны на рассматриваемое течение будет сказываться в периодическом изменении угла армирования α , происходящего при $\alpha < \alpha_0$ под действием крутящего момента от волны крутильного колебания, а при $\alpha > \alpha_0$ под действием упругих напряжений, возникающих в сетке сосуда при раскручивании волокна.

Оценим величину изменения радиуса R (радиальная деформация) сосуда за счет пульсовой волны.

Пусть крутка стенки связана с изменением угла α' формулой

$$u_\alpha = \alpha' h_\alpha$$

где h_α -шаг, u_α -смещение точки А, α' -дополнительный угол закручивания (раскручивания) пружины.



Рис.4.

Первоначальный радиус R_0 при этом изменяется на величину ΔR , которую в линейном приближении положим равной u_α , тогда имеем

$$\Delta R = \alpha' h_\alpha.$$

Изменение гидравлического сопротивления кровеносного сосуда в первом приближении вычисляется по формуле

$$\Delta W = \frac{8\eta l}{\pi(R \pm u_\alpha)^4} = \frac{8\eta l}{\pi(R + \Delta R)^4},$$

где η -вязкость, l -длина сосуда.

Таким образом, пульсовая волна в первой фазе прохождения пульсовой волны снижает сопротивление, а во второй повышает.

Соответственно этому объемная скорость в силу связи изменяет свою объемную скорость на величину ΔV , вычисляемую согласно формуле

$$\Delta V = \frac{\pi(R + R')^4}{8\eta} \frac{dp}{dl}.$$

Пульсирующий винтовой характер течения крови является тем энергоэффективным механизмом, который позволяет сердечной мышце при сравнительно небольших размерах совершать работу по снабжению клеток организма кислородом и питанием.

Очевидно, что механизм, построенный на основании предложенной модели имеет место для артериальной системы, описывая все крупные сосуды как один эластичный армированный резервуар. Предложенная модель предлагает в качестве одного из возможных механизмов продвижения крови в кровеносную систему механизм типа волновой передачи. Для описания капиллярной системы необходима другая модель.

Литература

1. A randomized comparison of coronary-stent placement and balloon angioplasty in the treatment of coronary artery disease / D. Fischman, M. Leon, D. Baim et al. // *N. Engl. J. Med.* – 1994. – Vol. 331, № 8. – P. 496-501.

2. Козлов К.Л. Интервенционная пластика венечных артерий – С.-Петербург: ЭЛБИ, 2000. – С. 68.

3. Stenting in cardiac interventional practice, off-label versus approved indication. / D. Holmes, P. Berger, K. Garratt et al. // *Circulation.* – 1995. – Vol. 92, suppl. I. – P. 85.

4. Bosch J.L., Hunink M.G.M. Meta-analysis of the results of percutaneous transluminal angioplasty and stent placement for aortoiliac occlusive disease. *Radiology* 1997; 204: 87-96.

5. Fischman D.L., Leon M., Baim D.S., Schatz R.A., Savage M.P., Penn I., Detre K., Veltri L., Ricci D., Nobuyoshi M., Cleman M., Heuser R., Almond D., Teirstein P.S., Fish D., Colombo A., Brinker J., Moses J., Shakhovich A., Hirshfeld J., Bailey S., Ellis S., Rake R., Goldberg S., for the Stent Restenosis Study Investigators. A randomized comparison of coronary stent placement and balloon angioplasty in the treatment of coronary disease. *N Engl J Med.* 1994; 331: 496-501.

6. Macaya C., Serruys P.W., Ruygrok P., Suryapranata H., Mast G., Klugmann S., Urban P., den Heijer P., Koch K., Simon R., Morice M.C., Crean P., Bonnier H., Wijns W., Danchin N., Bourdonnec C., Morel M.A., for the Benestent Study Group. Continued benefit of coronary stenting compared to balloon angioplasty: one year clinical follow-up of the Benestent trial. *J Am Coll Cardiol.* 1996; 27; 255-261.

7. Richter G.M., Roeren T.H., Noeldge G., et al. Superior clinical results of iliac stent placement versus percutaneous transluminal angioplasty: four-year success rates of a randomized study (abstr). *Radiology* 1991; 181 (suppl): 161.

8. Serruys P.W., de Jaegere P., Kiemeneij F., Macaya C., Rutsch W., Heyndricks G., Emanuelsson H., Marco J., Legrand V., Materne P., Belardi J., Sigwart U., Colombo A., Goy J.J., van den Heuvel P., Delcan J., Morel M.A., for the Benestent Study Group. A comparison of balloon-expandable stent implantation with balloon angioplasty in patients with coronary artery disease. *N Engl J Med.* 1994; 331: 489-495.

9. Van der Ven G.J.P., Kaatee R., Beuter J.J., Beek J.A.F., Woittiez J.A., Buskens E., Koomans A.H., Mali P.Th.W. Arterial stenting and balloon angioplasty in ostial atherosclerotic renovascular disease: a randomised trial. *Lancet.* 1999. 353: 282-86.

10. A.V.Chigarev, V.T.Minchenya, A.S.Manko. Interaction Research of Vessel-Stent-Blood System/. International Symposium on Trends in Applications of

Mathematics to Mechanics. STAMM 2006. July 10-14 , 2006. Vienna University of Technology organized under the auspices of ISIMM. с.29-30.

11. Мрочек А.Г., Адзериho И.Э., Герасевич В.А., Чигарев А.В., Минченя В.Т. Расчет радиальной жесткости и устойчивости внутрисосудистых эндопротезов - артериальных стентов // Доклады НАН Беларуси. – 2003. – Т. 47, № – С.

12. А.В.Чигарев, В.Т.Минченя,А.С.Манько. Теоретические и экспериментальные исследования элементов проволочных стентов. Межведомственный сборник научно- методических статей. Теоретическая и прикладная механика. Вып. 20. Мн.:-2006 г. с. 13-16.

13. В.Т. Минченя, А.С.Манько. Технология изготовления проволочного стента. Материалы докладов 7-й международной научно- технической конференции «Новые материалы и технологии: порошковая металлургия, композиционнык материалы, защитные покрытия». 16-17 мая 2006 г. С.207-208

14. Устинов Ю.А. Некоторые задачи для упругих цилиндрических тел с винтовой анизотропией. // Успехи механики. 2003, №4 с.3-29