

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ ПРОЧНОСТИ.

Дудяк А.И., Сахнович Т.А.

Белорусский национальный технический университет, Минск

Анализ известных критериев прочности, учитывающих неодинаковую сопротивляемость материалов при растяжении и сжатии, выявил ряд существенных недостатков этих критериев, основным из которых является ограничение области их применения /1/.

Предлагаемый новый энергетический критерий прочности является более общим и охватывает почти все известные энергетические критерии. Он основан на предположении, что энергия предельного напряжённого состояния является функцией величин нормального и касательного октаэдрических напряжений. При выводе гипотез прочности исследователи предполагают, что прочность материала зависит от напряжённого состояния, а условия прочности в общем виде могут быть представлены /1/:

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, m_i) = A \quad (1)$$

Константы материала m_i определяются по результатам испытаний при простейших нагружениях путём совместного решения системы уравнений (1). Для большинства гипотез число определяемых констант не превышает трёх. Поэтому они определяются из испытаний при кручении и одноосном растяжении и сжатии.

Предлагаемый критерий представляет собой частный случай зависимости (1) и имеет вид:

$$BV + (1 + B_1 \text{sign} V) \cdot U = C \quad (2)$$

где $V = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ - величина, пропорциональная первому инварианту тензора напряжений

$U = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2$ - величина, пропорциональная второму инварианту тензора напряжений

B , B_1 и C - постоянные, величины, которых определяются на основании результатов экспериментов при кручении, одноосном растяжении и сжатии.

В выражении (2) $\text{sign} V$ означает, что знак перед постоянной B_1 , соответствует знаку величины V . Знак перед постоянной B_1 определяет неравноценность предела прочности на сдвиг материала в области сжатия и в области растяжения.

При линейном растяжении:

$$V = \sigma_{ep}; U = 2\sigma_{ep}^2 \quad (3)$$

σ_{ep} - предел прочности материала при одноосном растяжении.

Следовательно, критерий (2) с учётом условий (3) может быть представлен в виде:

$$B\sigma_{ep} + 2(1 + B_1)\sigma_{ep}^2 = C \quad (4)$$

При линейном сжатии

$$V = -\sigma_{\text{вс}}; U = 2\sigma_{\text{вс}}^2 \quad (5)$$

$\sigma_{\text{вс}}$ -предел прочности материала при одноосном сжатии.

Критерий (2) с учётом условий (5) будет иметь следующий вид:

$$-B\sigma_{\text{вс}} + 2(1 - B_1)\sigma_{\text{вс}}^2 = C \quad (6)$$

При чистом сдвиге, определяемом при испытании материалов на кручение:

$$V = 0; U = 6\tau_{\text{с}}^2 \quad (7)$$

$\tau_{\text{с}}$ -предел прочности при сдвиге.

С учётом условий (7) критерий (2) может быть представлен в следующем виде:

$$6(1 \pm B_1)\tau_{\text{с}}^2 = C \quad (8)$$

В выражении (8) постоянная B_1 может иметь знак как плюс так и минус, что связано с нулевым значением величины V , относительно которой выбирается знак перед постоянной B_1 .

В первом случае выражение (8) будем рассматривать с положительным значением постоянной B_1 .

Поэтому, рассматривая совместно выражение (4), (6) и (8) находим значения постоянных B, B_1, C .

$$B = \frac{4\sigma_{\text{вс}}^2(3\nu_{\tau}\tau_{\text{с}} - \sigma_{\text{вп}})}{3\tau_{\text{с}}^2(1 + \frac{1}{\nu}) + \sigma_{\text{вс}}^2 - \sigma_{\text{вп}}\sigma_{\text{вс}}}$$

$$B_1 = \frac{\sigma_{\text{вс}}^2 + \sigma_{\text{вп}}\sigma_{\text{вс}} - 3\tau_{\text{с}}^2(1 + \frac{1}{\nu})}{3\tau_{\text{с}}^2(1 + \frac{1}{\nu}) + \sigma_{\text{вс}}^2 - \sigma_{\text{вп}}\tau_{\text{вс}}}$$

$$C = \frac{12\sigma_{\text{вс}}^2\tau_{\text{с}}^2}{3\tau_{\text{с}}^2(1 + \frac{1}{\nu}) + \sigma_{\text{вс}}^2 - \sigma_{\text{вп}}\tau_{\text{вс}}}$$

где: $\nu = \frac{\sigma_{\text{вп}}}{\sigma_{\text{вс}}}$; $\nu_{\tau} = \frac{\tau_{\text{с}}}{\sigma_{\text{вп}}}$;

Подставив значения постоянных B, B_1 и C в критерий (2) получим:

$$2\sigma_{\text{вс}}^2(3\nu_{\tau}\tau_{\text{с}} - \sigma_{\text{вп}})V + \sigma_{\text{вс}}^2U = 6\sigma_{\text{вп}}^2\tau_{\text{с}}^2 \quad (9)$$

Сравнение напряжённых состояний проводят с напряжённым состоянием данного материала легко осуществимого в экспериментальных условиях. Это напряжённое состояние называется эквивалентным. В качестве эквивалентного напряжения выбирают напряжение при одноосном растяжении. Рассматривая совместно выражения (4), (6) и (8) и принимая, что $\sigma_{\text{вп}} = \sigma_{\text{экс}}$ получим следующую формулу эквивалентности:

$$\sigma_{\text{экс}} = \frac{3\nu_{\tau}^2 - 1}{6\nu_{\tau}^2}V + \sqrt{\left(\frac{3\nu_{\tau}^2 - 1}{6\nu_{\tau}^2}\right)^2 V^2 + \frac{1}{6\nu_{\tau}^2}U} \quad (10)$$

Рассмотрим случай, когда в выражение (8) величина V_1 входит с отрицательным знаком. Рассматривая аналогично выражение (4), (6) и (8) и принимая, что $\sigma_{ep} = \sigma_{экс}$ получим следующую формулу эквивалентности:

$$\sigma_{экс} = \frac{1 - 3\nu^2\nu_\tau^2}{6\nu\nu_\tau^2}V + \sqrt{\left(\frac{1 - 3\nu^2\nu_\tau^2}{6\nu\nu_\tau^2}\right)^2 V^2 + \frac{1}{6\nu_\tau^2}U} \quad (11)$$

Формула эквивалентности (10) справедлива в случае, если величина V положительна, а выражение (11) справедливо, если величина V отрицательна.

Анализируя формулы эквивалентности (10) и (11) нетрудно заметить, что для пластичных материалов $\nu=1$, $\nu_\tau = \frac{1}{\sqrt{3}}$ они приводятся к формуле эквивалентности Губера-Мизиса-Генки [2], которая широко используется в инженерных расчётах на прочность. Дальнейший анализ показывает, что если между величинами ν и ν_τ существует соотношение равное $\nu_\tau = \frac{1}{\sqrt{3\nu}}$, то обе формулы эквивалентности будут соответствовать формуле эквивалентности П.П. Баландина [3]. Поэтому как критерий П.П. Баландина, так и критерий Губера-Мизиса-Генки являются частными случаями предложенного критерия прочности.

Предложенный энергетический критерий прочности представляет собой функцию напряжений и не зависит от деформаций. Для хрупких материалов он является условием прочности, а для пластичных материалов – условием пластичности. Расчёты с использованием данного критерия хорошо согласуются с результатами эксперимента.

В пространстве предложенный критерий представляет собой предельную поверхность в виде двух пересекающихся между собой параболоидов вращения, сопряжённых между собой в окрестности зоны, в которой октаэдрические касательные напряжения равны нулю. Параболоид вращения закрыт со стороны области растяжения и открыт со стороны области сжатия.

Литература

1. Лебедев А.А. Расчёты на прочность при сложном напряжённом состоянии. Киев -1968г.-65с.
2. Пономарёв С.Д., Бидерман В.Л., Лихарев К.И. и др. Расчёты на прочность в машиностроении. - М.: Машгиз. - 1956г.- т.1 – 476с.
3. Писаренко Г.С., Агарёв В.А., Квитка А.Л. и др. Соппротивление материалов. – Киев – Техника – 1967г. – 790с.