ПОСТРОЕНИЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ДВИЖЕНИЕ СВЯЗАННОЙ СИСТЕМЫ «СОСУД–КРОВЬ»

Михасев Г.И., Маркова Л.В., Костенко М.С.

Белорусский государственный университет

Article is generalization of results of research and the mathematical description of functioning of blood vessels. It contains features of construction of discrete model of a problem of haemodynamics and feature of the numerical decision of a task in view.

Введение. Наиболее приемлемой моделью для описания быстропротекающих волновых процессов в связанной системе «сосуд – жидкость», вызванных ультразвуковым воздействием, представляется модель, основанная на теории тонких оболочек типа Тимошенко[2]. Преимущество уравнений движения оболочек такого типа по сравнению с другими уравнениями (в основу которых положены гипотезы Кирхгофа-Лява) состоит в том, что они являются гиперболическими. Данное обстоятельство позволяет наиболее адекватно описывать распространение волн в оболочке с учетом таких механических эффектов, как поперечные сдвиги слоев, поворот нормали, которые присущи толстостенным оболочкам. Целью данной работы является построение решения системы дифференциальных уравнений, описывающих движение связанной системы «сосуд – кровь».

Постановка задачи и исходные уравнения. Рассмотрим длинную упругую цилиндрическую оболочку радиуса R. Обозначим через x продольную координату на срединной поверхности оболочки, отнесенную к радиусу оболочки R, а через φ – окружную координату. Пусть $h(x,\varphi)$, $E(x,\varphi)$, $\nu(x,\varphi)$, $\rho(x,\varphi)$ – переменные толщина, модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала сосуда. Тогда в качестве исходных для описания движения сосуда могут быть использованы уравнения Флюгге (Flugge) в усилиях и моментах, которые в случае осесимметричного движения имеют вид:

$$\frac{1}{R}\frac{\partial T_1}{\partial x}+T_1^{\circ}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+p_1-\alpha_1\cdot u_1-\upsilon_1\cdot\frac{\partial u_1}{\partial t}-(ph+M_t)\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}=0,$$

$$\frac{1}{R}\frac{\partial Q_1}{\partial x}+\frac{1}{R}T_2-T_1^{\circ}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}+\frac{1}{R^2}T_2^{\circ}u_3+p_3-\alpha_3\cdot u_3-\upsilon_3\cdot\frac{\partial u_3}{\partial t}-(ph+M_t)\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}=0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{R}\frac{\partial M_1}{\partial x}+Q_1-\frac{ph^3}{12}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}=0.$$

Здесь u_1, u_3 – продольное и нормальное перемещения точек срединной поверхности оболочки, φ_1 – угол поворота нормального волокна, T_1, T_2 – окружное и осевое мембранные усилия в срединной поверхности оболочки, T_i° – начальные мембранные усилия, M_1 – изгибающие момент, Q_1 – перерезывающее усилие, p_i — силы, действующие на внутреннюю поверхность сосуда со стороны жидкости и зависящие от давления в жидкости и градиента скорости тока на стенке сосуда, α_i — коэффициенты «постели» окружающей биологической ткани, υ_i - коэффициенты вязкости окружающей ткани, M_t дополнительная, приведенная масса окружающей ткани, характеризующая ее инертность. В общем случае параметры α_i, υ_i, M_i неоднородны и зависят от координат x и φ. Для осесимметричного движения

$$T_1 = \frac{1}{R}\cdot\frac{hE}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - \nu\cdot u_3\right) \qquad (2)$$

$$T_2 = \frac{1}{R}\cdot\frac{hE}{1-\nu^2}\left(\nu\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x} - u_3\right)$$

$$M_1 = -\frac{Eh^3}{12R(1-\nu^2)}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}$$

Силы p_i, действующие на сосуд со стороны крови, находятся по формулам:

$$p_1 = -\mu_b\left(\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{r}} + \frac{\partial\overline{w}}{\partial\overline{x}}\right)\Bigg|_{r=R},\ p_3 = \left(\overline{p} - 2\mu_b\frac{\partial\overline{w}}{\partial\overline{r}}\right)\Bigg|_{r=R}, \qquad (3)$$

где через μ_b обозначена вязкость жидкости, $\overline{u}$, $\overline{w}$ – составляющие скорости крови, а $\overline{p}$ – давление. Черточки над буквами в (3) и ниже означают, что соответствующие величины являются размерными.

В отличие от классических уравнений, основанных на гипотезах Кирхгофа-Лява, перерезывающее усилие введем по формуле:

$$Q_1 = K_\delta\delta_1 = \frac{5}{6}hG\left(\varphi_1 + \frac{1}{R}\frac{\partial u_3}{\partial x}\right), \qquad (4)$$

где G – модуль сдвига материала сосуда.

В качестве исходных уравнений, описывающих плоское течение несжимаемой неньютоновской вязкой жидкости с постоянными свойствами при отсутствии внешних сил, возьмем два уравнения количества движения (уравнения Навье – Стокса) и уравнение неразрывности в цилиндрических координатах для осесимметричного движения:

$$\frac{\partial\overline{w}}{\partial\overline{t}} = -\frac{1}{\rho_b}\cdot\frac{\partial\overline{p}}{\partial\overline{r}} + \nu_b\cdot\left(\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial\overline{r}^2} + \frac{1}{\overline{r}}\cdot\frac{\partial\overline{w}}{\partial\overline{r}} - \frac{\overline{w}}{\overline{r}^2} + \frac{\partial^2\overline{w}}{\partial\overline{x}^2}\right)$$

$$\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{t}} = -\frac{1}{\rho_b}\cdot\frac{\partial\overline{p}}{\partial\overline{x}} + \nu_b\cdot\left(\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial\overline{r}^2} + \frac{1}{\overline{r}}\cdot\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{r}} + \frac{\partial^2\overline{u}}{\partial\overline{x}^2}\right) \qquad (5)$$

$$\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{x}} + \frac{\partial\overline{w}}{\partial\overline{r}} + \frac{\overline{w}}{\overline{r}} = 0$$

Здесь $\overline{u}$, $\overline{w}$ – составляющие скорости крови, а $\overline{p}$ – давление. Свойства жидкости характеризуются плотностью ρ_b и кинематическим коэффициентом вязкости ν_b.

В число граничных условий для функций составляющих скоростей входит условие сопряжения на границе контакта крови и сосуда, которое представляет собой равенство составляющих скоростей точек срединной поверхности сосуда:

$$\overline{u}(\overline{x},\overline{r},\overline{t})\,|_{r=R} = \frac{\partial u_1}{\partial\overline{t}}, \qquad (6)$$

$$\overline{w}(\overline{x},\overline{r},\overline{t})\,|_{r=R} = \frac{\partial u_3}{\partial\overline{t}}$$

Система уравнений (1),(4),(5) является замкнутой относительно неизвестных функций u_1, u_3, φ_1, $\overline{u}$, $\overline{w}$, $\overline{p}$.

В первом приближении мы полагаем коэффициенты $M_t, \upsilon_i, \alpha_i$, характеризующие свойства окружающей ткани, равными нулю. Предполагаем так же, что начальные мембранные усилия T_i^0 отсутствуют. Тогда запишем систему уравнений, описывающих движение стенок сосуда, в первом приближении:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \nu \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{R}{K} \cdot \rho \cdot U_0^2 \cdot p_1,$$
$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = \frac{K_\delta}{K} \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} - u_3 + \nu \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{K_\delta}{K}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{R}{K} \cdot \rho \cdot U_0^2 \cdot p_3, \tag{7}$$
$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} + \cdot \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} - \frac{12R^2}{h^2} \cdot \frac{K_\delta}{K} \cdot \left(\varphi_1 + \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) = 0,$$

В качестве характерного времени примем $t_c = R\sqrt{\rho_0 (1-\nu_0^2)/E_0}$, где E_0, ρ_0 – характерные значения модуля Юнга и плотности материала сосуда.

Построение численного решения. Одно из преимуществ работы с уравнениями Навье – Стокса, описывающими течение несжимаемой жидкости, заключается в том, что здесь число зависимых переменных может быть уменьшено. Давление исключается из уравнений количества движения в переменных *(u, w, p)* при помощи перекрестного дифференцирования. После преобразований[1], получаем систему уравнений количества движения:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{1}{\mathrm{Re}} \cdot \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \xi}{\partial r} - \frac{\xi}{r^2} \right) \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} = r \cdot \xi \tag{9}$$

Здесь

$$\mathrm{Re} = \frac{U_0 L}{v}, \qquad \xi = \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial w}{\partial x}, \tag{10}$$
$$r \cdot u = \frac{\partial \psi}{\partial r}, \qquad r \cdot w = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

где $\psi(x,r)$ – функцию тока крови, $\xi(x,r)$ – функция переноса вихря, Re – безразмерный параметр, число Рейнольдса, L – длина артерии, U_0 – характерная скорость течения крови в артерии, ν – кинематический коэффициент вязкости, учитывающий неньютоновские свойства жидкости.

Система уравнений (7) в совокупности с системой уравнений, описывающей движение крови (8),(9), а так же условиями сопряжения на границе контакта крови и сосуда (6), образуют замкнутую систему дифференциальных уравнений, описывающей движение связанной системы «сосуд–кровь», относительно неизвестных функций $u_1, u_3, \varphi_1, \psi, \xi, u, w$. Для решения данной системы используем метод сеток.

Т.к. в систему дифференциальных уравнений, описывающей движение связанной системы «сосуд–кровь», входят нестационарные дифференциальные уравнения, включая уравнения второго порядка, следовательно, для решения этой задачи необходимо ввести пространственно-временную сетку. Построим сетку по пространственным переменным x,r с шагом hx и hr соответственно и по переменной t с шагом τ следующего вида:

$$\omega_{hx,hr,\tau} = \omega_{hx} \times \omega_{hr} \times \omega_{\tau} \tag{11}$$

Будем искать решение поставленной задачи в узлах построенной сетки.

Параболическое уравнение переноса вихря и эллиптическое уравнение Пуассона естественно рассматривать по отдельности, так как методы их решения, очевидно, различны. Однако сразу следует заметить, что при численном решении задачи гидродинамики фактически существует обратная связь между этими уравнениями. Неправильное обращение с граничными условиями в одном уравнении может привести к нарушению сходимости в другом.

Опишем всю процедуру решения полной задачи движения связанной системы «сосуд-кровь».

Зададим во всех узлах сетки в момент времени $t=0$ начальные условия для функций $u_1, u_3, \varphi_1, u, w, \psi$ и ξ.

Далее начинается вычислительный цикл по слоям временной сетки. При заданных начальных и граничных условиях для функций u_1, u_3, φ_1 находим решение конечно-разностного аналога системы уравнений, описывающей движение стенок сосуда (7), на новом временном слое:

$$\begin{cases} u1_i^{k+1} = \left(2 - 2\left(\dfrac{\tau}{hx}\right)^2\right) \cdot u1_i^k + \left(\dfrac{\tau}{hx}\right)^2 \cdot \left(u1_{i-1}^k + u1_{i+1}^k\right) - u1_i^{k-1} - \nu \cdot \dfrac{\tau^2}{hx} \cdot \left(u3_{i+1}^k - u3_i^k\right) - \\ -\tau^2 \cdot \rho \cdot U_0 \cdot \dfrac{\nu}{K}\left(\dfrac{u_{i+1,m}^k - u_{i,m}^k}{hx} + \dfrac{w_{i,m}^k - w_{i,m-1}^k}{hr}\right) \\ u3_i^{k+1} = \left(2 - 2\dfrac{K_\delta}{K} \cdot \left(\dfrac{\tau}{hx}\right)^2 - \tau^2\right) \cdot u3_i^k + \dfrac{K_\delta}{K} \cdot \left(\dfrac{\tau}{hx}\right)^2 \cdot \left(u3_{i-1}^k + u3_{i+1}^k\right) + \tau^2 \cdot \nu \cdot \dfrac{u1_{i+1}^k - u1_i^k}{hx} - \\ -u3_i^{k-1} + \tau^2 \cdot \dfrac{K_\delta}{K} \dfrac{\varphi1_{i+1}^k - \varphi1_i^k}{hx} + \tau^2 \dfrac{R}{K} \cdot \rho \cdot U_0 \cdot \left(U_0 \cdot R \cdot p_{i,m}^k - \dfrac{2\nu}{hr} \cdot (w_{i,m}^k - w_{i,m-1}^k)\right) \\ \varphi1_i^{k+1} = \left(2 + 12R^2 \cdot \left(\dfrac{\tau}{h}\right)^2 \cdot \dfrac{K_\delta}{K} + 2\left(\dfrac{\tau}{hx}\right)^2\right) \cdot \varphi1_i^k - \left(\dfrac{\tau}{hx}\right)^2 \cdot \left(\varphi1_{i-1}^k + \varphi1_{i+1}^k\right) - \varphi1_i^{k-1} + \\ + \dfrac{12R^2\tau^2}{h^2} \cdot \dfrac{K_\delta}{K} \cdot \left(\dfrac{u3_{i+1}^k - u3_i^k}{hx}\right) \end{cases} \tag{12}$$

Далее, используя условия сопряжения (6), которые в конечно-разностной форме записываются так:

$$\begin{aligned} u_{i,m}^k &= \frac{1}{U_0}\sqrt{\frac{K}{\rho h}} \cdot \frac{u1_i^{k+1} - u1_i^k}{\tau}, \\ w_{i,m}^k &= \frac{1}{U_0}\sqrt{\frac{K}{\rho h}} \cdot \frac{u3_i^{k+1} - u3_i^k}{\tau}. \end{aligned} \tag{13}$$

находим граничные условия для функций u,w, а на их основе и для функции ξ. Следующим шагом вычислительного цикла является решение уравнения переноса вихря. Вычисляются значения ξ на новом временном слое, продвигая уравнения переноса вихря по времени. Далее находится решение аналога уравнения Пуассона для определения новых значений функции тока ψ, причем в «источниковом» члене уравнения (9) используются новые значения ξ во внутренних узлах сетки. Существенно, что уравнение Пуассона для ψ не зависит от граничных условий для новых ξ. Обычно решение для новых значений ψ получается итерационным путем, так что итерационный процесс для нахождения ψ включается в общий вычислительный цикл. Теперь, используя конечно-разностный аналог уравнений (10) в безразмерных переменных, находим новые составляющие скорости. Последний шаг вычислительного цикла состоит в расчете новых граничных значений на рассматриваемой области. Граничные значения ξ зависят от новых (уже вычисленных) значений ψ и ξ во внутренних точках области, расположенных вблизи ее границы. Полученные граничные значения составляющих скоростей используем для расчета сил, действующих на кровь со стороны сосуда. Вычислительный цикл повторяем до тех пор, пока не будет достигнуто заданное значение времени или пока решение не выйдет на стационарное с заданной степенью точности.

Литература

1. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа: учеб. Пособие для вузов. – изд. 6-е, перераб. и доп.. –М.:Наука, 1987. – 840 с.
2. Чиркин, А. А. Биоуправление – путь к оптимизации ультразвуковой терапии / А. А. Чиркин, Г. И. Михасев, Л. В. Маркова // Ученые записки / УО «Витебский гос. ун-т им. П. М. Машерова». – 2006. – Т. 5. – С. 201-222.