МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СВЕРХПЛАСТИЧНОСТИ И ЭФФЕКТА ПАМЯТИ ФОРМЫ НИЗКОПЛАВКОГО ТЕРМОПЛАСТА

Гавриленко С.Л.

Институт механики металлополимерных систем им. В. А. Белого НАН Беларуси, Гомель

Semianalitical mechanical model based on A.A. Movchan hypothesis is suggested for a description of the stress-strain state of the low temperature termoplastics under force-temperature action. The suggested model is identificated and verified with the regularization method.

Введение. Создание и исследование материалов, обладающих эффектом памяти формы (ЭПФ)[1-3] и сверхпластичностью (СП), выраженной в основном большими относительными удлинениями и скоростной чувствительностью, актуально в фундаментальном и прикладном отношении. Представляет интерес создание обобщенной модели деформирования указанных материалов, учитывающей одновременно явления СП и ЭПФ, которая в дальнейшем может быть использована для описания напряженно-деформированного состояния изделий при различных термосиловых воздействиях.

В настоящей работе описаны эксперименты, позволяющие определить все параметры предложенной ранее модели с помощью регуляризирующих алгоритмов. Проведен контрольный эксперимент, качественно отличающийся от контрольного, и сделан вывод относительно области применимости модели.

Модель частично кристаллизующего термопласта с учетом эффекта памяти и сверхпластичности. В настоящей работе предлагается модель частично кристаллизующего термопласта с учетом эффекта памяти и сверхпластичности. Будем считать, что в момент формирования при охлаждении кристаллическая фаза находится в ненапряженном состоянии. Таким образом, рассматривается напряженно-деформированное состояние термопласта с учетом зависимости его фазового состава от температуры, что характерно для ряда термопластов. Связь тензора напряжения σ_{ij} и тензора полной деформации ε_{ij} в случае напряженного состояния можно также представить в полуаналитическом виде. В качестве управляющего параметра используется степень кристалличности материала-q.

Приращение полной деформации: $d\varepsilon_{ij}=d\varepsilon_{ij}^{e}+d\varepsilon_{ij}^{T}+d\varepsilon_{ij}^{ph}+d\varepsilon_{ij}^{V}$ где $\varepsilon_{ij}^{T}=\alpha(T-T_0)\delta_{ij}$ - температурная деформация, где $\alpha = q\alpha_M+(1-q)\,\alpha_A$, α - коэффициент температурного расширения всего материала, q - степень кристалличности, α_M - коэффициент температурного расширения кристаллической фазы, α_A- аморфной. $d\varepsilon_{ij}^{v}=(1-H(\left|q^{'}(t)\right|))\dfrac{\sigma_u-\sigma^s}{\lambda(T)\sigma^s}\sigma_{ij}dt$, где σ_{ij}-компоненты тензора полных напряжений, σ^s-предел текучести, $\lambda(T)$- коэффициент вязкости, зависящий от температуры, H(x)- функция Хевисайда. Следует заметить, что вязкая составляющая приращения полной деформации ‘включается’ когда интенсивность тензора напряжений σ_u превышает предел текучести σ_s и постоянстве степени кристалличности. $\varepsilon_{kk}{}^{e}=\dfrac{\sigma_{kk}}{K}$, $\varepsilon'^{\,e}_{ij}=\dfrac{\sigma'_{ij}}{2G}$ - выражения соответственно для шаровой части и девиатора упругой деформации, причём коэффициенты объемного расширения и модуля сдвига зависят от q - степени кристалличности.

Для величины фазовой деформации соотношения будут разными при нагревании и при охлаждении и такими, как и для модели эффекта памяти: 1) при нагревании ($\underset{(q=0)}{A} \to \underset{(q=1)}{M}$): $d\varepsilon_{ij}{}^{ph}=(\beta\delta_{ij}+c_0\sigma'_{ij}+a_0\varepsilon_{ij}{}^{ph})dq$, 2) при охлаждении ($M \to A$): $d\varepsilon_{ij}{}^{ph}=(\beta\delta_{ij}+\lambda c_0\tilde{\sigma}'_{ij}(q)+(1-\lambda)\dfrac{a_0\varepsilon_{ij}^{0ph}}{e^{a_0q_0}-1})dq$, где $\tilde{\sigma}'_{ij}(q)$ –напряжение, которое действовало на предшествующем этапе при том же значении q. Кроме того, для описания параметров НДС по предложенной модели предполагается зависимость температуры от времени ($T(t)$).

Идентификация модели ЭПФ низкоплавких термопластов. Согласно предложенной модели, описывающей эффекты СП и ЭПФ, целесообразно проводить идентификацию, учитывая отдельно вязкую составляющую полной деформации и отдельно упругую, температурную и фазовую составляющие полной деформации. Параметры вязкой составляющей могут быть определены из опытов на растяжение при постоянной истинной скорости деформирования. Модуль Юнга, зависящий от температуры, определяется по тангенсу угла наклона кривой растяжения при 2 различных температурах, коэффициент вязкости и предел текучести - исходя из площадки текучести. Идентификация тела Бингама, с учетом предположения линейности параметров модели от температуры, позволяет определить последние в диапазоне температур от комнатной до температуры плавления.

Для идентификации параметров фазовой составляющей полной деформации необходимо знать критические температуры возникновения эффекта памяти формы. Предварительный анализ показал, что температура начала эффекта памяти Т=42 ^{o}С, исследован эффект до верхней границы температур Т=102 ^{o}С. Необходимо экспериментально показать, что степень кристалличности q принципиально отличается при нагреве и охлаждении. Последнее позволяет предположить, что обобщение модели Мовчана описывает механическое поведение при указанных температурах.

В условиях опыта 1, а именно сжатия при нагреве можно получить теоретическую зависимость фазовой и температурной деформации от степени кристалличности и температуры. С помощью решения дифференциального уравнения зависимость суммы фазовой и температурной деформации имеет вид:

$$\varepsilon_{11}^{ph+T}=\varepsilon_{11}^{ph}+\varepsilon_{11}^{T},$$

$$\varepsilon_{11}^{T}=\varepsilon_{11pred}^{T}+(\alpha_M q+(1-q)\alpha_A)(T-T_0^*),$$

$$\varepsilon_{11}^{ph}=\frac{1}{a_0}\left(\beta-\frac{c_0P}{S}\right)\left(e^{a_0(q-q_0)}-1\right).$$

Здесь T – текущая температура, T_0^* - температура на предыдущем шаге измерения деформации, c_0, β, a_0 - константы модели, P - прикладываемая сила на образец, S - площадь образца на предыдущем шаге измерения деформации. В формуле для фазовой составляющей деформации произведено осреднение изменяющегося напряжения на некоторое постоянное значение. *Т*акая процедура была произведена для каждого момента времени.

Для идентификации был проведен опыт 1 при усилии P=0,24 Н при нагреве и при P=0,062 Н при охлаждении. В таблице 1 указаны полученные характеристики. T – температура, t – время, ε_i - истинная деформация (суммарная фазовая и температурная текущая), ε_{ipol} - истинная деформация (суммарная фазовая и температурная полная), $S_{нач}$ =57 мм^2

Таблица 1.

Результаты опыта на сжатие при нагреве и охлаждении

T, ^oC	42	51	59	67	75	82	89	96	102	88
$-\varepsilon_i \times 10^3$	0	48	31	50	137	359	355	201	127	102
$-\varepsilon_{ipol} \times 10^3$	0	48	79	129	266	625	980	1181	1308	102
S_i, мм^2	57	58,9	60,1	62,4	70,8	100,4	141,8	171,5	251,5	251,5
t, мин	0	6	12	18	24	30	36	42	48	98

Для верификации был проведен опыт 2 с P=0,062 Н при нагреве и P=0,032 Н при охлаждении. В таблице 2 указаны полученные характеристики. T – температура, t – время, ε_i - истинная деформация (суммарная фазовая и температурная текущая), ε_{ipol} - истинная деформация (суммарная фазовая и температурная полная), $S_{нач}$ =55,5 мм^2.

Таблица 2.

Результаты опыта на сжатие при нагреве и охлаждении

T, ^oC	42	52	61	69	77	85	92	100	102	88
$-\varepsilon_i \times 10^3$	0	25	39	71	212	462	405	201	34	84
$-\varepsilon_{ipol} \times 10^3$	0	25	64	135	347	809	1214	1415	1449	84
S_i, мм^2	55,5	56,2	57,9	61,6	75,5	118,9	176,9	214,2	240,4	240,4
t, мин	0	6	12	18	24	30	36	42	45	95

Методика определения параметров. Для численного определения необходимо минимизировать функцию квадрата отклонения расчетных и модельных истинных деформаций S с учетом регуляризирующего члена нулевого порядка [4]. Функция S имеет вид:

$$S = \sum_{i=0}^{8} (\varepsilon_{11}^{ph+T}{}_{,i} - \varepsilon_{ipol})^2 + \alpha(\alpha_M^2 + \alpha_A^2 + (c_0 E_{ch})^2 + \beta_0^2 + a_0^2),$$

здесь α - параметр регуляризации, E_{ch} - характерный модуль упругости, ε_{ipol} .- экспериментальное значение полной деформации (фазовой и температурной).

Для оптимального выбора параметра регуляризации существует несколько критериев. Наиболее исследованные приведены ниже [4-7]:

1. Критерий сглаживающего функционала. Параметр α берется в интервале, при котором будет минимален сглаживающий функционал S с учетом регуляризирующего члена.

2. Критерий невязки. Параметр α берется в интервале, в котором невязка S минимальна.

3. Критерий разности. Параметр α берется из условия минимума разности $\left\| z^{\alpha_p} - z^{\alpha_{p-1}} \right\|$, где $\alpha_p = 10^{-p}$ (по этому критерию $\alpha = \alpha_p$). Здесь и далее $z = (\alpha_M, \alpha_A, a_0, c_0, \beta_0)$.

4. Критерий квазиоптимальности. Параметр α определяется из условия $\alpha = \min \alpha \left| \frac{dz^\alpha}{d\alpha} \right|$. В описанных выше критериях при численном решении параметр регуляризации берется обычно в интервале $[10^{-5}, 100]$ и определяется следующей формулой, $\alpha_p = 10^{-p}$.

Результаты численного анализа. В ходе эксперимента было выявлено, что температурная деформация незначительна, и при проведении идентификации ей можно пренебречь. Таким образом, минимизирующая функция S имеет вид (при $E_{хар} = 1$ МПа):

$$S = \sum_{i=0}^{8} (\varepsilon_{11pol\,,i}^{ph} - \varepsilon_{ipol})^2 + \alpha(c_0{}^2 + \beta_0^2 + a_0^2)\,.$$

Для некоторого характерного набора параметра q был определен критерий выбора параметра регуляризации и рассчитано численное значение. Критерий невязки и $\alpha = 0{,}01$ являются оптимальными для расчетов констант модели (фазовой составляющей деформации). После подстановки аналитического значения фазовой составляющей деформации и экспериментальных данных, взятия частных производных по параметрам была получена нелинейная система 3 уравнений с 3 неизвестными.

Для численного решения использовался программный продукт Mathcad 2001. Численные значения параметров фазовой деформации следующие:

$$c_0 = -0{,}01 \text{ МПа}^{-1};\ a_0 = -1{,}245;\ \beta_0 = 3{,}687\,.$$

Среднее значение относительной погрешности при модельном расчете фазовой деформации не превышает 6%. При сравнении расчетной фазовой деформации и контрольного эксперимента, с учетом силовых и геометрических факторов среднее значение относительной погрешности не превышает 12%. Параметр λ, с помощью которого описывается охлаждение материала при сжимающей нагрузке, имеет значение:

$$\lambda = 0{,}67\,.$$

Значения параметра q, который является внутренней переменной модели (в 1 приближении можно считать степенью кристалличности материала) приведено в таблице 3.

Таблица 3.

Значение параметра q в зависимости от температуры.

T, ^oC	42	51	59	67	75	82	89	96	102	88
q	0,61	0,60	0,59	0,57 8	0,54 5	0,47	0,40	0,35	0,31	0,26
t, мин	0	6	12	18	24	30	36	42	48	98

ВЫВОДЫ

1. Предложена методика идентификации механической модели, описывающей НДС при различном термосиловом воздействии и представлена методика идентификации моделей ЭПФ и СП низкотемпературных термопластов.
2. Идентификация вязкой составляющей приращения полной деформации позволяет определить параметры и учесть временные эффекты, проявляющиеся при изотермических режимах нагружения.
3. Проведена верификация предложенной модели, описывающей СП и ЭПФ низкотемпературных термопластов и установлено что, модель описывает напряженно – деформированное состояние при нагрузках до 4 кПа и переменной температуре.

Литература

1. Мовчан А. А. Выбор аппроксимации диаграммы перехода и модели исчезновения кристаллов мартенсита для сплавов с памятью формы. // Прикладная механика и техническая физика, 1995, Т. 36, № 2, С.173-181.
2. Плескачевский Ю.М., Смирнов В.В., Макаренко В.М. Введение в радиационное материаловедение полимерных композитов. Минск: Навука і тэхніка, 1991.
3. Черноус Д.А., Шилько С.В., Плескачевский Ю.М. Описание эффекта памяти формы радиационно-модифицированных полимеров в условиях термомеханического воздействия // Инженерно-физический журнал.– 2004.– Vol. 77, № 1.– P. 7–11.
4. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. Наука, 1979, Москва.
5. Гласко В.Б., Гущин Г.В., Старостенко В.И. О применении метода регуляризации Тихонова А.Н. к решению нелинейных систем уравнений. ЖВМ и МФ, 1976, 16, № 2.
6. Гончарский А.В., Леонов А.С., Ягола А.Г. О принципе невязки при решении нелинейных некорректных задач — ДАН СССР, 1974, 214, № 3.
7. Лисковец О.А. Способ выбора параметра регуляризации при решении нелинейных некорректных задач. ДАН СССР, 1976, 229, № 2.