

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КИНЕТИЧЕСКОГО ПОДХОДА ДЛЯ ОПИСАНИЯ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ МАТЕРИАЛА

Холодарь Б.Г.

Брестский государственный технический университет, Брест

*By means of a joint solution of the kinetic equations of material flow and faults development, the processes of stretching and creeping of the sample from steel K20 (0.35%C) before the moment of destruction are described. The development of the stress-strained state of rheonomic elastic-plastic material with the viscosity, which depends on the invariants of the stressed state, is examined under conditions with the constant velocity of deformation and loading. The criteria of fluidity are built.*

Понимание многих вопросов механики материалов возможно только при учете зависимости свойств материалов от скорости нагружения. Такой подход позволяет перейти от восприятия наступления разрушения или текучести материала как некоторого критического события к их рассмотрению как процессов, развивающихся во времени. С этой целью можно использовать различные реологические уравнения, в частности, основанные на представлениях о кинетической (активационной) природе процессов перестройки структуры материала под нагрузкой. Ниже рассмотрена задача о деформировании и разрушении стержня из стали К-20 при его растяжении и задача о деформировании упруго-пластического материала при плоском нагружении. Общим для обеих рассматриваемых задач является учет зависимости энергии активации процессов структурных превращений материала от его напряженно-деформированного состояния в данный момент времени.

## 1. Реологические уравнения

При изотермическом деформировании материалов проявляются мгновенно-обратимая, запаздывающе-обратимая и необратимая компоненты деформации. Скорость развития неупругих деформаций определяется длительностью промежутков времени между актами разрушения и восстановления связей между частицами материала. Эти длительности (времена релаксации) зависят от уровня энергии активации соответствующих процессов, температуры среды и нагруженности связей между соседними частицами [1].

Уравнения течения имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon &= e + \varepsilon^p + \varepsilon^* \\ \dots \quad \dot{\varepsilon}_{ij} &= \dot{\varepsilon}_0 \delta_{ij} + \dot{e}'_{ij} + \frac{e'_{ij}}{T_g^p} + \frac{1}{(1+g)T_g^*} (e'_{ij} - g\varepsilon_{ij}^{*'}) \quad \dots \quad i, j=1,2,3\dots \quad (1) \\ \dot{\varepsilon}_0 &= \dot{e}_0 \delta_{ij} + \frac{e'_0}{T_\kappa^p} + \frac{1}{(1+\kappa)T_\kappa^*} (e_0 - \kappa\varepsilon_0^*) \end{aligned}$$

где  $\varepsilon, e, \varepsilon^*, \varepsilon^p$  – соответственно полная, мгновенно-обратимая, запаздывающе-обратимая,

необратимая деформации;  $e_0 = e_{ii}/3, \varepsilon_0 = \varepsilon_{ii}/3$  – гидростатическая компонента

деформаций;  $e', \varepsilon'$  – девиаторная компонента;  $g = \frac{G^*(\varepsilon_i^*)}{G(e_i)}, \kappa = \frac{K^*(\varepsilon_0)}{K(e_0)}$  – отноше-

ния сдвиговых и объемных модулей равновесной высокоэластической и упругой

деформаций;  $e_i = \sqrt{\frac{2}{3} e'_{ij} e'_{ij}}$ ,  $\varepsilon_i = \sqrt{\frac{2}{3} \varepsilon'_{ij} \varepsilon'_{ij}}$  – интенсивности деформаций;  $T_g^p, T_k^p, T_g^*, T_k^*$  – соответственно времена ре-релаксации остаточной и высокоэластической сдвиговой и объемной деформаций,  $\delta_{ij}$  – сим-вол Кронекера.

Считая напряженно-деформируемое состояние (НДС) в сечении образца однородным, получаем из (1) для описания диаграммы растяжения (ДР) упруго-пластического материала при постоянной скорости деформирования  $\frac{d\varepsilon}{dt} = V = const$  уравнение

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E \cdot \left(1 - \frac{\sigma}{V\eta}\right), \quad (2)$$

где  $\sigma$  – напряжение растяжения;  $E$  – модуль упругости;  $\eta = \eta_0 \exp(\psi(\sigma, \varepsilon, \theta))$  – вязкость материала;  $\eta_0$  – начальная вязкость;  $\psi(\sigma, \varepsilon, \theta)$  – функция, описывающая изменение вязкости в зависимости от НДС и температуры  $\theta$ , причем роль поля упругих деформаций выделена в ней отдельным слагаемым  $\gamma\sigma$ .

В нагруженном материале процессам разрушения и восстановления связей сопутствует процесс возникновения и развития дефектов структуры, численно характеризуемый поврежденностью материала. Поврежденность  $0 \leq \omega \leq 1$  можно представить как сумму гидро-статической  $\omega_0$  и девиаторной  $\omega_d$  компонент, а каждую из них в свою очередь как сумму мгновенно-обратимой, запаздывающе-обратимой и необратимой составляющих, изменение которых во времени подчиняется соответствующим кинетическим уравнениям:

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \omega_d \\ \dot{\omega}_0 &= A_0 \dot{\sigma}_0(\omega) + v_0^* \omega \exp(\alpha_0^* \sigma_0(\omega)) + v_0 (1 - \omega) \exp(\gamma_0 \sigma_0(\omega)) \end{aligned} \quad (3)$$

$\dot{\omega}_d = A_d \dot{\sigma}_i(\omega) + v_d^* \omega \exp(\alpha_{d0}^* \sigma_0(\omega) + \alpha_{di}^* \sigma_i(\omega)) + v_d (1 - \omega) \exp(\gamma_{d0} \sigma_0(\omega) + \gamma_{di} \sigma_i(\omega))$ , где  $\sigma_0$  – гидростатическое напряжение,  $\sigma_i$  – интенсивность напряжений, индексированные величины  $A, v, v^*, \alpha, \alpha^*, \gamma, \gamma^*$  – структурные параметры материала, являющиеся константами при фиксированной температуре. От экспонент в (3) можно перейти к другим функциям для корректности при  $\sigma=0$ .

Если под поврежденностью понимать только ее необратимую часть, то для случая одно-осного растяжения образца скорость ее развития удобно описать уравнением

$$\frac{d\omega}{dt} = v(1 - \omega) \cdot Sh\left(\frac{\alpha\sigma}{1 - \omega}\right), \quad (4)$$

где  $v, \alpha$  – структурные параметры материала,  $Sh(x)$  – функция гиперболического синуса.

## 2. Описание развития процессов деформирования и роста поврежденности материала стержня при его растяжении с постоянной скоростью

Для описания растяжения образца далее используем реологические уравнения (2) и (4).

Принимая объем образца неизменным, истинные напряжения  $S$  можно выразить как

$$S = \sigma \cdot \frac{(1 + \varepsilon)}{1 - \omega}.$$

В этих напряжениях для описания диаграммы растяжения получим уравнение

$$\frac{dS}{d\varepsilon} = \frac{E}{1-\omega} \left[ \left[ 1 - \frac{\sigma}{V} \left( \frac{1}{\eta} - \nu \cdot \text{Sh} \left( \frac{\alpha\sigma}{1-\omega} \right) \right) \right] \cdot (1 + \varepsilon) + \frac{\sigma}{E} \right], \quad (5)$$

которое учитывает большие деформации и нарастание поврежденности в материале.

Уравнения (2), (4), (5) применены ниже к описанию приведенного в [2] семейства диаграмм растяжения стали К20 (0.35%С) при температуре  $T=850^{\circ}\text{F}$  ( $454^{\circ}\text{C}$ ) и нескольких уровнях скорости деформирования  $1.66 \cdot 10^{-3} \leq V \leq 39.0$  ( $\text{час}^{-1}$ ). Имеющиеся в [2] данные по ползучести и релаксации деформаций в этой стали ограничены и не предоставляют возможности обоснованного выделения возвратной деформации из полной, однако видно, что ее величина в два-три раза ниже упругой. В связи с этим возвратной компонентой деформации далее пренебрегаем, считая материал упруго-пластическим.

Функция  $\psi$ , описывающая зависимость вязкости от НДС материала, и функция  $f$ , задающая упрочнение материала при его деформировании, определяются по (2) выражениями

$$\psi = \ln \frac{\sigma}{V\eta_0 \left(1 - \frac{\sigma'}{E}\right)}, \quad f = \psi + \gamma\sigma \quad (6)$$

Обработка данных показывает, что функция упрочнения  $f$  может быть представлена в виде произведения  $f(\sigma, \varepsilon) = f_1(\sigma) \cdot f_2(\varepsilon)$ .

Использование прямых экспериментальных данных для описания функций  $\psi$  и  $f$  по (6) весьма трудоемко, поэтому в расчетах для функции  $\psi$  была применена аппроксимация

$$\psi = - \left[ \gamma - \beta \cdot (1 - |1 - \varepsilon/\varepsilon_B|^N) / \sigma_{БАЗ} \cdot (1 - 0.15 \varepsilon) \right] \cdot \sigma, \quad (7)$$

где  $\beta = \text{const}$ ,  $\varepsilon_B$  – деформация, соответствующая временному сопротивлению  $\sigma_B$  материала,  $\sigma_{БАЗ}$  – функция, описывающая одну из диаграмм растяжения, которая принимается за базовую. В данном случае базовой кривой являлась ДР для  $V=39.0$   $\text{час}^{-1}$ , аппроксимированная зависимостью

$$\sigma_{БАЗ} = \sigma_T (1 - \exp(-\varepsilon/\varepsilon_T)) + (\sigma_B - \sigma_T) \cdot (1 - |1 - \varepsilon/\varepsilon_B|^M), \quad (8)$$

где  $\sigma_T = E \varepsilon_T$  – предел текучести, условно выделенный на базовой ДР,  $\varepsilon_T$  – деформация, соответствующая пределу текучести. Показатели степени  $M$  и  $N$  в (7) и (8) – константы.

В расчетах использованы числовые значения констант:  $E=0.2235 \cdot 10^8$   $\text{фунт/дюйм}^2$ ,  $\sigma_B=50000$   $\text{фунт/дюйм}^2$ ,  $\varepsilon_T=3.375 \cdot 10^{-4}$ ,  $\varepsilon_B=0.25$ ,  $\gamma=6.0 \cdot 10^{-4}$ ,  $\beta=10.0$ ,  $M=N=4$ .

Данные опытов и результаты расчета приведены на рис.1.

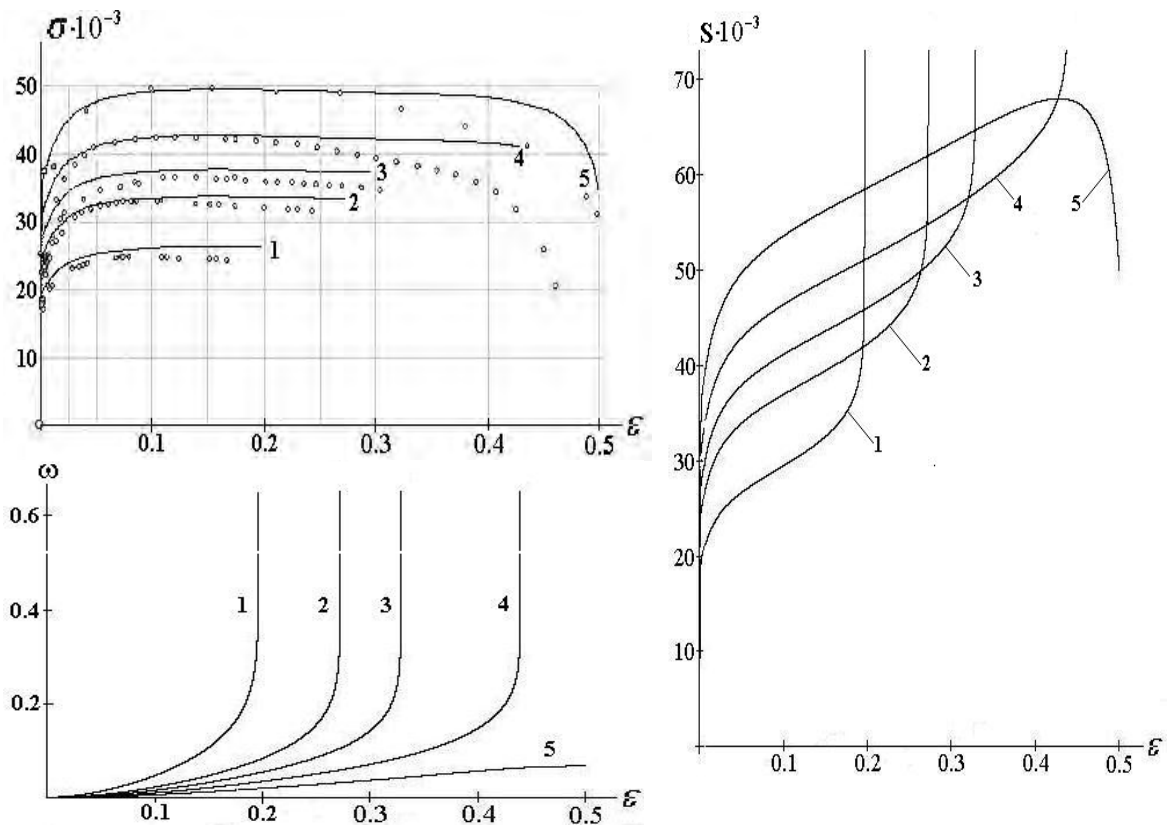


Рис.1. Диаграммы растяжения  $\sigma(\epsilon)$  для скоростей деформирования  $1.66 \cdot 10^{-3}$  (1),  $4.28 \cdot 10^{-2}$  (2),  $2.47 \cdot 10^{-1}$  (3),  $2.13$  (4) и  $39.0$  (5); диаграммы истинных напряжений  $S(\epsilon)$ ; кривые нарастания поврежденности  $\omega(\epsilon)$ . Напряжения даны в фунт/дюйм<sup>2</sup> (1фунт/дюйм<sup>2</sup>  $\approx 6.9$ КПа), скорость деформирования – час<sup>-1</sup>, кружочками показаны экспериментальные точки

Функция  $\psi$  существенно меняет вязкость материала, – с начального значения  $\eta_0 \approx 6.5 \cdot 10^{11}$  до уровня  $\eta \approx 1 \cdot 10^3$  на кривой 5 и до уровня  $\eta \approx 1.5 \cdot 10^7$  на кривой 1. Основное падение вязкости имеет место на упругом участке диаграмм растяжения, поэтому при использовании уравнений типа (2) для описания поведения материала в большом диапазоне деформаций необходимо уточнение результатов обработки ДР по данным других опытов (например, на ползучесть), которые должны быть проведены для невысоких уровней напряжений. Отметим, что по данным расчета деформация ползучести при  $\sigma = 7500$  фунт/дюйм<sup>2</sup> за время  $t = 9500$  час составила  $\epsilon = 0.588 \cdot 10^{-3}$ , что соответствует имеющимся в [2] данным с учетом исключения возвратной компоненты деформации.

Построенные на рис.1 для рассматриваемых скоростных режимов диаграммы растяжения в истинных напряжениях  $S(\epsilon)$  близки к приведенным в [2], где они даны для деформации  $0 \leq \epsilon \leq 0.16$ . Несколько неожиданная форма диаграммы для скорости  $V = 39.0$  час<sup>-1</sup> объясняется, вероятно, использованным одномерным подходом, не позволяющим учесть образование шейки при больших деформациях образца.

Отметим, что некоторое несоответствие между опытными и расчетными значениями, заметное на рис.1, можно устранить, выбрав вместо (8) другую аппроксимацию. Однако в данном случае основной целью расчетов являлось получение факта разрушения в моменты времени, близкие к экспериментальным, что удалось достичь при использовании в (4) параметров  $\nu$  и  $\alpha$  как некоторых констант, равных соответственно  $7.85 \cdot 10^{-8}$  и  $3.61 \cdot 10^{-4}$ , не вводя даже в рассмотрение зависи-

мость параметра  $\nu$  (по своему смыслу связан с плотностью дефектов в единице объема), от режима деформирования.

Варьируя параметром  $\alpha$  можно найти, например, что при  $\alpha \geq 3.68 \cdot 10^{-4}$  растяжение на всех режимах закончится разрушением образцов, при  $\alpha \leq 3.53 \cdot 10^{-4}$  разрушение на режимах 3-5 не произойдет. Разрушение стержня в режиме 5 за рассматриваемое время может быть достигнуто, если допустить наличие в материале стержня весьма высокой исходной поврежденности  $\omega(0) \approx 0.0165$ .

В качестве примера расчета с помощью уравнений (2), (4) более сложного режима на-гружения ниже приведены результаты для двух случаев перехода от растяжения с посто-янной скоростью деформирования к ползучести при одинаковых начальных деформациях и при одинаковых напряжениях. В качестве общей для обоих режимов взята точка на ДР при скорости деформирования  $V = 1.66 \cdot 10^{-3} \text{ час}^{-1}$  с координатами  $\varepsilon = 0.05$  и  $\sigma = 25252$ .

На рис.2 показаны расчетные кривые для случая перехода к ползучести при одинаковой начальной деформации  $\varepsilon_n = 0.05$ , достигаемой в разное время в соответствии с режимами нагружения для рассматриваемых ДР. Из рисунка видно, что для режима 5 ( $V = 39 \text{ час}^{-1}$ ) ползучесть выходит на стадию неустановившейся, на остальных кривых большую часть времени занимает стадия установившейся ползучести, прерывание которой связано с разрушением материала, причем и долговечности и предельные деформации различны. Для более наглядного представления о состоянии материала некоторые числовые данные приведены в таблице 1, где индексом "0.05" отмечен момент достижения на ДР деформации  $\varepsilon = 0.05$ , а индексом "1" – момент завершения процесса.

Таблица.1.

Расчетные параметры процессов деформирования и разрушения стержня

	$t_{0.05}$	$\sigma_{0.05}$	$\omega_{0.05}$	$t_1$	$\varepsilon_1$	$\omega_1$
Режим 1	30.1192	25252.0	0.01307	152.326	0.170	1.000
Режим 2	1.1682	32361.0	0.00574	9.097	0.227	1.000
Режим 3	0.2024	36243.0	0.00378	1.993	0.267	1.000
Режим 4	0.0235	41051.0	0.00231	0.309	0.332	1.000
Режим 5	0.0013	47586.0	0.00122	0.024	0.504	0.133

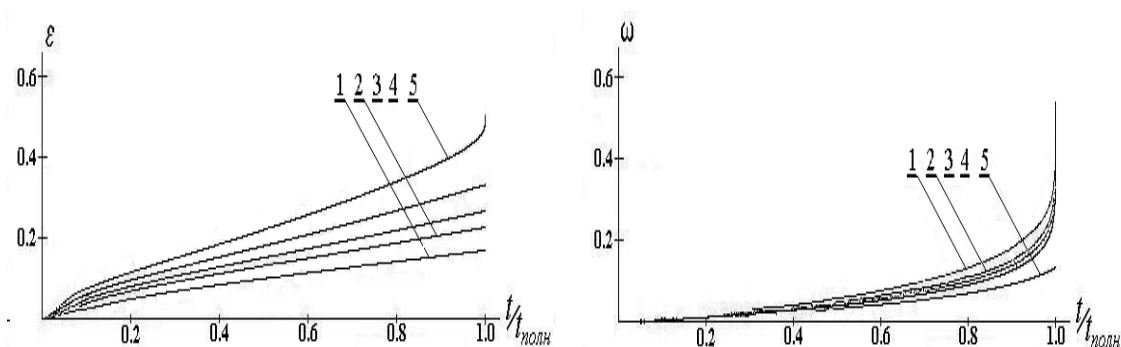


Рис.2 Рост деформаций и поврежденности при переходе от растяжения к ползучести с начальной деформацией  $\varepsilon_n = 0.05$

Для второго расчетного случая, когда ползучесть идет при одинаковых напряжениях  $\sigma \approx$

25250 фунт/дюйм<sup>2</sup>, но с разными начальными деформациями, соответствующими этим напряжениям на ДР в режимах 1-4, все расчетные кривые  $\varepsilon(t)$  по форме совпадают с кривой 1 на рис.2. При этом к моменту разрушения достигается практически одинаковая деформация  $\varepsilon \approx 0.17$ , но в режиме 1 время до разрушения равно 152 часа, а в режимах 2-4 оно составляет 139-137 часов. Так как выход на заданный уровень напряжений в режиме 1 занимает  $t_H \approx 30.1$  час, а в режиме 4 –  $t_H \approx 6.4 \cdot 10^4$  час, то можно сказать, что расчеты в данном случае адекватно отражают длительность пребывания материала стержня под нагрузкой.

Учет с помощью уравнений типа (1) – (5) исходной поврежденности материала  $\omega(0)$ , о чем упомянуто выше применительно к одной из диаграмм растяжения, может оказать весьма важное влияние на трактовку результатов испытаний материалов [3].

### 3. Описание развития процесса деформирования материала при плоском нагружении с постоянной скоростью

Естественно, что для большинства прикладных задач учет упрочнения материала является важным, если не решающим фактором. Но в задачах о больших деформациях этим часто пренебрегают. Далее поступим таким же образом, приняв  $\psi = \psi(\sigma)$ , хотя, как видно из предыдущего, учет процесса упрочнения является для используемых уравнений вполне доступным.

Чтобы сразу увидеть различие в поведении упруго-пластического материала в рассматриваемых ниже режимах нагружения с постоянной скоростью деформирования  $V\varepsilon = \text{const}$  и постоянной скоростью нагружения  $V\sigma = \text{const}$ , запишем дифференциальное уравнение течения для одномерного случая

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\sigma}{E dt} + \frac{\sigma}{\eta}, \quad \eta = \eta_0 \exp(-\gamma\sigma), \quad (9)$$

в безразмерной форме с учетом обозначений  $z = \gamma E \varepsilon = \gamma\sigma$ ,  $s = \gamma E t$  и  $p = \gamma W \eta_0$

для режимов  $\frac{d\varepsilon}{dt} = V\varepsilon = \text{const}$  и  $\frac{d\sigma}{dt} = V\sigma = \text{const}$  при  $V\sigma = E * V\varepsilon$ :

$$(a) \quad \frac{dz}{ds} = 1 - \frac{z \exp(z)}{p}, \quad (b) \quad \frac{dz}{ds} = \frac{1}{1 + \frac{z \exp(z)}{p}} \quad (10)$$

Соответствующие диаграммы растяжения (ДР) показаны на рис.3.

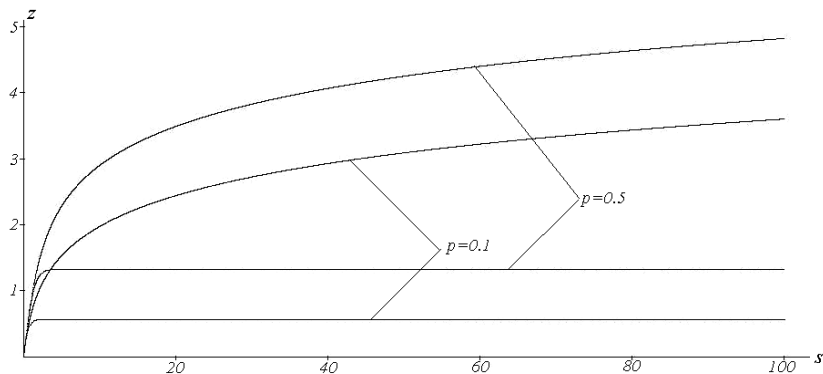


Рис.3. Зависимости  $Z(s)$  в режимах  $V\sigma = E V\varepsilon = \text{const}$ .

Из (10) видно, что при любых значениях  $s$  кривые строго выпуклы. В режиме  $V\varepsilon = \text{const}$  для предела текучести  $\sigma_T$  имеем уравнение  $z_T \exp(z_T) = p$ , а для режима  $V\sigma = \text{const}$  предел текучести  $\sigma_T$  может быть определен только как условный, при

котором достигается некоторый установленный уровень остаточной деформации. По (9) ползучесть материала соответствует установившейся стадии. Представив аргумент экспоненты в выражении для вязкости как сумму гидростатической (пропорциональной напряжению) и девиаторной части (пропорциональной модулю напряжения) можно провести описание эффектов, связанных с наличием нагрузок разного знака.

Ниже рассматриваются случаи плоского нагружения (ПНС – плоское напряженное состояние, ПДС – плоское деформированное состояние) для режимов  $V\varepsilon=const$  и  $V\sigma=const$ .

### 3.1. Режим $V\varepsilon=const$ для ПНС

В этом режиме уравнения течения запишутся в виде

$$\frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1} - \mu \frac{d\sigma_2}{d\varepsilon_1} + \frac{E}{3V\eta} (2\sigma_1 - \sigma_2) = E, \quad \frac{d\sigma_2}{d\varepsilon_1} - \mu \frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1} + \frac{E}{3V\eta} (2\sigma_2 - \sigma_1) = k_V E \quad (11)$$

где  $V=V\varepsilon_1$ ,  $k_V = V\varepsilon_2 / V\varepsilon_1 = \varepsilon_2 / \varepsilon_1$ ,  $\eta = \eta_0 \exp\{-\psi(\sigma_1, \sigma_2)\}$ ,  $\sigma_1, \sigma_2$  – напряжения в направлениях деформирования,  $\eta_0$  – начальная вязкость,

$$\psi(\sigma_1, \sigma_2) = \alpha \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{3} + \beta \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - \sigma_1 \sigma_2},$$

$\alpha$  и  $\beta$  – структурные параметры, определяющие влияние на вязкость гидростатического и девиаторного напряженных состояний.

Обозначив  $z_1 = \sigma_1 + \sigma_2$ ,  $z_2 = \sigma_1 - \sigma_2$ ,  $s = \alpha E \varepsilon_1$ , получим из (3) уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{ds} + \frac{E z_1}{3V\eta_0(1-\mu)} \exp\left\{\frac{\alpha}{3} z_1 + \frac{\beta}{2} \sqrt{z_1^2 + 3z_2^2}\right\} &= \frac{E(1+k_V)}{1-\mu} \\ \frac{dz_2}{ds} + \frac{E z_2}{V\eta_0(1+\mu)} \exp\left\{\frac{\alpha}{3} z_1 + \frac{\beta}{2} \sqrt{z_1^2 + 3z_2^2}\right\} &= \frac{E(1-k_V)}{1+\mu} \end{aligned} \quad (12)$$

в которых  $\psi = \frac{\alpha}{3} z_1 + \frac{\beta}{2} \sqrt{z_1^2 + 3z_2^2} = \frac{\beta}{2} \left[ \frac{2\alpha}{3\beta} z_1 + \sqrt{z_1^2 + 3z_2^2} \right]$ .

Величину  $z_1$  можно ассоциировать со средними напряжениями, величину  $z_2$  при  $\sigma_1 \cdot \sigma_2 < 0$  – с максимальными главными касательными напряжениями  $\tau_{MAX} = \tau_{12}$ , при  $\sigma_1 \cdot \sigma_2 > 0$  – с главными касательными напряжениями  $\tau_{12} < \tau_{MAX} = \tau_{13} = 0.5\sigma_1$ , а  $\varphi = \sqrt{z_1^2 + 3z_2^2}$  – с октаэдрическими напряжениями  $\tau_{OKT}$ . Наличие связи двух уравнений через вязкость приводит к тому, что экстремальные значения напряжений возникают как при одновременном, так и при неодновременном выполнении условий  $\frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1} = 0$  и  $\frac{d\sigma_2}{d\varepsilon_1} = 0$ .

На рис.4 показано изменение во времени ( $t = \varepsilon_1 / V\varepsilon_1$ ) переменных уравнений (11)-(12) для значений  $k_V$  из интервала  $-1 \leq k_V \leq +1$  при фиксированных значениях  $\mu = 0.0$ ,  $\mu = 0.25$ ,  $\mu = 0.5$  (в случаях  $k_V = \pm 1$  графики имеют вид диаграмм Прандтля). Числовые значения констант уравнений приняты равными  $E = 2.2e7$ ,  $\eta_0 = 6.5e10$ ,  $\alpha = 5e-4$ ,  $\beta = 8e-4$ ,  $V = 1e-3$  и в определенной степени соответствуют использованным выше.

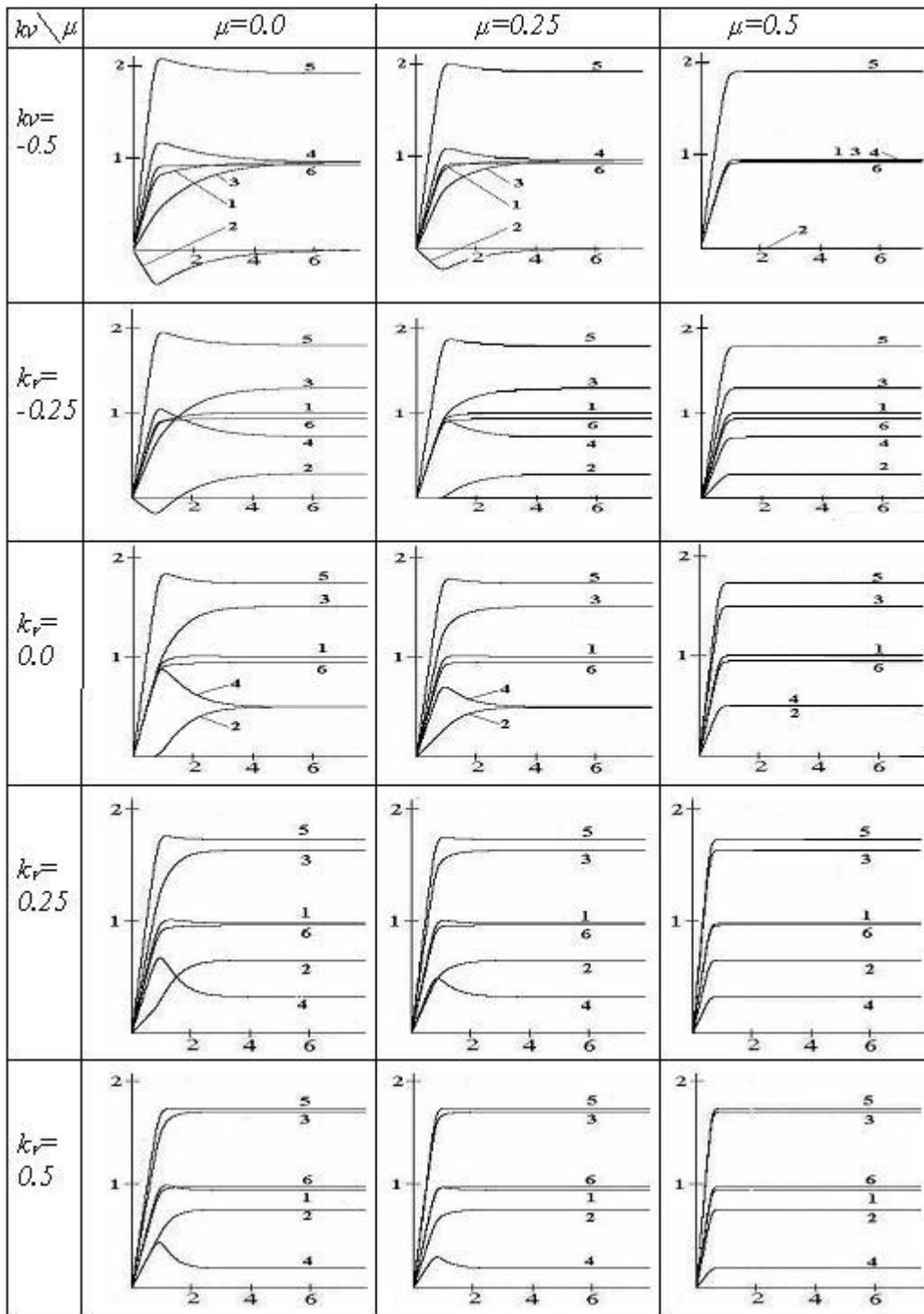


Рис.4. Расчетные функции  $f(\varepsilon_1)$ : 1 –  $\sigma_1$ , 2 –  $\sigma_2$ , 3 –  $z_1$ , 4 –  $z_2$ , 5 –  $\varphi$ , 6 –  $\psi$ . По оси абсцисс отложена деформация  $\varepsilon_1 \cdot 10^3$ , по оси ординат для функций  $z_1, z_2, \varphi, \sigma_1, \sigma_2$  – значения  $\Gamma \cdot 10^{-4}$ , для функции  $\psi$  – значения  $f \cdot 10^{-1}$ .

Рис.4 позволяет проследить направление влияния коэффициента Пуассона  $\mu$  и скоростного параметра нагружения  $k_v$  на поведение материала. Видно, в частности, что с ростом  $\mu$  кривизна функций уменьшается, с ростом  $k_v$  – увеличивается. Средние напряжения во всех случаях изменяются монотонно, а компоненты тензора напряжений могут иметь выраженные экстремумы. Предельные уровни напряжений (при  $\varepsilon \rightarrow \infty$ ) не зависят от  $\mu$ .

При деформациях, близких к предельным упругим, соотношения между  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  или  $z_1$  и  $z_2$  определяются величиной коэффициента Пуассона, от которого зависят



как реализующиеся максимумы напряжений, так и скорость их трансформирования к своим предельным уровням при  $\varepsilon \rightarrow \infty$ . Максимумы кривых во всех случаях сдвинуты по деформации друг относительно друга. Если  $k_v > 0$ , то первым возникает максимум на площадках главных касательных напряжений  $\tau_{12}$ , вторым – на площадках главных нормальных напряжений  $\sigma_1$  и площадках максимальных касательных напряжений  $\tau_{13}$ , а далее – на октаэдрических площадках. При  $k_v < 0$  первый максимум возникает на площадках главных нормальных напряжений  $\sigma_2$  и главных касательных напряжений  $\tau_{23}$ , за ним – на площадках максимальных главных касательных напряжений  $\tau_{12}$ , и далее – на октаэдрических площадках. С дальнейшим увеличением деформации соотношения  $\sigma_1 - \sigma_2$  или  $z_1 - z_2$  стремятся к своим предельным значениям, которые устанавливаются по величинам коэффициентов уравнений (11)-(12) и соответствуют результатам теории пластичности:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{1 + 2k_v}{2 + k_v}, \quad \frac{z_2}{z_1} = \frac{3(1 - k_v)}{1 + k_v}.$$

Таким образом, в отличие от склерономного подхода теории пластичности здесь можно сказать, что рост остаточных деформаций в материале происходит по разным площадкам с различной скоростью (переходя от площадок главных касательных и нормальных напряжений к площадкам октаэдрических напряжений), постепенно увеличивая объем материала вокруг выделенной точки, занимаемый зоной интенсивного течения. В пределе текучесть охватывает всю сферу бесконечно-малого радиуса вокруг точки.

При увеличении скорости деформирования  $V\varepsilon$  максимумы становятся более выраженными, но форма кривых в целом не изменяется.

Если вместо растяжения задавать сжатие ( $V < 0$ ), то на форму кривых  $\sigma_1, \sigma_2, z_1$  это не повлияет, кривые  $z_2$  могут изменить свою форму, перегибы на кривых  $\varphi$  исчезают, общий уровень всех этих кривых возрастает, а форма кривой  $\psi$  остается фактически неизменной, причем ее предельное значение уменьшается. Процесс выхода на предельные уровни напряжений является более плавным и продолжительным. Несколько примеров показано на рис.5 (обозначения и масштабы соответствуют рис.4).

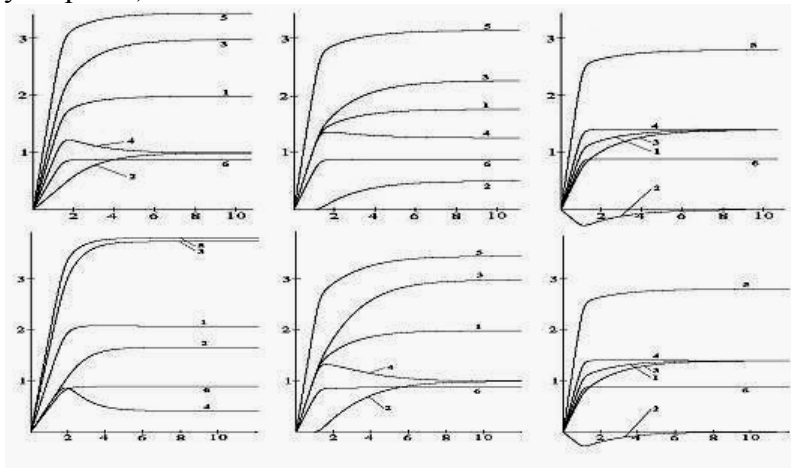


Рис.5. Расчетные функции  $f(\varepsilon)$  для случая  $V < 0$ . На верхней части рисунка  $\mu = 0.25, k_v = 0.0, -0.25, -0.5$ , на нижней части –  $\mu = 0.0, k_v = +0.5, 0.0, -0.5$  соответственно слева направо

Из рассмотрения приведенных графиков видно, что только величина  $\psi$  на всех режимах стабильно сохраняет вид диаграммы Прандтля при любых значениях  $\mu$  и  $k_v$ , и поэтому выход именно этой величины на предельный уровень  $\psi_T$  свидетель-

ствуется о достижении материалом состояния интенсивной текучести. Ни значения  $\tau_{12}$  или  $\tau_{13}$ , ни значения  $\tau_{окт}$  такого свойства не проявляют. Для всего рассмотренного диапазона  $\mu$  и  $k_V$  отклонение  $\psi_T$  от своего среднего значения составляет около 4%. С ростом скорости деформирования  $V\varepsilon$  это отношение уменьшается ( $\sim 2.5\%$  для  $V\varepsilon=1.0$ ), так как возрастает и уровень  $\psi_T$ . В используемой модели среды  $\psi_T$  является величиной предельного снижения энергии активации, обеспечивающей выход материала на состояние активной текучести. Критерий текучести  $\psi=\psi_T$  является индивидуальным для каждого материала, так как зависит от соотношения его структурных параметров  $\alpha$  и  $\beta$ . Поэтому, в частности, не существует единого для всех материалов критерия, содержащего гидростатическую компоненту напряжений в виде некоторой однозначной поправки к критерию Мизеса.

С наличием перераспределения напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  в зависимости от уровня достигнутой деформации может быть связан разброс данных при определении критерия текучести материала для неоднородного нагружения, так как из рис.4 видно, что постоянное при заданном  $k_V$  соотношение значений  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  достигается только при выходе на стационарные участки кривых. В этом случае из уравнений вытекает зависимость, которая определяет переход материала в состояние текучести

$$\frac{\sigma_1^T}{2+k_V} = V\eta_0 \exp\left\{-\left(\alpha(1+k_V)\frac{\sigma_1^T}{2+k_V} + \beta\sqrt{3}\sqrt{1+k_V+k_V^2}\cdot\left|\frac{\sigma_1^T}{2+k_V}\right|\right)\right\} \quad (13)$$

В обозначениях

$$r = \frac{\sigma_1^T}{(2+k_V)V\eta_0}, \quad \chi = \left(\alpha(1+k_V)\text{Sign}V + \beta\sqrt{3}\sqrt{1+k_V+k_V^2}\right) \cdot V_A\eta_0, \quad V_A=|V|$$

вместо (13) имеем

$$r \exp(\chi r) = 1 \quad (14)$$

С использованием (14) и соотношения  $\sigma_2^T = \frac{1+2k_V}{2+k_V}\sigma_1^T$  нетрудно перейти к “критерию пластичности”  $\sigma_2^T(\sigma_1^T)$  или  $r_2^T(r_1^T)$ , – зависимости, определяющей появление текучести при неоднородном нагружении. Результаты соответствующих расчетов показаны на рис.6 кривыми 1 (значения  $\eta_0$  и  $\beta$  соответствуют рис.4).

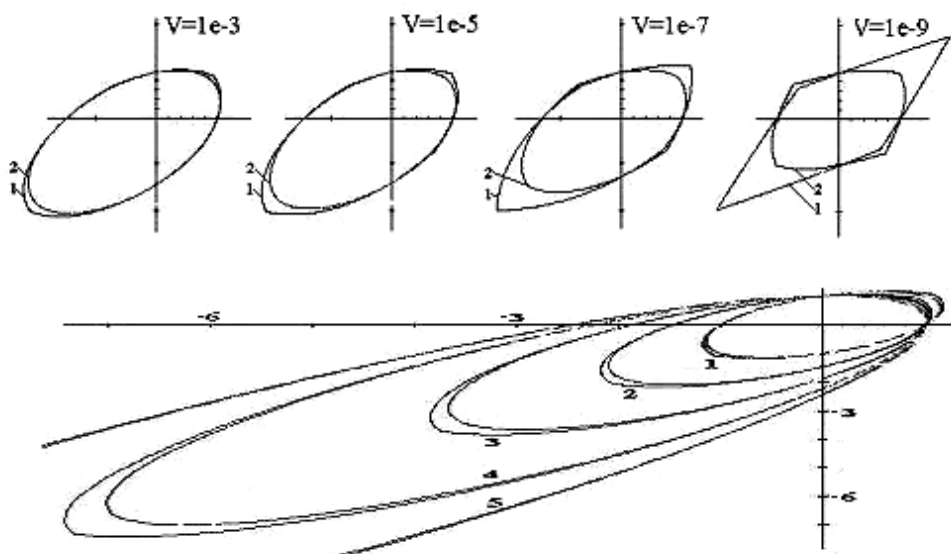


Рис.6. Влияние скорости и соотношения структурных параметров  $\alpha/\beta$  на критериальные кривые. Для верхней части рисунка  $\alpha=5e-4$ , 1 – режим  $V\varepsilon$ , 2 – режим  $V\sigma$ , для нижней части –  $V=1e-3$ , 1 –  $\alpha=0e-4$ , 2 –  $\alpha=5e-4$ , 3 –  $\alpha=8e-4$ , 4 –  $\alpha=10e-4$ , 5 –  $\alpha=11e-4$

Верхняя часть рисунка характеризует роль скорости нагружения (произведения  $V\eta_0$ ) и построена при тех же значениях  $\alpha$ , что были использованы выше. Нижняя часть рисунка характеризует роль отношения параметров  $\alpha$  и  $\beta$ . Кривые нормированы по отношению к значению предела текучести при растяжении  $\sigma_p^T$ , полученному в каждом расчетном случае. Видна существенная роль гидростатической компоненты поля напряжений. Варьирование параметрами показывает, что уравнение (14) отражает также наличие вогнутости на кривой  $r_2^T(r_1^T)$  вблизи точки  $k_V \approx 1$ .

Из рис.6 видно, что хотя максимальные нагрузки для области сжатия могут значительно отличаться от нагрузок при растяжении (в данных расчетах почти в 12 раз), отношение пределов текучести на растяжение и сжатие составляет при этом  $1 \div 2.5$ . Отсюда можно сделать вывод, что наблюдаемые для некоторых материалов (горные породы, бетон и др.) десятикратные и выше отличия пределов прочности на растяжение и сжатие объясняются прежде всего исходной поврежденностью этих материалов (пористостью, трещиноватостью), наличие которой в присутствии растягивающих компонент напряжения ведет к развитию магистральных трещин.

### 3.2. Режим $V\sigma=const$ для ПНС

Как и для одномерного случая, уравнения течения в этом случае интегрируются по времени  $t$ :

$$\varepsilon_1 = \frac{1 - \mu k_V}{E} \sigma_1 + \frac{(2 - k_V)EV}{3\eta_0} J(t), \quad \varepsilon_2 = \frac{k_V - \mu}{E} \sigma_1 + \frac{(2k_V - 1)EV}{3\eta_0} J(t),$$

где  $V\sigma = E \cdot V\varepsilon$ ,  $V\varepsilon = V$ ,  $k_V = V\sigma_2 / V\sigma_1 = \sigma_2 / \sigma_1$ ,

$$J(t) = \int_0^t \exp(Ft) dt = \frac{1}{F^2} (1 + \exp(Ft) \cdot (Ft - 1)),$$

$$Ft = \frac{\alpha}{3} (\sigma_1 + \sigma_2) + \beta \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} = gEV_A t, \quad g = \frac{\alpha}{3} (1 + k_V) \text{Sign} V + \beta \sqrt{1 - k_V + k_V^2},$$

$V_A = |V|$ .

При этом  $\varepsilon_2$  пропорциональна  $\varepsilon_1$  и в зависимости от величины  $k_V$  может иметь разные знаки:

$$\varepsilon_2 = \frac{2k_V - 1}{2 - k_V} \varepsilon_1 + \frac{\sigma_1}{E} \cdot \frac{(1 - k_V^2) \cdot (1 - 2\mu)}{2 - k_V}.$$

Кривые деформирования по виду соответствуют кривой для одномерного случая нагружения и при изменении параметров задачи их вид принципиально не изменяется.

Выбрав некоторый уровень интенсивности деформаций  $\varepsilon_i$  за уровень, соответствующий условному пределу текучести, будем для  $\sigma_T$  иметь зависимость:

$$\frac{3}{2} r_i^T = \frac{\sqrt{1 - k_V + k_V^2}}{(gV\eta_0)^2} \left[ 1 + (gV_A\eta_0 r_i^T - 1) \exp(gV_A\eta_0 r_i^T) \right] \quad (15)$$

где обозначено  $r_i^T = \frac{\sigma_i^T}{V\eta_0}$ ,  $\sigma_i^T = E\varepsilon_i^T$ .

Для одноосного случая ( $k_V=0$ ) из (15) получаем выражение

$$\frac{3}{2} r_i^T = \frac{1}{\left(\frac{\alpha}{3} + \beta\right)^2 (V\eta_0)^2} \left[ 1 + \left(\left(\frac{\alpha}{3} + \beta\right) V_A \eta_0 r_i^T - 1\right) \exp\left(\left(\frac{\alpha}{3} + \beta\right) V_A \eta_0 r_i^T\right) \right],$$

которое при необходимости можно использовать для определения значений структурных параметров материала. Критериальные кривые  $r_2^T(r_1^T)$  по уравнению (15) при  $r_i^T=2.2$  принимают вид, показанный на рис.6.

### 3.3. Режим $V\varepsilon=const$ для ПДС

В этом случае, учитывая, что  $\frac{d\varepsilon_3}{dt} = 0$ , уравнения течения можно привести к следующему:

$$\frac{dz_1}{d\varepsilon_1} + \frac{E(1-2\mu)}{1-\mu-2\mu^2} \cdot \frac{z_1}{V\eta} = \frac{E(1+k_V)}{1-\mu-2\mu^2} \left(1 + \frac{2}{3V\eta} E\varepsilon_1\right)$$

$$\frac{dz_2}{d\varepsilon_1} + \frac{E}{1+\mu} \cdot \frac{z_2}{V\eta} = \frac{E(1-k_V)}{1+\mu}$$

$$\sigma_0 = \frac{1+k_V}{3} \cdot \frac{E}{1-2\mu} \varepsilon_1,$$

где  $z_1=(\sigma_1+\sigma_2)/2$ ,  $z_2=(\sigma_1-\sigma_2)/2$ ,  $k_V=V_2/V_1$ ,

$$\eta = \eta_0 \exp(-\psi) = \eta_0 \exp\left\{-\left(\alpha\sigma_0 + \beta\sqrt{18}\sqrt{\frac{3z_1^2 + z_2^2}{12} + \sigma_0^2 - \sigma_0 z_1}\right)\right\}.$$

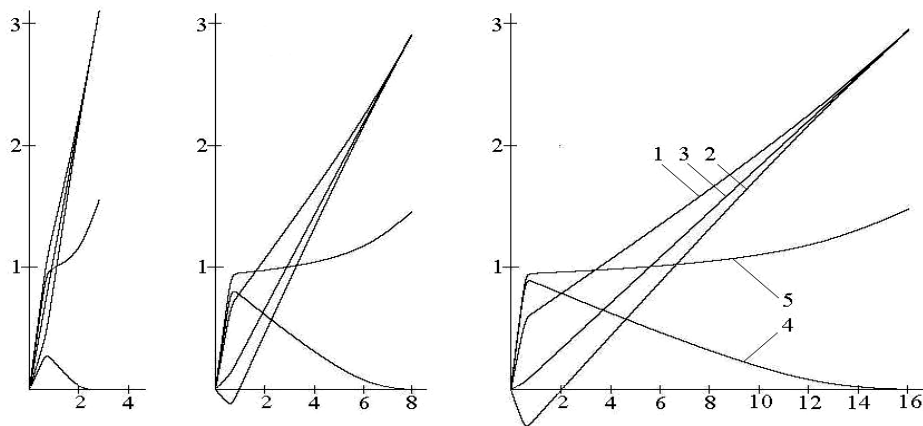


Рис.7. Расчетные функции  $f(\varepsilon_1)$ : 1 –  $\sigma_1$ , 2 –  $\sigma_2$ , 3 –  $\sigma_3$ , 4 –  $z_2$ , 5 –  $\psi$ . . Значения  $\mu=0.25$ ,  $k_V=0.5, -0.5, -0.75$  (слева направо). Масштабы на осях соответствуют рис.3

Решение уравнений показывает (рис.7), что, как и для случая ПНС, имеет место перераспределение напряжений, причем с ростом деформации все компоненты напряжений стремятся к одному уровню  $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=\sigma_0$ , а касательные напряжения после достижения своих максимальных значений стремятся к нулю. Процесс перехода материала к гидростатическому состоянию контролируется величиной  $k_V$  – с ее уменьшением уровень деформации, соответствующий моменту фактического уравнивания нормальных напряжений, увеличивается ( $\varepsilon=\infty$  при  $k_V=-1$ , что соответствует случаю плоского напряженного состояния). При этом выход на неупругий участок кривых не имеет ярко выраженной локализации в виде зуба текучести, а сами кривые  $\sigma(\varepsilon)$  по форме близки к билинейным (с двумя прямолинейными участками). Хотя кривые  $\sigma(\varepsilon)$  не имеют площадок текучести, функция  $\psi$  имеет в переходной зоне достаточно выраженный и близкий к линейному участок, плавно переходящий в возрастающий в области, где уровни всех трех главных напряжений сближаются.

### 3.4. Режим $V\sigma=const$ для ПДС

Уравнения течения для этого режима можно записать в виде:

$$\begin{aligned} E \frac{d\varepsilon_1}{d\sigma_1} &= 1 - \mu \left( k_V + \frac{d\sigma_3}{d\sigma_1} \right) + \frac{(2 - k_V)\sigma_1 - \sigma_3}{3V\eta} \\ E \frac{d\varepsilon_2}{d\sigma_1} &= k_V - \mu \left( 1 + \frac{d\sigma_3}{d\sigma_1} \right) + \frac{(2k_V - 1)\sigma_1 - \sigma_3}{3V\eta} \\ \frac{d\sigma_3}{d\sigma_1} &= \mu(1 + k_V) - \frac{2\sigma_3 - (1 + k_V)\sigma_1}{3V\eta} \end{aligned}$$

Как и выше, здесь принято  $V\sigma=EV\varepsilon$ ,  $V\varepsilon=V$ . Подобно случаю ПНС, зависимость между главными напряжениями и деформациями  $\sigma(\varepsilon)$  имеет вид упрочняющихся кривых. Аналогичную форму принимает и зависимость логарифма вязкости  $\psi$  от деформации  $\varepsilon_1$ . Если представить  $\psi$  как функцию напряжений  $\psi(\sigma)$ , то на ней будет виден перегиб в зоне перехода материала в состояние текучести. Как и для предыдущего случая ( $V\varepsilon=const$ ), с возрастанием значения  $k_V$  роль гидростатической составляющей  $\alpha\sigma$  в функции  $\psi$  увеличивается (при  $k_V=+1$  имеем  $\psi \rightarrow \alpha\sigma_0$ , причем деформации не превысили значения  $\varepsilon_1 \approx 1 \cdot 10^{-3}$ , а при  $k_V=-1$  имеем  $\psi = \beta\sigma_i$  при любом уровне деформаций). Внутри всего интервала  $-1 < k_V < +1$  напряжения  $\sigma_3$  являются положительными и промежуточными по уровню между  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , увеличиваясь с ростом  $k_V$ .

### Заключение

Приведенные результаты показывают, что многие особенности поведения реальных материалов можно описать, учитывая зависимость энергии активации процессов структурных превращений, сопутствующих деформации, от реализованного в данной точке тела напряженно-деформированного состояния. Это относится также и к описанию материалов, обладающих возвратными деформациями. Уравнения эффективно применяются также для случая ударного нагружения и на основании экспериментальных данных позволяют установить весьма важную прямую связь между структурными параметрами материала  $U_0$  и  $\gamma$  [4]. Учитывая, что использованные выше уравнения приводят к потенциалам, их можно применять и для решения реологических задач вариационными методами.

### Литература

1. Гуревич Г.И. Деформируемость сред и распространение сейсмических волн. М.: Наука, 1974, – 483с.
2. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. Том 2. Пер. с англ. М.: Мир, 1969, – 863с
3. Холодарь Б.Г. Связь долговечности материала с уровнем его исходной поврежденности. Вестник БрГТУ, серия “Строительство и архитектура”, №1(37), 2006, стр. 40-45
4. Холодарь Б.Г. К вопросу о динамическом пределе текучести упруго-пластического материала. XLVII Международная конференция «Актуальные проблемы прочности», 1-5 июля 2008 года, Нижний Новгород: материалы конференции. Часть. 2.– Н.Новгород, 2008 – 390 с., стр. 215-217