К ВОПРОСУ О ДВИЖЕНИИ АРТИЛЛЕРИЙСКОГО СНАРЯДА

Амельянчик А.И., Горбач Н.И.

Белорусский национальный технический университет, Минск

В работе приводятся результаты теоретических исследований движения артиллерийского снаряда без учета и с учётом сопротивления воздуха после вылета со ствола орудия. Получен ряд аналитических зависимостей, характеризующих основные параметры этого движения.

Задача о движении артиллерийского снаряда относится к задачам внешней баллистики. Не останавливаясь на вопросах внутренней баллистики, рассмотрим движение снаряда как тела, принимаемого за материальную точку, брошенного под углом к горизонту с некоторой начальной скоростью V_0.

При движении в безвоздушном пространстве на снаряд действует только сила тяжести $\overline{mg}$, т.е. он движется с постоянным по величине и направлению ускорением $\bar{g}$ земного притяжения (рис. 1).

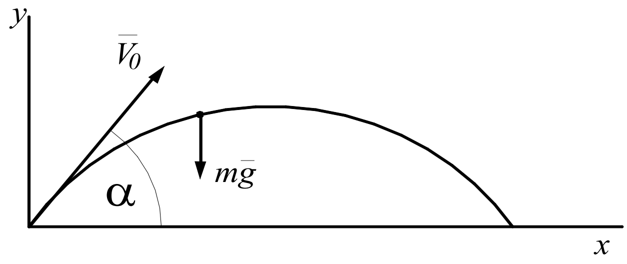

Рис. 1.

Не останавливаясь на достаточно простом выводе уравнений движения снаряда по осям x и y, которые можно получить , составив ифференциальные уравнения движения на основании второго закона динамики или из кинематических соображений, не применяя этот закон. Приведем эти уравнения.

$$x = V_0 t \cos\alpha, \tag{1}$$

$$y = V_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}. \tag{2}$$

Определение траектории снаряда

Траекторией называется кривая линия, описываемая центром тяжести снаряда в полете.

Уравнение (1) и (2) являются параметрическими уравнениями кривой. Для получения уравнения траектории в координатной форме (в явном виде) исключим из этих уравнений время t, для чего выразим его из уравнения (1) и подставим в уравнение (2), получим

$$y = V_0 \sin\alpha \frac{x}{V_0 \cos\alpha} - \frac{gx^2}{2V_0^2 \cos^2\alpha} \text{ или } y = xtg\alpha - \frac{gx^2}{2V_0^2 \cos^2\alpha}. \tag{3}$$

Полученное уравнение является уравнением траектории в явном виде и графически изображается параболой, общее уравнение которой, как известно из математики [3], имеет вид

$$y = ax^2 + bx + c, \tag{4}$$

где для нашей задачи $a = -\dfrac{g}{2V_0^2 \cos^2\alpha}$; $b = tg\alpha$; $c = 0$.

Используя уравнения (1) - (3), можно решить ряд задач по определению многих характеристик движения снаряда.

Определение времени, высоты и дальности полета

Положив в уравнении (2) $y = 0$, получим

$$t\left(V_0 \sin\alpha - \frac{gt}{2}\right) = 0 .$$

Отсюда $t_1 = t_0 = 0$ – время начала движения; $t_2 = \dfrac{2V_0 \sin\alpha}{g}$ – время полета.

Подставив t_2 в уравнение (1), после преобразований получим дальность полета L

$$L = x/_{t=t_2} = V_0 \cos\alpha \frac{2V_0 \sin\alpha}{g} = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \qquad (5)$$

Максимальную высоту подъема H определим, продифференцировав уравнение (2) по времени и полученное выражение приравняв нулю, т.е. в верхней точке траектории функция имеет максимум или проекция скорости на ось y $V_y = 0$.

$$\frac{dy}{dt} = V_y = V_0 \sin\alpha - gt_{\text{под}} = 0.$$

Отсюда время подъема в верхнюю точку

$$t_{\text{под}} = \frac{V_0 \sin\alpha}{g}, \qquad (6)$$

т.е. равно половине времени t_2 полёта.

Тогда

$$H = y/_{t=t_{под}} = V_0 \sin\alpha \cdot \frac{V_0 \sin\alpha}{g} - \frac{gV_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = \frac{V_0^2 \sin^2\alpha}{2g} . \qquad (7)$$

Значение дальности полета можно было также определить из уравнения (3) траектории, положив в нем y=0.

Получим $x_1 = x_0 = 0;\ x_2 = \dfrac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g} = L.$ (5')

Определение угла α , при котором *L* имеет максимум

Продифференцируем выражение (5) по α и приравняем нулю

$$\frac{dL}{d\alpha} = \frac{V_0^2}{g} 2\cos 2\alpha = 0.$$

Отсюда cos2α = 0 или 2α = 90°, а α = 45°.

Этот же результат получим, если в выражении (5) для L примем sin2α = 1 => 2α = 90°, а α = 45°.

При этом значении угла α дальность полета

$$L_{\max} = \frac{V_0^2}{g}; \qquad (8)$$

высота подъема в этом случае

$$H = \frac{V_0^2}{4g} \qquad (9)$$

а время подъема на эту высоту

$$t_{под} = \frac{V_0\sqrt{2}}{2g}, \qquad (10)$$

Из уравнений (8) и (9) следует, что при α = 45° $L_{\max} = 4H$, т.е. дальность полета снаряда в 4 раза больше высоты, которую он может достичь при выстреле под этим углом. Максимальной высоты полета снаряд может достичь, как следует из (7), при α=90°; т.е. когда выстрел будет произведен вертикально вверх. В этом случае

$$H_{\max} = \frac{V_0^2}{2g}, \tag{11}$$

что в два раза больше высоты, чем при стрельбе под углом α = 45°.

При всех прочих углах наклона ствола орудия снаряд при одной и той же начальной скорости не может подняться на высоту $H > H_{\max} = \frac{V_0^2}{2g}$ и поразить цель на расстоянии

$$L > L_{\max} = \frac{V_0^2}{g}.$$

Располагая ствол орудия под различными углами α к горизонту, получим семейство параболических траекторий. Для их построения вычислим максимальные высоты *H* и максимальные дальности *L* полета при различных значениях углов α (табл. 1).

Таблица 1

α, град.	10	20	30	45	60	70	80	90
$L = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}$	$\frac{V_0^2}{g} \times 0.342$	$\times 0.643$	$\times 0.866$	$\times 1$	$\times 0.866$	$\times 0.643$	$\times 0.342$	$\times 0$
$H = \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$	$\frac{V_0^2}{g} \times 0.015$	$\times 0.06$	$\times 0.125$	$\times 0.25$	$\times 0.375$	$\times 0.440$	$\times 0.485$	$\times 0.5$

Из таблицы видно, что одинаковые значения дальности полета имеют место при двух разных по величине углах α наклона ствола орудия, из которых, если один α_1, то второй $\alpha_2 = 90° - \alpha_1$, т.к. $\sin 2\alpha = \sin(180^\circ - 2\alpha)$.

Построим параболы, отложив по горизонтальной оси значения *L*, а по вертикальной оси – значения *H* в одном и том же масштабе (рис. 2)

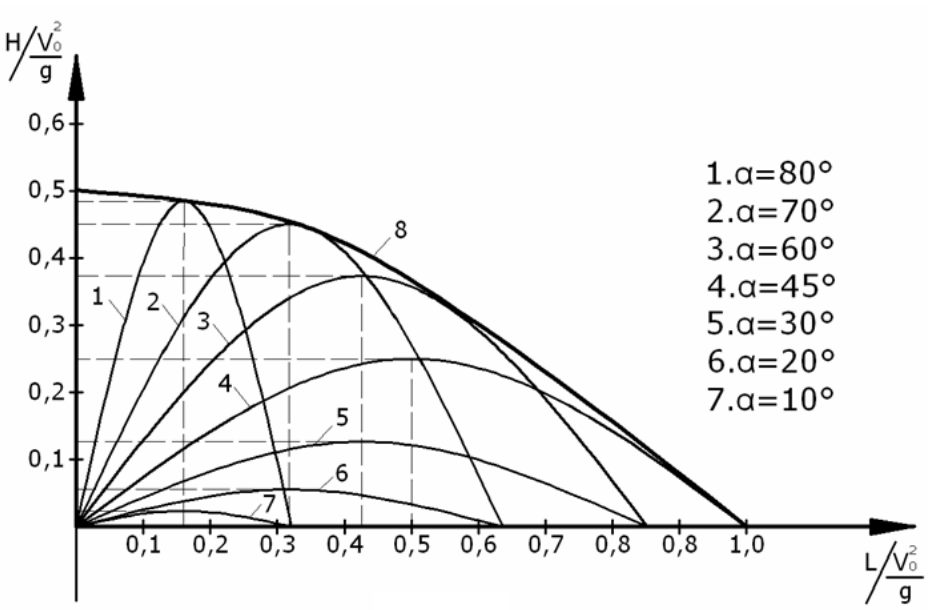

Рис. 2.

Огибающая 8 называется параболой безопасности. Точки , лежащие за пределами этой параболы, не могут быть достигнуты снарядом при данной начальной скорости V_0 и любом угле выстрела α

Определение угла α, при котором снаряд попадает в точку с заданными координатами *x* и *y*.

Преобразуем уравнение (3) траектории снаряда, применив тождество

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + tg^2\alpha\,;$$

получим

$$y = xtg\alpha - \frac{gx^2}{2V_0^2}(1 + tg^2\alpha)\ . \qquad (12)$$

После преобразований уравнения (12) получим квадратное уравнение относительно $tg\alpha$ вида :

$$tg^2\alpha - \frac{2V_0^2}{gx}tg\alpha + \left(1 + \frac{2V_0^2}{gx^2}y\right) = 0; \qquad (13)$$

решение этого уравнения имеет вид

$$tg\alpha = \frac{V_0^2}{gx} \pm \sqrt{\frac{V_0^2}{g^2x^2} - \left(1 + \frac{2V_0^2}{gx^2}y\right)}\,;$$

или

$$tg\alpha = \frac{V_0^2 \pm \sqrt{V_0^4 - g(gx^2 + 2V_0^2 y)}}{gx^2}\,. \qquad (14)$$

Таким образом, в заданную точку можно попасть, производя выстрел под углами α_1 и $\alpha_2 = 90° - \alpha_1$, что показано на рис. 2, при условии, что подкоренное выражение

$$V_0^4 - g(gx^2 + 2V_0^2 y) \geq 0\,. \qquad (15)$$

Определение параболы безопасности

Возможны два способа:

Первый способ. Применим уравнение траектории полета в виде уравнения (12).

Исследуем эту функцию на максимум, взяв производную по α и приравняв полученное выражение нулю

$$f^{/}(\alpha) = \frac{dy}{d\alpha} = \frac{x}{\cos^2\alpha} - \frac{gx^2}{2V_0^2} 2tg\alpha \frac{1}{\cos^2\alpha} = 0\ ;$$

отсюда получим

$$tg\alpha = \frac{V_0^2}{gx}\,. \qquad (16)$$

При этом значении $tg\alpha$ функция $f(\alpha)$ имеет максимум, т.к. вторая производная $f''(\alpha) < 0$. Подставим выражение (16) в уравнение (12).

Тогда максимальные значения ординаты y, обозначив их y_1, определяются уравнением:

$$y_1 = x\frac{V_0^2}{gx} - \frac{gx^2}{2V_0^2}\left(1 + \frac{V_0^4}{g^2x^2}\right). \qquad (17)$$

После преобразования этого уравнения, получим :

$$y_1 = \frac{V_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2V_0^2}\,. \qquad (18)$$

Полученное уравнение является уравнением параболы безопасности.

Второй способ. Используем неравенство (15), из которого выразим y

$$y \leq \frac{V_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2V_0^2}\,.$$

Превратив это выражение в равенство, получим уравнение параболы, огибающей параболические траектории снаряда (рис. 2), т.е. уравнение параболы безопасности,

$$y_1 = \frac{V_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2V_0^2}\,. \qquad (18')$$

Определение некоторых параметров траектории снаряда при стрельбе в горах

Пусть снаряд вылетает из ствола орудия, стоящего у подножия возвышенности, под углом α к горизонту со скоростью V_0. Поверхность возвышенности наклонена под постоянным углом β к горизонту (рис.3).

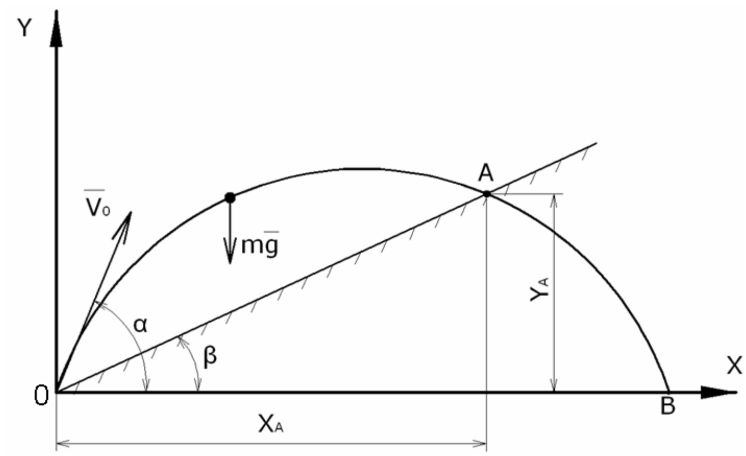

Рис. 3.

Будем считать, что на снаряд действует только сила тяжести $m\overline{g}$. Поэтому траекторией снаряда будет парабола, описываемая уравнением (3), но падение снаряда происходит не в точке *B*, если бы поверхность была горизонтальная, а в точке *A*.

Определим под каким углом нужно произвести выстрел, чтобы дальность полёта вдоль линии *OA* была максимальной.

Запишем уравнение прямой *OA*, являющейся проекцией поверхности на вертикальную плоскость xy .

$$y = xtg\beta . \qquad (19)$$

В точке *A* падения снаряда ординаты *y*, определяемые из уравнений (3) и (19), будут равными. Поэтому:

$$xtg\beta = xtg\alpha + \frac{gx^2}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} . \qquad (20)$$

Из уравнения (20)

$$x = (tg\alpha - tg\beta)\frac{2V_0^2}{g}\cos^2 \alpha = \frac{2V_0^2}{g}(\sin 2\alpha - 2\cos^2 \alpha tg\beta) . \qquad (21)$$

Для определения угла α, при котором дальность полета будет наибольшей, вычислим производную от x по α и приравняем её нулю:

$$\frac{dx}{da} = \frac{V_0^2}{g}(2\cos^2 2\alpha + 2\sin 2\alpha tg\beta) = 0 . \qquad (22)$$

Отсюда получим $\mathrm{ctg}2\alpha = -tg\beta$ или $2\alpha = \frac{\pi}{2} + \beta$.

Тогда угол

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}. \qquad (23)$$

Таким образом, для получения максимальной дальности полёта снаряда, выстрел необходимо производить не под углом $\alpha = 45°$, как это имеет место при падении снаряда на горизонтальную поверхность, а к этому значению угла нужно прибавить половину угла наклона поверхности , на которую падает снаряд.

При значении угла $\alpha = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} + \beta)$, для которого дальность полёта снаряда максимальная, определим время подъёма на максимальную высоту над уровнем горизонта и максимальную высоту подъёма *H*, используя ранее полученные формулы (6) и (7) для $t_{под}$ и H, получим

$$t_{под} = \frac{V_0 \sin\alpha}{g} = \frac{V_0}{g}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) = \frac{V_0\sqrt{2}}{2g}\left(\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\right). \qquad (24)$$

$$H = \frac{V_0^2}{2g}\sin^2\alpha = \frac{V_0^2}{2g}\sin^2(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}) = \frac{V_0^2}{4g}(1 + \sin\beta). \qquad (25)$$

При β = 0, $t_{под}$ и *H* имеют такие же значения, как и определяемые по формулам (10) и (9) при $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

При данном угле $\alpha = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} + \beta)$, найдём координаты точки *A* (точки пересечения траектории снаряда и наклонной поверхности , т.е. точки падения снаряда).

Для определения координаты x_A точки *A* воспользуемся формулой (21):

$$x_A = \frac{V_0^2}{g}\left(\sin 2\alpha - 2\cos^2\alpha\, tg\beta\right) = \frac{V_0^2}{g}\left(\sin\left[2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)\right] - 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right)tg\beta\right) =$$

$$= \frac{V_0^2}{g}\left[\cos\beta - 2\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\beta}{2}\right)^2 tg\beta\right].$$

Опуская дальнейшие преобразования, получим:

$$x_A = \frac{V_0^2}{g}\cdot\frac{(1 - \sin\beta)}{\cos\beta}. \qquad (26)$$

Для определения координаты y_A воспользуемся уравнением (3) траектории, положив в этом уравнении:

$$x = x_A = \frac{V_0^2}{g\cos\beta}(1 - \sin\beta) \text{ и } \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}.$$

Тогда

$$y_A = x\,tg\alpha - \frac{gx^2}{2V_0^2\cos^2\alpha} = \frac{V_0^2(1 - \sin\beta)}{g\cos\beta}\cdot\frac{tg\frac{\pi}{4} + tg\frac{\beta}{2}}{1 - tg\frac{\pi}{4}tg\frac{\beta}{2}} - \frac{V_0^2(1 - \sin\beta)^2}{2g\cos^2\beta\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\beta}{2}\right)^2}.$$

Опуская дальнейшие преобразования, для y_A получим выражение:

$$y_A = \frac{V_0^2\sin\beta(1 - \sin\beta)}{g\cos^2\beta}. \qquad (27)$$

Дальность полёта до точки A по наклонной плоскости получим из условия, что в точке падения с другой стороны $x_A = OA\cos\beta$. Тогда с использованием формулы (26) получим:

$$OA = \frac{V_0^2(1-\sin\beta)}{g\cos^2\beta}. \qquad (28)$$

Определение уравнений движения снаряда с учётом сопротивления воздуха

Снаряд при полёте в воздухе подвергается действию двух сил: силы тяжести и силы сопротивления (эффект Мангуса не учитываем). В результате действия этих сил скорость полёта снаряда постепенно уменьшается, а его траектория представляет собой по форме неравномерно изогнутую плавную кривую линию.

Следует заметить, что действие силы сопротивления воздуха на полёт снаряда очень велико и значительно уменьшает скорость и дальность полёта. Например, снаряд при угле бросания $\alpha = 15°$ и начальной скорости $V_0 = 800$ м/с в безвоздушном пространстве пролетел бы на расстояние 32620 м, а дальность полёта этого снаряда при тех же условиях, но при наличии сопротивления воздуха составляет всего лишь 3900 м [1].

Рассмотрим движение снаряда весом P, которому сообщена начальная скорость $\overline{V_0}$ под углом α к горизонту, с учётом силы сопротивления $\overline{R} = -kP\overline{V}$ (рис. 4)

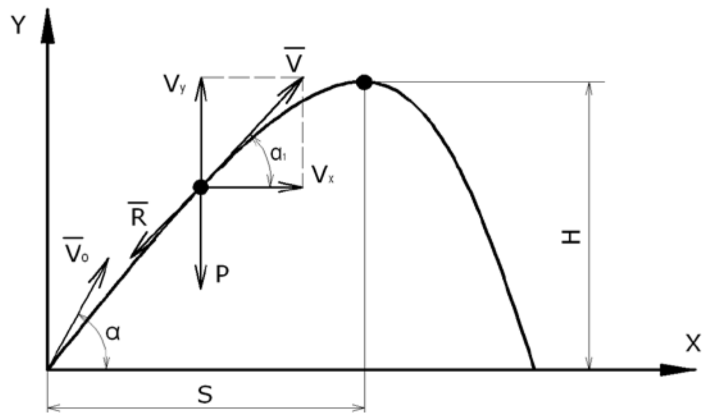

Рис. 4.

Составим дифференциальные уравнения движения в декартовых осях:

$$m\ddot{x} = -R\cos\alpha_1;$$

$$m\ddot{y} = -P - R\sin\alpha_1,$$

где $m = \dfrac{P}{g}$, $\cos\alpha_1 = \dfrac{V_x}{V}$, $\sin\alpha_1 = \dfrac{V_y}{V}$, $R = kPV$.

Заменим $\ddot{x} = \dfrac{d\dot{x}}{dt} = \dfrac{dV_x}{dt}$, $\ddot{y} = \dfrac{dV_y}{dt}$.

После преобразования получим:

$$\frac{dV_x}{dt} = -kgV_x, \qquad (29)$$

$$\frac{dV_y}{dt} = -g(1 + kV_y)\ .$$

(30)

Проинтегрируем дважды каждое из этих уравнений. Рассмотрим интегрирование дифференциального уравнения движения по оси *x*:

$$\frac{dV_x}{dt} = -kgV_x\ .$$

Разделим переменные и возьмём определённые интегралы от каждой части:

$$\int\limits_{V_0 \cos\alpha}^{V_x} \frac{dV_x}{V_x} = -\int\limits_0^t kgdt \Rightarrow \ln V_x \Big|_{V_0 \cos\alpha}^{V_x} = -kgt\ .$$

После преобразований получим закон изменения скорости по оси *x*:

$$V_x = V_0 \cos\alpha e^{-kgt}.$$

(31)

Так как $V_x = \dfrac{dx}{dt} = V_0 \cos\alpha \cdot e^{-kgt}$, то разделив переменные и проинтегрировав, получим: $x = f(t)$:

$$\int\limits_0^x dx = \int\limits_0^t V_0 \cos\alpha \cdot e^{-kgt} dt \Rightarrow x = \frac{V_0 \cos\alpha}{kg}(1 - e^{-kgt})$$

(32)

Теперь рассмотрим решение уравнения (30):

$$\frac{dV_y}{dt} = -g(1 + kV_y) \Rightarrow \frac{dV_y}{(1 + kV_y)} = -gdt.$$

Для определения закона изменения проекции скорости V_y на ось y, будем рассматривать изменение V_y от $V_{0y} = V_0 \sin\alpha$ до некоторого значения V_y, а время – от 0 до некоторого текущего значения t.

Тогда $\displaystyle\int\limits_{V_0 \sin\alpha}^{V_y} \frac{dV_y}{1 + kV_y} = -\int\limits_0^t gdt \Rightarrow \frac{1}{k}\ln(1 + kV_y)\Big|_{V_0 \sin\alpha}^{V_y} = -gt.$

После преобразований получим:

$$V_y = \left(V_0 \sin\alpha + \frac{1}{k}\right)e^{-kgt} - \frac{1}{k}.$$

(33)

Закон движения по оси *y* найдём, заменив

$$V_y = \frac{dy}{dt} = \left(V_0 \sin\alpha + \frac{1}{k}\right)e^{-kgt} - \frac{1}{k} \Rightarrow y = \int\limits_0^t \left(V_0 \sin\alpha + \frac{t}{k}\right)e^{-kgt} \cdot dt - \int\limits_0^t \frac{dt}{k}.\ .$$

После преобразований получим:

$$y = \frac{1}{kg}\left(V_0 \sin\alpha + \frac{1}{k}\right)\left(1 - e^{-kgt}\right) - \frac{1}{k}.$$

(34)

Определение траектории снаряда .

Найдём уравнение траектории снаряда в явном виде. Для этого исключим из уравнений (32) и (34) время *t*. Из формулы (32) выразим:

$$1-e^{-kgt}=\frac{kgx}{V_0\cos\alpha}.$$

После несложных преобразований из этого выражения , найдём:

$$t=-\frac{1}{kg}\ln\left(1-\frac{kgx}{V_0\cos\alpha}\right).$$

Подставим полученное выражение в уравнение (34), получим:

$$y=xtg\alpha+\frac{x}{kV_0\cos\alpha}+\frac{1}{k^2g}\ln\left(1-\frac{kg}{V_0\cos\alpha}x\right). \tag{35}$$

Сравнивая уравнения траекторий снаряда без учёта сопротивления (3) с полученным уравнением (35) видим, что совпадает только первое слагаемое этих уравнений.

Найдём приближённое уравнение траектории снаряда без учета сопротивления, разложив выражение $\ln\left(1-\frac{kg}{V_0\cos\alpha}x\right)$ уравнения (35) в ряд Тейлора , который при $x_0=0$ имеет вид:

$$f(0)+\frac{f^{/}(0)}{1}x+\frac{f^{//}(0)}{2!}x^2+\frac{f^{///}(0)}{3!}x^3+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \tag{36}$$

Обозначим $\ln(1-\frac{kg}{V_0\cos\alpha}x)=f(x)$.

Ограничимся тремя производными от этой функции:

$$f^{/}(x)=-\frac{kg}{V_0\cos\alpha-kgx};$$

$$f^{//}(x)=-\frac{k^2g^2}{(V_0\cos\alpha-kgx)^2}; \tag{37}$$

$$f^{///}(x)=-\frac{2k^3g^3}{(V_0\cos\alpha-kgx)^3};$$

Значения функций $f(x)$ и её производных при $x=0$, равны:

$$f(0)=0;\ f^{/}(0)=-\frac{kg}{V_0\cos\alpha};\ f^{//}(0)=-\frac{k^2g^2}{V_0^{\ 2}\cos^2\alpha};\ f^{///}(0)=-\frac{2k^3g^3}{V_0^{\ 3}\cos^3\alpha};$$

Подставим полученные значения в разложение функции $f(x)$ в ряд Тейлора, ограничившись первыми четырьмя слагаемыми :

$$\ln(1-\frac{kg}{V_0\cos\alpha}x)=-\frac{kgx}{V_0\cos\alpha-kgx}-\frac{k^2g^2x^2}{2V_0^2\cos^2\alpha}-\frac{2k^3g^3x^3}{6V_0^3\cos^3\alpha}.$$

Подставив в уравнение (35) вместо функции $\ln\left(1-\dfrac{kg}{V_0\cos\alpha}x\right)$ слагаемые ряда Тейлора и преобразовав, получим приближённое уравнение траектории:

$$y = xtg\alpha - \frac{gx^2}{2V_0^2\cos^2\alpha} - \frac{kg^2x^3}{3V_0^3\cos^3\alpha}. \tag{38}$$

Полученное уравнение отличается от уравнения (3) траектории снаряда при движении в безвоздушном пространстве наличием третьего слагаемого, а первые два совпадают точно. Это указывает на то, что при наличии сопротивления траектория на начальном участке близка к параболе, а затем при увеличении координаты x значение координаты y будет резко уменьшаться, т.е. восходящая и нисходящая ветви параболы не будут симметричны. Такая траектория называется баллистической кривой.

Определение максимальной высоты *H* подъёма, дальности *S* и времени *T* полёта снаряда до наивысшей точки

Найдём время T движения снаряда до наивысшей точки траектории. В этой точке проекция вектора скорости на ось y равна нулю, т.е.:

$$V_y = \left(V_0\sin\alpha + \frac{1}{k}\right)e^{-kgt} - \frac{1}{k} = 0;$$

отсюда

$$T = \frac{1}{kg}\ln(kV_0\sin\alpha + 1). \tag{39}$$

Для определения дальности полёта S снаряда вдоль оси x до наивысшей точки траектории подставим в уравнение (32) найденное значение T:

$$S = x\big/_{t=T} = \frac{V_0\cos\alpha}{kg}\left(1 - e^{-kg\cdot\frac{1}{kg}\ln(kV_0\sin\alpha+1)}\right) = \frac{V_0^2\sin 2\alpha}{2g(kV_0\sin\alpha+1)}. \tag{40}$$

Для определения максимальной высоты подъёма H подставим в уравнение (34) значение T:

$$H = y\big/_{t=T} = \frac{1}{kg}(V_0\sin\alpha + \frac{1}{k})(1 - e^{-kg\frac{1}{kg}\ln(kV_0\sin\alpha+1)}) - \frac{\ln(kV_0\sin\alpha+1)}{k^2g} =$$

$$= \frac{1}{k^2g}(kV_0\sin\alpha+1)(1 - \frac{1}{kV_0\sin\alpha+1}) - \frac{1}{k^2g}\ln(kV_0\sin\alpha+1).$$

Проведя дальнейшие преобразования, получим:

$$H = \frac{1}{kg}[V_0\sin\alpha - \frac{1}{k}\ln(kV_0\sin\alpha+1)]. \tag{41}$$

Значения S и H можно также получить, исследовав уравнение траектории (35) $y = f(x)$ на максимум. Для этого нужно найти производную $\dfrac{dy}{dx}$ и приравнять нулю. Из полученного уравнения выразить значение x, для которого у будет иметь максимальное значение. Покажем это:

$$\frac{dy}{dx} = tg\alpha + \frac{1}{kV_0\cos\alpha} + \frac{1}{k^2 g}\left(-\frac{kg}{V_0\cos\alpha\left(1 - \frac{kg}{V_0\cos\alpha}x\right)} \right) = 0.$$

Решив это уравнение относительно x, получим:

$$x = S = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{2g(kV_0\sin\alpha + 1)}. \qquad (40')$$

Подставим это значение в уравнение траектории:

$$H = y\big/_{x=S} = \left(tg\alpha + \frac{1}{kV_0\cos\alpha}\right)\frac{V_0^2\sin 2\alpha}{2g(kV_0\sin\alpha+1)} +$$
$$+\frac{1}{k^2 g}\ln\left(1 - \frac{kg}{V_0\cos\alpha}\cdot\frac{V_0^2\sin 2\alpha}{2g(kV_0\sin\alpha+1)}\right). \qquad (42)$$

После несложных преобразований выражения (42) получим:

$$H = \frac{1}{kg}\left[V_0\sin\alpha - \frac{1}{k}\ln(kV_0\sin\alpha + 1)\right],$$

что совпадает с полученным выше выражением (41).

Высоту подъёма можно также определить, если дифференциальное уравнение движения снаряда по оси y представить в виде:

$\frac{V_y dV_y}{dy} = -g(1 + kV_y)$, т.е. ввести подстановку: $\frac{dV_y}{dt} = \frac{V_y dV_y}{dy}$ и после разделения переменных проинтегрировать в пределах V_y от $V_0\sin\alpha$ до нуля, а y от нуля до H.

Приближённо всю дальность полёта снаряда можно определить, решив кубическое уравнение (38) , учтя, что в момент выстрела и падения снаряда $y = 0$. Тогда

$$x\left(tg\alpha - \frac{g}{2V_0^2\cos^2\alpha}x - \frac{kg^2}{3V_0^3\cos^3\alpha}x^2\right) = 0. \qquad (43)$$

Отсюда $x_1 = 0$ соответствует началу полёта. Решив квадратное уравнение, стоящее в скобках формулы (43) и учитывая, что дальность полёта не может быть отрицательной, получим второй корень:

$$x_2 = L = \frac{3}{4}\cdot\frac{V_0\cos\alpha}{kg}\left(\sqrt{1 + \frac{16}{3}kV_0\sin\alpha} - 1\right). \qquad (44)$$

Определение угла α, при котором дальность полёта будет максимальной

Для определения значения угла α, при котором дальность полёта S до момента достижения максимальной высоты будет наибольшей, исследуем уравнение (40), в котором угол α будем считать переменным, т.е. функцию $S = f(\alpha)$, на максимум. Найдём производную $\frac{dS}{d\alpha}$, приравняем её нулю и из полученного уравнения определим оптимальный угол $\alpha_{опт}$:

$$\frac{dS}{d\alpha}=\frac{V_0^2}{2g}\cdot\frac{\left[\cos 2\alpha\cdot 2\left(kV_0\sin\alpha+1\right)-kV_0\cos\alpha\sin 2\alpha\right]}{\left(kV_0\sin\alpha+1\right)^2}=0$$

или

$$2\cos 2\alpha\left(kV_0\sin\alpha+1\right)-kV_0\cos\alpha\sin 2\alpha=0\,. \qquad (45)$$

Дальнейшие преобразования уравнения (45) приводят к кубическому уравнению:

$$kV_0\sin^3\alpha+2\sin^2\alpha-1=0$$

или

$$\sin^3\alpha+\frac{2\sin^2\alpha}{kV_0}-\frac{1}{kV_0}=0. \qquad (46)$$

Решение этого уравнения возможно с использованием формулы Кардана[4]. Преобразуем уравнение (46), для чего сделаем замену:

$\sin\alpha=x,\ \frac{2}{kV_0}=r,\ -\frac{1}{kV_0}=t,$ получим исходное уравнение вида:

$$x^3+rx^2+t=0\ . \qquad (47)$$

Примем k = 0,004; $V_0=800$ м/с ; тогда $r=0{,}625;\ \ t=-0{,}3125.$

Преобразуем уравнение (47) к приведенному виду

$$y^3+py+q=0, \qquad (48)$$

для чего делаем замену $x=y-\frac{r}{3},\ p=-\frac{r^2}{3},\ q=2\left(\frac{r}{3}\right)^3+t\,,$

где $p=-0.130208$; $q=-0.294416.$

Тогда уравнение (48) принимает вид:

$$y^3-0.13028y-0.294416=0\,. \qquad (49)$$

В этом случае корни уравнения (49) определяются по формулам:

$$y_1=u+v,$$

$$y_2=-\frac{u+v}{2}+\frac{u-v}{2}i\sqrt{3};\quad y_3=-\frac{u+v}{2}-\frac{u-v}{2}i\sqrt{3};$$

где $u=\sqrt[3]{-\left(\frac{q}{2}\right)+\sqrt{D}},\quad v=\sqrt[3]{-\left(\frac{q}{2}\right)-\sqrt{D}},\quad D=\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2.$

Корни уравнения y_2 и y_3 не подходят по смыслу задачи, т.к. являются комплексными числами. Вычисляем значения D, u и v:

$$D=\left(\frac{-0.130208}{3}\right)^3+\left(\frac{0.294416}{2}\right)^2=0.0215884\,;$$

$$u=\sqrt[3]{\frac{0.294416}{2}+\sqrt{0.0215884}}=0.665044\,;$$

$$v=\sqrt[3]{\frac{0.294416}{2}-\sqrt{0.0215884}}=0.065265\,.$$

Тогда корень уравнения (49)

$y_1 = 0.665044 + 0.065265 = 0.770309$, а

$\sin\alpha = x = 0.770309 - \dfrac{0.625}{3} = 0.56197567$, откуда $\alpha = 34.19°$.

При данном значении угла α *S* будет максимальной, но это еще не значит что при этом значении угла α будет максимальной дальность полета *L* снаряда. Расчет по формуле (44) дальности полета при k = 0,004, V_0 = 800 м/с показывает, что $L_{\max}$ имеет место при α = 38,8° и составляет 28862,5 м, в то время как при α = 34,19° она равна 28540,6 м.

Заключение

В результате проведенных теоретических исследований движения артиллерийского снаряда получен ряд аналитических зависимостей, характеризующих основные параметры движения снаряда в безвоздушном пространстве и с учетом сопротивления воздуха. Приведены формулы для определения дальности полета снаряда в зависимости от угла наклона ствола орудия к горизонту и определен оптимальный угол при стрельбе в горах без учета сопротивления воздуха, а также произведен расчет угла наклона, при котором дальность полета снаряда с учетом сопротивления воздуха будет максимальной.

Литература

1. Наставление по стрелковому делу. Воениздат, 1985, Москва, К-160, редактор В.М. Чайка.
2. Курс стрельб из стрелкового оружия, боевых машин и танков сухопутных войск, книга первая. Москва, “военное издательство”,1984г.
3. Справочник по высшей математике. М.Я. Выгодский.-М.:ООО”Издательство Астрель”:”Издательство АСТ”, 2002.-992с.:ил.
4. Справочник по высшей математике для инженеров и учащихся втузов. Бранштейн И.Н.:,Семендяев К.А.-М.:Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1984.
5. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. Ч 2.Динамика: Учебник для техн. Вузов. -6-е изд. испр.-М.: Высш. шк.,1984-423с., ил.
6. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. –М:”Наука”, 1981.-480с.