Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ ПОЛИТЕХНИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

Кафедра инженерной математики

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Программа, методические указания и контрольные задания
для студентов-заочников инженерных и
инженерно-экономических специальностей
приборостроительного факультета

В 2-х частях

Часть II

Минск 2001

УДК

Данное издание предназначено для студентов заочной формы обучения при самостоятельном изучении курса «Высшая математика».

Часть 11 содержит контрольные задания (5-8 контрольные работы и образцы их решения) для студентов-заочников инженерных и инженерно-экономических специальностей приборостроительного факультета.

Составители:
В.А.Ибрагимов, С.В.Стрельцов,
А.Н.Мелешко, Л.В.Бокуть

1. КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

1.1. Правила оформления контрольных работ

При выполнении работ необходимо:

1) указывать на титульном листе номер работы, название дисциплины, номер курса и название факультета, номер зачетной книжки, фамилию, имя и отчество, обратный адрес;

2) решения задач приводить в порядке, указанном в задании;

3) перед каждым решением указывать полный номер задачи (например, 4.2.17 - четвертая работа, задание 2, вариант 17) и ее условие согласно заданию;

4) решения приводятся с необходимыми краткими пояснениями, крупным и разборчивым почерком;

5) после каждого решения оставлять место для возможных замечаний рецензента;

6) незачтенные работы не оформлять заново (если на необходимость этого не указано рецензентом). Исправленные решения задач приводятся в конце работы.

При несоблюдении указанных требований работа не рецензируется.

Прорецензированные и зачтенные контрольные работы вместе со всеми исправлениями и дополнениями, сделанными по требованию рецензента, следует сохранять. Без предъявления зачтенных контрольных работ студент не допускается к сдаче зачета и экзамена.

1.2. Выбор варианта контрольной работы

Номер варианта для каждой задачи выбирается по двум последним цифрам номера зачетной книжки. Если это число превышает 30, то из него вычитается число, кратное 30, так, чтобы остаток оказался меньше 30. Этот остаток есть номер варианта. Например, номер зачетной книжки оканчивается на 76. Тогда номер варианта задания равен

$$76-2*30=16.$$

Примечание. Количество и содержание заданий контрольных работ, выполняемых в каждом семестре, определяется студентам на установочной сессии.

1.3. ЗАДАНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Контрольная работа №5

"Дифференциальные уравнения"

Задание 5.1.

Найти общее решение:

1. $\left(y - x^2 y\right)dy + \left(y^2 x + x\right) dx = 0$
2. $\left(1 + 2y\right) x\, dx + \left(1 + x^2\right) dy = 0$
3. $x\, y \left(1 + x^2\right) y' = 1 + y^2$
4. $\sec^2 x\ \operatorname{tg} y\ dx + \sec^2 y\ \operatorname{tg} x\ dy = 0$
5. $e^y \left(y' + 1\right) = 1$
6. $xy' + y = y^2$
7. $\left(\sqrt{x\, y} - \sqrt{x}\right) dy + y\, dx = 0$
8. $\left(1 + y^2\right) dx - x\, y\, dy = 0$
9. $y' \sin x = y \ln y$
10. $\left(2x + 1\right) dy + y^2 dx = 0$
11. $\left(1 + e^x\right) y\, y' = e^x$
12. $y' = 2\sqrt{y} \ln x$
13. $y = \dfrac{1}{\sin^2 x} + \cos 3x$
14. $e^y \left(1 + x^2\right) dy - 2x \left(1 + e^y\right) dx = 0$
15. $3 e^x\ \operatorname{tg} y\ dx + \dfrac{1 - e^x}{\cos^2 y}\ dy = 0$
16. $y\left(1 + x^2\right) y' = 1 + y^2$
17. $y e^{2x} dx - \left(1 + e^{2x}\right) dy = 0$
18. $xy' = \dfrac{y}{\ln^2 x}$
19. $\left(y' + 1\right) e^y = 1$
20. $xy' = \dfrac{y}{\ln x}$
21. $\dfrac{dx}{\cos^2 x\ \cos y} = -\operatorname{ctg} x\ \sin y\ dy$
22. $\left(1 + x^2\right) y' + y\sqrt{1 + x^2} = xy$
23. $\sin x\ \sin y\ dx + \cos x\ \cos y\, dy = 0$
24. $x\sqrt{1 + y^2} + y\sqrt{1 + x^2}\ y' = 0$

25. $y' = \dfrac{x y^2 + x}{x^2 y - y}$

26. $y' \operatorname{tg} x - y = 1$

27. $y' = y^{2/3}$

28. $y \sin \dfrac{x}{2}\, dx - \cos \dfrac{x}{2}\, dy = 0$

29. $x y' = y \ln y$

30. $y' = (2y+1) \operatorname{ctg} x$

Задание 5.2.

Найти общее решение:

1. $\left(y^2 - 3x^2\right) dy + 2xy\, dx = 0$

2. $\left(y - x y'\right)^2 = x^2 + y^2$

3. $x y' = x \sin \dfrac{y}{x} + y$

4. $\left(x^2 + x y\right) y' = x \sqrt{x^2 - y^2} + x y + y^2$

5. $\dfrac{dx}{x^2 + xy} = \dfrac{dy}{2y^2 - xy}$

6. $\left(xy' - y\right) \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} = x$

7. $x y' = y\left(1 + \ln \dfrac{y}{x}\right)$

8. $\left(\sqrt{x y} - x\right) dy + y\, dx = 0$

9. $y' = \dfrac{y}{x}\left(1 + \ln y - \ln x\right)$

10. $x y' \cos \dfrac{y}{x} = y \cos \dfrac{y}{x} - x$

11. $x^2 - y^2 + 2 x y y' = 0$

12. $y' = e^{-y/x} + \dfrac{y}{x}$

13. $y - x y' = x \sec \dfrac{y}{x}$

14. $\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right) dx - x\, dy = 0$

15. $\left(1 + e^{x/y}\right) dx + e^{x/y}\left(1 - \dfrac{x}{y}\right) dy = 0$

16. $x y' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$

17. $y - 2x = (x + y) y'$

18. $\dfrac{dx}{xy - x^2} = \dfrac{dy}{2y^2 - xy}$

19. $y - x y' = x \operatorname{cosec} \dfrac{y}{x}$

20. $x y' - y + x \operatorname{tg} \dfrac{y}{x} = 0$

21. $x\left(\ln x-\ln y\right)dy-y\,dx=0$

22. $x\,y'-x\,\mathrm{ctg}\,\frac{y}{x}=y-x\sin\frac{y}{x}$

23. $y^2+x^2y'=x\,y\,y'$

24. $x\,y'=y\ln\frac{y}{x}$

25. $y-x\,y'=x\cos^2\frac{y}{x}$

26. $\left(1+3e^{\frac{3y}{x}}\right)dy+e^{\frac{3y}{x}}\left(1-3\frac{y}{x}\right)dx=0$

27. $x\,y'-y=x\,\mathrm{ctg}\frac{y}{x}$

28. $x\,y^2\,dy=\left(x^3+y^3\right)dx$

29. $x-y=\left(x+3y\right)y'$

30. $\left(x^2-y^2\right)dx+5\,x\,y\,dy=0$

Задание 5.3

Найти общее решение:

1. $\left(x^2+1\right)y'+4\,x\,y=1$

2. $y'\left(1+x\right)+y+x^2=0$

3. $y'=a\sin x+b\,y$

4. $y'+2\,x\,y=2\,x\,e^{-x^2}$

5. $x\,dy-2\,y\,dx=x^3\ln x\,dx$

6. $y'+\frac{1}{x-y^2}=0$

7. $e^{x^2}y'+2\,x\,y\,e^{x^2}=x\sin x$

8. $x\,e^x\,y'+y\,e^x=1$

9. $\left(2\,y\ln y+y-x\right)y'=y$

10. $y'=\frac{1}{x\cos y+\sin 2y}$

11. $y'-y\,\mathrm{tg}\,x=\frac{1}{\cos x}$

12. $y'-\frac{y}{\sin x\cos x}=-\frac{1}{\sin x}-\sin x$

13. $\left(1+x^2\right)y'+x\,y=1$

14. $y'-\frac{12\,y}{x+1}=e^x\left(x+1\right)^{12}$

15. $\left(1+y\right)dx=\left(y+x\right)dy$

16. $x\,y'+y=\ln x+1$

17. $\left(1-x\right)\left(y'+y\right)=e^{-x}$

18. $x\,y'-\frac{y}{x+1}=x$

19. $x\,y'+y=e^{2x}$

20. $\left(x^4+y\right)dx-x\,dy=0$

21. $x y' + y = \frac{1}{x} \ln x$

22. $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^3 x}$

23. $y' + 3x^2 y = x^2 e^{-x^3}$

24. $y' - y = x + 1$

25. $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{x}{\cos x}$

26. $y' - \frac{y}{x} = x \cos 3x$

27. $x y' + y = \frac{\ln x}{x}$

28. $\left(1 - x^2\right) y' - x y - 3 = 0$

29. $y' - \frac{3y}{x} = \frac{x+1}{x}$

30. $y' + y \operatorname{tg} x = x \operatorname{tg} x + 1$

Задание 5.4.

Найти общее решение:

1. $e^{y} dx + \left(x e^{y} - 2y\right) dy = 0$

2. $\left(y^2 - 3x^2\right) dx + \left(\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} + 2xy + 5y^4\right) dy = 0$

3. $\left(\ln y - 2x\right) dx + \left(\frac{x}{y} - 2y\right) dy = 0$

4. $\left(\frac{\sin 2x}{y} + x\right) dx + \left(y - \frac{\sin^2 x}{y^2}\right) dy = 0$

5. $3x^2 e^{y} + \left(x^3 e^{y} - 1\right) y' = 0$

6. $x y' \cos y + \sin y = 0$

7. $\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) dx - \frac{2y}{x} dy = 0$

8. $\left(\sin 2y - y \operatorname{tg} x\right) dx + \left(2x \cos 2y + \ln \cos x + 2y\right) dy = 0$

9. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{y} + \frac{x}{y^2}\right) dy = 0$

10. $\left(3x \sin y + 1\right) dx + \left(\frac{3}{2} x^2 \cos y + 3\right) dy = 0$

11. $\left(\frac{xy}{\sqrt{1+x^2}} + 2xy - \frac{y}{x}\right) dx + \left(\sqrt{1+x^2} + x^2 - \ln x\right) dy = 0$

12. $y x^{y-1}\, dx + x^{y} \ln x\, dy = 0$

13. $\left(\arcsin y + 2 y e^{2x}\right) dx + \left(\dfrac{x}{\sqrt{1-y^2}} + e^{2x}\right) dy = 0$

14. $\left(y \cos x + 2 x y^2\right) dx + \left(\sin x - \sin y + 2 x^2 y\right) dy = 0$

15. $\left(1 + \dfrac{y^2}{x^2}\right) dx - \dfrac{2y}{x}\, dy = 0$

16. $x^2 \cos 3y\, dx + \left(2 - x^3 \sin 3y\right) dy = 0$

17. $\left(1 + \dfrac{2x}{y^3}\right) dx + \left(\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{3x^2}{y^4}\right) dy = 0$

18. $\left(1 + \dfrac{2x}{y^3}\right) dx + \left(\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{3x^2}{y^4}\right) dy = 0$

19. $\left(\operatorname{tg} y - 3x^2\right) dx + \dfrac{x}{\cos^2 y}\, dy = 0$

20. $\left(2 x e^{5y} + 1\right) dx + \left(5x^2 e^{5y} - 2 \sin 2y\right) dy = 0$

21. $\left(3x^2 y - \dfrac{4}{x^2}\right) dx + \left(\cos y + x^3\right) dy = 0$

22. $\left(\operatorname{arctg} x + y^2\right) dx + \left(\dfrac{y}{1+y^2} + 2xy\right) dy = 0$

23. $\sin 2y\, dx + \left(2x \cos 2y + 2e^{2y}\right) dy = 0$

24. $\left(\cos^2 y + 6x\right) dx + \left(1 - x \sin 2y\right) dy = 0$

25. $\left(\operatorname{ctg} y + 2x\right) dx - \left(\dfrac{x}{\sin^2 y} + 4y^3\right) dy = 0$

26. $\left(y^3 - \dfrac{4}{x^2}\right) dx + \left(3 x y^2 - \sin y\right) dy = 0$

27. $\left(2x\arcsin 2y+3ye^{3x}\right)dx+\left(e^{3x}+\dfrac{2x^2}{\sqrt{1-4y^2}}\right)dy=0$

28. $\left(\arcsin y+2ye^{2x}\right)dx+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-y^2}}+e^{2x}\right)dy=0$

29. $\left(\cos 2y+8x\right)dx-2x\sin 2y\,dy=0$

30. $\left(\operatorname{arctg} y+\dfrac{y}{1+x^2}\right)dx+\left(\dfrac{x}{1+y^2}+\operatorname{arctg} x\right)dy=0$

Задание 5.5.

Найти общее решение:

1. $\left(1+x^2\right)y''+\left(y'\right)^2+1=0$

2. $\left(1+x\right)y'=xy''$

3. $y''=x\sin x$

4. $y''=\dfrac{y'}{x}+\operatorname{tg}\dfrac{y'}{x}$

5. $xy''+y'=\ln x$

6. $y''+y'\operatorname{tg} x=\sin 2x$

7. $xy''-y'=x^2e^x$

8. $\left(1+x^2\right)y''+2xy'=x^3$

9. $y''=\dfrac{y'}{x}+x$

10. $xy''=y'\left(\ln y'-\ln x\right)$

11. $x^3y''+x^2y'=1$

12. $y''\left(1+x^2\right)+\left(y'\right)^2+1=0$

13. $xy''-y'=x^2e^x$

14. $2xy'y''=\left(y'\right)^2+1$

15. $y''x\ln x=y'$

16. $xy''-y'=e^x x^2$

17. $y''=y'+x$

18. $2xy'y''=\left(y'\right)^2+5$

19. $y''-\dfrac{2x}{1+x^2}y'=1+x^2$

20. $y''x-y'-x^2=0$

21. $\left(1+x^2\right)y^4+\left(y'\right)^2+1=0$

22. $xy''-y'=e^x x^2$

23. $\left(1+x^2\right)y'' + 2xy' = x^3$

24. $y'' x \ln x = y'$

25. $y''\left(e^x+1\right)+y' = 0$

26. $xy'' = y' + x \sin\frac{y'}{x}$

27. $\left(1-x^2\right)y'' + x\,y' = 2$

28. $x\,y'' = y'$

29. $y'' = y' + x$

30. $xy'' = y'\left(x+1\right)$

Задание 5.6.

Найти общее решение:

1. $yy'' - \left(y'\right)^2 = yy' \ln y$

2. $y'' + \frac{2}{1+y}\left(y'\right)^2 = 0$

3. $y\left(1-\ln y\right)y'' + \left(1+\ln y\right)\left(y'\right)^2 = 0$

4. $y'' \operatorname{tg} y = 2\left(y'\right)^2$

5. $1 + y'^2 = 2yy''$

6. $yy'' + y'^2 = y'^3$

7. $y'' + \left(y'\right)^2 + 1 = 0$

8. $yy'' - \left(y'\right)^2 + \left(y'\right)^3 = 0$

9. $2yy'' = \left(y'\right)^2$

10. $y'' = e^y$

11. $y^3 y'' = 1$

12. $yy'' - \left(y'\right)^2 = yy' \ln y$

13. $yy'' + \left(y'\right)^2 = 0$

14. $y'' \operatorname{ctg} y = 2y'^2$

15. $y'' = \sqrt{1+y'^2}$

16. $y'' \operatorname{ctg} y = 2y'^2$

17. $y'' + \frac{2}{1-y}y'^2 = 0$

18. $yy'' + \left(y'\right)^2 + 1 = 0$

19. $yy'' + y'^2 + 1 = 0$

20. $2yy'' = \left(1 + y'^2\right)$

21. $y'' \operatorname{tg} y - 2\left(y'\right)^2 = 0$

22. $2yy'' = 1 + y'^2$

23. $y'' y^3 = 1$

24. $y'' \operatorname{ctg} y = 3y'^{2}$

25. $y'' + \frac{2}{1-y}\left(y'\right)^{2} = 0$

26. $yy'' + \left(y'\right)^{2} = 0$

27. $y'' + \frac{3}{1-y}\left(y'\right)^{2} = 0$

28. $2yy'' = 1 + y'^{2}$

29. $y'^{2} + 2yy' = 0$

30. $2yy'' = y^{2} + y'^{2}$

Задание 5.7.

Решить задачу Коши:

1. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3, \quad y''(0) = 1$
2. $y''' - y' = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = 1$
3. $y'' - 2y' + y = 0, \quad y(2) = 1, \quad y'(2) = -2$
4. $y'' - 5y' + 6y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$
5. $y'' + y = 0, \quad y\left(\frac{\Pi}{2}\right) = 3, \quad y'\left(\frac{\Pi}{2}\right) = 2$
6. $y''' - 2y'' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = 4$
7. $y''' + y' = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -1$
8. $y''' + 2y'' + 10y' = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 1$
9. $y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -1$
10. $4y'' + 4y' + y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0$
11. $y'' - 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$
12. $y'' + 6y' + 13y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 4$
13. $y'' - 4y' + 13y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 9$
14. $y''' - 2y'' + 9y' - 18y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 4, \quad y''(0) = 17$
15. $y'' - 5y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$
16. $3y'' + y' - 2y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 1$

17. $y'' + y' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$

18. $y''' + y'' - 4y' - 4y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = 9$

19. $y''' + 2y'' + y' = 0, \quad y(0) = 9, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 7$

20. $y''' - 13y'' + 12y = 0, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = 10$

21. $y'' + 5y' + 6y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3$

22. $y'' + 2y' + 2 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$

23. $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3, \quad y''(0) = 7$

24. $y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -1$

25. $y'' + 4y' = 0, \quad y(0) = 7, \quad y'(0) = 8$

26. $y'' + 4y = 0, \quad y\left(\frac{\Pi}{2}\right) = 1, \quad y'\left(\frac{\Pi}{2}\right) = 0$

27. $y''' + 5y'' + 6y' = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -4, \quad y''(0) = 14$

28. $y''' - 2y'' + 4y' - 8y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 16$

29. $4y'' + 4y' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$

30. $y''' - y'' - y' + y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = 5$

Задание 5.8.

Найти общее решение:

1. $y'' + 3y' = x e^{2x} + x^2$

2. $y'' + y = \sin x - 2e^{-x}$

3. $y'' + 5y' + 6y = x e^{-x} + e^{-2x}$

4. $y''' + y'' = 6x + e^{-x}$

5. $2y'' + 5y' = \cos^2 x$

6. $y''' - 2y'' + y' = x^2 + e^x$

7. $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}\left(x^2 + x\right)$

8. $y'' - 3y' - 10y = \sin x + 3\cos x$

9. $y'''' + 2y''' + y'' = e^{-x} + x$

10. $y''' + y' = 1 + \cos x$

11. $y'' + y' = \cos^2 x + e^x + x^2$

12. $y'' - 4y' + 5y = x^2 e^x$

13. $y'' + 2y' - 3y = 2xe^{3x} + (x+1)e^{x}$ 14. $y'' + 2y' + y = xe^{-x} + x^2$

15. $y'' + y = x\cos x + \sin x$ 16. $y'' + 4y = x + \sin^2 x$

17. $y''' + y'' = xe^{2x} + x^2$ 18. $y'' - y = xe^{-x} + 5$

19. $y'' - y' = x^2 + 3e^{x}$ 20. $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x} + \frac{x}{2}$

21. $y'' - 3y' = x + \cos x$ 22. $y'' + 2y' + y = xe^{x} + e^{-x}$

23. $y'' - 2y' + 10y = \sin 2x + e^{x}$ 24. $y'' - 4y' + 5y = 4x\sin 3x + \cos 3x$

25. $y'' - 5y' + 4y = 4x^2 e^{2x}$ 26. $y'' + 2y' + y = xe^{-x} + 2x^2$

27. $y'' - 3y' + 2y = x\cos x$ 28. $y'' - 2y' - 3y = x\left(1 + e^{3x}\right)$

29. $y'' - 6y' + 13y = e^{2x} - 3\cos 2x$ 30. $y'' - 2y' + 5y = 2xe^{x} + \cos 2x$

Задание 5.9.

Найти общее решение:

1. $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$ 2. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x$

3. $y'' - y' = e^{2x}\cos e^{x}$ 4. $y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x^2}$

5. $y'' - 4y' + 5y = \frac{e^{2x}}{\cos x}$ 6. $y'' + y = \operatorname{ctg} x$

7. $y'' + y' = \frac{1}{\cos x}$ 8. $y'' + y = \operatorname{tg}^2 x$

9. $y'' + 2y' + 2y = \frac{1}{e^{x}\cos x}$ 10. $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}}$

11. $y'' - 2y' + y = \frac{e^{x}}{\sqrt{4 - x^2}}$ 12. $y'' + y = \operatorname{ctg} x$

13. $y'' - 2y' + y = x^{-2} e^{x}$

14. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^{3x}}{1+e^{2x}}$

15. $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{x^3}$

16. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^{x}}{\sin^2 x}$

17. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin^2 x}$

18. $y'' + y = \operatorname{ctg} x$

19. $y'' + y = 24 \sin^4 x$

20. $y'' - y = \dfrac{1}{e^{x} + 3}$

21. $y'' + y = \dfrac{x}{\sin^3 x}$

22. $y'' + y = \dfrac{3}{\sin^2 x}$

23. $y'' + y = \operatorname{tg} x \sec x$

24. $y'' - y' = \dfrac{e^{x}}{e^{2x} - 1}$

25. $y'' + y = \operatorname{tg}^2 x$

26. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{e^{x} + 1}$

27. $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{1+x}$

28. $y'' - 6y' + 9y = \dfrac{e^{3x}}{\sqrt{1+x^2}}$

29. $y'' + y = 3 \operatorname{ctg}^2 x$

30. $4y'' + 4y' + y = \dfrac{e^{-x/2} \ln x}{x}$

Задание 5.10.

Методом исключения найти общее решение системы:

1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{x}{t} \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{t^2 + x^2}{t\,y} \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} \\ \dfrac{dz}{dx} = y + z \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + 2e^{t} \\ \dfrac{dy}{dt} = x + t^{2} \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - 5\cos t \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 4y + e^{-2t} \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y - 3e^{-2t} \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y + \operatorname{tg}^{2} t - 1 \\ \dfrac{dy}{dt} = x + \operatorname{tg} t \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y - x + 5e^{t}\sin t \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = y - 2x + 18t \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 5\sin t \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + e^{t} \\ \dfrac{dy}{dt} = z - e^{t} \\ \dfrac{dz}{dt} = x \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2e^{t} \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y + 2e^{t} \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y - 3e^{4t} \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y - x \\ \dfrac{dy}{dt} = 4y - 3x + e^{3t} \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + 18t \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - y \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y - 3x \\ \dfrac{dy}{dt} = y - 2x + t \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y + e^{2t} \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y \\ \dfrac{dz}{dt} = -z \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -5y + 2z + 40e^{t} \\ \dfrac{dz}{dt} = y - 6z + 9e^{-t} \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - \cos t \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + \sin t \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y^2}{z} \\ \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{1}{2}y \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y - x + 1 \\ \dfrac{dy}{dt} = 3y - 2x \end{cases}$

21. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{x}{t} \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{t^2 + x^2}{ty} \end{cases}$

22. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 3y + \sin t \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y - 2\cos t \end{cases}$

23. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 3y + 5t \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 2y + 8e^{t} \end{cases}$

24. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 4y - 8 \\ \dfrac{dx}{dt} = 3x + 6y \end{cases}$

25. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 3y + 3e^{t} \end{cases}$

26. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + y - 36t \\ \dfrac{dy}{dt} = y - 2x - 2e^{t} \end{cases}$

27. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - 3y + 2e^{t} \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y + 5e^{-t} \end{cases}$

28. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + e^{t} \\ \dfrac{dy}{dt} = z - e^{t} \\ \dfrac{dz}{dt} = x \end{cases}$

29. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = y + z \\ \dfrac{dz}{dt} = -10y - z + t \end{cases}$

30. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y + t \end{cases}$

Задание 5.11

Найти общее решение систем дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A\,X, \qquad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

а) методом характеристического уравнения
б) с помощью операционного исчисления

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 2. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ 3. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 12 & -4 & -12 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ 5. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 6. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

7. $A = \begin{pmatrix} 3 & 12 & -4 \\ -1 & -3 & -1 \\ -1 & -12 & 6 \end{pmatrix}$ 8. $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 6 & -6 & 5 \end{pmatrix}$ 9. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

10. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ 11. $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 8 & -4 & -8 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ 12. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

13. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -6 \end{pmatrix}$ 14. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 15. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

16. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ 17. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 18. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

19. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ 20. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ 21. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

22. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ 23. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 10 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ 24. $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

25. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ 26. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ 27. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

28. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 6 & -6 & 11 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ 29. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 30. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -8 & 1 & -7 \end{pmatrix}$

Контрольная работа № 6.

"Ряды"

Задание 6.1.

Исследовать на сходимость числовой ряд:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^n \frac{(n+2)!}{n^5}$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7n-1}{5^n (n+1)!}$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{8}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^7$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2n+1)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3^n}\right)$

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\frac{n}{2}}}{3^n}$

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (n+3)}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n+3)}$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n n^7$

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 7 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot (6n-5)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n+1)}$

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n(n+1)}{n^n}$

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n^n}$

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\sin\left(\frac{2\pi}{3^n}\right)$

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{\frac{n}{2}}}{n!}$

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n(n+3)!}$

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 6\cdot 11\cdot\ldots\cdot(5n-4)}{3\cdot 7\cdot 11\cdot\ldots\cdot(4n-1)}$

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+3)!}$

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3 \mathrm{tg}\left(\frac{2\pi}{5^n}\right)$

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+3)}{(n+1)!}$

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2(n+3)!}$

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n!}$

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{3\cdot 7\cdot 11\cdot\ldots\cdot(4n-1)}$

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (3n-1)\sin\left(\frac{\pi}{4^n}\right)$

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n!}$

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{\sqrt{n\cdot 7^n}}$

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4n-3)}{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}$

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{4\cdot n!}$

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 7\cdot 12\cdot\ldots\cdot(5n-3)}$

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)!}$

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^3}{(2\cdot n)!}$

29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n(2n-1)}$

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n\cdot 2^n}}$

Задание 6.2.

Исследовать на сходимость числовой ряд:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{10^n}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n}$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{5n-1}{5n}\right)^{n^2}$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{2n+1}\right)\right)^n$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(\ln(n+2))^n}$

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin\left(\dfrac{1}{2^n}\right)\right)^{3n}$

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n^2+5n+8}{3\cdot n^2-2}\right)^n$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{5^n}\right)\right)^n$

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}}{2^n}$

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(\ln(n+1))^{2n}}$

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{5^n}\right)\right)^{3n}$

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(\ln(n+3))^n}$

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{3\cdot n^2+4n+5}{6\cdot n^2-3n-1}\right)^{n^2}$

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n-1}{2n}\right)^{n^2}$

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sin\left(\dfrac{\pi}{n^3}\right)\right)^{2n}$

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+1}{4n}\right)^{3n}$

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4^n}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}}$

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(\ln(n+1))^{3n}}$

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{3n-1}{3n}\right)^{n^2}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\left(\frac{1}{3^n}\right)\right)^n$

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n}\right)^{n^2}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3\cdot n^2-n-1}{7\cdot n^2+3n+4}\right)^n$

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\left(\frac{1}{3n}\right)\right)^{2n}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n}\right)^{5n}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{5^n}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)\right)^n$

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\left(\frac{\pi}{5n+1}\right)\right)^n$

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2n-1}\right)\right)^{2n}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{(\ln(n+5))^2}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\left(\frac{n+3}{2n+5}\right)\right)^n$

Задание 6.3.

Исследовать на сходимость числовой ряд:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{4\cdot n^2+1}\right)^2$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+2)\cdot(\ln(3n+2))}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\cdot(\ln(2n+1))^3}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{(4n+5)^3}}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+4)\cdot(\ln(3n+4))^2}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{(7n-5)^5}}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7+n}{49+n^2}\right)^2$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)\cdot\ln(3n-1)}$

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-2)\cdot \ln(5n-2)}$

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6+n}{36+n^2}$

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[7]{(3+7n)^{10}}}$

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{(3n-1)^4}}$

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\cdot \ln(n+2)}$

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(10n+5)\cdot \ln(10n+5)}$

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[6]{(2n+3)^7}}$

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5+n}{25+n^2}$

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)\cdot \ln(n+3)}$

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+2n)\cdot (\ln(3+2n))^5}$

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[8]{(4+9n)^5}}$

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(9n-4)\cdot (\ln(9n-4))^2}$

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3+n}{9+n^2-2n}$

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n+8)(\ln(5n+8))^3}$

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[8]{(7n-5)^3}}$

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4)\cdot \ln(n+4)}$

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+8n)\cdot (\ln(3+8n))^3}$

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{4n-3}\right)^3}$

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(10n+3)\cdot (\ln(10n+3))^2}$

29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2+n}{4+n^2-n}$

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+5)\cdot \ln(n+5)}$

Задание 6.4.

Исследовать на сходимость числовой ряд:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+2}}$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^5}}$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n+2}$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+3n}}$

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+2)}$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1}$

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3^n}\right)$

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n\cdot(n+1)}$

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{n^2+1}$

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+3)}$

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3\cdot n^2+5}$

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3\cdot n^2-n+1}$

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2^{n-1}}\right)$

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n\cdot(n+4)}$

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{2\pi}{3^n}\right)$

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)}$

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 3^{2n}}$

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\cdot 3^n}$

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n\cdot\sqrt[3]{n}}$

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2n-1}\right)$

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+3}$

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)$

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\cdot n^2+5}$

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}$

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+4}$

29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5\cdot n^2+3}$

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+6)}$

Задание 6.5.

Исследовать на сходимость числовой ряд:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+3)^3}$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n\cdot(n-1)}}$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2\cdot n^2+1}$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot(n+1)}{3^n}$
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1+2^{2n}}$
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(\ln(n))^7}$
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)!}$
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\left(n^2+3\right)}$
9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{7^2}$
10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-1)(6n+3)}$
11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$
12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}\left(\frac{n}{n+3}\right)^{n^2}$
13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+n}$
14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2}$
15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot n!}{3^n}$
16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^5}$
17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot\sqrt{n+1}}$
18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n!}$
19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+5}$
20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n\cdot(n+3)}}$
21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+1}$
22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{(2\cdot n)!}$
23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(7n-1)}$
24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$
25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{7n+1}}$
26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot(n+1)}{9^n}$
27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n-7}{3\cdot n^4+5n-2}$
28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)(4n+5)}$
29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+7}\right)^{n^2}$
30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{(n-1)!}$

Задание 6.6.

Исследовать на сходимость, абсолютную или условную сходимость знакочередующийся ряд:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\cdot 3^n}$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{\sqrt{2n+1}}$
3. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln n}$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cdot n}{6n+5}$
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{\sqrt[4]{n^5}}$
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)n}$
9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$
10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot\sqrt[3]{n}}$
11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cdot(2n+1)}{n\cdot(n+1)}$
12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}\cdot(n+5)}{3^n}$
13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cdot n}{3n-1}$
14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{2n-1}$
15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{(2n-1)\cdot 3^n}$
16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n}$
17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cdot(2n+1)}{n}$
18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{3\cdot n^2+1}$
19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n\cdot\sqrt{n}}$
20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 5^n}$
21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$
22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{\ln(n+1)}$
23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cdot(2n+1)}{5n(n+1)}$
24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$
25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cdot 3^n}{(2n+1)^n}$
26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+5}}$
27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}\cdot(n+5)}{3^n}$
28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+7)^n}$
29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(3n-2)!}$
30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(3n+4)}$

Задание 6.7.

Исследовать на сходимость, абсолютную или условную сходимость знакочередующийся ряд:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^n}$

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^n}{n^4}$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2n-1}{3^n}$

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \left(n^2+1\right)}{n^3}$

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+1}$

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(\ln(n+1))^n}$

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot (\ln n)^2}$

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot \ln n}$

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n}{(n+1)!}$

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{12^n}$

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}$

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{9n-1}$

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot (2n+1)}{n(n+1)}$

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(5n+1)^n}$

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \ln n}{7^n}$

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (n+1)}{n^2}$

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n^3}{n^2+1}$

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{8^n}\right)$

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3^n}{2n+2}$

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}-\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)(n+4)}$

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\sin\left(\frac{\pi}{6n}\right)\right)^n$

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot(2n+1)}{n(n+2)}$

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(n-3)}{n^2-1}$

29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}\cdot\sqrt[5]{(n+1)^3}}$

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-4n}{5n+1}\right)^n$

Задание 6.8.

Найти область сходимости ряда:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n^2+1}.$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{2^{n-1}\cdot 3^n}.$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{8^n}.$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}.$

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}.$

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{2n-1}.$

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{n^2+1}.$

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}.$

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{8^n\left(n^2+1\right)}.$

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n.$

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}.$

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^n x^n}{\sqrt{n}}.$

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{n^n}.$

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{5^{n+1}n}.$

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}.$

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(0.1)^n x^{2n}}{n}.$

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n(-2)^{n+1}}{3^{n+2}}$

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{5^n}.$

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{(2n+1)^2\sqrt{3^n}}.$

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}.$

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{\sqrt{n}}$.

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^{n+1}}{n^3}$.

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt[3]{n}}$.

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n \sqrt{3n-1}}$.

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{\sqrt{2n-1}}$.

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2 x^n}{2^n}$.

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{6^n \sqrt[3]{n}}$.

29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg} \frac{1}{n}$.

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \frac{x^n}{5^n}$.

Задание 6.9.

Найти область сходимости ряда:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^n \ln(1+1/n)}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2^n}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+8)^n}{n^2}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2+x)^n$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n (n+3)}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{\sqrt[3]{n+1}\sqrt{n^2+1}}$.

9. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{n^2} (x+2)^n$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n \ln(n+1)}$.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x+10)^n}{n^n}$.

12. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{(n+1)^n}$.

13. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\ln^3(n+1)\cdot(x+1)^n}}{n+1}$.

14. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (2-x)^n \sin \frac{\pi}{2^n}$.

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3-2x)^n}{n-\ln^2 n}$.

16. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}}$.

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^2}$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(2n-1)\cdot 2^n}$.

19. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt[3]{n+2}\cdot(x-2)^n}{n+1}$.

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n-1}}{2n\cdot 4^n}$.

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^n(x+1)^n}{2^{n-1}n^n}$.

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^2}$.

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n^n}$.

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-2)^{2n}}{2n}$.

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n\cdot 9^n}$.

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-2)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$.

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 5^n}$.

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n-1)^{2n}(x-1)^n}{(3n-2)^{2n}}$.

29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^{2n}}{(n+1)\ln(n+1)}$.

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-5)^n}{n\cdot 3^n}$.

Задание 6.10.

Разложить в ряд Маклорена или в ряд Тейлора функцию f(x) в окрестности указанной точки x_0. Указать область сходимости полученного ряда.

1. $f(x)=\cos 5x$, $x_0=0$
2. $f(x)=x^3 \operatorname{arctg} x$, $x_0=0$
3. $f(x)=\sin x^2$, $x_0=0$
4. $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x}$, $x_0=0$
5. $f(x)=\cos\dfrac{2x^3}{3}$, $x_0=0$
6. $f(x)=\dfrac{2}{1-3x^2}$, $x_0=0$
7. $f(x)=e^{3x}$, $x_0=0$
8. $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$, $x_0=0$

9. $f(x)=ch(2x^3)$, $x_0=0$

10. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{e^x}}$, $x_0=0$

11. $f(x)=sh\, x$, $x_0=0$

12. $f(x)=e^{-x^4}$, $x_0=0$

13. $f(x)=2^{-x^2}$, $x_0=0$

14. $f(x)=5^x$, $x_0=0$

15. $f(x)=x\cos\sqrt{x}$, $x_0=0$

16. $f(x)=\dfrac{\sin 3x}{x}$, $x_0=0$

17. $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x_0=-2$

18. $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$, $x_0=-2$

19. $f(x)=e^x$, $x_0=1$

20. $f(x)=\dfrac{1}{2x+5}$, $x_0=3$

21. $f(x)=\dfrac{1}{(x-3)^2}$, $x_0=1$

22. $f(x)=\sin\dfrac{\pi x}{4}$, $x_0=2$

23. $f(x)=\ln(5x+3)$, $x_0=-2/5$

24. $f(x)=\ln\dfrac{1}{x^2-2x+2}$, $x_0=1$

25. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4+x}}$, $x_0=-3$

26. $f(x)=\cos x$, $x_0=\dfrac{\pi}{4}$

27. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$, $x_0=2$

28. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4x+3}$, $x_0=2$

29. $f(x)=\sin x$, $x_0=\pi/2$

30. $f(x)=\ln(5x-4)$, $x_0=1$

Задание 6.11.

Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить указанный определенный интеграл с точностью до 0.001.

1. $\int\limits_0^{0.25}\ln(1+\sqrt{x})\,dx$

2. $\int\limits_0^{1}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x^2}{2}\right)dx.$

3. $\int\limits_0^{0.2}\sqrt{x}\,e^{-x}dx.$

4. $\int\limits_0^{0.5}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}dx.$

5. $\int\limits_0^{0.2}\sqrt{x}\cos x\,dx.$

6. $\int\limits_0^{1}x^2\sin x\,dx.$

7. $\int\limits_0^1 e^{-x^2/2}\,dx.$

8. $\int\limits_0^{0.5} \frac{dx}{1+x^5}.$

9. $\int\limits_0^1 \sqrt[3]{1+x^2/4}\,dx.$

10. $\int\limits_0^{0.1} \frac{e^{-x}-1}{x}dx$

11. $\int\limits_0^{0.5} x^2\cos 3x\,dx.$

12. $\int\limits_0^{0.4} \sqrt{x}\,e^{-x/4}dx.$

13. $\int\limits_{0.3}^{0.5} \frac{1+\cos x}{x^2}\,dx.$

14. $\int\limits_0^1 \sin x^2\,dx.$

15. $\int\limits_0^{0.1} \frac{\ln(1+x)}{x}dx$

16. $\int\limits_0^1 \sqrt{x}\sin x\,dx.$

17. $\int\limits_0^{25} \frac{e^{-2x^2}}{\sqrt{x}}dx.$

18. $\int\limits_0^1 \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)dx.$

19. $\int\limits_0^{0.5} \frac{x-\operatorname{arctg}x}{x^2}dx.$

20. $\int\limits_0^{0.5} e^{-x^2}\,dx.$

21. $\int\limits_0^{0.5} \sqrt{1+x^3}\,dx.$

22. $\int\limits_0^{0.5} \ln(1+x^3)\,dx.$

23. $\int\limits_0^{0.5} \sqrt{1+x^2}\,dx.$

24. $\int\limits_0^{0.5} \frac{\sin x^2}{x}dx$

25. $\int\limits_0^{0.5} \ln\left(1+x^2\right)dx$

26. $\int\limits_0^{0.5} \frac{\operatorname{arctg}x^2}{x^2}\,dx$

27. $\int\limits_0^{0.8} \frac{1-\cos x}{x}\,dx$

28. $\int\limits_0^1 \cos\sqrt[3]{x}\,dx$

29. $\int\limits_0^1 \cos\frac{x^2}{4}dx$

30. $\int\limits_0^{0.5} \sqrt{1+x^3}\,dx$

Задание 6.12.

Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом 2π функцию f(x), заданную на промежутке $[-\pi;\pi]$.

1. *f(x)*= $\begin{cases} 0; & -\pi \le x < 0 \\ x-1; & 0 \le x \le \pi \end{cases}.$

2. *f(x)*= $\begin{cases} 2x-1; & -\pi \le x \le 0 \\ 0; & 0 < x \le \pi \end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases} 0; & -\pi \le x < 0 \\ x+2; & 0 \le x \le \pi \end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases} -x+\frac{1}{2}; & -\pi \le x \le 0 \\ 0; & 0 < x \le \pi \end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases} 0; & -\pi \le x < 0 \\ \frac{x}{2}+1; & 0 \le x \le \pi \end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases} 2x+3; & -\pi \le x \le 0 \\ 0; & 0 < x \le \pi \end{cases}$

7. $f(x)=\begin{cases} 0; & -\pi \le x < 0 \\ 3-x; & 0 \le x \le \pi \end{cases}$

8. $f(x)=\begin{cases} x-2; & -\pi \le x \le 0 \\ 0; & 0 < x \le \pi \end{cases}$

9. $f(x)=\begin{cases} 0; & -\pi \le x < 0 \\ 4x-3; & 0 \le x \le \pi \end{cases}$

10. $f(x)=\begin{cases} 5-x; & -\pi \le x \le 0 \\ 0; & 0 < x \le \pi \end{cases}$

11. $f(x)=\begin{cases} 0; & -\pi \le x < 0 \\ 3x-1; & 0 \le x \le \pi \end{cases}$

12. $f(x)=\begin{cases} 3-2x; & -\pi \le x \le 0 \\ 0; & 0 < x \le \pi \end{cases}$

13. $f(x)=\begin{cases} 0; & -\pi \le x < 0 \\ \frac{\pi-x}{2}; & 0 \le x \le \pi \end{cases}$

14. $f(x)=\begin{cases} 5x+1; & -\pi \le x \le 0 \\ 0; & 0 < x \le \pi \end{cases}$

15. $f(x)=\begin{cases} 0; & -\pi \le x < 0 \\ 1-4x; & 0 \le x \le \pi \end{cases}$

16. $f(x)=\begin{cases} 3x+2; & -\pi \le x \le 0 \\ 0; & 0 < x \le \pi \end{cases}$

17. $f(x)=\begin{cases} 0; & -\pi \le x \le 0 \\ 4-2x; & 0 < x \le \pi \end{cases}$

18. $f(x)=\begin{cases} x+\frac{\pi}{2}; & -\pi \le x \le 0 \\ 0; & 0 < x \le \pi \end{cases}$

19. $f(x)=\begin{cases} 0; & -\pi \le x \le 0 \\ 6x-5; & 0 < x \le \pi \end{cases}$

20. $f(x)=\begin{cases} 7-3x; & -\pi \le x \le 0 \\ 0; & 0 < x \le \pi \end{cases}$

21. $f(x)=\begin{cases} 0; & -\pi \le x \le 0 \\ \frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}; & 0 < x \le \pi \end{cases}$

22. $f(x)=\begin{cases} 6x-2; & -\pi \le x \le 0 \\ 0; & 0 < x \le \pi \end{cases}$

23. $f(x)=\begin{cases} 0; & -\pi \le x \le 0 \\ 4-9x; & 0 < x \le \pi \end{cases}$

24. $f(x)=\begin{cases} \frac{x}{3}-3; & -\pi \le x \le 0 \\ 0; & 0 < x \le \pi \end{cases}$

25. $f(x)=\begin{cases} 0; & -\pi \le x \le 0 \\ 10x-3; & 0 < x \le \pi \end{cases}$

26. $f(x)=\begin{cases} 1-\frac{x}{4}; & -\pi \le x \le 0 \\ 0; & 0 < x \le \pi \end{cases}$

27. f(x)= $\begin{cases} 0; & -\pi \le x \le 0 \\ \frac{x}{5}-2; & 0 < x \le \pi \end{cases}$

28. f(x)= $\begin{cases} 2x-11; & -\pi \le x \le 0 \\ 0; & 0 < x \le \pi \end{cases}$

29. f(x)= $\begin{cases} 0; & -\pi \le x \le 0 \\ 3-8x; & 0 < x \le \pi \end{cases}$

30. f(x)= $\begin{cases} 7x-1; & -\pi \le x \le 0 \\ 0; & 0 < x \le \pi \end{cases}$

Задание 6.13.

Разложить в ряд Фурье функцию f (x), заданную на интервале (0; π), продолжив (доопределив) ее чётным и нечетным образом. Построить графики для каждого продолжения.

1.	$f(x) = e^{x}$	2.	$f(x) = x^2$	3.	$f(x) = x^2$
4.	$f(x) = \operatorname{ch} x$	5.	$f(x) = e^{-x}$	6.	$f(x) = (x-1)^2$
7.	$f(x) = 3^{-x/2}$	8.	$f(x) = \operatorname{sh} 2x$	9.	$f(x) = e^{2x}$
10.	$f(x) = (x-2)^2$	11.	$f(x) = 4^{x/3}$	12.	$f(x) = \operatorname{ch} x/2$
13.	$f(x) = e^{4x}$	14.	$f(x) = (x+1)^2$	15.	$f(x) = 5^{-x}$
16.	$f(x) = \operatorname{sh} 3x$	17.	$f(x) = e^{-x/4}$	18.	$f(x) = (2x-1)^2$
19.	$f(x) = 6^{x/4}$	20.	$f(x) = \operatorname{ch} 4x$	21.	$f(x) = e^{-3x}$
22.	$f(x) = x^2 + 1$	23.	$f(x) = 7^{-x/7}$	24.	$f(x) = \operatorname{sh} x/5$
25.	$f(x) = e^{-2x/3}$	26.	$f(x) = (x-\pi)^2$	27.	$f(x) = 10^{-x}$
28.	$f(x) = \operatorname{ch} x/\pi$	29.	$f(x) = e^{4x/3}$	30.	$f(x) = (x-5)^2$

Задание 6.14.

Разложить в ряд Фурье в указанном интервале периодическую функцию f (x) с периодом $\omega = 21$.

1. $f(x) = |x|, \ -1 < x < 1, \ I = 1$

2. $f(x) = 2x, \ -1 < x < 1, \ I = 1$

3. $f(x) = e^{x}, \ -2 < x < 2, \ I = 2$

4. $f(x) = |x| - 5, \ -2 < x < 2, \ I = 2$

5. $f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \le x < 0 \\ x, & 0 < x \le 1 \end{cases}, \ I = 1$

6. $f(x) = x, \ 1 < x < 3, \ I = 1$

7. $f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \le x < 0 \\ x, & 0 \le x < 1 \\ 2-x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}, \ I = 2$

8. $f(x) = 10 - x, \ -5 < x < 5, \ I = 5$

9. $f(x)=\begin{cases} 1, & -1\le x<0 \\ 1/2, & x=0 \\ x, & 0<x\le 1 \end{cases}, \ I=1$

10 $f(x)=5x-1,\ -5<x<5,\ I=5$

11 $f(x)=\begin{cases} 0, & -3<x\le 0 \\ x, & 0<x<3 \end{cases}, \ I=3$

12 $f(x)=3-x,\ -2<x<2,\ I=2$

13 $f(x)=\begin{cases} 1, & 0<x<1 \\ -1, & 1<x<2 \end{cases}, \ I=1$

14 $f(x)=\begin{cases} 0, & -2<x<0 \\ 2, & 0<x<2 \end{cases}, \ I=2$

15 $f(x)=\begin{cases} x, & -3\le x\le 1 \\ 1, & 1<x<2 \\ 3-x, & 2\le x\le 3 \end{cases}, \ I=3$

16 $f(x)=2x-3, -3<x<3,\ I=3$

17 $f(x)=\begin{cases} 1, & -3<x<3/2 \\ -1, & 3/2<x<3 \end{cases}, \ I=3$

18 $f(x)=3-|x|, -5<x<5,\ I=5$

19 $f(x)=\begin{cases} -x, & -4<x<0 \\ 1, & x=0 \\ 2, & 0<x<4 \end{cases}, \ I=4$

20 $f(x)=1+x,\ -1<x<1,\ I=1$

21 $f(x)=\begin{cases} -1, & -2<x<0 \\ -1/2 & x=0 \\ x/2 & 0<x<2 \end{cases}, \ I=2$

22 $f(x)=2x+2, -1<x<3,\ I=2$

23 $f(x)=\begin{cases} 3, & -3<x<0 \\ 3/2, & x=0 \\ -x, & 0<x<3 \end{cases}, \ I=3$

24 $f(x)=1-|x|,\ -3<x<3,\ I=3$

25 $f(x)=\begin{cases} -2, & -4<x<0 \\ -1/2, & x=3 \\ 1+x, & 0<x<4 \end{cases}, \ I=4$

26 $f(x)=4x-3, -5<x<5,\ I=5$

27 $f(x)=\begin{cases} x+2, & -2<x<-1 \\ 1, & -1\le x\le 1 \\ 2-x, & 1<x<2 \end{cases}, \ I=2$

28 $f(x)=\begin{cases} -1/2, & -6<x<0 \\ 1, & 0<x<6 \end{cases}, \ I=6$

29 $f(x)=\begin{cases} -2x, & -2<x<0 \\ 2, & x=0 \\ 4, & 0<x<2 \end{cases}, \ I=2$

30 $f(x)=|x|-3, -4<x<4, I=4$

Задание 6.15.

Воспользовавшись разложением функции f(x) в ряд Фурье в указанном интервале, найти сумму данного числового ряда.

1. $f(x)=|x|,\quad (-\pi;\pi),\qquad \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$

2. $f(x)=|\sin x|,\quad (-\pi;\pi),\qquad \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$

3. $f(x)=x^2,\quad [-\pi;\pi],\qquad \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$

4. $f(x)=x,\quad [0;\pi]$, по косинусам, $\qquad \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$

5. $f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi\le x\le 0\\ x^2/\pi & 0<x\le\pi\end{cases},\qquad \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3-(-1)^n}{n^2}$

6. $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0\\ 1, & 0<x<\pi\\ 0, & x=-\pi, x=0, x=\pi\end{cases}\qquad \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

7. $f(x)=\frac{\pi}{4},\quad (0;\pi),\qquad \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$

8. $f(x)=\cos x,\quad [0;\frac{\pi}{2}],\qquad \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)(2n+1)}$

9. $f(x)=x,\quad (0;\pi),\qquad \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$

10 $f(x)=x^2,\quad (-\pi;\pi),\qquad \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

11. $f(x)=x(\pi-x),\quad (0;\pi),$ синусам $\qquad \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$

12. $f(x)=|\sin x|,\quad (-\pi;\pi),\qquad \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}$

13. $f(x)=\begin{cases} 0, & -3<x\le 0 \\ x, & 0<x<3 \end{cases}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$

14. $f(x)=\begin{cases} 1, & -1\le x<0 \\ x, & 0\le x\le 1 \end{cases}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$

15. $f(x)=|x|,\ (-1;1)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}$

16. $f(x)=x^2,\ (-\pi;\pi)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$

17. $f(x)=\begin{cases} 1, & -1\le x<0 \\ 1/2, & x=0 \\ x, & 0<x\le 1 \end{cases}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$

18. $f(x)=\begin{cases} 1, & 0<x<1 \\ -1, & 1<x<2 \end{cases}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$

19. $f(x)=\begin{cases} -x, & -4<x<0 \\ 1, & x=0 \\ 2, & 0<x<4 \end{cases}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$

20. $f(x)=\begin{cases} 1, & 0\le x<3/2 \\ -1, & 3/2<x<3 \end{cases}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$

21. $f(x)=\begin{cases} -1, & -2<x<0 \\ -1/2, & x=0 \\ x/2, & 0<x<2 \end{cases}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$

22. $f(x)=\begin{cases} -2x, & -2<x<0 \\ 2, & x=0 \\ 4, & 0<x<2 \end{cases}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$

23. $f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi\le x<0, \\ x-1, & 0\le x\le\pi, \end{cases}$ $\sum\limits_{n-1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$

24. $f(x)=\begin{cases} -2x, & -\pi\le x\le 0, \\ 3x, & 0<x\le\pi, \end{cases}$ $\sum\limits_{n-1}^{\infty}\dfrac{(1-(-1)^n)}{n^2}$

25. $f(x)=\pi^2-x^2,\ (-\pi;\pi)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

26. $f(x) = x \quad \sin x, \quad [-\pi; \pi],$ $\qquad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - 1}$

27. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ 1, & 0 \le x \le \pi, \end{cases}$ $\qquad \sum\limits_{n-1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n - 1}$

28. $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \le x < 0, \\ 1, & 0 \le x \le \pi, \end{cases}$ $\qquad \sum\limits_{n-0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n + 1}$

29. $f(x) = |\cos x|, \ [-\pi; \pi],$ $\qquad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1}$

30. $f(x) = \left| \cos \frac{x}{2} \right|, \ [-\pi; \pi],$ $\qquad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 - 4n^2}$

Контрольная работа № 7.

"Теория вероятностей"

Задание 7.1.

1. Каждая из двух команд по 5 спортсменов проводит жеребьевку для присвоения номеров. Два брата входят в состав разных команд. Найти вероятность того, что братья получат: а) номер 4; б) одинаковый номер.
2. Прибор содержит два одинаковых независимо функционирующих блока с вероятностями безотказной работы 0,8. Найти вероятность того, что безотказно будет работать: а) только один блок; б) хотя бы один блок.
3. База отправила товар в два магазина. Вероятность своевременной доставки в каждый из них равна 0,8. Найти вероятность того, что своевременно получит товар: а) только один магазин; б) хотя бы один магазин.
4. Рейсовый катер может опоздать вследствие двух независимых причин: плохой погоды и неисправности оборудования. Вероятность плохой погоды равна 0,3, вероятность неисправности 0,4. Найти вероятность того, что катер опоздает: а) только по причине плохой погоды; б) по любым причинам.
5. Условия дуэли предусматривают по 2 выстрела каждого из дуэлянтов по очереди до первого попадания. Вероятности их попадания при одном выстреле равны 0,2 и 0,3 соответственно. Найти вероятность

того, что первый дуэлянт: а) поразит соперника вторым выстрелом; б) поразит соперника.

6. Вероятность забить гол нападающим при одном ударе по воротам равна 0,3. Найти вероятность того, что после двух ударов будет забит: а) только один гол; б) хотя бы один гол.
7. Вероятность своевременного обнаружения крылатой ракеты радиолокационной станцией (РЛС) равна 0,8. На дежурстве находятся две РЛС. Найти вероятность того, что ракета будет обнаружена: а) только одной РЛС; б) хотя бы одной РЛС.
8. Автомобильный номер содержит четыре цифры. Найти вероятность того, что у встречного автомобиля сумма цифр номера: а) равна двум; б) не более двух.
9. Найти вероятность того, что наугад названное двузначное число: а) делится на 3; б) имеет сумму цифр, равную 1.
10. В ящике пять белых и два красных шара. Найти вероятность того, что наугад извлеченные два шара будут: а) одного цвета; б) белые.
11. Двое независимо друг от друга садятся в электропоезд из восьми вагонов. Найти вероятность их встречи.
12. Ракета несет две разделяющиеся боеголовки, поражающие цель независимо друг от друга с вероятностями 0,8 и 0,7. Найти вероятность того, что цель будет поражена: а) только одной боеголовкой; б) хотя бы одной боеголовкой.
13. В ящике пять белых и три черных шара. Найти вероятность того, что наугад извлеченные два шара будут: а) разных цветов; б) черные.
14. Найти вероятность того, что двое встречных прохожих родились: а) в один месяц; б) летом.
15. Найти вероятность того, что сумма цифр наугад выбранного двузначного числа: а) равна пяти; б) меньше пяти.
16. Найти вероятность того, что произведение цифр наугад выбранного двузначного числа: а) равно трем; б) меньше трех.
17. Вероятности поймать рыбу при поклевке у рыболовов равны 0,2 и 0,3 соответственно. У каждого произошла одна поклевка. Найти вероятность того, что их общий улов составит: а) одну рыбу; б) не менее одной рыбы.
18. Телефонный номер содержит 6 цифр. Найти вероятность того, что сумма цифр наугад выбранного номера: а) равна 2; б) меньше 2.
19. Найти вероятность того, что при восьми случайных нажатиях на клавиши пишущей машинки будет напечатано слово "отлично". Клавиатура содержит 40 клавишей.
20. Два шахматиста играют между собой матч из двух партий. Вероятность выигрыша в каждой партии первым из них равна 0,6.

Какова вероятность, что он выигрывает: а) только одну партию; 2) хотя бы одну партию.

21. Два стрелка произвели по одному выстрелу по мишени с вероятностью $p_1 = 0,6$, $p_2 = 0,7$. Найти вероятность: а) только одного попадания; б) хотя бы одного попадания.
22. Вероятности преодолеть планку для двух прыгунов равны $p_1 = 0,8$, $p_2 = 0,7$ соответственно. Найти вероятность того, что: а) только один из них возьмет высоту; б) хотя бы один из них возьмет высоту.
23. Автомобильный номер состоит из четырех цифр. Найти вероятность того, что номер встречного автомобиля содержит: а) три пятёрки подряд; б) три пятёрки.
24. К месту пожара направлены две команды, которые могут успеть к тушению своевременно с вероятностями $p_1 = 0,9$, $p_2 = 0,8$. Какова вероятность потушить пожар, если для этого: а) достаточно одной команды; б) необходимы обе команды.
25. Два самолета выпускают в цель по одной ракете с вероятностями попадания p_1=0,8, p_2=0,9. Найти вероятность поражения цели: а) двумя ракетами; б) только одной ракетой.
26. Прибор состоит из трех независимо друг от друга функционирующих блоков А, В, С с вероятностями безотказной работы P(A)=0,9, P(B)=0,8, P(C)=0,7. Найти вероятность безотказной работы прибора, если для этого необходимо функционирование блока А и хотя бы одного из блоков В, С.
27. Вероятности выполнения месячного плана двумя цехами предприятия равны p_1=0,9, p_2=0,7. Полагая, что цеха работают независимо друг от друга, найти вероятности того, что: а) только один цех выполнит план; б) хотя бы один цех выполнит план.
28. Участок электрической цепи состоит из последовательно соединенных элементов А, В с вероятностями выхода из строя p_1= 0,1, p_2= 0,2. Элемент В дублируется с помощью параллельно включенного ему элемента С (p_3 = 0,2). Найти вероятность безотказной работы участка: а) при отсутствии элемента С; б) при его наличии.
29. Два орудия выпускают в цель по одному снаряду с вероятностями попадания $p_1 = 0,6$, $p_2 = 0,7$. Найти вероятность того, что в цель попадет: а) только один снаряд; б) хотя бы один снаряд.
30. Болезни А, В имеют одинаковые симптомы, обнаруженные у больного. Вероятности заболеваний равны P(A) = 0,3, P(B) = 0,5. Считая, что человек может приобрести болезни независимо одну от другой найти вероятность того, что больной болен: а) только одной из болезней; б) хотя бы одной болезнью.

Задание 7.2.

1. 70% однотипных утюгов, поступающих в продажу изготовлено на предприятии А, 30% - на предприятии В. Доля брака на предприятии А - 5%, на предприятии В - 2%. а) Найти вероятность покупки бракованного утюга; б) купленный утюг оказался бракованным. Какова вероятность того, что он изготовлен на предприятии А?
2. В урне 2 белых и 3 черных шара. Наугад извлекается один из них и откладывается в сторону. Затем извлекается второй шар. а) Найти вероятность того, что он белый; б) извлеченный второй шар - белый. Какова вероятность, что первый шар был черным?
3. Прибор комплектуется узлом, изготавливаемым заводами 1 (поставляет 60% узлов), 2 (поставляет 40% узлов). Доля брака на заводе 1 - 0,05, на заводе 2 - 0,07. а) Найти вероятность того, что прибор - бракованный; б) прибор оказался бракованным. Найти вероятность, что виновник - завод 1.
4. При сборке подшипников используются шарики, 30% которых поставляет цех 1 и 70% - цех 2. Доли брака в цехах составляют 0,1 и 0,05 соответственно. а) Найти вероятность брака подшипника; б) подшипник оказался бракованным. Найти вероятность того, что виновником является цех 1.
5. В двух урнах лежат по 2 белых и 3 черных шара. Из первой во вторую наугад перекладывается шар, затем из второй извлекается шар. а) Найти вероятность того, что он - белый; б) извлеченный шар - белый. Какова вероятность, что перекладывался черный шар?
6. Два цеха выпускают по 50% однотипных телевизоров, поступающих в продажу. Цех 1 выпускает 5% бракованных телевизоров, цех 2 - 7%. а) Найти вероятность приобрести бракованный телевизор; б) найти вероятность того, что купленный телевизор выпущен цехом 1, если он оказался с браком.
7. Всхожесть (вероятность всхода) семян, полученных на селекционной станции 1 равна 0,9, на станции 2 - 0,8. В продажу поступает равное количество семян от обеих станций. а) Найти всхожесть приобретенных семян; б) Наугад выбранное семя при посеве не взошло. Какова вероятность его выращивания на станции 1?
8. Два цеха поставляют одинаковое количество болтов на сборку. Доля брака в первом цехе - 0,1, во втором - 0,2. а) Найти вероятность того, что наугад взятый на сборку болт - бракованный; б) болт оказался бракованным. Какова вероятность, что он изготовлен цехом 2?
9. Скрытый период болезни может быть длительным в 30% случаев заболевания и коротким - в 70% случаев. Вероятности выздоровления

равны 0,9 для длительного и 0,6 - для краткого периодов. а) Найти вероятность выздоровления наугад выбранного больного; б) найти вероятность того, что скрытый период был длительным, если больной выздоровел.

10. По статистическим данным среди заболевающих в течение года телят 20% заболевают в теплое время и 80%- в холодное время года. Вероятность выздоровления теленка, заболевшего в теплое время года - 0,9, в холодное - 0,8. а) Найти вероятность выздоровления наугад отобранного больного; б) найти вероятность того, что теленок заболел в теплое время, если он выздоровел.
11. Блок комплектуется резистором с одного из трех заводов, осуществляющих 60%, 30% и 20% поставок. Доля брака среди резисторов составляет 0,3 на заводе 1, 0,2 - на заводе 2, 0,1- на заводе 3. А) Найти вероятность брака выпущенного блока; б) найти вероятность того, что бракованный блок укомплектован резистором завода 1.
12. В кризисной стадии болезнь может перейти с равной вероятностью в скоротечную (С) и вялотекущую (В) формы. Вероятности выздоровления равны 0,95 для формы С и 0,8 - для формы В. а) Найти вероятность выздоровления случайно выбранного больного; б) найти вероятность того, что болезнь перешла в форму С, если больной выздоровел.
13. При заболевании данной болезнью одинаково часто обнаруживаются формы А и Б, определяющие ее дальнейшее течение. В случае А больной выздоравливает в течение месяца с вероятностью 0,8, в случае Б - с вероятностью 0,6. а) Найти вероятность выздоровления за месяц случайно отобранного больного; б) найти вероятность протекании болезни в форме А, если больной выздоровел в течении месяца.
14. Вероятность выполнением плана траулером при своевременном приходе танкера-заправщика равна 0,8, при несвоевременном - 0,4. Танкер прибывает своевременно в 90% случаев. а) Найти вероятность выполнения плана траулером; б) вычислить вероятность своевременной заправки, если известно, что траулер выполнил план.
15. Лето может оказаться засушливым в 20% случаев, чрезмерно влажным в 30% случаев и нормальным в остальных случаях. Вероятности вызревания урожая составляют 0,7, 0,6 и 0,9 соответственно. а) Найти вероятность вызревания урожая в случайно выбранный год; б) найти вероятность того, что лето было засушливым, если урожай вызрел.
16. В данной местности встречаются лишь болезни А и Б, симптомы которых внешне неотличимы. Среди больных А встречается в 30% случаев, Б - в 70%. Вероятности выздоровления при заболеваниях равны 0,6 и 0,3 соответственно. а)найти вероятность того, что случайно

взятый больной выздоровеет; б) с какой вероятностью выздоровевший болел болезнью А?

17. Объект может быть сдан в эксплуатацию в срок при плановой поставке оборудования с вероятностью 0,9, при поставке с задержкой - с вероятностью 0,6. Плановые поставки в среднем наблюдались в 80% заказов, поставки с задержкой - в 20%. а) Какова вероятность сдачи объекта в срок? б) найти вероятность своевременной поставки, если известно, что объект сдан в срок.
18. Ядерная реакция может порождать частицы типа А в 70% случаев и типа Б - в 30% случаев. Частицы А регистрируются прибором с вероятностью 0,8, частицы Б - с вероятностью 1. а) Найти вероятность регистрации частицы в предстоящем опыте; б) Прибор отметил появление частицы. С какой вероятностью она принадлежала к типу Б?
19. Среди родившихся в первом полугодии детей средний вес превышают 60% новорожденных, во втором полугодии - 30%. Считая, что рождаемость в обоих полугодиях одинакова, найти: а) вероятность превышения веса случайно выбранным ребенком; б) вероятность рождения ребёнка в первом полугодии, если он - повышенного веса.
20. Испускаемый катодом электрон может оказаться "быстрым" с вероятностью 0,7 и "медленным" - с вероятностью 0,3. Вероятность попадания в мишень "быстрых" электронов равна 0,9, "медленных" - 0,4. Найти вероятность того, что: а) электрон попадет в мишень; б) электрон был "медленным", если он достиг мишени.
21. Лисица преследуя серого зайца нагоняет его в 30% случаев, белого зайца - в 20% случаев. Оба вида зайцев встречаются в лесу с одинаковой частотой. а) Какова вероятность, что лисица догонит случайно встреченного зайца; б) найти вероятность того, что настигнутый заяц был серым.
22. Вероятность опоздания самолёта при неблагоприятных условиях (непогода, технические причины) равна 0,6 и при благоприятных условиях - 0,1. Неблагоприятные условия наблюдались в 20 % рейсов, благоприятные - в 80 %. Найти вероятность того, что : а) в следующем рейсе самолёт опоздает; б) опоздание сопровождалось неблагоприятными условиями.
23. Однотипные изделия поступают в продажу с заводов 1 и 2, поставляющих 60% и 40% изделий. Доля брака на заводе 1 равна 0,05, на заводе 2 - 0,07. Найти вероятность того, что: а) приобретенное изделие окажется бракованным; б) бракованное изделие выпущено заводом 2.
24. Две партии содержат одинаковое количество однотипных деталей и имеют доли брака (вероятности брака детали) равные 0,1 и 0,2

соответственно. Наугад выбирается одна из партий, из которой извлекается деталь. а) Найти вероятность того, что она бракованная; б) Найти вероятность того, что оказавшаяся бракованной деталь принадлежала первой партии.

25. .Вероятности поражения цели бомбардировщиком при ясной погоде равна 0,9, при непогоде - 0,7. Ясная погода 1 июня наблюдалась в 60% случаев, непогода - в 40%. Найти вероятность того, что 1 июня: а) цель будет поражена; б) погода была ясная, если известно, что цель поражена.
26. Два шахматиста А и Б играют одну партию. Вероятность выигрыша А при наличии у него белых фигур равна 0,7, при наличии чёрных фигур - 0,4. Цвет фигур определяется перед партией с помощью жеребьёвки. Найти вероятность того, что: а) шахматист А выиграет; б) А играл чёрными фигурами, если известно, что он выиграл.
27. Вероятность своевременного прибытия судна при безотказной работе двигателя равна 0,8 и при его поломке - 0,1. Двигатель ранее работал безотказно в 90% рейсов судна. Найти вероятность того, что: а) в следующем рейсе судно не опоздает; б) поломки двигателя, если известно, что судно опоздало.
28. Прибор может эксплуатироваться в 30% случаев в тяжелых условиях, где он выходит из строя с вероятностью 0,3 и в 70% случаев - в благоприятных условиях, где он отказывает с вероятностью 0,1. Найти вероятность того, что: а) прибор откажет; б) отказавший прибор эксплуатировался в неблагоприятных условиях.
29. Из урны, содержащей 3 белых и 2 черных шара, по очереди извлекаются 2 шара. Цвет первого из них неизвестен. Найти вероятность того, что: а) второй шар будет белым; б) первый шар был черным, если второй оказался белым.
30. Два цеха поставляют на сборку изделия однотипные узлы. Первый из них поставляет 60% всех узлов, второй - 40%. Вероятность узла оказаться бракованным равна 0,2 для цеха 1 и 0,3 - для цеха 2. Найти вероятность того, что: а) случайно выбранный узел окажется бракованным; б) бракованный узел поступил из цеха 1.

Задание 7.3.

Построить ряд распределения, функцию распределения и ее график, найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X - числа наступлений случайного события A в указанной ниже серии независимых испытаний.

1. Монета подбрасывается 4 раза. А - выпадение герба при одном бросании, P(A)=0,5.
2. Стрелок стреляет по мишени 3 раза. А - попадание при одном выстреле, P(A)=0,6.
3. Рыболов трижды забрасывает удочку. А - поклевка при одном забрасывании, P(A)=0,3.
4. Из урны, содержащей 2 белых и 3 черных шара, извлекается наугад шар (если он белый, то наступило А), который затем возвращается в урну. Опыт повторяется 3 раза.
5. Высеиваются 3 семечка тыквы. Всхожесть (вероятность всхода А одного семени) равна P(A)=0,8.
6. Элементарная частица может быть зарегистрирована прибором (событие А) с вероятностью P(A)=0,7. Перед прибором поочередно пролетают три частицы.
7. А -событие, наступающее, когда первая цифра номера встречного автомобиля - нуль. Мимо поочередно проезжают два автомобиля.
8. А - выход из строя электрооборудования автомобиля в течение года, P(A)=0,3. Рассматриваются три автомобиля.
9. А - событие, состоящее в побитии мирового рекорда спортсменом, P(A)=0,2. В соревновании участвуют три спортсмена.
10. Орудие выпускает по цели три снаряда. А - попадание снаряда, P(A)=0,8.
11. Извлеченная наугад с книжной полки книга может оказаться учебником (событие А) с вероятностью P(A)=0,4. Извлекается три книги.
12. Позитрон при рождении может приобрести правую (событие А) или левую ориентацию вращения, P(A)=0,6. Рассматриваются 3 позитрона.
13. Наличие синей глины указывает на возможность алмазного месторождения (событие А) с вероятностью P(A)=0,4. Синяя глина обнаружена в трех районах.
14. В период цветения растение может быть опылено (событие А) с вероятностью P(A)=0,8. Рассматриваются 4 растения.
15. Рыболов может поймать рыбу при поклевке (событие А) с вероятностью P(A)=0,4. У рыболова было три поклевки.
16. В ядерной реакции может образоваться резонансная частица (событие А) с вероятностью P(A)=0,2. Рассматриваются три реакции.
17. Помещенный в грунт саженец может приняться (событие А) с вероятностью P(A)=0,7. Высажено три саженца.

18. Генератор электростанции в течение года может выйти из строя (событие А) с вероятностью Р(А)=0,2. Рассматривается трехлетний период эксплуатации генератора.
19. В течение суток молоко в горшке может прокиснуть (событие А) с вероятностью Р(А)=0,4. Рассматривается случай трех горшков.
20. На фотографии, полученной в камере Вильсона частица регистрируется в опыте (событие А) с вероятностью Р(А)=0,5. Проведено 4 опыта.
21. А - появление четного числа очков при бросании игральной кости. Кость выбрасывается 4 раза.
22. Три орудия стреляют по своим целям, А - попадание снаряда в цель, Р(А)=0,7.
23. Рыболов при поклевке может вытащить рыбу (событие А) с вероятностью Р(А)=0,6. Поклевка произошла у 4 рыболовов.
24. Биение ротора электродвигателя приводит к его выходу из строя в вероятностью Р(А)=0,8. Рассматриваются три однотипных двигателя.
25. При изготовлении детали она может оказаться бракованной (событие А) с вероятностью Р(А)=0,2. Изготовлено три детали.
26. Станок работает безотказно в течение года (событие А) с вероятностью Р(А)=0,8. В цехе работают 4 станка.
27. А - появление нечетного числа очков при бросании игральной кости. Кость выбрасывается 4 раза.
28. Поезд может прибыть по расписанию (событие А) с вероятностью Р(А)=0,9. Рассматриваются три рейса.
29. В среднем при наборе страницы текста оператор совершает ошибку (событие А) в 30% случаев. Статья содержит 4 страницы текста.
30. Самолет-разведчик может обнаружить цель (событие А) с вероятностью Р(А)=0,8. Для обнаружения цели послано три самолета.

Задание 7.4.

По заданной функции распределения F(x) случайной величины СВ X найти плотность распределения и построить ее график. Вычислить вероятность P($a \le X \le b$) попадания значения СВ в заданный интервал, математическое ожидание и дисперсию.

1. $$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ 4(x-1)^2, & 1 < x \le 1{,}5 \\ 1, & x > 1{,}5 \end{cases}; \qquad a = 1{,}2; \qquad b = 3.$$

2. $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ 1-e^{-x}, & x>0 \end{cases};\qquad a=-1;\quad b=2.$

3. $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ x^2/100, & 0<x\le 10 \\ 1, & x>10 \end{cases};\qquad a=4;\quad b=12.$

4. $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ x^2/81, & 0<x\le 9 \\ 1, & x>9 \end{cases};\qquad a=3;\quad b=11.$

5. $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ x^2/64, & 0<x\le 8 \\ 1, & x>8 \end{cases};\qquad a=5;\quad b=9.$

6. $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ \dfrac{x^2}{49}, & 0<x\le 7; \\ 1, & x>7 \end{cases}\qquad a=-3;\quad b=6$

7. $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ \dfrac{x^2}{36}, & 0<x\le 6; \\ 1, & x>6 \end{cases}\qquad a=3;\quad b=7$

8. $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ \dfrac{x^2}{25}, & 0<x\le 5; \\ 1, & x>5 \end{cases}\qquad a=-2;\quad b=3$

9. $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \sin x, & 0 < x \le \pi/2; \\ 1, & x > \pi/2 \end{cases}$ $\quad a=\frac{\pi}{4}; \quad b=\pi$

10. $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{x^2}{16}, & 0 < x \le 4; \\ 1, & x > 4 \end{cases}$ $\quad a=-3; \quad b=2$

11. $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le -1 \\ \frac{1}{9}(x+1)^2, & -1 < x \le 2; \\ 1, & x > 2 \end{cases}$ $\quad a=0; \quad b=3$

12. $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{x^2}{9}, & 0 < x \le 3; \\ 1, & x > 3 \end{cases}$ $\quad a=-1; \quad b=2.$

13. $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le -2 \\ \frac{1}{16}(x+2)^2, & -2 < x \le 2; \\ 1, & x > 2 \end{cases}$ $\quad a=-1; \quad b=2.$

14. $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{x^2}{4}, & 0 < x \le 2; \\ 1, & x > 2 \end{cases}$ $\quad a=-3; \quad b=1$

15. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -2\\ \dfrac{(x+2)^2}{49}, & -2<x\le 5;\\ 1, & x>5\end{cases}$ $a=-3;\quad b=0.$

16. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -3\\ \dfrac{(x+3)^2}{36}, & -3\le x\le 3;\\ 1, & x>3\end{cases}$ $a=0;\quad b=5.$

17. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -4\\ \dfrac{(x+4)^2}{81}, & -4<x\le 5;\\ 1, & x>5\end{cases}$ $a=2;\quad b=4.$

18. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -7\\ \dfrac{(x+7)^2}{81}, & -7<x\le 2;\\ 1, & x>2\end{cases}$ $a=-8;\quad b=0.$

19. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -\dfrac{\pi}{2}\\ \cos x, & -\dfrac{\pi}{2}<x\le 0;\\ 1, & x>0\end{cases}$ $a=-\dfrac{\pi}{4};\quad b=-1.$

20. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -5\\ \dfrac{(x+5)^2}{16}, & -5<x\le -1;\\ 1, & x>-1\end{cases}$ $a=-2;\quad b=0.$

21. $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 3 \\ \dfrac{(x-3)^2}{9}, & 3 < x \le 6; \\ 1, & x > 6 \end{cases}$ $\quad a = 0; \quad b = 5.$

22. $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 4 \\ \dfrac{(x-4)^2}{25}, & 4 < x \le 9; \\ 1, & x > 9 \end{cases}$ $\quad a = 2; \quad b = 5.$

23. $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le -3 \\ \dfrac{(x+3)^2}{4}, & -3 < x \le -1; \\ 1, & x > -1 \end{cases}$ $\quad a = -2; \quad b = 1.$

24. $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 2 \\ \dfrac{(x-2)^2}{49}, & 2 < x \le 9; \\ 1, & x > 9 \end{cases}$ $\quad a = 0; \quad b = 3.$

25. $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 1 \\ \dfrac{(x-1)^2}{25}, & 1 < x \le 6; \\ 1, & x > 6 \end{cases}$ $\quad a = 2; \quad b = 4.$

26. $F(x)=\begin{cases} 0, & x < -1 \\ \dfrac{(x+1)^2}{64} & -1 < x \le 7; \\ 1, & x > 7 \end{cases}$ $\quad a = 0; \quad b = 3.$

27. $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le -3 \\ \dfrac{(x+3)^2}{64}, & -3 < x \le 5; \\ 1, & x > 5 \end{cases}$ $\quad a = 1; \quad b = 7.$

28. $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 1 \\ \dfrac{(x-1)^2}{16}, & 1 < x \le 5; \\ 1, & x > 5 \end{cases}$ $\quad a = -2; \quad b = 3.$

29. $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le -5 \\ \dfrac{(x+5)^2}{36}, & -5 < x \le 1; \\ 1, & x > 1 \end{cases}$ $\quad a = 0; \quad b = 2.$

30. $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 5 \\ \dfrac{(x-5)^2}{4}, & 5 < x \le 7; \\ 1, & x > 7 \end{cases}$ $\quad a = 4; \quad b = 6.$

Задание 7.5.

Найти вероятность попадания в заданный интервал $[a,b]$ значения нормально распределенной случайной величины X, если известно её математическое ожидание $M[X]$ и дисперсия $D[X]$.

Вар.	$M[X]$	$D[X]$	a	b
1	10	16	2	13
2	9	25	5	14
3	8	1	6	9
4	7	4	3	10

5	6	9	2	11
6	5	1	5	7
7	4	25	2	7
8	3	4	3	10
9	2	25	4	9
10	2	16	6	10
11	10	4	9	12
12	9	16	5	12
13	8	4	4	10
14	7	9	4	11
15	6	4	3	10
16	5	4	2	7
17	3	1	2	5
18	4	1	3	7
19	2	9	-2	4
20	0	16	-1	3
21	5	9	4	9
22	6	4	4	10
23	8	9	0	9
24	7	16	-1	20
25	-8	9	-9	0
26	2	9	-2	4
27	7	36	0	9
28	8	25	2	10
29	1	9	-1	5
30	4	9	0	9

Задание 7.6.

В партии из n изделий каждое может оказаться стандартным с вероятностью p. С помощью локальной и интегральной формул Муавра-Лапласа вычислить вероятность того, что число стандартных деталей в партии будет: а) равно m; б) заключено между m_1 и m_2.

Вар.	p	n	m	m_1	m_2
1	0.3	100	32	25	35
2	0,7	400	287	270	290
3	0,5	300	143	145	160
4	0,4	350	137	135	155
5	0,6	600	365	340	365
6	0,2	850	166	145	185
7	0,4	900	362	340	375
8	0,6	750	447	435	470
9	0,3	150	47	40	55
10	0,8	100	76	75	90
11	0,3	400	116	100	130
12	0,7	200	145	130	150
13	0,2	450	86	80	95
14	0,1	900	96	80	100
15	0,5	750	381	355	385
16	0,4	750	294	285	320
17	0,6	200	125	110	135
18	0,2	600	112	105	135
19	0,3	400	127	110	130
20	0,1	700	64	55	80
21	0,7	650	450	445	480
22	0,5	300	155	140	160

23	0,6	450	262	255	280
24	0,8	200	163	145	165
25	0,1	400	44	35	55
26	0,3	500	147	130	165
27	0,2	200	43	30	50
28	0,4	650	250	245	270
29	0,6	300	185	175	195
30	0,5	500	243	235	265

Задание 7.7.

Двумерная случайная величина (*X,Y*) имеет плотность распределения

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{a^2b^2}(bx+ay), & (x,y)\in D(0\le x\le a, 0\le y\le b)\\ 0, & (x,y)\overline{\in} D\end{cases}$$

Найти вероятность попадания значения (*X,Y*) в область $x_1 \le x \le x_2$, $y_1 \le y \le y_2$, **вероятность попадания значения** *X* **в интервал** $x_1 \le x \le x_2$, **математическое ожидание** *M*[*X*] **и условное математическое ожидание** $M[Y/X=x]$.

Вар	*a*	*b*	x_1	x_2	y_1	y_2
1	4	2	3	6	-2	1
2	8	2	6	9	0	4
3	6	4	3	7	2	3
4	5	3	2	4	-4	1
5	9	4	-4	6	1	5
6	3	5	1	2	4	7
7	2	6	3	8	-2	4
8	7	4	-1	5	2	6
9	5	6	-3	2	4	7

10	4	7	1	6	-2	5
11	6	3	0	4	-1	2
12	8	4	2	6	3	7
13	3	4	-2	2	1	5
14	7	2	-4	3	0	5
15	6	5	2	7	-3	4
16	2	4	-2	1	3	6
17	2	8	0	4	6	9
18	4	6	2	3	3	7
19	3	5	-4	1	2	4
20	4	9	1	5	-4	6
21	5	3	4	7	1	2
22	6	2	-2	4	3	8
23	4	7	2	6	-1	5
24	6	5	4	7	-3	2
25	7	4	-2	5	1	6
26	3	6	-1	2	0	4
27	4	8	3	7	2	6
28	4	3	1	5	-2	2
29	2	7	0	5	-4	3
30	5	6	-3	4	2	7

Задание 7.8.

Случайная величина X имеет плотность распределения $f(x)$. Для случайной величины $Y = \varphi(X)$ найти плотность распределения $g(y)$, вероятность $P(a \le Y \le b)$, математическое ожидание $M[Y]$ и дисперсию $D[Y]$.

1. $f(x)=\begin{cases} \frac{x}{2}, & 0<x<2; \qquad \varphi(x)=3x+2; \quad a=4, \quad b=7, \\ 0, & x\le 0 \quad \text{или} \quad x\ge 1 \end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \qquad \varphi(x)=3x+2; \quad a=3, \quad b=5 \\ e^{-x}, & x\ge 0 \end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases} |1-x|, & |x|\le 1; \qquad \varphi(x)=2x+5; \quad a=4, \quad b=6 \\ 0, & |x|>1 \end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases} \frac{2x}{9}, & 0<x<3; \quad \varphi(x)=x+4; \quad a=5, \quad b=6 \\ 0, & x\le 0 \quad \text{или} \quad x\ge 3 \end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases} \frac{x}{8}, & 0<x<4; \quad \varphi(x)=2x; \quad a=1, \quad b=4 \\ 0, & x\le 0 \quad \text{или} \quad x\ge 4 \end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases} \frac{2x}{25}, & 0<x<5; \quad \varphi(x)=\frac{x}{2}; \quad a=1, \quad b=2 \\ 0, & x\le 0 \quad \text{или} \quad x\ge 5 \end{cases}$

7. $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{9}, & 0<x<3; \quad \varphi(x)=4x-2; \quad a=-1, \quad b=7 \\ 0, & x\le 0 \quad \text{или} \quad x\ge 3 \end{cases}$

8. $f(x)=\begin{cases} \frac{3}{8}x^2, & 0<x<2; \quad \varphi(x)=5x+1; \quad a=2, \quad b=7 \\ 0, & x\le 0 \quad \text{или} \quad x\ge 3 \end{cases}$

9. $f(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \qquad \varphi(x)=3x+5; \quad a=6, \quad b=8 \\ 2e^{-2x}, & x\ge 0 \end{cases}$

10. $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}\cos x, & -\pi/2\le x\le \pi/2; \quad \varphi(x)=2x; \quad a=-\pi/4, b=\pi/4 \\ 0, & |x|>\pi/2 \end{cases}$

11. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-3}{2}, & 3<x<5; \\ 0, & x\le 3 \quad \text{или} \quad x>5 \end{cases}$ $\varphi(x)=4x-5;$ $a=8,\quad b=11$

12. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2(x+4)}{25}, & -4<x<1; \\ 0, & x\le -4 \quad \text{или} \quad x\ge 1 \end{cases}$ $\varphi(x)=3x+1;$ $a=-10,\quad b=3$

13. $f(x)=\begin{cases} 0, & x<1; \\ e^{1-x}, & x\ge 1 \end{cases}$ $\varphi(x)=4x+5;$ $a=10,\quad b=15$

14. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{(x-2)^2}{9}, & 2<x<5; \\ 0, & x\le 2 \quad \text{или} \quad x\ge 5 \end{cases}$ $\varphi(x)=4x+3;$ $a=12,\quad b=20$

15. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{8}(x+1)^2, & |x|<1; \\ 0, & |x|\ge 1 \end{cases}$ $\varphi(x)=2x-4;$ $a=-3,\quad b=-2$

16. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{64}x^2, & 0<x<4; \\ 0, & x\le 0 \quad \text{или} \quad x\ge 4 \end{cases}$ $\varphi(x)=5x;$ $a=2,\quad b=10$

17. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{125}x^2, & 0<x<5; \\ 0, & x\le 0 \quad \text{или} \quad x\ge 5 \end{cases}$ $\varphi(x)=2x+1;$ $a=3,\quad b=8$

18. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{72}, & 0<x<6; \\ 0, & x\le 0 \quad \text{или} \quad x\ge 5 \end{cases}$ $\varphi(x)=3x-4;$ $a=-2,\quad b=12$

19. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}\sin x, & 0\le x\le \pi; \\ 0, & x<0 \quad \text{или} \quad x>\pi \end{cases}$ $\varphi(x)=3x;$ $a=0,\quad b=2\pi$

20. $f(x)=\begin{cases} 0, & x<3; \\ e^{3-x}, & x\ge 3 \end{cases}$ $\quad \varphi(x)=2x; \quad a=7, \quad b=9$

21. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left|1-\dfrac{x}{2}\right|, & |x|\le 2; \\ 0, & |x|>2 \end{cases}$ $\quad \varphi(x)=3x+4; \quad a=0, \quad b=5$

22. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{64}(x-5)^2, & 5<x<9; \\ 0, & x\le 5 \text{ или } x\ge 9 \end{cases}$ $\quad \varphi(x)=2x; \quad a=11, \quad b=15$

23. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{125}(x+2)^2, & -2<x<3; \\ 0, & x\le -2 \text{ или } x\ge 3 \end{cases}$ $\quad \varphi(x)=4x; \quad a=0, \quad b=10$

24. $f(x)=\begin{cases} 2\cos 2x, & 0<x<\dfrac{\pi}{4}; \\ 0, & x\le 0 \text{ или } x\ge \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$ $\quad \varphi(x)=\dfrac{x}{2}; \quad a=-1, \quad b=\dfrac{\pi}{8}$

25. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{(x-3)^2}{72}, & 3<x<9; \\ 0, & x\le 3 \text{ или } x\ge 9 \end{cases}$ $\quad \varphi(x)=2x; \quad a=7, \quad b=14$

26. $f(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ 3e^{-3x}, & x\ge 0 \end{cases}$ $\quad \varphi(x)=4x+1; \quad a=2, \quad b=5$

27. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{9}(x-4), & 4<x<7; \\ 0, & x\le 4 \text{ или } x\ge 7 \end{cases}$ $\quad \varphi(x)=5x; \quad a=24, \quad b=30$

28. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-3}{8}, & 3<x<7; \\ 0, & x\le 3 \text{ или } x\ge 7 \end{cases}$ $\quad \varphi(x)=2x+1; \quad a=9, \quad b=14$

29. $f(x)=\begin{cases}\cos 2x, & |x|<\dfrac{\pi}{4}; \\ 0, & |x|\ge\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$ $\qquad \varphi(x)=3x; \quad a=0, \quad b=\dfrac{3\pi}{8}$

30. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2(x-3)}{25}, & 3<x<8; \\ 0, & x\le 3 \quad \text{или} \quad x\ge 8\end{cases}$ $\qquad \varphi(x)=2x+1; \quad a=9, \quad b=15$

Задание 7.9.

Задана матрица перехода системы из состояния *i* (*i*=1,2) в состояние *j* (*j*=1,2) за один шаг $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$**. Найти матрицу перехода из состояния *i* в состояние *j* за два шага.**

Вар.	*a*	*b*	*C*	*D*
1	0,1	0,9	0,2	0,8
2	0,2	0,8	0,7	0,3
3	0,3	0,7	0,4	0,6
4	0,4	0,6	0,5	0,5
5	0,6	0,4	0,7	0,3
6	0,6	0,4	0,8	0,2
7	0,8	0,2	0,9	0,1
8	0,8	0,2	0,2	0,8
9	0,9	0,1	0,2	0,8
10	0,4	0,6	0,1	0,9
11	0,7	0,3	0,2	0,8
12	0,5	0,5	0,4	0,6
13	0,3	0,7	0,2	0,8
14	0,2	0,8	0,5	0,5
15	0,9	0,1	0,7	0,3

16	0,9	0,1	0,8	0,2
17	0,8	0,2	0,3	0,7
18	0,4	0,6	0,3	0,7
19	0,5	0,5	0,4	0,6
20	0,3	0,7	0,6	0,4
21	0,8	0,2	0,4	0,6
22	0,2	0,8	0,5	0,5
23	0,2	0,8	0,1	0,9
24	0,4	0,6	0,7	0,3
25	0,1	0,9	0,4	0,6
26	0,2	0,8	0,7	0,3
27	0,4	0,6	0,5	0,5
28	0,2	0,8	0,2	0,8
29	0,5	0,5	0,3	0,7
30	0,7	0,3	0,9	0,1

Контрольная работа №8

"Математическая статистика"

Задание 8.1.

Из генеральной совокупности извлечена выборка, представленная в виде статистического ряда (в первой строке указаны выборочные значения x_i, во второй - соответствующие им частоты n_i). Требуется вычислить выборочное среднее $\overline{X}$, выборочную дисперсию D_B, исправленную выборочную дисперсию s^2 и среднеквадратическое отклонение s, эмпирическую функцию распределения.

1.

x_i	80	90	100	110	120	130	140
n_i	4	8	14	40	16	12	6

2.

x_i	13	14	15	16	17	18	19
n_i	7	16	40	25	7	5	3

3.

x_i	21	28	35	42	49	56	63
n_i	7	11	22	50	5	3	2

4.

x_i	2	3	4	5	6	7	8
n_i	4	11	25	30	15	10	5

5.

x_i	20	26	32	38	44	50	56
n_i	2	3	15	50	12	11	7

6.

x_i	13	23	33	43	53	63	73
n_i	3	17	25	40	8	4	3

7.

x_i	30	35	40	45	50	55	60
n_i	4	16	20	40	13	4	3

8.

x_i	33	38	46	54	62	70	78
n_i	7	11	12	60	5	3	2

9.

x_i	12	15	22	25	30	35	40
n_i	3	7	12	40	18	12	8

10.

x_i	10	20	30	40	50	60	70
n_i	4	11	25	30	15	10	5

11.

x_i	5	15	20	25	30	35	40
n_i	4	6	10	35	25	12	8

12.

x_i	8,5	9,5	10,5	11,5	12,5	13,5	14,5
n_i	5	10	15	30	25	9	6

13.

x_i	-5	-3	-1	1	3	5	7
n_i	4	6	15	35	20	13	7

14.

x_i	14	16	17	18	20	21	22
n_i	2	3	25	35	22	8	5

15.

x_i	11	12	14	15	16	18	20
n_i	5	10	20	30	20	9	6

16.

x_i	1	4	6	7	8	10	13
n_i	8	15	40	25	8	5	2

17.

x_i	8	9	11	13	14	16	17
n_i	2	8	20	35	19	10	6

18.

x_i	2	4	6	8	10	12	14
n_i	5	10	14	40	16	9	4

19.

x_i	3	5	7	9	11	13	15
n_i	5	10	15	30	25	11	4

20.

x_i	4	6	8	10	12	14	16
n_i	5	8	22	35	25	3	2

21.

x_i	-6	-4	-2	0	2	4	6
n_i	5	10	15	30	25	11	4

22.

x_i	4	6	7	8	10	11	12
n_i	6	9	20	30	20	10	5

23.

x_i	2	5	12	15	20	25	30
n_i	6	9	20	30	20	10	5

24.

x_i	20	30	40	50	60	70	80
n_i	4	8	19	30	20	12	6

25.

x_i	-2	0	1	2	4	5	6
n_i	6	9	20	30	20	10	5

26.

x_i	5	10	15	20	25	30	35
n_i	4	16	20	40	13	5	2

27.

x_i	0	10	15	20	25	30	35
n_i	7	13	25	35	10	7	3

28.

x_i	4	5	6	7	8	9	10
n_i	3	5	7	25	40	16	7

29.

x_i	3	5	7	9	11	13	15
n_i	4	9	16	35	19	10	5

30.

x_i	-7	-5	-1	3	7	11	15
n_i	4	12	20	30	18	10	6

Задание 8.2.

По заданным выборочным среднему $\overline{X}$ и исправленному среднеквадратическому отклонению s найти с доверительной вероятностью p доверительный интервал для математического ожидания M[X], если

а) $\sigma[x]$ известно (принять $\sigma[x] = s$),

б) $\sigma[x]$ неизвестно,

а также доверительный интервал для $\sigma[x]$. Число степеней свободы принять равным 3.

Вар.	$\overline{X}$	s	N	p
1	15,2	6,8	100	0,95
2	20,6	8,4	150	0,99
3	50,8	16,3	100	0,95
4	18,7	5,4	200	0,99
5	27,4	8,7	250	0,95
6	7,2	2,8	200	0,95
7	11,8	2,9	90	0,95
8	15,4	3,9	50	0,95
9	17,3	4,6	100	0,95
10	19,2	5,2	250	0,99
11	21,5	6,3	200	0,95
12	29,3	8,9	150	0,99

13	75,2	6,3	100	0,95
14	76,4	10,4	150	0,95
15	78,7	12,2	200	0,99
16	67,5	8,6	100	0,95
17	63,2	7,1	90	0,95
18	60,8	7,3	250	0,99
19	57,4	6,5	200	0,95
20	48,3	7,2	250	0,95
21	64,1	8,3	250	0,95
22	69,5	9,6	250	0,99
23	73,2	10,8	100	0,95
24	78,1	11,2	200	0,99
25	82,4	9,4	150	0,95
26	15,9	10,7	100	0,95
27	25,3	12,8	200	0,99
28	67,2	8,9	150	0,95
29	71,3	11,4	150	0,95
30	21,9	6,4	250	0,99

Задание 8.3.

1. Выборку значений *СВ X*, указанную в условии задачи 8.1 сгруппировать, разбивая отрезок [a,b] ($a=\min x_i$, $b=\max x_i$) на 5 интервалов одинаковой длины $[\xi_j,\xi_{j+1}]$ с границами $\xi_j = a + \frac{b-a}{5} j \quad (j = 0,1,2,3,4)$ и подсчитать частоты n_j интервалов.

2. Предполагая, что X распределена по нормальному закону и принимая в качестве оценок его параметров M[X], σ[X] выборочное среднее $\overline{X}$ и выборочное среднеквадратическое отклонение s вычислить теоретическое частоты интервалов.

3. С помощью критерия согласия Пирсона при уровне значимости α =0,1 проверить, согласуются ли выборочные данные с гипотезой о нормальном распределении величины X. Число степеней свободы принять равным 3.

Задание 8.4.

По заданной корреляционной таблице найти выборочные средние $\overline{x}, \overline{y}$, среднеквадратические отклонения s_x, s_y, коэффициент корреляции ρ_{xy} и уравнение линейной регрессии Y на X. Вычислить условные средние $\overline{y}_x$ по данным таблицы и с помощью выборочного уравнения регрессии и найти наибольшее их отклонение.

1.

X \ У	14	19	24	29	34	n_x
16	2	2				4
18	3	4				7
20		13	6	3		22
22		9	21	13	2	45
24			19	29	9	57
26				8	17	25
n_y	5	28	46	53	28	160

2.

X \ Y	19	24	29	34	39	N_x
18	1	2				3
20	2	3				5
22		4	5	2		11
24		7	15	5	1	28
26			13	8	2	23
n_y	3	16	33	15	3	70

3.

Y / X	20	25	30	35	40	50	n_x
16	2	3					5
18	3	4	1				8
20		7	20	3			30
22			10	5	3	2	20
24					5	2	7
n_y	5	14	31	8	8	4	70

4.

Y / X	15	20	25	30	35	n_x
18	1	2				3
20	1	2	4			7
22		4	3	9		16
24		2	5	6		13
26			1	7	1	9
28				1	1	2
n_y	2	10	13	23	2	50

5.

Y / X	14	18	22	26	30	34	N_x
17	2	1					3
19	1	3	3				7
21		3	4	8			15
23			3	6	7		16
25				1	5	1	7
27					1	1	2
n_y	3	7	10	15	13	2	50

6.

Y / X	10	14	18	22	26	30	n_x
15	3	4					7
25		2	6				8
35			3	50	4	5	57
45			2	8	6		16
55	3			3	7	2	12
n_y	3	6	11	61	17	2	100

7.

Y / X	8	14	20	26	32	38	N_x
10	5	1					6
20		6	2				8
30			5	40	5		50
40			2	8	7		17
50				4	7	8	19
n_y	5	7	9	52	19	8	100

8.

Y / X	10	20	30	40	50	60	n_x
18	2	4					6
26		3	7				10
34		1	48	10	2		61
42			2	7	5		14
50				1	2	2	5
58					2	2	4
n_y	2	8	57	18	1	4	100

9.

X \ Y	18	26	34	42	50	58	N_x
12	3	7	2				12
20		2	8	6			16
28		3	50	4			5
36			2	6			8
44				2	1	1	4
52					2	1	3
n_y	3	12	62	18	3	2	100

10.

X \ Y	16	22	28	34	40	n_x
14	3					3
20	7	2	3			12
26	2	8	50			60
32		6	4	2		12
38				6	3	9
44					4	4
n_y	12	16	57	8	7	100

11

X \ Y	6	16	26	36	46	N_x
12	4					4
24	7	2	5			14
36	8	8	40	6		62
48		7	5	2		14
60				2	2	4
72				1	1	2
n_y	19	17	50	11	3	100

12.

Y / X	20	30	40	50	60	n_x
14	1	2				3
18		4	10			14
22		2	20	8		30
26				2	1	3
n_y	1	8	30	10	1	50

13.

Y / X	14	26	38	50	62	n_x
8	2	2				4
14	1	3	9			13
20		2	18	4		24
26		1	6	1	1	9
n_y	3	8	33	5	1	50

14.

Y / X	22	30	38	46	54	n_x
12	1	3				4
16		1	3			4
20		1	25	2		28
24		2	2	2		6
30			4	2	2	8
n_y	1	7	34	6	2	50

15.

X \ Y	15	25	35	45	55	n_x
6	1	1				2
12		3	4			7
18		2	24	1		27
24		1	4	2	1	8
30		1		3	2	6
n_y	1	8	32	6	3	50

16.

X \ Y	14	24	34	44	54	64	n_x
12	1	2					3
14		1	2	3			6
16			4	24	4		32
18		1	1	3	2	1	8
20						1	1
n_y	1	4	7	30	6	2	50

17.

X \ Y	16	28	40	52	64	76	n_x
10	2						2
13	2	2	2				6
16	3	4	25	2			34
19		1	2	1	3		7
22						1	1
n_y	7	7	29	3	3	1	50

18.

Y / X	24	30	36	42	48	54	n_x
15	2	2	2				6
20		2	2	8			12
25				15	10		25
30					4	2	6
35						1	1
n_y	2	4	4	23	14	3	50

19.

Y / X	20	26	32	38	44	50	n_x
11	2	2	3				7
15	1	2	4				7
19		2	14	7			23
23				5	2	1	8
27				2	2	1	5
n_y	3	6	21	14	4	2	50

20.

Y / X	6	12	18	24	30	n_x
40			1	4	1	6
50		1	5	10	5	21
60	6	2	18	2	2	30
70	6	14	2			20
80	12	3				15
90	6					6
n_y	30	20	26	16	8	100

21.

Y / X	6	12	18	24	30	36	n_x
30			1	1	2	1	5
40			2	4	12	7	25
50		6	15	20	2		43
60		7	2	1			10
70	3	9					12
80	5						5
n_y	8	22	20	26	16	8	100

22.

Y / X	4	8	12	16	20	24	n_x
30						1	1
38					2	1	3
46				2	19	10	31
54			5	15	2	2	24
62		5	4	5			14
70	4	8	3	6			12
78	5	1					16
n_y	9	14	12	28	23	14	100

23.

Y / X	8	16	24	32	40	48	n_x
40					1	1	2
50				1	3		4
60			2	8	20		30
70		6	15	3			24
80	5	7	3	6			21
90	3	5	5				13
100	4	2					6
n_y	12	20	25	18	24	1	100

24.

Y / X	0	8	16	24	32	n_x
50				2	1	3
60				3	4	7
70			2	8	8	18
80			3	50	4	57
90		2	6			8
100	3	4				7
n_y	3	6	11	63	17	100

25.

Y / X	12	18	24	30	36	n_x
35					8	8
45			5	7	7	19
55			40	8	4	52
65		2	5	2		9
75	1	6				7
85	5					5

n_y	6	8	50	17	19	100

26.

Y / X	75	77	79	81	83	n_x
40	1	3				4
45		2	2	1		5
50		1	3	5	1	10
55				4	2	6
60			1	3	1	5
n_y	1	6	6	13	4	30

27.

Y / X	80	81	82	83	84	n_x
35	2	2	1			5
40		1	2	1		4
45		2	4	5		11
50			3	4		7
55				2	1	3
n_y	2	5	10	12	1	30

28.

Y / X	75	78	81	84	87	n_x
30	1	1				2
40		2	3	4		9
50		5	8	9		22
60			5	1	1	7
n_y	1	8	16	14	1	40

29.

X \ Y	76	78	80	82	84	n_x
40	2					2
50	1	2	1			4
60		5	8	10		23
70			5	4	2	11
n_y	3	7	14	14	2	40

30.

X \ Y	70	73	76	79	82	n_x
35	1	1	1			3
40		2	1	2		5
45		4	6	3		13
50		1	5	4	1	11
55			3	3	2	8
n_y	1	8	16	12	3	40

Решение типового варианта контрольной работы №5

Задание 5.1. Найти общее решение:

$$(xy + y)dx + (xy + x)dy = 0 .$$

Преобразуем данное уравнение:

$$y(x+1)dx + x(y+1)dy = 0 .$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные $(x \neq 0, y \neq 0)$:

$$\frac{(x+1)dx}{x} = -\frac{(y+1)dy}{y}$$

Интегрируем обе части неравенства:

$$\int\left(1+\frac{1}{x}\right)dx=-\int\left(1+\frac{1}{y}\right)dy,\ x+\ln|x|=-y-\ln|y|+\ln|C|,$$

$$x+y+\ln|x|+\ln|y|=\ln|C|,\quad \ln\left(e^{x}\cdot e^{y}\cdot|x|\cdot|y|\right)=\ln|C|,$$

$$xy\cdot e^{x+y}=|C|$$

Последнее равенство является общим интегралом исходного уравнения.

Задание 5.2. Найти общее решение:

$$2x^2y'=x^2+y^2.$$

Так как функции $2x^2$ и x^2+y^2 — однородные второго измерения

$$\left(2\cdot(\lambda x)^2=\lambda^2\cdot\left(2x^2\right),(\lambda x)^2+(\lambda y)^2=\lambda^2\left(x^2+y^2\right)\right),$$

то данное уравнение — однородное.

Сделаем замену: $y=xu,$ где u — новая неизвестная функция.

$$y'=u+x\cdot u'.$$

Тогда:

$$2x^2(u+xu')=x^2+(xu)^2,\qquad 2x^2(u+xu')=x^2\left(1+u^2\right).$$

Далее имеем:

$$2u+2xu'=1+u^2,\qquad 2xu'=(u-1)^2.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Решаем его:

$$\frac{2du}{(u-1)^2}=\frac{dx}{x}\qquad\qquad -\frac{1}{u-1}=\frac{1}{2}\ln|x|+\ln C$$

$$1=(1-u)\cdot\ln\left(C\cdot\sqrt{|x|}\right).$$

В последнее выражение вместо u подставим значение $u=\dfrac{y}{x}$.

Получим общий интеграл:

$$1=\left(1-\frac{y}{x}\right)\cdot\ln\left(C\cdot\sqrt{|x|}\right)$$

Выразив отсюда y, найдём общее решение исходного уравнения :

$$y=x-\frac{x}{\ln\left(C\cdot\sqrt{|x|}\right)}.$$

Задание 5.3. Найти общее решение:

$$y' - \frac{y}{x} = 1 + 2\ln x \, .$$

Это линейное неоднородное уравнение. Рассмотрим однородное:

$$y' - \frac{y}{x} = 0 \, .$$

Решим его:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \, , \qquad \ln|y| = \ln|C| + \ln|x| \, , \qquad y = C \cdot x$$

По методу Лагранжа общее решение линейного неоднородного уравнения ищем в виде $y = C(x) \cdot x$,где $C(x)$ — неизвестная функция.

Подставим это выражение в исходное уравнение:

$$C' \cdot x + C - C = 1 + 2\ln x \, .$$

Получим простейшее дифференциальное уравнение 1-ого порядка:

$$C' \cdot x = 1 + 2\ln x \, , \qquad dC = \left(\frac{1 + 2\ln x}{x} \right) dx \, , \qquad C(x) = \ln x + \ln^2 x + C_1 \, .$$

Окончательно, общее решение нашего уравнения имеет вид :

$$y = x\ln x + x\ln^2 x + Cx \, .$$

Задание 5.4. Найти общее решение:

$$\left(x^2 + y - 4\right)dx + \left(x + y + e^y\right)dy = 0$$

Введём обозначения:

$$f(x, y) = x^2 + y - 4, g(x, y) = x + y + e^y$$

Так как $\frac{\partial f}{\partial y} = 1$; $\frac{\partial g}{\partial x} = 1$, а следовательно $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$, то уравнение является уравнением в полных дифференциалах, а его левая часть есть полный дифференциал $dU(x, y)$, причем

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = x^2 + y - 4 \qquad U(x, y) = \int \left(x^2 + y - 4\right)dx + \varphi(y) = \frac{x^3}{3} + xy - 4x + \varphi(y)$$

Далее:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x + \varphi'(y) = x + y + e^y \, ;$$

т.е.

$$\varphi'(y) = y + e^y \, , \quad \varphi(y) = \frac{y^2}{2} + e^y + C \, , \text{ а, } U(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy - 4x + \frac{y^2}{2} + e^y + C \, .$$

Общий интеграл исходного уравнения имеет вид U (x, y)=C или

$$\frac{x^3}{3} + xy - 4x + \frac{y^2}{2} + e^y = C.$$

Задание 5.5. Найти общее решение:

$$xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$$

Это уравнение 2-ого порядка, не содержащее искомой функции y. Оно допускает понижение порядка уравнения заменой $y' = z(x)$, $y'' = z'(x)$. После замены исходное уравнение превращается в однородное уравнение первого порядка:

$$x \cdot z' = z \ln \frac{z}{x}.$$

Делаем подстановку:

$$z = x \cdot u(x),\ z' = u + x \cdot u'.$$

Тогда

$$u + xu' = u \cdot \ln u.$$

Разделяем переменные:

$$\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x}, \qquad \ln|\ln u - 1| = \ln x + \ln C_1, \qquad \ln u - 1 = C_1 x;$$

$$u = e^{1+C_1 x}. \quad z = x \cdot e^{1+C_1 x}.$$

Так как $z = y'$, то

$$y' = x \cdot e^{1+C_1 x}$$

Находим:

$$y = \int x \cdot e^{1+C_1 x} dx = \frac{1}{C_1}\left(x \cdot e^{1+C_1 x} - \frac{1}{C_1} e^{1+C_1 x} \right) + C_2.$$

Общее решение уравнения имеет вид:

$$y = \frac{1}{C_1} x \cdot e^{1+C_1 x} - \frac{1}{C_1^2} e^{1+C_1 x} + C_2.$$

Задание 5.6. Найти общее решение:

$$y \cdot y'' = y'^2$$

Это уравнение второго порядка, не содержащее независимой переменной x. Оно допускает понижение порядка уравнения заменой:

$$y' = z(y),\ y'' = z'(y)\cdot y' = z'(y)\cdot z$$

После замены, исходное уравнение преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными:

$$y\cdot z'\cdot z = z^2$$

Решаем это уравнение:

$$\frac{dz}{z} = \frac{dy}{y}, \qquad z = C_1 y$$

Так как $z = y'$, то $y' = C_1 y$.

Снова получили уравнение с разделяющимися переменными, поэтому

$$\frac{dy}{y} = C_1 dx, \qquad \ln y = C_1 x + \ln C_2.$$

Значит, $y = C_2 e^{C_1 x}$ — общее решение нашего уравнения.

Задание 5.7. Решить задачу Коши:

$$y'''' - y = 0,\ y(0) = 5,\ y'(0) = 3,\ y''(0) = y'''(0) = 0$$

Составляем характеристическое уравнение и решаем его:

$$\lambda^4 - 1 = 0, \quad (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda^2 + 1) = 0, \qquad \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_{3,4} = \pm i.$$

Общее решение исходного уравнения имеет вид:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

Находим:

$$y' = -C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} - C_3 \sin x + C_4 \cos x$$

$$y'' = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} - C_3 \cos x - C_4 \sin x$$

$$y''' = -C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + C_3 \sin x - C_4 \cos x.$$

Используем начальные условия

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_2 + C_3 = 5 \\ y'(0) &= -C_1 + C_2 + C_4 = 3 \\ y''(0) &= C_1 + C_2 - C_3 = 0 \\ y'''(0) &= -C_1 + C_2 - C_4 = 0 \end{aligned}\right\}$$

Решаем систему:

$$C_1 = \frac{1}{2},\ C_2 = 2,\ C_3 = \frac{5}{2},\ C_4 = \frac{3}{2}.$$

Решение задачи Коши имеет вид:

$$y=\frac{1}{2}e^{-x}+2e^{x}+\frac{5}{2}\cos x+\frac{3}{2}\sin x\ .$$

Задание 5.8. Найти общее решение:

$$y''+y'=5x+\cos 2x\ .$$

Находим корни характеристического уравнения:

$$\lambda^2+\lambda=0;\lambda_1=0;\lambda_2=-1$$

Следовательно общее решение однородного уравнения имеет вид ($y_1=e^{0x}=1$; $y_2=e^{-x}$ — фундаментальная система решений):

$$\tilde{y}=C_1+C_2e^{-x}\ .$$

Правая часть уравнения представляет собой сумму функций $f_1(x)=5x$ и $f_2(x)=\cos 2x$.

Для нахождения частных решений, соответствующих этим функциям составляем:

для $5x$:

$\alpha=0$, S=1 (кратность числа α среди корней характеристического уравнения)

$$y_1^*=x^1(Ax+B)=Ax^2+Bx\ ;$$

для $\cos 2x$:

$\alpha=0,\beta=2;\alpha\pm i\beta=\pm 2i;s=0$ (кратность числа $\alpha\pm i\beta$ среди корней характеристического уравнения).

$$y_2^*=A_1\cos 2x+B_1\sin 2x;$$

т.е. $y^*=Ax^2+Bx+A_1\cos 2x+B_1\sin 2x$ — частное решение нелинейного уравнения с неизвестными коэффициентами.

Подставляем y^* в исходное уравнение:

$$2A-4A_1\cos 2x-4B_1\sin 2x+2Ax+B-2A_1\sin 2x+2B_1\cos 2x\equiv 5x+\cos 2x$$

Для выполнения тождества необходимо равенство коэффициентов:

$$\left.\begin{aligned} 2A&=5\\ 2A+\ \ B&=0\\ -4A_1+2B_1&=1\\ -4B_1-2A_1&=0 \end{aligned}\right\}$$

Поэтому: $A=\frac{5}{2}; B=-5; A_1=-\frac{1}{5}; B_1=\frac{1}{10}$.

Таким образом, частное решение исходного уравнения имеет вид:

$$y^*=\frac{5}{2}x^2-5x-\frac{1}{5}\cos 2x+\frac{1}{10}\sin 2x\ ,$$

а его общее решение:

$$y=\tilde{y}+y^*=C_1+C_2e^{-x}+\frac{5}{2}x^2-5x-\frac{1}{5}\cos 2x+\frac{1}{10}\sin 2x.$$

Задание 5.9. Найти общее решение:

$$y'''+y''=\frac{x-1}{x^2}.$$

Находим общее решение однородного уравнения:

$$\lambda^3+\lambda^2=0 \qquad \lambda_{1,2}=0; \lambda_3=-1. \qquad \tilde{y}=C_1+C_2x+C_3e^{-x}.$$

Частное решение неоднородного уравнения по методу Лагранжа имеет вид:

$$y^*=C_1(x)+C_2(x)x+C_3(x)e^{-x}.$$

Для нахождения функций $C_1(x); C_2(x); C_3(x)$ составляем систему:

$$\left.\begin{aligned} C_1'(x)+C_2'(x)x+C_3'(x)e^{-x}&=0 \\ C_2'(x)-C_3'(x)e^{-x}&=0 \\ C_3'(x)e^{-x}&=\frac{x-1}{x^2} \end{aligned}\right\}$$

Тогда:

$$C_3'=\frac{x-1}{x^2}e^x \Rightarrow \quad C_3=\int\frac{x-1}{x^2}e^x dx=\int d\,\frac{e^x}{x}=\frac{e^x}{x}+A_1$$

$$C_2'=C_3'(x)e^{-x}=\frac{x-1}{x^2}\Rightarrow \quad C_2=\int\frac{x-1}{x^2}dx=\ln|x|+\frac{1}{x}+A_2$$

$$C_1'=-C_2'(x)x-C_3'(x)e^{-x}=-\frac{x-1}{x}-\frac{x-1}{x^2}=-1+\frac{1}{x^2}\Rightarrow$$

$$C_1=\int\left(-1+\frac{1}{x^2}\right)dx=-x-\frac{1}{x}+A_3$$

Таким образом, общим решением уравнения является функция:

$$y = \left(-x - \frac{1}{x}\right)\cdot 1 + x\left(\ln|x| + \frac{1}{x}\right) + \frac{e^x}{x}\cdot e^{-x} + A_1 + A_2 x + A_3 e^{-x} =$$

$$= B_1 + B_2 x + B_3 e^{-x} + x\ln|x|.$$

Здесь A_i, B_i ($i = 1, 2, 3$).

Задание 5.10. Методом исключения найти общее решение системы:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 5y + 4t + 1 \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y + t \end{cases}$$

Первое уравнение продифференцируем по t:

$$x'' = 4x' - 5y' + 4$$

Из второго уравнения подставим в полученное выражение y':

$$x'' = 4x' - 5(x - 2y + t) + 4 = 4x' - 5x + 10y - 5t + 4$$

Из первого выразим $5y = -x' + 4x + 4t + 1$ и подставим его в последнее уравнение:

$$x'' = 4x' - 5x + 2(-x' + 4x + 4t + 1) + 4 - 5t = 2x' + 3x + 3t + 6.$$

Окончательно получим:

$$x'' - 2x' - 3x = 3t + 6$$

Решаем это уравнение:

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0\,; \quad \lambda_1 = -1; \lambda_2 = 3$$

$$\tilde{x} = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t};$$

$$x^* = At + B$$

$$-2A - 3At - 3B \equiv 3t + 6$$

$$\left.\begin{matrix} -3A = 3 \\ -2A - 3B = 6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A = -1; B = -\frac{4}{3}$$

$$x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} - t - \frac{4}{3}$$

Из выражения для y получим:

$$y=\frac{1}{5}\left(C_1e^{-t}-3C_2e^{3t}+1+4C_1e^{-t}+4C_2e^{3t}-4t-\frac{16}{3}+4t+1\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\left(5C_1e^{-t}+C_2e^{3t}-\frac{10}{3}\right)=C_1e^{-t}+\frac{C_2}{5}e^{3t}-\frac{2}{3}$$

Таким образом, общее решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} x=C_1e^{-t}+C_2e^{3t}-t-\dfrac{4}{3} \\ y=C_1e^{-t}+\dfrac{C_2}{5}e^{3t}-\dfrac{2}{3} \end{cases}.$$

Задание 5.11. а) Методом характеристического уравнения найти общее решение системы:

$$\frac{dX}{dt}=A\cdot X,\qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Составляем характеристическое уравнение и решаем его:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix}=0,\qquad \lambda^2-6\lambda+5=0\Rightarrow\lambda_1=1;\lambda_2=5$$

Для $\lambda_1=1$ составляем систему:

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 1 \\ 3 & 4-1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}=0\Rightarrow\qquad \left.\begin{matrix} \delta_1+\delta_2=0 \\ 3\delta_1+3\delta_2=0 \end{matrix}\right\}\Rightarrow\quad \delta_2=-\delta_1.$$

Пусть $\delta_1=1,$ тогда $\delta_2=-1$ и

$$\vec{X}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\cdot e^{1\cdot t}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\cdot e^{t}.$$

Для $\lambda_2=5$:

$$\begin{pmatrix} 2-5 & 1 \\ 3 & 4-5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}=0\Rightarrow\qquad \left.\begin{matrix} -3\delta_1+\delta_2=0 \\ 3\delta_1-\delta_2=0 \end{matrix}\right\}\Rightarrow\quad \delta_2=3\delta_1\ .$$

Пусть $\delta_1=1$, тогда $\delta_2=3$ и

$$\vec{X}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\cdot e^{5t}.$$

Общим решением исходной системы будет вектор функция:

$$\vec{X} = C_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{t} + C_2\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}e^{5t}$$ или в координатной форме:

$$\begin{cases} x_1 = C_1e^{t} + C_2e^{5t} \\ x_2 = -C_1e^{t} + 3C_2e^{5t} \end{cases}$$

б) С помощью операционного исчисления найти общее решение системы:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

Применим преобразование Лапласа к обеим частям каждого уравнения:

$$\begin{cases} L(\dot{x}_1) = L(2x_1 + x_2) \\ L(\dot{x}_2) = L(3x_1 + 4x_2) \end{cases}$$

Пользуясь свойством линейности преобразования и теоремой о дифференцировании оригинала:

$$L(f'(t)) = pL(f(t)) - f(0)$$

получим:

$$\begin{cases} pL(x_1) - x_1(0) = 2L(x_1) + L(x_2) \\ pL_1(x_2) - x_2(0) = 3L(x_1) + 4L(x_2) \end{cases}$$

Т. к. $x_1(0)$ и $x_2(0)$ не заданы, то считаем их произвольными величинами:

$$x_1(0) = C_1'; x_2(0) = C_2'$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} L(x_1)\cdot(p-2) - L(x_2) = C_1' \\ -3L(x_1) + (p-4)\cdot L(x_2) = C_2' \end{aligned}\right\}$$

Откуда

$$\begin{cases} L(x_1) = \dfrac{C_1'p + C_2' - 4C_1'}{p^2 - 6p + 5} = \dfrac{C_1'p + C_2' - 4C_1'}{(p-1)(p-5)} \\ L(x_2) = \dfrac{C_2'p + 3C_1' - 2C_2'}{p^2 - 6p + 5} = \dfrac{C_2'p + 3C_1' - 2C_2'}{(p-1)(p-5)} \end{cases}$$

Для восстановления оригиналов $x_1(t)$ и $x_2(t)$ разложим дроби на простейшие:

$$\frac{C_1'p + C_2' - 4C_1'}{(p-1)(p-5)} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p-5} = \frac{A(p-5) + B(p-1)}{(p-1)(p-5)}$$

$$\frac{C_2'p + 3C_1' - 2C_2'}{(p-1)(p-5)} = \frac{A'}{p-1} + \frac{B'}{p-5} = \frac{A'(p-5) + B'(p-1)}{(p-1)(p-5)}$$

Тогда

$$A = \frac{3C_1' - C_2'}{4}; B = \frac{C_1' + C_2'}{4}; A' = -\frac{3C_1' - C_2'}{4}; B' = \frac{3}{4}(C_1' + C_2')$$

Поскольку C_1' и C_2' — произвольные, то можно ввести обозначения:

$$\frac{3C_1' - C_2'}{4} = C_1; \frac{C_1' + C_2'}{4} = C_2$$

Поэтому: $A = C_1; B = C_2; A' = -C_1; B' = 3C_2$

Так как для изображения $\frac{1}{p-\alpha}$ оригиналом является $e^{\alpha t}$, то получаем общее решение системы:

$$\begin{cases} x_1(t) = C_1 e^t + C_2 e^{5t} \\ x_2(t) = -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t} \end{cases}$$

Решение типового варианта контрольной работы N6.

Задание 6.1. Исследовать сходимость числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$.

Решение: Воспользуемся признаком Д'Аламбера:

$$a_n = \frac{3^n}{n!}, \ a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{3^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot 3^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{3^n \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}{3^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n(n+1)} = \lim_{n \to \infty} \frac{3}{n+1} = 0 < 1$$

Следовательно, ряд сходится.

Задание 6.2. Исследовать сходимость числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6n-5}{2n+1}\right)^n$.

Решение. Применим радикальный признак Коши: $a_n = \left(\frac{6n-5}{2n+1}\right)^n$,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{6n-5}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{6n-5}{2n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{6-\frac{5}{n}}{2+\frac{1}{n}} = 3 > 1,$$ т.о. ряд расходится.

Задание 6.3. Исследовать сходимость числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

Решение. Применим интегральный признак Коши. Функция $f(x) = \frac{1}{x^4}$ удовлетворяет условиям признака. Исследуем несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^4}dx = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_1^{b} x^{-4}dx = \lim\limits_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{3x^3}\right)\Big|_1^b = \lim\limits_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{3b^3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$. Т.к. интеграл сходится, то сходится и данный ряд.

Задание 6.4. Исследовать сходимость числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n\sqrt{n}+4}.$$

Решение. Воспользуемся предельным признаком сравнения.

Сравним данный ряд и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, который расходится. $a_n = \frac{2n+3}{n\sqrt{n}+4}$,

$b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{n\sqrt{n}+4} \cdot \frac{\sqrt{n}}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n\sqrt{n}+3\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n}}{1+\frac{4}{n\sqrt{n}}} = 2.$$

Значит, исследуемый ряд расходится, так же как и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Задание 6.5. Исследовать сходимость числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3n^2-1}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{3n^2-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{3-\dfrac{1}{n^2}} = \dfrac{1}{3}$. Ряд расходится, т.к. не выполняется необходимый признак сходимости рядов $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Задание 6.6. Исследовать на сходимость, абсолютную и условную знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{5^n}$.

Решение. Данный знакочередующийся ряд сходится по признаку Лейбница,
т.к. $\dfrac{1}{5} > \dfrac{1}{5^2} > \ldots > \dfrac{1}{5^n} > \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{5^n} = 0$. Этот ряд сходится абсолютно, т.к. ряд из абсолютных величин его членов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{5^n}$ сходится по признаку Коши, т.к. $\lim \sqrt[n]{\dfrac{1}{5^n}} = \dfrac{1}{5} < 1$.

Задание 6.7. Исследовать на сходимость, условную или абсолютную сходимость знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{2+(-1)^n}{n}$.

Решение. Представим данный ряд в виде суммы двух рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{2+(-1)^n}{n} = 2 \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$. Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$ выполняется признак Лейбница $1 > \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{3} > \ldots \dfrac{1}{n} > \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, т.е. ряд сходится. Т.к. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$, составленный из абсолютных величин ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$, есть гармонический ряд (расходящийся), то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$ сходится условно. Исходный ряд $\sum\limits_{n+1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{2+(-1)^n}{n}$ как сумма сходящегося условно ряда $2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ и расходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, расходится.

Задание 6.8. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n(n+1)}$.

Решение. Для данного степенного ряда вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^n$, $a_n=\frac{1}{3^n(n+1)}$,

$a_{n+1}=\frac{1}{3^{n+1}(n+2)}$.

Радиус сходимости $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}(n+2)}{3^n(n+1)}=3\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}=3$.

Следовательно, ряд сходится в интервале (-3; 3). Исследуем сходимость ряда на концах интервала. Положим сначала x = 3.

Получим числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{3^n(n+1)}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$, который расходится

(сравним с гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$). Возьмем теперь x = -3. Получим

знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{3^n(n+1)}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$, который сходится

условно по признаку Лейбница
(см. решение примера 6.7.). Таким образом, область сходимости ряда - полуинтервал $x\in[-3;3)$.

Задание 6.9. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{(5^n+1)}$.

Решение. Для данного степенного ряда вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$, $a_n=\frac{1}{(5^n+1)}$,

$a_{n+1}=\frac{1}{(5^{n+1}+1)}$, x_0 = -2. Определим радиус сходимости ряда

$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(5^{n+1}+1)}{(5^n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5\cdot5^n+1}{5^n+1}=5$. Таким образом, ряд сходится в интервале (x_0 - R, x_0 + R), т.е. (-2-5;-2+5) или (-7;3). Исследуем сходимость ряда на концах интервала. Возьмем x=3. Получим числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(3+2)^n}{(5^n+1)}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{5^n}{5^n+1}$.

Предел общего члена этого ряда $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^n}{5^n+1}=1\neq 0$, следовательно, ряд расходится. При x = -7 получим знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-7+2)^n}{(5^n+1)}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 5^n}{5^n+1}$, для которого не выполняется признак сходимости Лейбница $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^n}{5^n+1}=1\neq 0$. Значит, и при x = -7 данный степенной ряд расходится. Таким образом, исходный степенной ряд сходится в интервале $x\in(-7;3)$.

Замечание. Область сходимости степенного ряда можно находить и как для произвольного функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$. В этом примере $u_n(x)=\frac{(x+2)^n}{5^n+1}$. По признаку Д'аламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x+2|^{n+1}}{\left|5^{n+1}+1\right|}\cdot\frac{\left|5^n+1\right|}{|x+2|^n}=\frac{1}{5}|x+2|<1.$$

Отсюда $-5<x+2<5,\ -7<x<3$. Далее, как и выше, последует сходимость в точках $x=-7$ и $x=3$.

Задание 6.10. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x)=\frac{1}{x}$ в окрестности точки $x_0=-3$. Найти область сходимости полученного ряда.

Решение. Искомое разложение можно найти с помощью формулы

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+$$

$$+\Lambda+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\Lambda \quad ,$$

положив в ней $x_0=-3$ и вычислив значения производных функции $f(x)=\frac{1}{x}$ при $x=-3$. Но проще получить разложение, используя известное разложение для функции

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\Lambda+x^n+\Lambda \ ,$$

в котором ряд справа сходится к функции $\frac{1}{1-x}$ в интервале (-1,1).

Представим $\frac{1}{x}=\frac{1}{(x+3)-3}=-\frac{1}{3-(x+3)}=-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x+3}{3}}$. Применяя указанное разложение, получим

$$\frac{1}{x}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x+3}{3}}=-\frac{1}{3}\left(1+\frac{x+3}{3}+\left(\frac{x+3}{3}\right)^2+\Lambda+\left(\frac{x+3}{3}\right)^n+\Lambda\right).$$

Так как, ряд, который использовали для разложения, сходится для $-1<x<1$, то данный ряд сходится для $-1<\frac{x+3}{3}<1$, отсюда $-3<x+3<3$, $-6<x<0$. Таким образом, полученный степенной ряд является рядом Тейлора функции $f(x)=\frac{1}{x}$ в окрестности точки $x_0=-3$ и его областью сходимости является интервал (-6,0).

Задание 6.11. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить определенный интеграл $\int_0^{0.15}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}dx$ с точностью до 0.001.

Решение. Воспользуемся рядом Маклорена для $\operatorname{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\Lambda$, тогда $\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}-\frac{x^6}{7}+\Lambda$.

Почленно интегрируя этот ряд в промежутке [0;0.5], получим

$$\int_0^{0.5} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx = \int_0^{0.5} \left(1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} - \frac{x^6}{7} + \Lambda \right) dx =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^5}{5^2} - \frac{x^7}{7^2} + \Lambda \right) \Bigg|_0^{0.5} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3 \cdot 3^2} + \frac{1}{2^5 \cdot 5^2} - \frac{1}{2^7 \cdot 7^2} + \Lambda$$

Полученный числовой ряд есть ряд Лейбница. Погрешность, происходящая от отбрасывания всех членов ряда, начиная с четвертого $\left| R_3 \right| \le a_4 = \frac{1}{2^7 \cdot 7^2} < 0.001$, поэтому, чтобы достичь требуемой точности достаточно взять три первых слагаемых $\int_0^{0.5} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3 \cdot 3^2} + \frac{1}{2^5 \cdot 5^2} \approx 0.487$

Задание 6.12. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $\omega = 2\pi$ функцию

$$f(x) = \begin{cases} \pi + x, -\pi \le x < 0, \\ 0, 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

Решение. Вычислим коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} (\pi + x) dx = \frac{1}{\pi} \frac{(\pi + x)^2}{2} \Big|_{-\pi}^{0} = \frac{1}{\pi} \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} (\pi + x) \cos nx dx = \begin{vmatrix} u = \pi + x, du = dx, \\ dv = \cos nx dx, v = \frac{1}{x} \sin nx, \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\left(\frac{\pi + x}{n} \sin nx \right) \Bigg|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{0} \sin nx dx \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi n^2} \cos nx \Bigg|_{-\pi}^{0} = \frac{1}{\pi n^2} \left(1 - (-1)^n \right) = \frac{2}{\pi (2n - 1)^2},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(\pi + x)\sin nx dx = \left| \begin{array}{l} u = \pi + x, du = dx, \\ dv = \sin nx dx, v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left(-\frac{\pi + x}{n}\cos nx\right)\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\cos nx dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n} + \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0}\right) = -\frac{1}{n}.$$

Ряд Фурье для данной функции запишется в виде

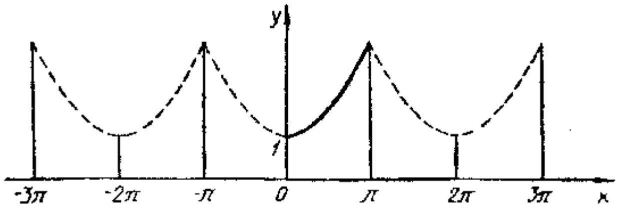
$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}.$$

Задание 6.13. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = 8^{x/2}$, заданную в интервале $(0; \pi)$, продолжив (доопределив) ее четным и нечетным образом. Построить графики для каждого продолжения.

Решение. Продолжим данную функцию четным образом. Тогда:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 8^{x/2} dx = \frac{2}{\pi}\cdot 2\cdot\frac{8^{x/2}}{\ln 8}\Big|_0^{\pi} = \frac{4}{\pi\ln 8}\left(8^{\pi/2} - 1\right),$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 8^{x/2}\cos nx dx.$$



Найдем неопределенный интеграл $\int 8^{x/2}\cos nx dx,$ выполнив дважды интегрирование по частям:

$$\int 8^{x/2}\cos nx\,dx = \left| \begin{matrix} u = 8^{x/2},\ du = \frac{1}{2}\cdot 8^{x/2}\ln 8dx, \\ dv = \cos nxdx,\ v = \frac{1}{n}\sin nx \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{n}8^{x/2}\sin nx - \frac{\ln 8}{2n}\int 8^{x/2}\sin nxdx = \left| \begin{matrix} u = 8^{x/2},\ du = \frac{1}{2}\cdot 8^{x/2}\ln 8dx, \\ dv = \sin nxdx,\ v = -\frac{1}{n}\cos nx, \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{n}\cdot 8^{x/2}\sin nx + \frac{\ln 8}{2n^2}\cdot 8^{x/2}\cos nx - \frac{\ln^2 8}{4n^2}\int 8^{x/2}\cos nxdx,$$

$$\left(1 + \frac{\ln^2 8}{4n^2}\right)\int 8^{x/2}\cos nxdx = \frac{1}{n}\cdot 8^{x/2}\sin nx + \frac{\ln 8}{2n^2}\cdot 8^{x/2}\cos nx,$$

$$\int 8^{x/2}\cos nxdx = \frac{4n^2}{4n^2 + \ln^2 8}\left(\frac{1}{n}8^{x/2}\sin nx + \frac{\ln 8}{2n^2}\cdot 8^{x/2}\cos nx\right).$$

Вычислим коэффициенты a_n:

$$a_n = \frac{8n^2}{\pi\left(4n^2 + (\ln 8)^2\right)}\left(\frac{1}{n}\cdot 8^{x/2}\sin nx + \frac{\ln 8}{2n^2}\cdot 8^{x/2}\cos nx\right)\Bigg|_0^{\pi} =$$

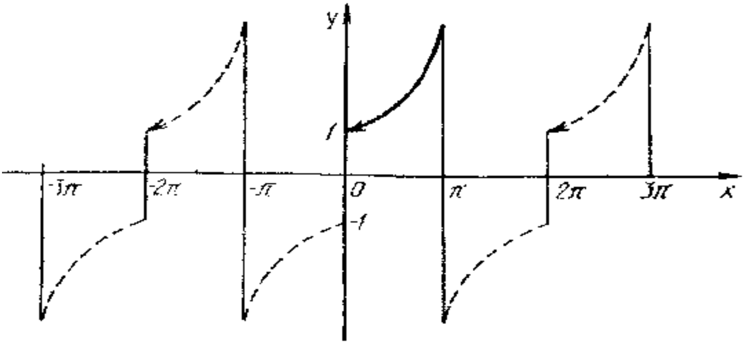
$$= \frac{4\ln 8\left(8^{\pi/2}(-1)^n - 1\right)}{\pi\left(4n^2 + (\ln 8)^2\right)}$$

Следовательно, разложение данной функции по косинусам имеет вид:

$$8^{x/2} = \frac{2\left(8^{\pi/2} - 1\right)}{\pi\ln 8} + \frac{4\ln 8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^{\pi/2}\cdot(-1)^n - 1}{4n^2 + (\ln 8)^2}\cos nx.$$

Теперь продолжим данную функцию нечетным образом. Тогда:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 8^{x/2}\sin nxdx,$$



Следовательно, разложение данной функции по синусам имеет вид:

$$8^{\pi/2} = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^{\pi/2}(-1)^{n+1}}{4n^2+\ln^2 8}\, n\sin nx.$$

Задание 6.14. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $\omega = 2$) функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, -1 \le x < 0, \\ 0{,}5, x = 0, \\ x, 0 < x \le 1. \end{cases}$$

Решение. Вычисляем коэффициенты

$$a_0 = \int_{-1}^{0} dx + \int_{0}^{1} x\,dx = x\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{1} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

$$a_n = \int_{-1}^{0}\cos(n\pi x)dx + \int_{0}^{1} x\cos(n\pi x)dx = \left| \begin{matrix} u = x, du = dx, \\ dv = \cos(n\pi x)dx, v = \dfrac{\sin(n\pi x)}{\pi n} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\sin(n\pi x)\Big|_{-1}^{0} + \frac{1}{n\pi}x\sin(n\pi x)\Big|_{0}^{1} - \frac{1}{n\pi}\int_{0}^{1}\sin(n\pi x)dx = \frac{1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x)\Big|_{0}^{1} =$$

$$= \frac{1}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right),$$

$$a_n = \frac{-2}{\pi^2(2n-1)^2}$$

$$b_n = \int_{-1}^{0} \sin(n\pi x)dx + \int_{0}^{1} x\sin(n\pi x)dx = \begin{vmatrix} u = x, du = dx, \\ dv = \sin(n\pi x)dx, v = \frac{1}{n\pi}\cos(n\pi x) \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\cos(n\pi x)\Big|_{-1}^{0} - -\frac{x}{n\pi}\cos(n\pi x)\Big|_{0}^{1} + \frac{1}{n\pi}\int_{0}^{1}\cos(n\pi x)dx =$$

$$-\frac{1}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right) - \frac{1}{n\pi}(-1)^n - \frac{1}{n^2\pi^2}\sin(n\pi x)\Big|_{0}^{1} = \frac{(-1)^n}{n\pi} - \frac{1}{n\pi} - \frac{(-1)^n}{n\pi} = -\frac{1}{n\pi}.$$

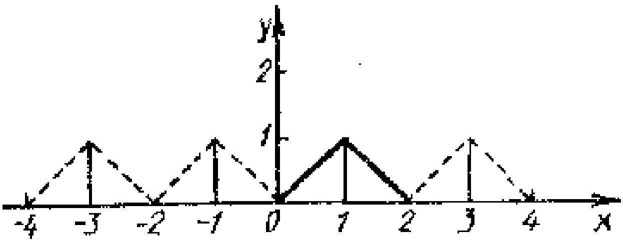
В итоге получаем следующий ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{3}{4} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2n-1)\pi x)}{(2n-1)^2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\pi x)}{n}.$$

Задание 6.15. Разложить в ряд Фурье по косинусам функцию

$$f(x) = \begin{cases} x, 0 \le x \le 1, \\ 2 - x, 1 < x \le 2 \end{cases}$$

на отрезке [0;2] и найти сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$.



Решение. Продолжим функцию четным образом и вычислим коэффициенты Фурье:

$$a_0=\int_0^1 x dx+\int_1^2 (2-x)dx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1+\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2=\frac{1}{2}+(4-2)-\left(2-\frac{1}{2}\right)=1,$$

$$a_n=\int_0^1 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx+\int_1^2 (2-x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\left|\begin{array}{l}u=x, du=dx,\\ dv=\cos\frac{n\pi x}{2}dx, v=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\end{array}\right|+$$

$$+\left|\begin{array}{l}u=2-x, du=-dx,\\ dv=\cos\frac{n\pi x}{2}dx, v=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{2x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^1-\frac{2}{n\pi}\int_0^1\sin\frac{n\pi x}{2}dx+\frac{2(2-x)}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_1^2+\frac{2}{n\pi}\int_1^2\sin\frac{n\pi x}{2}dx=$$

$$=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^1-\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_1^2=-\frac{4}{\pi^2(2n+1)^2}.$$

Следовательно,

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}.$$

Полагая $x=0$, получаем:

$$0=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

Таким образом, с помощью ряда Фурье мы нашли сумму числового ряда.

Решение типового варианта контрольной работы № 7

Задание 7.1. Для доставки экстренного сообщения отправлены различными маршрутами два курьера. Вероятности своевременной доставки сообщения курьерами равны 0,8 и 0,6 соответственно. Найти вероятности того, что:
а) своевременно успеют оба курьера; б) только один курьер;
в) хотя бы один курьер; г) оба курьера опоздают.

Решение. Обозначим через A, B случайные события, наступающие в случаях, когда успевают первый или второй курьеры соответственно, $p(A)=0{,}8$, $p(B)=0{,}6$. Введем также события: C - успевают оба курьера, D - только один курьер, E - хотя бы один курьер, F - оба курьера опоздают.

а) Представим событие в виде $C=A\cdot B$. Применяя теорему умножения вероятностей и учитывая очевидную из условия независимость событий A, B находим

$$P(C) = P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}8 \cdot 0{,}6$$

б) Согласно условию $D=A\cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$ (чертой обозначены противоположные события). По теореме сложения вероятностей с учетом несовместности слагаемых имеем

$$P(D) = P(A\cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B) = P(A\cdot \bar{B}) + P(\bar{A} \cdot B)$$

Вновь применяя теорему умножения при независимых сомножителях находим

$$P(D) = P(A)\cdot P(\bar{B}) + P(\bar{A})\cdot P(B) = P(A) \cdot (1- P(B)) + (1- P(A)) \cdot P(B) =$$
$$= 0{,}8(1-0{,}6) + (1-0{,}8) = 0{,}28.$$

в) Здесь $D = A + B$. Слагаемые A, B совместны, поэтому теорема сложения запишется

$P(D) = P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A\cdot B) = P(A) + (B) - P(A) \cdot P(B) = 0{,}8+0{,}6-0{,}8\cdot 0{,}6 = 0{,}92$.

г) По условию $F = \bar{A} \cdot \bar{B}$, откуда $P(F) = P(\bar{A} \cdot \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = (1-P(A))(1-P(B)) =0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08$.

Заметим также, что события $D + F$ является достоверным, поэтому $P(D + F) = 1$. Поскольку D, F несовместны, то $P(D + F) = P(D) + P(F)$, откуда можно также найти вероятность $P(F) = 1- P(D) = 0{,}08$.

Задание 7.2. На сборку телевизоров поступают однотипные кинескопы от двух заводов, поставляющих соответственно 60% и 40% кинескопов. Вероятность для кинескопа оказаться нестандартным равна: 0,1 - на первом заводе, 0,2 - на втором. Найти вероятность того, что:

а) очередной на сборке кинескоп будет нестандартным;

б) оказавшийся нестандартным кинескоп изготовлен вторым заводом.

Решение. Обозначим через H_i ($i = 1,2$) гипотезу - кинескоп изготовлен i-тым заводом. Очевидно, что H_1, H_2 несовместны и $H_1 + H_2 = I$ -

достоверное событие. Из условия видно также, что $P(H_1) = 0,6$, $P(H_2) = 0,4$. Обозначим через А событие: очередной кинескоп окажется нестандартным.

а) По формуле полной вероятности имеем: $P(A) = P(A / H_1) \cdot P(H_1) + P(A / H_2) \cdot P(H_2)$.

Согласно условию $P(A / H_1) = 0,1$, $P(A / H_2) = 0,2$,

поэтому $P(A) = 0,1 \cdot 0,6 + 0,2 \cdot 0,4 = 0,14$.

б) Для вычисления искомой вероятности $P(H_2 / A)$ используем формулу Байеса

$$P(H_2 / A) = \frac{P(A / H_1) \cdot P(H_1)}{P(A)} = \frac{0,2 \cdot 0,4}{0,14} = 0,57.$$

Задание 7.3. Построить ряд распределения, функцию распределения и её график, и найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X - числа наступлений случайного события A в указанный ниже серии независимых испытаний:

поступила партия из 3 изделий, каждое из которых может оказаться бракованным (событие А, $P(A) = 0,4$).

Решение. Случайная величина (СВ)X - число бракованных изделий - может принимать значения 0, 1, 2, 3. Вероятности этих значений вычисляются по формуле Бернулли при $p = 0,4$, $q = 1 - 0,4 = 0,6$.

$p_0 = C_3^0 \cdot 0,4^0 \cdot 0,6^3 = 0,216$, $\quad p_1 = C_3^1 \cdot 0,4 \cdot 0,6^2 = 0,432$,

$p_2 = C_3^2 \cdot 0,4^2 \cdot 0,6 = 0,288$, $\quad p_3 = C_3^3 \cdot 0,4^3 \cdot 0,6^0 = 0,064$.

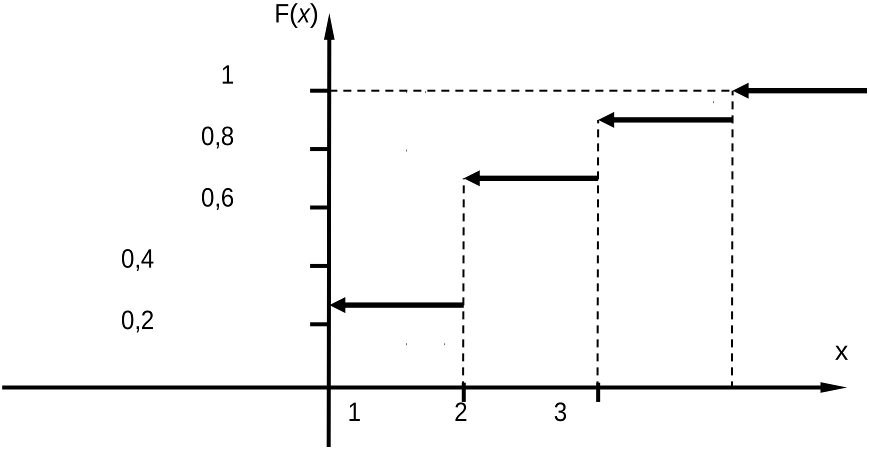
Ряд распределения СВ X имеет вид:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,216	0,432	0,288	0,064

Функция распределения по определению равна $F(x) = P(X < x)$ и запишется:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 0{,}216, & 0 < x \le 1 \\ 0{,}648, & 1 < x \le 2 \\ 0{,}936, & 2 < x \le 3 \\ 1, & 3 < x \end{cases}$$

График показан на рисунке.



Вычисляем математическое ожидание и дисперсию:

$$M[x] = \sum_{i=0}^{3} x_i p_i = 0 \cdot 0{,}216 + 1 \cdot 0{,}432 + 2 \cdot 0{,}288 + 3 \cdot 0{,}064 = 1{,}2.$$

$$M[x^2] = \sum_{i=0}^{3} x_i^2 \cdot p_i = 0^2 \cdot 0{,}216 + 1^2 \cdot 0{,}432 + 2^2 \cdot 0{,}288 + 3^2 \cdot 0{,}064 = 2{,}16.$$

$D[x] = 2{,}16 - (1{,}2)^2 = 0{,}72.$

Задание 7.4. По заданной функции распределения $F(x)$ СВ X найти плотность распределения и построить её график. Вычислить вероятность $P(a \le X \le в)$ попадания значения СВ в заданный интервал, математическое ожидание и дисперсию.

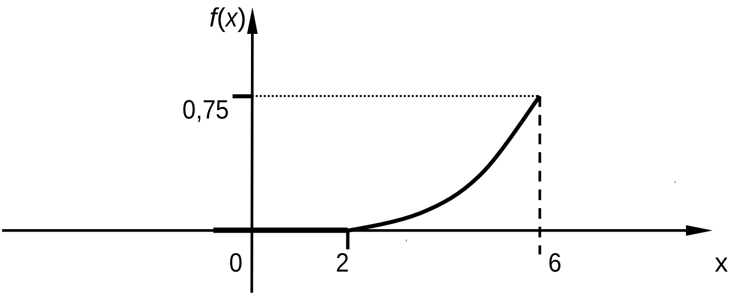
$$F(x)=\begin{cases}0, & x \le 2\\ \dfrac{(x-2)^3}{64}, & 2 < x \le 6\\ 1, & x > 6\end{cases}$$

a = -3; $в$ = 5.

Решение. Плотность распределения определяется по формуле

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x < 2\\ \dfrac{3}{64}\cdot(x-2)^2, & 2 < x < 6\\ 0, & x > 6\end{cases}$$

и показана на рисунке



Искомая вероятность равна:

$$P(-3 \le X \le 5)=F(5)-F(-3)=\frac{(5-2)^3}{64}-0=0{,}42$$

Математическое ожидание и дисперсия запишутся:

$$M[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\frac{3}{64}\int_2^6 x(x-2)^2\,dx=5,$$

$$M[X^2]=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx=\frac{3}{64}\int_2^6 x^2(x-2)^2\,dx=\frac{83}{5},$$

$$D[X]=M[X^2]-M^2[X]=\frac{6264}{25}=250{,}5.$$

Задание 7.5. Найти вероятность попадания в заданный интервал значения нормаль-

ного распределённой СВ X, если известно её математическое ожидание M[x] и дис-
персия D[x].

M[x] = 4; D[x] = 25; a = -7; $в$ = 9.

Решение. Искомая вероятность вычисляется по формуле

$$P(a \le X \le в) = \Phi\left(\frac{в - M[X]}{\sigma[X]}\right) - \Phi\left(\frac{a - M[X]}{\sigma[X]}\right)$$

Среднеквадратическое отклонение $\sigma[x] = \sqrt{D[x]} = 5,$ поэтому

$$P(-5 \le X \le 9) = \Phi\left(\frac{9-4}{5}\right) - \Phi\left(\frac{-7-4}{5}\right) = \Phi(1) - \Phi(-2{,}2) = \Phi(1) + \Phi(2{,}2) =$$

Здесь учтена нечётность вспомогательной функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dx$

Берём её значение из таблицы: Φ(1) = , Φ(2,2) = ,
откуда P = .

Задание 7.6. В партии из n деталей каждая может оказаться стандартной с вероятностью p. С помощью локальной и интегральной формул Муавра-Лапласа вычислить вероятность того, что число стандартных деталей в партии будет:

а) равно m ; б) заключено между m_1 и m_2 .

p =0,4; n = 350; m = 146; m_1 = 135; m_2 = 152.

Решение. а) Искомая вероятность при $n >> 1$, $np >> 1$ вычисляется по локальной формуле (q = 1 - p)

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{m - np}{\sqrt{npq}}\right) = \frac{1}{\sqrt{350 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6}} \varphi\left(\frac{146 - 140}{\sqrt{350 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6}}\right) = 0{,}11\varphi(0{,}66)$$

где вспомогательная функция имеет вид: $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Для $x = 0{,}66$ имеем после вычислений $p_1 = 0{,}03$.

б) Вероятность вычисляется с помощью интегральной формулы

$$P_2=\Phi\left(\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}\right)=\Phi\left(\frac{152-140}{\sqrt{350\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6}}\right)-\Phi\left(\frac{135-140}{\sqrt{350\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6}}\right)=$$

$$=\Phi(1{,}31)-\Phi(-0{,}55)=\Phi(1{,}31)+\Phi(0{,}55)$$

откуда с помощью таблицы для $\Phi(x)$ и имеем $P_2 =$ $+$ $=$

Задание 7.7. Двумерная случайная величина (X,Y) имеет плотность распределения

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{a^2b^2}(bx+ay), & (x,y)\in D(0\le x\le a,\ \ 0\le y\le b)\\ 0, & (x,y)\in\bar{D}\end{cases}$$

Найти вероятность попаданий значения (X,Y) в область $x_1\le x\le x_2$, $y_1\le y\le y_2$, вероятность попадания значения X в интервал $x_1\le x\le x_2$, математическое ожидание
M[x] и условное математическое ожидание M[Y/X = x].
$a = 2$, $в = 5$, $x_1 = 1$, $x_2 = 9$, $y_1 = -4$, $y_2 = 3$.

Решение. Найдём вероятность попадания в область S($x_1\le x\le x_2$, $y_1\le y\le y_2$) по формуле $P(x_1\le X\le x_2,\ y_1\le Y\le y_2)=\iint\limits_S f(x,y)dxdy.$

При вычислении интеграла учитывается та часть области S, где $f\neq 0$, т.е. $1\le x\le 2,\quad 0\le y\le 3$:

$$P=\int_0^3 dy\int_1^2\frac{1}{100}(5x+2y)dx=\frac{1}{100}\int_0^3\left(\frac{5}{2}x^2+2yx\right)\Bigg|_1^2 dy=\frac{1}{100}\int_0^3\left(\frac{15}{2}+6y\right)dy=$$

$$=\frac{1}{100}\left(\frac{15}{2}y+3y^2\right)\Bigg|_0^3=0{,}495.$$

Плотность вероятности для составляющей X имеет вид: $f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$.

Если $x<0$ или $x>2$, то $f(x,y)=0$ и $f_1(x)=0$. При $0\le x\le 2$ находим

$$f_1(x)=\int_0^5\frac{1}{100}(5x+2y)dy=\frac{x+1}{4}$$

Таким образом плотность имеет вид:

$$f_1(x)=\begin{cases}(x+1)/4, & 0\le x\le 2\\ 0, & x<0\ \text{ или }\ x>2\end{cases}\qquad(1)$$

Тогда

$$P(1 \le x \le 9) = \int_1^9 f_1(x)dx = \frac{1}{4}\int_1^2 (x+1)dx = \frac{5}{8} = 0{,}62$$

$$M[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x)dx = \frac{1}{4}\int_0^2 x(x+1)dx = \frac{7}{6} = 1{,}17$$

Условное математическое ожидание M[Y/X = x] определяется с помощью услов-ной плотности распределения $f_2(y/x)$ составляющей Y (т.е. плотности СВ Y при условии, что СВ X приняла известное значение x):

$$f_2(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} \qquad (2)$$

Согласно (1) СВ X может принимать лишь значения $0 \le x \le 2$, поэтому из (2), (1) и условия задачи получаем

$$f_2(y/x) = \begin{cases} 0, & y < 0 \quad \text{или} \quad y > 5 \\ \dfrac{4(5x+2y)}{100(x+1)}, & 0 \le y \le 5 \end{cases}$$

Искомое математическое ожидание равно

$$M[Y/X = x] = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_2(y/x)dx = \frac{4}{100(x+1)}\int_0^5 y(5x+2y)dy = \frac{5(3x+4)}{6(x+1)} \qquad (3)$$

Полученная зависимость называется уравнением регрессии Y на X.

Задание 7.8. СВ X имеет плотность распределения. Для СВ Y = φ(X) найти её плотность распределения $g(y)$, вероятность P(a ≤ Y ≤ $в$), математическое ожидание
M[Y] и дисперсию D[Y].

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{64}(x-5)^2, & 5 \le x \le 9; \\ 0, & x < 5 \quad \text{или} \quad x > 9 \end{cases} \quad g(x) = 2x - 3; \quad a = 11, \quad в = 13$$

Решение. Плотность распределения СВ Y = φ(x) даётся формулой

$$g(y) = f(\psi(y))/\psi'(y)/ \qquad (1)$$

где $x = \psi(y)$ - функция, обратная к $y = \varphi(x)$. В данном случае $y = \varphi(x) = 2x - 3$,

$x = \psi(y) = (y + 3)/2$. Согласно и условию задачи находим

$$g(y) = \begin{cases} \dfrac{3(y-7)^2}{512}, & 7 \le y \le 15 \\ 0, & y < 7 \quad \text{или} \quad y > 15 \end{cases}$$

Остальные величины можно вычислить с помощью $g(y)$ или непосредственно через $f(x)$ по формулам

$$P(a \le Y \le в) = \int_a^в g(y)dy = \int_{\psi(a)}^{\psi(в)} f(x)dx = \frac{3}{64}\int_7^8 (x-5)^2 dx = 0{,}3.$$

$$M[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} yg(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)g(x)dx = \frac{3}{64}\int_5^9 (2x-3)(x-5)^2 dx = 37.$$

$$M[Y^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 g(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x)g(x)dx = \frac{3}{64}\int_5^9 (2x-3)^2(x-5)^2 dx = 1429.$$

$$D[Y] = M[Y^2] - M^2[Y] = 60.$$

Задание 7.9. Задана матрица перехода системы из состояния i ($i = 1, 2$) в состояние j ($j = 1, 2$) за один шаг:

$$\begin{bmatrix} a & в \\ c & d \end{bmatrix}$$

Найти матрицу перехода из состояния i в состояние j за два шага.

$a = 0{,}3$, $\quad в = 0{,}7$, $\quad c = 0{,}8$, $\quad d = 0{,}2$

Решение. Заданная матрица имеет вид: $A = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{bmatrix}$

Матрица перехода $i \to j$ за n шагов равна A^n и для $n = 2$ запишется

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}65 & 0{,}35 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{bmatrix}$$

Решение типового варианта контрольной работы №8.

Задача 8.1.

Из генеральной совокупности извлечена выборка, представленная в виде статистического ряда (в первой строке указаны выборочные значения x_i, во второй - соответствующие им частоты n_i). Требуется вычислить выборочное среднее $\bar{x}$, выборочную дисперсию $D_в$, исправленную выборочную дисперсию S^2 и среднеквадратическое отклонение S, эмпирическую функцию распределения.

x_i	2	3	5	6	8	9	10
n_i	4	10	21	30	20	10	5

Решение. Объём выборки равен

$n=\sum n_i=5+10+20+30+20+10+5=100$. Выборочные среднее и дисперсия вычисляются по формулам

$$.\bar{x}=\frac{1}{n}\sum x_i n_i=\frac{1}{100}(2\cdot 4+3\cdot 10+5\cdot 21+6\cdot 30+8\cdot 20+9\cdot 10+10\cdot 5=6.23,$$

$$D_в=\frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{x})^2 n_i=\frac{1}{n}\sum x_i^2 n_i-.\bar{x}^2=\frac{1}{100}(2^2\cdot 4+3^2\cdot 10+5^2\cdot 21+6^2\cdot 30+$$
$$+8^2\cdot 20+9^2\cdot 10+10^2\cdot 5)-(6.23)^2=4.19$$

Исправленная выборочная дисперсия равна

$$s^2=\frac{1}{n-1}\sum(x_i-.\bar{x})^2 n_i=\frac{n}{n-1}D_в=\frac{100}{99}\cdot D_в=4.24$$

Тогда "исправленное" выборочное среднеквадратическое отклонение будет $s=\sqrt{4.24}=2.06.$

Согласно определению эмпирической функции распределения её значение при лю-бом x равно $F_*(x)=n_x/100$, где n_x - количество элементов x_i выборки, меньших, чем x. Например, при $x=-1.3$ имеем $n_x=0$, $F_*(-1.3)=0$; при $x=2.7$ $n_x=4$, $F_*(2.7)=4/100=0.04$; при $x=3.2$ $n_x=4+10=14$, $F_*(3.2)=0.14$; при $x=5.8$ $n_x=4+10+21=35$, $F_*(5.8)=0.35$ и т.д. Тогда

$$F_*(x)=\begin{cases}0, & x\le 2\\ 0.04, & 2<x\le 3\\ 0.14, & 3<x\le 5\\ 0.35, & 5<x\le 7\end{cases}\qquad F_*(x)=\begin{cases}0.65, & 7<x\le 8\\ 0.85, & 8<x\le 9\\ 0.95, & 9<x\le 10\\ 1, & 10<x\end{cases}$$

Задача 8.2.

По заданным выборочному среднему $\bar{x}$ и исправленному среднеквадратическому отклонению s найти с доверительной вероятностью γ доверительный интервал для математического ожидания $M[X]$ нормально распределённой *СВ X,* если: а) $\sigma[X]$ известно (принять $\sigma[X]=s$); б) $\sigma[X]$ неизвестно. Построить доверительный интервал для $\sigma[X]$. Число степеней свободы принять равным трём.

$$\bar{x}=24.3;\ s=8.2;\ n=150;\ \gamma=0.95.$$

Решение. а) В случае, когда среднеквадратическое отклонение (СКО) известно
($\sigma\ \ [X]=8.2$), доверительный интервал для математического ожидания можно запи-сать

$$\bar{x}-t\frac{\sigma[x]}{\sqrt{n}}<M[X]<\bar{x}+t\frac{\sigma[x]}{\sqrt{n}}$$

где корень уравнения $\Phi(t)=\gamma/2=0.475$ отыскивается из таблицы значений функ-ции Лапласа

$$\Phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-x^2/2}dx$$

и равен $t=1.96$. Вычисляя величину

$$\frac{t\sigma[X]}{\sqrt{n}}=\frac{1.96\cdot 8.2}{\sqrt{150}}=1.32$$

находим доверительный интервал $(22.98;\ 25.62)$.
б) Если СКО неизвестно, в качестве его оценки принимается значение s $(\sigma[X]\approx s)$, причём значение t определяется из таблицы распределения Стьюдента при $\gamma=0.95$ и числе степеней свободы, равном 3 ($t=3.18$). Тогда доверительный интервал $(\bar{x}-ts/\sqrt{n},\ \ \bar{x}+ts/\sqrt{n})$ имеет вид $(22.17;\ \ 26.43)$.

Доверительный интервал для $\sigma[X]$ запишется

$$s(1-q)<\sigma[X]<(1+q)$$

где q определяется из таблицы $q = q(p, n)$ и для доверительной вероятности $\gamma = =0.95$ и объёма выборки $n=150$ равно $q = 0.115$. Поэтому границы интервала принимают вид

$$s(1-q) = 8.2(1-0.115) = 7.26, \quad s(1+q) = 8.2(1+0.115) = 9.15,$$

т.е., $7.26 < \sigma[X] < 9.15$.

Задача 8.3.

1.Выборку значений СВ X, указанную в условии задачи 8.1 сгруппировать, разбивая отрезок $[a,b]$ ($a = \min x_i$; $b = \max x_i$) на 5 интервалов $[\xi_j, \xi_{j+1}]$ с границами

$$\xi_j = a + \frac{b-a}{5} j \quad (j = 0,1,2,3,4,5)$$

и подсчитать частоты интервалов.

2. Предполагая, что X распределена по нормальному закону и принимая в качестве параметров $M[X]$, $\sigma[X]$ их оценки $\overline{X}$, s вычислить теоретические частоты интерва-лов.

3. С помощью критерия согласия Пирсона при уровне значимости $\alpha =0.1$проверить, согласуются ли выборочные данные с гипотезой о нормальном распределении величины X. Число степеней свободы принять равным трём.

Решение. 1. Из статистического ряда задачи 8.1видно, что $a=\min x_i = 2$, $в = \max x_i = =10$, поэтому $(в-a)/5=1.6$ и границы интервалов будут $\xi_0 = 2$, $\xi_1 = 2+1.6=3.6$, $\xi_2 = =3.6+1.6=5.2$, $\xi_3 = 5.2+1.6=6.8$, $\xi_4 = 6.8+1.6= 8.4$, $\xi_5 = 8.4+1.6=10$.

Эмпирическая частота r_j интервала$[\xi_j, \xi_{j+1}]$ $(j =0,..,4)$ подсчитывается с помощью ряда как число наблюдений, попавших в интервал, отнесённое к объёму выборки n. Так, в первый $(j =0)$ интервал $[2;3.6]$ попало $4+10=14$ значений, поэтому $r_0 = =14/100 =0.14$. Аналогично, $r_1= 0.21$, $r_2=0.3$, $r_3=0.2$, $r_4=0.15$.

2. Примем в качестве параметров нормального распределения X вычисленные в задаче 8.1 значения точечных оценок

$$M[X] = \bar{x} = 6.23, \quad \sigma[X] = s = 2.06$$

Теоретические частоты m_j интервалов $[\xi_j, \xi_{j+1}]$ $(j =0,1,..,4)$ являются вероятностями

$$m_j = P(\xi_j \le X \le \xi_{j+1}) = \Phi(\frac{\xi_{j+1} - M[X]}{\sigma[X]}) - \Phi(\frac{\xi_j - M[X]}{\sigma[X]}) =$$

$$= \Phi(\frac{\xi_{j+1} - \bar{x}}{s}) - \Phi(\frac{\xi_j - \bar{x}}{s}) \qquad (j = 0,1,2,3,4)$$

С помощью таблиц интеграла Лапласа находим

$$m_0 = \Phi(\frac{3.6 - 6.23}{2.06}) - \Phi(\frac{2 - 6.23}{2.06}) = 0.08,$$

$$m_1 = \Phi(\frac{5.2 - 6.23}{2.06}) - \Phi(\frac{3.6 - 6.23}{2.06}) = 0.21$$

$$m_2 = \Phi(\frac{6.8 - 6.23}{2.06}) - \Phi(\frac{5.2 - 6.23}{2.06}) = 0.31,$$

$$m_3 = \Phi(\frac{8.4 - 6.23}{2.06}) - \Phi(\frac{6.8 - 6.23}{2.06}) = 0.25$$

$$m_4 = \Phi(\frac{10 - 6.23}{2.06}) - \Phi(\frac{8.4 - 6.23}{2.06}) = 0.12.$$

3. Вычисляем значение

$$\chi^2_{\text{набл}} = \sum_{j=0}^{4} \frac{(r_j - m_j)^2}{m_j} = 0.063$$

По таблице распределения χ^2 Пирсона для доверительной вероятности $\gamma = 1\text{-}\alpha = 0.9$ и числа степеней свободы $\nu = 3$ находим значение $\chi^2_{\text{теор}} = 0.584$.

Поскольку $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{теор}}$, гипотезу о нормальном распределении *СВ X* следует считать не противоречащей выборочным данным.

Задание 8.4.

По заданной корреляционной таблице найти выборочные средние $\bar{x}, \bar{y}$, среднеквадратические отклонения σ_X, σ_Y, коэффициент корреляции ρ_{XY} и уравнение линейной регрессии *Y* на *X*. Вычислить условные средние $\overline{y_x}$ по дан-ным таблицы и найти наибольшее их отклонение от значений, вычисляемых из уравнения регрессии.

Y / X	0	2	4	6	8	n_X
1	3					3
3	2	3	5			10
5		9	8			17
7			2	6		8
9				4	1	5
11					7	7
n_Y	5	12	15	10	8	50

Решение. Вычислим выборочные средние и среднеквадратические отклонения для *X,Y*

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_i x_i \cdot n_{xi} = \frac{1}{50}(1\cdot 3 + 3\cdot 10 + 5\cdot 17 + 7\cdot 8 + 9\cdot 5 + 11\cdot 7) = 5.92;$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_j y_j \cdot n_{yj} = \frac{1}{50}(0\cdot 5 + 2\cdot 12 + 4\cdot 15 + 6\cdot 10 + 8\cdot 8) = 4.16;$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_i (x_i - \bar{x})^2 n_{xi} = \frac{1}{n}\sum_i x_i^2 n_{xi} - \bar{x}^2 = \frac{1}{50}(1^2\cdot 3 + 3^2\cdot 10 + 5^2\cdot 17 + 7^2\cdot 8 +$$

$$+9^2\cdot 5 + 11^2\cdot 7) - (5.92)^2 = 8.19;\quad \sigma_x = \sqrt{8.19} = 2.86,\ \sigma_y^2 = \frac{1}{n}\sum_j y_j^2 n_{yj} - \bar{y}^2 =$$

$$= \frac{1}{50}(0^2\cdot 5 + 2^2\cdot 12 + 4^2\cdot 15 + 6^2\cdot 10 + 8^2\cdot 8) - (4.16)^2 = 5.89,$$

$$\sigma_y = \sqrt{5.89} = 2.43$$

Выборочный коэффициент корреляции между *X* и *У* отыскивается по формуле

$$\rho_{xy} = \frac{(\overline{xy}) - \bar{x}\bar{y}}{\sigma_x\sigma_y},\quad (\overline{xy}) = \frac{1}{n}\sum_i\sum_j x_i y_j n_{ij}$$

Согласно таблице

$$(\overline{xy}) = \frac{1}{50}(1\cdot 0\cdot 3 + 3\cdot 0\cdot 2 + 3\cdot 2\cdot 3 + 3\cdot 4\cdot 5 + 5\cdot 2\cdot 9 + 5\cdot 4\cdot 8 + 7\cdot 4\cdot 2 +$$

$$+7\cdot 6\cdot 6 + 9\cdot 6\cdot 4 + 9\cdot 8\cdot 1 + 11\cdot 8\cdot 7) = 30.8$$

откуда

$$\rho_{xy} = \frac{30.8 - 5.92 \cdot 4.16}{2.86 \cdot 2.43} = 0.89$$

Выборочное линейное уравнение регрессии У на Х имеет вид

$$\overline{y_x} = \bar{y} + \rho_{xy} \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x})$$

или, с учётом вычисленных значений,

$$\overline{y_x} = 0.75x - 0.30 \qquad (1)$$

Условное среднее при $x = x_i$ вычисляется по формуле

$$\overline{y_x} = \frac{1}{n_x}\sum_j y_j n_{ij}$$

где $n_x = \sum_j n_{ij}$ - число выборочных значений y_j, наблюдавшихся при данном x_i. Согласно данным из таблицы находим

$$x = 1, n_x = 3, \overline{y_x} = \frac{1}{3} \cdot 0 \cdot 3 = 0;$$

$$x = 3,\ n_x = 10;\ \overline{y_x} = \frac{1}{10}(0 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5) = 2.6;$$

$$x = 5, n_x = 17,\ \overline{y_x} = \frac{1}{17}(2 \cdot 9 + 4 \cdot 8) = 2.94; \qquad 2)$$

$$x = 7, n_x = 8, \overline{y_x} = \frac{1}{8}(4 \cdot 2 + 6 \cdot 6) = 5.5;$$

$$x = 9, n_x = 5, \overline{y_x} = \frac{1}{5}(6 \cdot 4 + 8 \cdot 1) = 6.4;\ x = 11,\ n_x = 7, \overline{y_x} = \frac{1}{7} \cdot 8 \cdot 7 = 8.$$

Значения условных средних $\overline{y_x}$, отыскиваемые по уравнению регрессии (1):

$\overline{y_x}(1) = 0.75 \cdot 1 - 0.3 = 0.45;$ $\overline{y_x}(3) = 1.96;$ $\overline{y_x}(5) = 3.45;$ $\overline{y_x}(7) = 4.95;$
$\overline{y_x}(9) = 6.45;$ $\overline{y_x}(11) = 7.96.$

Отклонения значений (2), (3) $d_i = \overline{y_x} - \overline{y_x}(x_i)$ будут

d_1 = 0-0.45=-0.45; d_2 = 2.6- 1.96 = 0.65; d_3 = -0.51, d_4 = 0.55; d_5 = -0.05;
d_6 = 0.05.

Наибольшее по абсолютной величине отклонение равно *0.65.*

Содержание

Учебное издание

Высшая математика

Программа, методические указания и контрольные задания
для студентов-заочников инженерных и
инженерно-экономических специальностей
приборостроительного факультета

В 2-х частях

Ч а с т ь II

Составители: ИБРАГИМОВ Владислав Ахмедович
СТРЕЛЬЦОВ Сергей Викторович
МЕЛЕШКО Алексей Николаевич
БОКУТЬ Людмила Валентиновна