

*В.Н. Кушнир*

**СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ  
СЛОИСТЫХ СТРУКТУР**

**Минск  
БНТУ  
2010**

В.Н. Кушнир

**СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ  
СЛОИСТЫХ СТРУКТУР**

Монография

Минск  
БНТУ  
2010

*Рекомендовано к изданию научно-техническим советом  
Белорусского национального технического университета  
(протокол №5 от 21 июня 2010 года)*

**Кушнир, В.Н.**

**Сверхпроводимость слоистых структур:** монография / В.Н. Кушнир.–  
Минск: БНТУ, 2010. – 234 с.

Рассмотрены свойства слоистых структур, сверхпроводимость в которых обусловлена эффектом близости. Построено точное матричное решение линеаризованных уравнений диффузионного предела микроскопической теории сверхпроводимости. На его основе подробно исследовано критическое состояние, разработана методика идентификации параметров многослойных структур. Обсуждается концепция многомодового фазового перехода в структурах сверхпроводник/ферромагнетик. Исследованы размерные и симметричные эффекты в структурах сверхпроводник/нормальный металл, находящихся во внешнем магнитном поле. В рамках теории Гинзбурга – Ландау исследован пиннинг абрикосовских вихрей, в частности, построено выражение для обобщенной силы пиннинга, построены аппроксимации плотности критического тока без ограничения на величину внешнего магнитного поля. Основные утверждения, формулируемые в работе, непосредственно проверены на эксперименте.

Библиогр. 406 назв. Ил. 66.

**Рецензенты:**

*И.Д. Феранчук, доктор физико-математических наук, профессор,  
заведующий кафедрой «Теоретическая физика» БГУ;*

*В.Г. Баштовой, доктор физико-математических наук, профессор,  
заведующий кафедрой ЮНЕСКО «Энергосбережение  
и возобновляемые источники энергии»*

# ОГЛАВЛЕНИЕ

---

ПРЕДИСЛОВИЕ . . . . .	6
<b>Глава 1. Слоистые структуры сверхпроводник/металл (ретроспективный обзор) . . . . .</b>	<b>7</b>
1.1. Эффект близости. . . . .	7
1.2. Пиннинг вихрей и пик-эффект. . . . .	11
1.3. Верхние критические поля и явление размерного перехода. . . . .	15
1.4. Поверхностные эффекты. . . . .	25
1.5. Конечные $S/M$ структуры. Эффекты симметрии. . . . .	27
1.6. Условия на $S-M$ границах. . . . .	29
1.7. Предельные эффекты. Прозрачность $S-N$ границ и проблема идентификации параметров $S/N$ структур по их критическим характеристикам. . . . .	31
1.8. $S/M$ структуры в «чистом» и квазиклассическом пределе. Параметр порядка $\Delta(r)$ . Локальная плотность числа состояний. . . . .	32
1.9. Эффекты в слоистых структурах сверхпроводник/ ферромагнетик. . . . .	36
1.9.1. Осцилляционные эффекты, 0- и $\pi$ - состояния. . . . .	37
1.9.2. Эффект спинового переключения, триплетные состояния. . . . .	47
1.9.3. Уширение переходных резистивных характеристик. . .	53
1.9.4. Численное решение уравнений Боголюбова – де Жена. . .	54
<b>Глава 2. Линеаризованные уравнения Узаделя и их решение</b>	<b>61</b>
2.1. Нелинейные уравнения Узаделя и функционал свободной энергии. . . . .	61
2.2. Линеаризованные уравнения Узаделя. . . . .	64
2.3. Решение линеаризованных одномерных уравнений Узаделя. Матричный метод. . . . .	70
2.3.1. Фундаментальная система решений уравнений Узаделя и матрицант для $S$ -слоя. . . . .	74
2.3.2. Матрицант системы уравнений для $M$ -слоя . . . . .	78
2.3.3. Матрицы условий сшивания на $S-M$ границах. . . . .	79

2.4.	Свойства функций состояний зеркально-симметричных $S/M$ -структур. Структуры $n_{bl} \times (M/S/M)$ и сверхрешетки. . . . .	81
2.5.	Матричное решение уравнений Узалея. Структуры типа $S/N$ . Двухслойные и трехслойные структуры. . . . .	85
2.6.	Одномодовое приближение. . . . .	87
2.7.	Структуры типа $S/F$ в приближении сильного ферромагнетика. . . . .	93
<b>Глава 3. Критическая температура структур типа <math>S/N</math> и <math>S/F</math>. Предельные и граничные эффекты и методика идентификации параметров структуры. . . . .</b>		
3.1.	Параметры критического состояния $S/N$ структур . . . . .	96
3.2.	Критическая температура трехслойных структур $N/S/N$ (примеры расчета) . . . . .	98
3.3.	Критическая температура трехслойных структур $S/N/S$ . Краевой эффект (примеры расчета) . . . . .	107
3.4.	Критическая температура многослойных структур $N/n_{bl} \times (S/N)$ . Асимптотическое поведение характеристики $T_c(n_{bl})$ и идентификация параметров (пример расчета) . . . . .	111
3.5.	Критические характеристики $T_c(d_S)$ , $T_c(d_F)$ и микроскопические параметры двухслойных $S/F$ структур. Предельные и краевые эффекты. . . . .	114
<b>Глава 4. Критические состояния и критическая температура многослойных <math>S/F</math> структур. . . . .</b>		
4.1.	Критическое состояние двухслойных $S/F$ структур. . . . .	120
4.2.	Критические состояния трехслойных $S/F/S$ структур и сверхрешеток. . . . .	122
4.3.	Спиновый переключатель Тагирова и его состояния. . . . .	127
4.4.	Критические состояния многослойных $S/F$ структур и их кроссовер. Об уширении резистивной характеристики в окрестности кроссовера. . . . .	128
4.5.	Многомодовый фазовый переход в сверхпроводящее состояние. . . . .	141
<b>Глава 5. Критическое состояние <math>S/N</math> структур во внешнем постоянном магнитном поле – феноменологическое описание. . . . .</b>		
5.1.	Модель Гинзбурга – Ландау. . . . .	145
5.2.	Верхнее критическое магнитное поле $H_{c21}(T)$ . Идентификация параметров $S/N$ структур. Положительная кривизна зависимости $H_{c21}(T)$ . . . . .	150

5.3.	Критическое состояние $S/N$ структур в параллельном магнитном поле. Эффект симметрии. . . . .	158
5.4.	Критическое состояние $S/N$ структур в параллельном магнитном поле. Эффект симметрии на резистивных характеристиках. . . . .	164
5.5.	Критическое состояние $S/N$ структур в наклонном магнитном поле. Размерные свойства сверхпроводящей фазы. Эффект симметрии на угловых характеристиках. . . . .	169
Глава 6. Пиннинг вихрей и пик-эффект. . . . .		179
6.1.	Безвихревое состояние полубесконечных структур. . . . .	179
6.2.	Силы пиннинга в $S/N$ структуре. . . . .	184
6.3.	Поле $d$ -периодического решения и поле пик-эффекта. . . . .	189
Глава 7. Дополнение. <i>Микроскопическая теория сверхпроводимости. Краткая история.</i> . . . . .		192
7.1.	Идея, гамильтониан и преобразование Фрёлиха. . . . .	192
7.2.	Куперовские пары. . . . .	195
7.3.	Теория Бардина – Купера – Шриффера (БКШ) . . . . .	198
7.4.	Каноническое преобразование Боголюбова. . . . .	199
7.5.	Аппроксимирующий гамильтониан, уравнения и условия самосогласования Боголюбова. . . . .	204
7.5.1.	Утверждение о модельном и аппроксимирующем гамильтониане. . . . .	204
7.5.2.	Уравнения Боголюбова. Уравнения Боголюбова – де Жена. . . . .	206
7.5.3.	Условия самосогласования Боголюбова. . . . .	214
Литература . . . . .		217

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Основой монографии являются исследования автора, выполненные в содружестве с экспериментаторами БГУИР (г. Минск), ун-та г. Салерно, а также Лейденского ун-та.

В главе 1 книги дается обзор литературы с изложением истории исследований (охватывающей примерно полувековой период), при этом описываются эффекты, обнаруженные в экспериментах со слоистыми сверхпроводниками. В обзор не включены работы по исследованию процессов переноса в слоистых сверхпроводящих структурах. В главе 2 строится матричное решение уравнений диффузионного приближения микроскопической теории сверхпроводимости, учитывающее спин-орбитальное и парамагнитное рассеяние. Приводится выражение для функционала свободной энергии в диффузионном пределе. На основе полученных результатов, в главе 3 ставится и решается проблема полного и однозначного описания критического состояния структур типа сверхпроводник/нормальный металл и сверхпроводник/ферромагнетик; при этом разрабатывается экспериментальная методика идентификации параметров структуры по ее критическим характеристикам. В главе 4 анализируются критические состояния многослойных структур типа сверхпроводник/ферромагнетик с построением конденсатных волновых функций. Подробно исследуется область кроссовера состояний для многослойных структур, обсуждается концепция «многомодового» фазового перехода. Глава 5 большей частью посвящена «эффектам симметрии» в структурах типа  $S/N$ . Кроме того, рассматривается критическое состояние  $S/N$  структур, находящихся во внешнем перпендикулярном слое магнитном поле; в частности, показывается, что при сильно отличающихся длинах когерентности нормального и сверхпроводящего слоев имеет место т.н. топологический эффект. В главе 6 приводятся результаты исследований по проблеме пиннинга абрикосовских вихрей и критического тока в  $S/N$  структурах. Дополнение (глава 7) содержит краткую историю создания микроскопической теории сверхпроводимости и завершается выводом уравнений этой теории для неоднородных (в частности слоистых) сверхпроводников.

## Глава 1. Слоистые структуры сверхпроводник/металл (ретроспективный обзор)

В данный обзор вошли основные работы по исследованию слоистых структур сверхпроводник( $S$ )/нормальный металл( $N$ ), сверхпроводник/сверхпроводник( $S'$ ), сверхпроводящих в силу эффекта близости. Слоистые структуры сверхпроводник/ферромагнетик ( $F$ ) в этой главе рассматриваются очень бегло, поскольку существует несколько обширных обзоров ведущих специалистов в этой области. Отдельные работы по исследованию систем сверхпроводник/диэлектрик( $I$ ) и сверхпроводник/полупроводник( $s$ ) цитируются в связи с проблемами сверхпроводимости структур  $S/N$  и  $S/S'$ .

### 1.1. Эффект близости

Начало исследований  $S/M$  структур ( $M$  – металл) можно связать с открытием эффекта близости, возникающего при контакте сверхпроводника и нормального металла или другого сверхпроводника [1–3]. Эффект близости был обнаружен также при контакте сверхпроводника и ферромагнетика – эксперименты проводились со сверхпроводящими проводниками из олова, покрытыми различными несверхпроводящими металлами, в том числе железом, кобальтом и никелем [3]. Эффект состоит в том, что тонкая пленка нормального металла, нанесенная на массивный сверхпроводник, становится сверхпроводящей, и, наоборот, сверхпроводимость в тонкой пленке сверхпроводника, нанесенной на нормальный металл, подавляется полностью или частично [4].<sup>1</sup> Данный на первый взгляд тривиальный факт послужил мотивом для последовавших интенсивных исследований двухслойных, трехслойных, а затем и многослойных структур (обзор ранних экспериментальных и теоретических работ дан в [5]). Прежде всего, оказалось важным то, что в слоистых структурах, включающих сверхпроводящие и несверхпроводящие материалы, возникает неоднородное сверхпроводящее

---

<sup>1</sup> Н. Meissner в работе [3] резюмировал свои эксперименты следующим образом: “It is now believed that just as superconducting electrons can drift into an adjoining normal conducting layer and make it superconducting, normal electrons can drift into an adjoining superconducting layer and prevent superconductivity.”

состояние, то есть состояние с пространственной модуляцией плотности распределения куперовских пар. Степень модуляции зависит от геометрических (толщины и количество слоев) и микроскопических (плотности числа состояний на уровне Ферми, скорости Ферми, длины свободного пробега электронов и т. д.) параметров структуры, а также от свойств границ между слоями. Относительная простота изготовления наборов слоистых структур, различающихся как по составу, так и по геометрии, открыла перспективы управления конфигурациями квантовых состояний сверхпроводимости, что важно с фундаментальной точки зрения. Кроме того, слоистые сверхпроводники обладают свойством, определяющим их прикладное значение, а именно: токонесущая способность слоистых структур может быть существенно выше, чем обычных сверхпроводников второго рода [6, 7].

Первое простое объяснение эффекта близости в рамках микроскопической теории БКШ [8] было дано Л. Купером [9]. В [9] рассмотрена двухслойная  $S/N$  структура в пределе тонких  $S$  и  $N$  слоев («куперовский предел»); при этом все материальные параметры сверхпроводящего и нормального металлов, кроме констант эффективного электрон-электронного взаимодействия  $\lambda_S$ ,  $\lambda_N$ , полагались одинаковыми. Поскольку для нормального металла  $\lambda_N = 0$  (по определению), то простое усреднение энергии взаимодействия электронов по объему приводит к выражению для эффективной константы связи  $\lambda_{eff} = \lambda_S d_S / (d_S + d_N)$ , где  $d_S$ ,  $d_N$  – толщины сверхпроводящего и нормального слоев соответственно. В результате БКШ формула для критической температуры примет вид

$$T_c = T_S \exp\left(-\frac{d_N}{\lambda_S d_S}\right),$$

где  $T_S$  – критическая температура сверхпроводящего материала. Приведенная формула качественно объяснила экспериментальные данные для двухслойных  $S/N$  структур, и, более того, она вполне удовлетворительно описывает зависимость критической температуры пленки сверхпроводника от толщины (шероховатые поверхности пленки моделируются тонкими нормальными слоями).

Последовательная микроскопическая теория эффекта близости была построена в диффузионном («грязном») пределе теории БКШ<sup>1</sup> де Женом и сотрудниками [10–13] в формализме уравнений Боголюбова [14, 15], и Вертхамером [16, 17] – в формализме горьковских функций Грина [18, 19]. При этом была подробно исследована пространственная форма параметра сверхпроводящего порядка для двухслойных  $S/N$ , и трехслойных  $S/N/S$  структур в критическом состоянии. Де Женом определен общий вид условий сшивания конденсатной волновой функции, описывающей критическое состояние, на границе сверхпроводник/нормальный металл.<sup>2</sup> В рамках «одномодового» приближения теорий де Жена и Вертхамера были объяснены следующие, существующие на то время, экспериментальные факты [1–3, 21–24]:

1) Если толщина  $S$ -слоя  $d_S$  двуслойной структуры превосходит длину когерентности сверхпроводящего материала  $\xi_S$ , то критическая температура  $T_c$  структуры монотонно убывает с возрастанием толщины  $N$ -слоя  $d_N$ , асимптотически приближаясь к некоторому ненулевому значению. При этом существует характерная длина  $\xi_N$  изменения функции  $T_c(d_N)$  («длина когерентности» нормального металла).

2) При толщине  $S$ -слоя  $d_S \sim \xi_S$  критическая температура  $S/N$  структуры много меньше критической температуры  $T_S$  массивного образца сверхпроводящего материала, и, по достижению величиной  $d_N$  некоторого значения, превосходящего  $\xi_N$ , сверхпроводимость в структуре не обнаруживается.

3) Тонкий нормальный слой ( $d_N \sim \xi_N$ ), помещенный между двумя сверхпроводящими слоями  $S_1$  и  $S_2$ , может переносить сверхпроводящий ток [3].

Первые эксперименты по исследованию эффекта близости, проведенные на бислойных и трехслойных структурах, вместе с теори-

---

<sup>1</sup> Следует заметить, что диффузионный предел вполне пригоден для описания слоистых  $S/N$  структур даже и при современной технологии их изготовления.

<sup>2</sup> Условия сшивания де Жена были детализированы в работе Куприянова – Лукичева; этими авторами были определены коэффициенты условий де Жена в зависимости от материальных параметров структуры (см. раздел 1.5). Определяющий вклад в понимание физических процессов, происходящих на границе между нормальным металлом и сверхпроводником, был внесен работой А.Ф. Андреева [20].

ей де Жена – Вертхамера явились основой для дальнейших экспериментальных и теоретических исследований многослойных  $S/N$  структур и сверхрешеток (обзор литературы с 1970 по 1990 гг. см. в [25–27]). При этом с различным успехом решались следующие проблемы, общие для сверхпроводников II рода (каковыми являются все известные  $S/N$  структуры):

1) Описание критического состояния  $S/N$  структуры, включая исследование процесса зарождения сверхпроводящей фазы.

2) Описание смешанного состояния  $S/N$  структур и, в частности, изучение свойств вихревой среды и ее взаимодействия с полем сил пиннинга<sup>1</sup>.

3) Описание мейсснеровского состояния.

Решение данных проблем подразумевает вычисление следующих величин: во-первых, функции состояния сверхпроводящего конденсата и пространственного распределения параметра порядка; во-вторых, термодинамических и электрофизических характеристик сверхпроводящей структуры. К ним относятся: критическая температура, критические поля  $H_{c2}$  и  $H_{c1}$  в зависимости от температуры  $T$ , плотности критического тока  $J_c$  в зависимости от внешнего магнитного поля  $H$  и температуры, и т.д. Кроме того, в рамках решения второй проблемы, определяются динамические характеристики решетки абрикосовских вихрей. К отдельной задаче следует отнести выявление граничных (и симметричных) эффектов.

Если на эксперименте названные задачи решались достаточно последовательно (по мере развития технологий приготовления  $S/N$  структур и техники измерений), то в теории существенные результаты по первой проблеме были получены только во второй половине 1980-х годов (в рамках микроскопического подхода). По второй проблеме «всплески» в теории наблюдались, начиная со второй половины 70-х годов, систематическое исследование смешанного состояния в  $S/N$  (и  $S/F$ ) структурах начато с конца 90-х годов. По третьей проблеме исследования проводились время от времени. Это связано со следующими обстоятельствами. Во-первых, численное моделирование экспериментальных данных по измерению критиче-

---

<sup>1</sup>Пиннинг (pinning) – захват магнитного вихря неоднородностью структуры.

ских характеристик  $S/N$  структур было задачей непреодолимой; и, наоборот, по технологическим причинам из экспериментальных данных не представлялось возможным определить с достаточной степенью уверенности параметры теории при моделировании. Вторых, на начальном этапе, исследования слоистых структур были в значительной степени подчинены проблеме повышения токонесущей способности сверхпроводников второго рода, что связано с проблемой пиннинга абрикосовских вихрей.<sup>1</sup> Данная проблема решалась при помощи оценочных расчетов в рамках теории Гинзбурга – Ландау (ГЛ) [28] (подробное изложение приведено, например, в [7]).

## 1.2. Пиннинг вихрей и пик-эффект

Пиннинг в слоистых структурах впервые был исследован в экспериментах Раффи и др. [29–31]. В эксперименте были использованы пленки из сплавов  $Pb/Bi$  с концентрацией  $Bi$ , меняющейся в направлении, перпендикулярном поверхности пленки, по гармоническому закону (поэтому эти структуры правильнее назвать «квази-слоистыми»). Наиболее выразительным результатом исследований [29–31] явилось обнаружение «пик-эффекта» – явления резкого возрастания критического тока в узком диапазоне значений внешнего магнитного поля, направленного параллельно слоям структуры. Иначе говоря, на кривой  $J_c(H)$  имеет место локальный максимум, в то время как для однородных сверхпроводников функция  $J_c(H)$  монотонно убывает от значения  $J_c(0)$  до нуля при  $H = H_{c2\parallel}$ , где  $H_{c2\parallel}$  – верхнее параллельное критическое поле. Впоследствии пик-эффект наблюдался для ряда многослойных структур, таких как  $Nb/Ta$  [32],  $Nb/NbZr$  [33],  $Nb/Cu$  [34] и  $Nb/Pd$  [35]. На рисунке 1.1 приведены графики экспериментальных зависимостей  $J_c(H)$ , измеренных для структур  $Nb/Pd$  [35], и типичных для всех слоистых структур.

---

<sup>1</sup>Наиболее интенсивно проводятся исследования вихревой среды и ее взаимодействия с полем сил пиннинга в ВТСП, которые являются естественными слоистыми структурами. Это отражено в обзоре “Vortices in high temperature superconductors”, опубликованном авторами G. Blatter *et al.* в Rev. Mod. Phys. 66 (1994) 1125 – 1388.

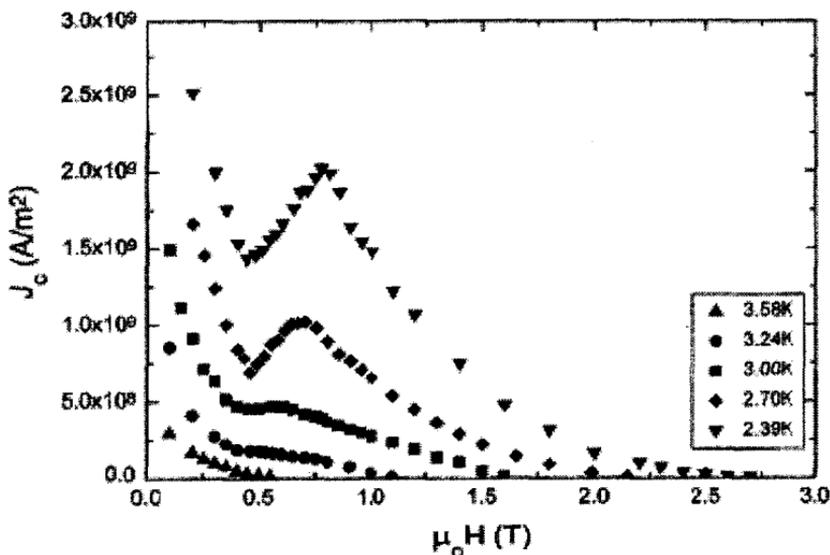


Рис. 1.1 [35]. Зависимости плотности критического тока от величины внешнего параллельного магнитного поля для структур Nb/Pd, измеренные при пяти значениях температуры

Из рисунка 1.1 видно, что пик на зависимостях хорошо выражен для низких температур, и постепенно исчезает при приближении к критической температуре; при этом с очевидностью выявляется неаналитическое поведение кривых  $J_c(H)$ . В экспериментах со структурами Mo/V и Nb/Pd [36], Nb/NbTi [37] наблюдалось неаналитическое поведение зависимости критического тока и эффективной силы пиннинга от величины, а также от угла наклона вектора напряженности магнитного поля к поверхности слоев.

Вообще говоря, открытие пик-эффекта нельзя назвать неожиданным, и сам эффект трудно отнести к необычным после открытия абрикосовских вихрей [38, 4]. Известно, что основной причиной уменьшения критического тока в сверхпроводниках второго рода, находящихся в смешанном состоянии, является движение вихрей под действием силы Лоренца, вызываемой транспортным током. Препятствием этому движению служат неоднородности образца

[6, 7]. В слоистых сверхпроводниках, очевидно, границы между слоями являются и плоскостями пиннинга. Если периоды вихревой решетки согласуются с периодом слоистой бесконечной структуры так, что все вихри попадают на граничные плоскости, то такая решетка становится наиболее устойчивой по отношению к возмущениям транспортным током [39]. В случае  $S/N$  структуры конечной толщины необходимо учесть также силы пиннинга внешними поверхностями образца. Разумеется, приведенное простое объяснение эффекта обязано вытекать либо из микроскопической теории, либо из феноменологической теории ГЛ. Последовательное обоснование пик-эффекта в рамках модифицированной модели ГЛ дано в классической работе Ами – Маки [40] для слабо неоднородных структур. Коэффициент диффузии  $D$  в этой модели модулирован по периодическому закону в соответствии с изменением концентрации нормального металла  $c(\mathbf{r})$  ( $D(\mathbf{r}) = D_0 c_0 / c(\mathbf{r}) = D_0 c_0 \{1 + \Gamma \cdot \sin(2\pi z/a)\}^{-1}$ , где ось  $OZ$  направлена перпендикулярно поверхности пленки,  $\Gamma$  – малая амплитуда,  $a$  – период модуляции). В работе [40], во-первых, было получено решение уравнений ГЛ в окрестности верхнего критического поля, и, во-вторых, рассчитаны характеристики околокритического состояния – плотность свободной энергии, плотность критического тока, геометрические параметры вихревой решетки, силы пиннинга. Решение строилось на основе вариационного принципа с пробной волновой функцией, взятой в виде линейной комбинации функций нулевого и первого приближения теории возмущений<sup>1</sup> с ортонормированным базисом, образованным функциями Эйленбергера [41]. Поскольку в [40] рассматривались слабо неоднородные структуры, находящиеся во внешнем магнитном поле, близком к верхнему критическому, то есть рассматривалась «окрестность ГЛ», данное решение является строгим. Как раз такие структуры исследовались в экспериментах [29–31]; сравнение теоретических результатов с результатами этих экспериментов, проведенное в [40], показало не только качественное, но и количественное их согласие. В работе [42] была рассмотрена та же структура, что и в [40], но находящаяся в состоянии, далеком от критической области ( $H_{c1} \ll H \ll H_{c2}$ ), и, кроме того, обладающая конечной

<sup>1</sup> Фактически, использовался метод, аналогичный методу Тамма – Данкова.

толщиной. Строгость рассмотрения в рамках модели ГЛ этого случая обеспечило дополнительное требование  $\kappa \gg 1$ , использованное в [42] ( $\kappa$  – параметр ГЛ). Наиболее важным результатом работы [42] явился учет граничных эффектов, приведший к выражению для поверхностных сил пиннинга.

Ясно, что результаты, полученные в [40, 42], не могут быть справедливыми для собственно слоистых структур, то есть структур с резкими границами между  $S$  и  $N$  слоями; в этом случае влияние  $N$  слоев нельзя рассматривать как малое возмущение. В частности, на основании [40, 42] нельзя объяснить температурную зависимость поля пик-эффекта  $H_{peak}(T)$ .<sup>1</sup> Тем не менее, в работах [43, 44] для расчета зависимости  $J_c(H)$  принималось допущение о несверхпроводящих слоях структуры как о возмущении. В работе [43] для задачи с нормальными слоями в виде твин-плоскостей, моделируемых дельта-функциями, предложено решение в области внешних полей  $H_{c1} \ll H \ll H_{c2}$ . В этой модели отсутствует наблюдаемая на эксперименте зависимость  $H_{peak}(T)$ . В работе [45] рассмотрены  $S/N$  структуры с толщинами  $S$  слоёв много больше длины когерентности, и конечными толщинами  $N$  слоёв. Поле пик-эффекта  $H_{peak}(T)$  было рассчитано исходя из условия максимума элементарной силы пиннинга на границе  $S$  и  $N$  слоёв; при этом форма полученной его температурной зависимости соответствует эксперименту. Способ построения  $d$ -периодического решения ( $d$  – период структуры) в [45] подразумевает применимость модели при магнитных полях, существенно меньших  $H_{c2}$ .

Анализ экспериментальных данных указывает на то, что выраженный пик-эффект в зависимости  $J_c(H)$  в  $S/N$  образцах наблюдается при толщинах  $N$  и  $S$  слоёв одного порядка и порядка длины когерентности  $\xi_{\perp}(0)$  ГЛ в направлении, ортогональном поверхности слоев. При этом поле пик-эффекта принимает значения в диапазоне  $(0.4-0.7)H_{c2\parallel}(T)$ . Эмпирическая модель, объясняющая эксперимен-

---

<sup>1</sup> Строго говоря, и применение модели ГЛ в ее классическом виде не является корректным в данном случае. Однако кроме модели ГЛ и одномодового приближения уравнений диффузионного предела не существует других разумных способов численного моделирования экспериментальных данных (в этом смысле оба способа равноценны), полученных для промежуточной области значений магнитного поля.

тальные данные для таких структур, предложена в [35]. В работах [46–49] на основе аппроксимации решения уравнений ГЛ дана трактовка поля пик-эффекта как поля  $d$ -периодического решения уравнений ГЛ, построено общее выражение для сил пиннинга в  $S/N$  структурах, получены теоретические кривые  $H_{peak}(T)$ ,  $J_c(H)$ ,  $F_p(H)$  ( $F_p$  – сила пиннинга), воспроизводящие экспериментальные зависимости.<sup>1</sup>

### 1.3. Верхние критические поля и явление размерного перехода

К началу 1980-х годов достижения в технологиях тонких пленок позволили изготавливать многослойные структуры высокого качества с очень малой толщиной слоев (вплоть до 15 Å) [50, 51]. Это позволило провести детальные экспериментальные исследования критического состояния многослойных  $S/N$  структур и выявить его особенности. Первые результаты, ставшие классическими, были получены на сверхрешетках Nb/Cu группой Шуллера [52–56], и подтверждены на многослойных структурах V/Ag [57, 58], Nb/Ta [59, 60], Nb/Al [61], V/Cu [62], Nb/Pd [35, 63]. Измерялись зависимости критической температуры  $T_c$  от периода сверхрешетки  $d$ , и, далее, верхние критические поля  $H_{c2\parallel}(T)$ ,  $H_{c2\perp}(T)$ , а также угловые зависимости  $H_{c2}(\theta)$  [54, 55, 56] ( $\theta$  – угол между вектором напряженности внешнего магнитного поля и поверхностью структуры). Основным результатом этих экспериментов явилось обнаружение явления размерного кроссовера. Явление размерного кроссовера состоит в изменении «эффективной размерности» системы от трёхмерной (3D) при температурах  $T > T^*$  до двухмерной (2D) при  $T < T^*$ ,  $T^*$  – температура 3D-2D кроссовера. При  $T < T^*$  многослойная структура, находящаяся в параллельном внешнем магнитном поле, ведет себя подобно тонкой сверхпроводящей пленке (2D-поведение), а при  $T > T^*$  – подобно однородному анизотропному бесконечному образцу (3D-поведение). Трёхмерному состоянию сверхпроводящего конденсата соответствует линейный участок характеристики  $H_{c2\parallel}(T)$ , а именно,  $H_{c2\parallel}(T) = \Phi_0/2\pi\xi_{\parallel}\xi_{\perp} \sim (T_c - T)$ , где

<sup>1</sup> Изложение результатов работ [46 – 49] приведено в главе 6.

$\Phi_0$  – квант магнитного потока,  $\xi_{\parallel}$  и  $\xi_{\perp}$  – длины когерентности в параллельном и перпендикулярном слоям направлении, соответственно. Двумерному состоянию сверхпроводящего конденсата соответствует участок характеристики  $H_{c2\parallel}(T)$ , аппроксимируемый зависимостью  $H_{c2\parallel}(T) \sim (T_{2D} - T)^{1/2}$ , где  $T_{2D}$  – параметр аппроксимации. На рисунке 1.2 представлена зависимость  $H_{c2\parallel}(T)$  (вместе с зависимостью  $H_{c2\perp}(T)$ ) [55].

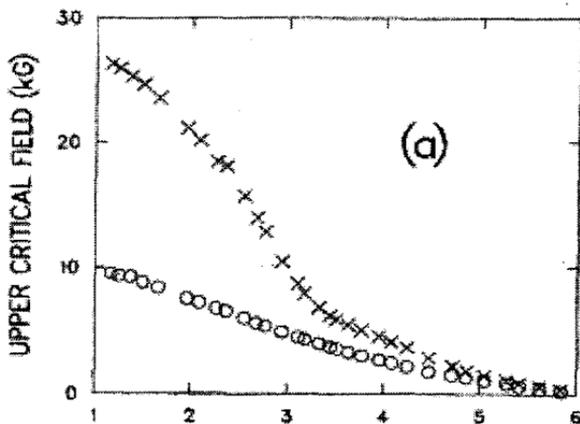


Рис. 1.2. Зависимости  $H_{c2\parallel}(T)$  (символы  $\times$ ) и  $H_{c2\perp}(T)$  (символы  $o$ ) для многослойной структуры Nb/Cu (приводится в соответствии с [55])

Размерный кроссовер был предсказан на самом деле еще в 1974 г. [64, 65] (см. также [66]) при рассмотрении проблемы аномального роста верхнего критического поля  $H_{c2\parallel}(T)$  с понижением температуры в кристаллах дихалькогенидов переходных металлов, интеркалированных большими органическими молекулами [67]. Вполне закономерно, что, поскольку теория, развитая в [64–66], описывала сверхпроводимость в слоистых структурах (естественных и искусственных) с джозефсоновской связью между слоями, предсказанный ею эффект был обнаружен впервые именно для этого класса структур. В работах [68, 69] сообщается об обнаружении эффекта размерного кроссовера на характеристиках  $H_{c2\parallel}(T)$  интер-

калированных слоистых кристаллов; в работах [70, 71] приведены экспериментальные данные по сверхрешеткам Nb/Ge, доказывающие существование двумерного и трехмерного состояний сверхпроводящего конденсата в этих структурах. Эксперименты Шуллера и сотр. на  $S/N$  структурах показали, что размерный эффект имеет общий характер.

Температура кроссовера определяется, в соответствии с [53–56], соотношением  $\xi_{\perp}(T^*) \sim d_N$ . Это соотношение означает, что если длина когерентности  $\xi_{\perp}(T) \sim (1 - T/T_c)^{-1/2}$  становится меньше толщины  $N$ -слоя (при  $T < T^*$ ), теряется связь между  $S$ -слоями и сверхпроводящий конденсат локализуется внутри одного из  $S$ -слоев. При  $T > T^*$  ( $\xi_{\perp}(T) > d_N$ ) сверхпроводящие корреляции связывают соседние  $S$ -слои, что соответствует трехмерному характеру сверхпроводимости.

2D- или 3D-характер измеренных угловых зависимостей  $H_{c2}(\theta)$ , как полагалось в [54], для исследуемых в [53–55] структур соответствует 2D- или 3D-характеру температурных зависимостей верхнего критического поля  $H_{c2\parallel}(T)$ . Действительно, для параметров структуры, соответствующих 2D-поведению  $H_{c2\parallel}(T)$ , наблюдались характеристики  $H_{c2}(\theta)$ , подобные характеристикам тонкой пленки сверхпроводника [6, 72–74]; в противоположном случае имели место зависимости, аналогичные зависимостям однородной анизотропной сверхпроводящей среды [6]. В первом случае кривая  $H_{c2}(\theta)$  характеризуется пиком при  $\theta = 0$  (или разрывом производной  $\partial H_{c2}(\theta)/\partial\theta$ ). Во втором случае функция  $H_{c2}(\theta)$  в точке  $\theta = 0$  является гладкой [6]. На рисунках 1.3(a, b) приведены соответствующие графики [55].

Несмотря на то, что основной признак двумерного или трехмерного характера на экспериментальных угловых зависимостях хорошо выражен (наличие пика или гладкая зависимость при  $\theta = 0$ ), видно их отклонение от стандартных 2D или 3D зависимостей для промежуточных значений углов. В [75, 76] показано, что это слабое отклонение является принципиальным. В работе [75] приведены результаты детальных экспериментальных исследований системы V/Si (сверхпроводник/полупроводник), находящейся в наклонном магнитном поле. Поскольку в этом случае сверхпроводимость структуры обусловлена джозефсоновской связью между соседними

S-слоями, для трактовки экспериментальных данных использовалась модель Лоуренса – Дониаха [77], которую можно было считать надежной.

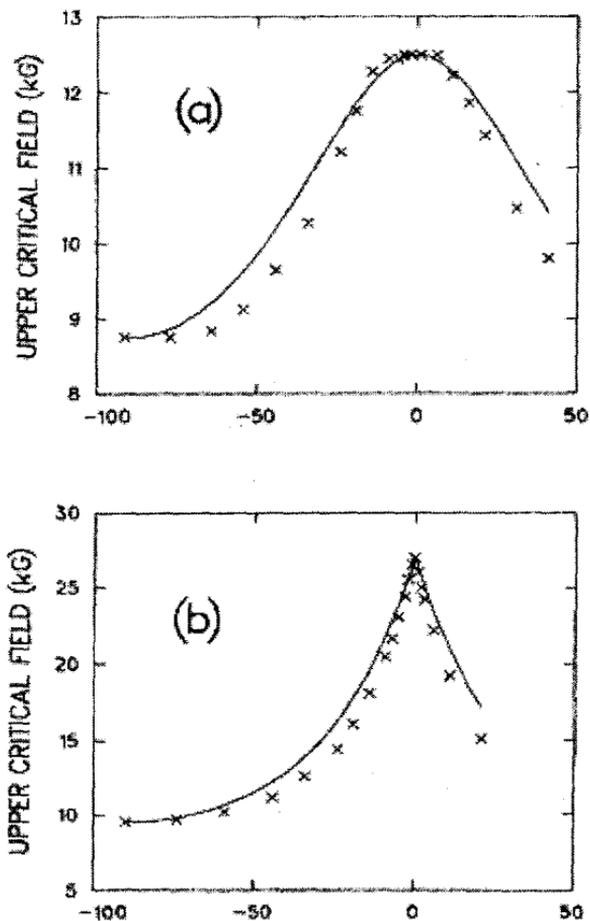


Рис. 1.3. Угловые зависимости критического поля для сверхрешеток Nb/Cu, проявляющих 3D-поведение (а) и 2D-поведение (б). Сплошными линиями показаны угловые зависимости однородного анизотропного сверхпроводника (а) и тонкой пленки (б). (Приводится в соответствии с [55])

Тем не менее формулы этой модели не описывали, при их непосредственном применении, экспериментальных данных, полученных в [75]. Все без исключения экспериментальные зависимости лежали ниже теоретических кривых. Проблема решается единственно возможным образом (в настоящее время решение кажется вполне очевидным). Именно, 2D-3D кроссовер имеет место не только на характеристиках  $H_{c2\parallel}(T)$ , но и на характеристиках  $H_{c2}(\theta)$ . При температуре  $T < T^*$  2D поведение сохраняется при ориентациях магнитного поля вплоть до угла  $\theta^*$  (угол кроссовера), при значениях  $\theta > \theta^*$  сверхпроводящий конденсат переходит в 3D состояние. Вполне очевидно, что для  $S/N$  структур имеет место то же самое.

Таким образом, результатом первого этапа экспериментальных исследований критического состояния  $S/N$  структур явилось обнаружение размерного кроссовера, характеризуемого двумя параметрами,  $T^*$  и  $\theta^*$ . Мы отнесли и более поздние работы к этому этапу, поскольку в них фактически повторялись первые эксперименты, но с различными материалами нормальных слоев. Заметим, что и в теории и на эксперименте подразумевалось, что исследуемые структуры являются сверхрешетками. Для теоретического описания критического состояния  $S/N$  структур и соответственно для анализа экспериментальных данных предпринимались попытки использовать приближение Вертхамера [16, 17] микроскопической теории Де Жена – Вертхамера [10–13, 16, 17], а также ее куперовский предел [9]. Кроме того, использовались оценки в рамках модели Лоуренса – Дониаха [77]. В работе [78] был развит метод расчета критических характеристик  $S/N$  структур, основанный на уравнениях Узаделя [79], полученных в диффузионном пределе из квазиклассических уравнений Эйленбергера [80]. Данный метод эквивалентен на самом деле приближению Вертхамера (или одномодовому приближению). Авторами работы [78] были рассчитаны зависимости  $H_{c2\parallel}(T)$ , удовлетворительно описывающие экспериментальные данные, полученные на системе Nb/Cu [50–56]. Примерно в это же время вышла и работа [81], в которой трактовка экспериментальных результатов по Nb/Cu дана в рамках модифицированной модели ГЛ. Функционал ГЛ этой модели есть сумма свободных энергий  $S$  и  $N$  материалов плюс энергия интерфейсов (границ между слоями). (Следует заметить, что в [81] рассматривалась не сверхрешетка, а

полубесконечная слоистая структура.) В результате вариационного решения уравнений ГЛ были воспроизведены с хорошей точностью экспериментальные зависимости [52, 53] критической температуры и параметра анизотропии от толщины бислоя структуры. 2D-3D кроссовер из предложенной в [81] модели следует, однако фиттирование экспериментальных зависимостей  $H_{c2\parallel}(T)$  не проводилось.

Ключевой работой, определившей следующий этап в развитии теории  $S/N$  структур, и инициировавшей новые эксперименты, явилась статья Такахаша – Тачики (ТТ) «Теория верхнего критического поля сверхпроводящих сверхрешеток» [82].<sup>1</sup> В этой работе приведена процедура, позволяющая получить точное решение линеаризованных уравнений микроскопической теории сверхпроводимости для  $S/X$  сверхрешеток в диффузионном пределе ( $X$  здесь означает либо сверхпроводник, либо нормальный металл, либо ферромагнетик, либо парамагнетик, диэлектрик, или полупроводник). Подход [82] основан на разложении ядра интегрального уравнения де Жена – Вертхамера (для параметра порядка) по ортонормированному базису дифференциального оператора уравнений диффузионного предела микроскопической теории. Основным результатом работы [82] явилась построенная, в главных чертах, *количественная* микроскопическая теория критического состояния сверхрешетки, находящейся во внешнем магнитном поле.<sup>2</sup> Были решены численно уравнения теории в ее диагональном приближении и найдены зависимости  $H_{c2\parallel}(T)$ ,  $H_{c2\perp}(T)$  (а также коэффициент анизотропии решетки  $H_{c2\parallel}(0)/H_{c2\perp}(0)$ ) для сверхрешеток  $S/N$  в трех частных случаях, а именно:  $S$  и  $N$  слои отличаются друг от друга лишь одним из трех материальных параметров: либо плотностью числа состояний на уровне Ферми, либо коэффициентом диффузии, либо эффективной константой электрон-электронного взаимодействия. Кроме того, та же задача была решена для структур типа сверхпроводник/парамагнетик. В работе [82] был объяснен размерный кроссовер, объяснена положительная кривизна зависимости  $H_{c2\perp}(T)$ , имеющая место при температурах, близких к критической. Была

---

<sup>1</sup> Результаты, приведенные в [82], были предварительно опубликованы в краткой форме в статье [83].

<sup>2</sup> Эта теория была бы невозможна без должного развития компьютерной техники.

также воспроизведена экспериментальная зависимость  $H_{c2||}(T)$ , полученная в [55].<sup>1</sup>

В следующей работе Такахаши – Тачики [84] был предсказан более тонкий эффект для сверхрешеток  $S1/S2$ , материалы которых,  $S1$  и  $S2$ , имеют примерно одинаковую критическую температуру и сильно отличающиеся коэффициенты диффузии (например,  $D_1 \gg D_2$ ). Суть эффекта заключается в существовании двух ветвей зависимости  $H_{c2||}^{(1)}(T)$ ,  $H_{c2||}^{(2)}(T)$ , соответствующих двум возможным состояниям сверхпроводящего конденсата, описываемых волновыми функциями с максимумом либо в  $S1$  слое, либо в  $S2$  слое. При  $T^{**} < T < T_c$  критическое поле, соответствующее первому состоянию имеет большее значение,  $H_{c2||}^{(1)} > H_{c2||}^{(2)}$ , и, наоборот, при  $T < T^{**}$  имеем  $H_{c2||}^{(1)} < H_{c2||}^{(2)}$ . Физически происходит следующее. При понижении температуры от  $T_c$  до  $T^*$  и соответствующем росте внешнего параллельного магнитного поля от 0 до  $H_{c2||}(T^*)$ , зародыш сверхпроводящей фазы сжимается, локализуясь при  $T = T^*$  в слое  $S1$  с большей длиной когерентности (соответствующей большему коэффициенту диффузии); это и означает 3D-2D переход. При дальнейшем понижении температуры, вплоть до значения  $T^{**}$ , зародыш сверхпроводящей фазы остается локализованным в  $S1$  слое, и далее, резко смещается в  $S2$  слой. Очевидно, на эксперименте это должно отражаться изломом зависимости  $H_{c2||}(T)$  в точке  $T^{**}$ . Эффект был обнаружен на эксперименте со структурами  $Nb/Nb_{0.6}Ti_{0.4}$  [85] ( $Nb$  и  $Nb_{0.6}Ti_{0.4}$  имеют одну и ту же критическую температуру и разные коэффициенты диффузии), и подтвержден в экспериментах со структурами  $Nb/NbZr$  [86–88]. В [89] проведено моделирование характеристик  $H_{c2||}(T)$  с масштабированной на  $T_c$  температурой, полученных на эксперименте с  $Nb/NbTi$  [85]; теоретические и экспериментальные зависимости практически совпали. При должном выборе толщин слоев структуры  $S1/S2$  оказывается возможным идентифицировать на эксперименте второй размерный эффект [86], а именно: при температурах  $T < T^{**}$  2D поведение сверхпроводящей фазы сменяется снова 3D поведением из-за почти полной локализации сверхпроводящего зародыша внутри  $S2$ -слоя. Причина 3D

---

<sup>1</sup> Сравнивались, правда, не сами характеристики, а промасштабированные зависимости. На это обратили внимание Копердрад и Лоддер (см. текст ниже).

поведения в этом случае вполне понятна. При низких температурах верхнее критическое поле велико, так что длина существенного изменения конденсатной волновой функции становится меньше толщины слоя, и тогда слой нельзя считать тонкой пленкой.

Теория  $S/N$ -сверхрешеток ТТ была детализирована и верифицирована в основном в работах Кеттерсона и сотр. [90–92] (см. также [25, 93]), Таканаки [94–96], Лоддера и сотр. [97–101].

В [90] показано, что в общем случае диагональное приближение, которое использовано в [82] для расчета, равносильно приближению тонкой пленки, т.е. куперовскому пределу (заметим, что для структур  $S1/S2$  с одинаковыми критическими температурами материалов слоев диагональное приближение совпадает с точным решением). В [90–92] построено численно точное решение уравнений теории в случае отсутствия внешнего магнитного поля, и воспроизведена экспериментальная зависимость  $T_c(d)$ , приведенная в [52] для системы Nb/Cu. При этом подгоночный параметр  $T_S$ , критическая температура массивного ниобия, полагался зависящим от толщины слоя Nb в сверхрешетке. Этот способ подгонки, если говорить о сверхрешетке, вызывает определенную неудовлетворенность (более подробные объяснения будут приведены в следующих главах). В работе [92] приведены выражения, позволяющие рассчитывать критическую температуру  $S/N$  с учетом спин-орбитального рассеяния и рассеяния на магнитных примесях.

В [94] приведены примеры расчета верхних критических полей  $H_{c2\perp}(T)$ ,  $H_{c2\parallel}(T)$  в формализме ТТ без ограничения на величины постоянных диффузии, плотности числа состояний и электрон-электронного взаимодействия, при этом были воспроизведены результаты ТТ (для вычислений в [94] использовался метода конечных элементов<sup>1</sup>). В работах [95, 96] были исследованы угловые зависимости верхнего критического поля  $H_{c2}(\theta)$  (а также зависимости  $H_{c3}(\theta)$ ) в окрестности  $\theta = 0$ . При этом в [96] использовалась непрерывная аппроксимация кусочно-постоянных коэффициентных функций микроскопической теории  $S/N$  (фактически, слоистая  $S/N$  структура аппроксимировалась структурой с плавно меняющейся

---

<sup>1</sup> См., например, Г.И. Марчук, «Методы вычислительной математики», М., Наука, 1980. – 536 с.

концентрацией  $N$ -материала<sup>1</sup>). Было показано, что пик в точке  $\theta = 0$  связан с определенным положением зародыша сверхпроводящей фазы.

Полная угловая зависимость впервые рассчитывалась на основе формализма ТТ в работе [104] (см. также критический комментарий в [105]). В [104] определялся, в частности, и угол 2D-3D кроссовера  $\theta^*$  путем “перебора” зависимостей  $H_{c2}(\theta, T)$  при различных фиксированных углах  $\theta$ . Детальное сравнение теоретических и экспериментальных угловых зависимостей  $H_{c2}(\theta)$  впервые проведено в работе [106] для структур Nb/NbZr (напомним, что материалы в этих структурах отличаются лишь коэффициентом диффузии). При этом в [106] получен и проанализирован эффект смещения зародыша сверхпроводящей фазы из слоя с большей длиной когерентности в слой с меньшей длиной когерентности для  $S1/S2$  структур в наклонном магнитном поле.

Наиболее последовательный анализ теории ТТ дан в работах Лоддера и сотр. Во-первых, в [97] была доказана эквивалентность формализма ТТ и формализма, основанного на линеаризованных уравнениях Узаделя [79]. Во-вторых, были проанализированы предельные случаи теории, приближение Вертхамера и предел тонкой пленки (см. также [25]). Наконец, и это главное, в работах [97–101] были проанализированы в рамках теории ТТ реальные структуры и существующие экспериментальные данные. В работе [97] определены области применимости указанных выше приближений сравнением с точным решением (например, при решении секулярного уравнения ТТ были рассчитаны 30 собственных состояний для определения  $H_{c2\perp}(T)$ ), рассмотрены критические состояния систем Nb/Al, Nb/Cu. В работе [98] дан анализ экспериментальных данных, полученных на системе V/Ag [57, 58] и Nb/Cu [52–56], на основе точного решения уравнений ТТ. При этом обнаружился следующий факт: невозможно в рамках теории ТТ одновременно описать экс-

---

<sup>1</sup> Этот же прием использован в работах [102, 103] при расчетах верхних критических полей  $H_{c2\perp}(T)$ ,  $H_{c2\parallel}(T)$  и  $H_{c2}(\theta)$  в рамках варианта анизотропной модели ГЛ, разработанного в [102]. В [103] получены основные результаты по критическому состоянию  $S/N$  в наклонном магнитном поле, однако используемая модель ГЛ содержит 10 параметров.

периментальные зависимости  $H_{c2\perp}(T)$ ,  $H_{c2\parallel}(T)$  и определить правильно критическую температуру структуры  $T_c$ . В частности, оказалось, что теоретическая точка 3D-2D кроссовера и экспериментальное значение  $T^*$  не совпадают друг с другом. В [98] была указана возможная причина этого противоречия между теорией и экспериментом, а именно, в [82] были использованы диагональные условия сшивания функций состояния на  $S$ - $N$  интерфейсах (условия Де Жена). Эти условия предполагают идеальную квантовомеханическую прозрачность границы между слоями. Как следует из расчетов, проведенных в [99], такое допущение оказывается чересчур грубым. Согласие между теорией и экспериментом могут восстановить, в соответствии с [98], условия Куприянова – Лукичева (КЛ) [107], сформулированные для  $S$ - $N$  контакта в диффузионном пределе. Между тем, в работах [99, 100], моделируя фазовые диаграммы системы Nb/Ta [99], а также Nb/Cu, Nb/Ag, V/Cu, V/Ag [100], авторы не достигли желаемого согласия. Тем не менее, оказалось, что, существует процедура скейлинга, с масштабированием длин на «магнитную длину когерентности», которая приводит к наложению теоретических и экспериментальных фазовых диаграмм. При этом обнаружилась проблема противоположного свойства, а именно, несколько наборов подгоночных параметров теории ТТ одинаково удовлетворительно фиттируют промасштабированные экспериментальные характеристики.

Выше было отмечено, что альтернативой формализму ТТ является метод, основанный на использовании узделевских функций Грина [79], предложенный в [78]. Будучи эквивалентным методу ТТ в критической области, этот метод обладает тем не менее преимуществами. Во-первых, уравнения метода в критической области выглядят проще; во-вторых, и это решающее преимущество, метод узделевских функций позволяет исследовать сверхпроводящее состояние  $S/N$  структур, хотя бы в принципе, при любых температурах  $0 \leq T \leq T_c$ , поскольку соответствующие (нелинейные) уравнения известны. Формально точное решение линейризованных уравнений Узаделя, описывающих критическое состояние сверхрешетки, впервые было построено в работе [108]. Это решение основано на разложении функций Узаделя в ряд Фурье. В [108] даны примеры расчета критической температуры в зависимости от толщины  $N$ -слоя и

расчета верхнего перпендикулярного критического поля  $H_{c2\perp}(T)$  (экспериментальные данные не анализировались). В работе [109] было построено точное решение линеаризованных уравнений Узаледа более простым и эффективным матричным методом; анализ экспериментальных данных с помощью этого метода проведен, в частности, в [110].

#### 1.4. Поверхностные эффекты

Комментируя вывод работы [100] о плохом согласии теоретических зависимостей  $H_{c2\parallel}(T)$ , полученных по теории ТТ, и экспериментальных зависимостей, Аартс [111] обратил внимание на то, что при моделировании экспериментальных характеристик в [97–101] использовалось приближение сверхрешетки (то есть, слоистой периодической структуры). Между тем, в работах [112, 113] было приведено прямое экспериментальное доказательство существенного влияния внешних поверхностей многослойной структуры на ее критические характеристики, и доказательство состояло в следующем. Были приготовлены две серии образцов структур Nb/NbZr ( $T_{c,Nb} \approx T_{c,NbZr}$ ,  $\xi_{Nb} \gg \xi_{NbZr}$ ) с одинаковым количеством бислоев, а именно,  $15 \times (\text{Nb}/\text{NbZr})/\text{Nb}$  (NB) и  $15 \times (\text{NbZr}/\text{Nb})/\text{NbZr}$  (NZ). Поскольку количество бислоев в сериях NB и NZ является достаточно большим, можно предполагать NB и NZ образцами одной и той же сверхрешетки; поэтому трудно, на первый взгляд, ожидать отличия в их критических характеристиках. Однако эти отличия оказались разительными. Во-первых, образцы с внешними слоями из NbZr обнаружили поверхностную сверхпроводимость при температурах, близких к критической температуре, о чем свидетельствовал фактор  $H_{c2\parallel}/H_{c2\perp} \approx 1.7$  [4, 6, 12, 13, 114]; это же имело место и для низкотемпературной области. Во-вторых, и это основное, температура  $T^{**}$  ( $T_{2D-3D}$  – в соответствии с [112, 113]), при которой происходит смещение центра зародыша из слоя Nb в слой NbZr (точка разрыва производной  $dH_{c2\parallel}(T)/dT$ ), для структур NZ оказалась значительно выше, чем для структур NB. Влияние поверхностного слоя на температуру  $T^{**}$  очень хорошо демонстрируется дополнительными измерениями на серии структур вида NZ с уменьшающейся толщиной внешних слоев (рисунок 1.4).

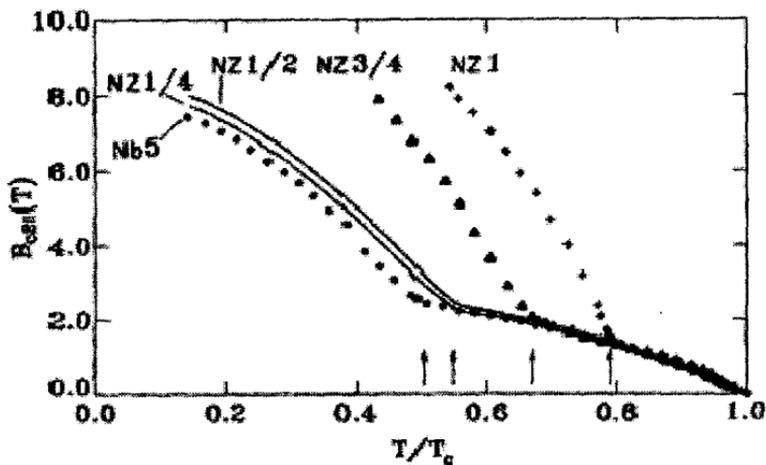


Рис. 1.4 [109]. Зависимости  $\mu_0 H_{c2||}(T)$  для структур Nb/NbZr с толщинами внешних слоев NbZr, составляющими 1,  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{1}{2}$  и  $\frac{1}{4}$  от толщины внутреннего слоя. Nb5 – зависимость  $\mu_0 H_{c2||}(T)$  структуры Nb/NbZr с толстыми внешними слоями Nb

Сдвиг температуры  $T^{**}$  вправо для набора NZ является количественным отражением следующей физической картины. Если внешним слоем является NbZr (малая длина когерентности), то эффект смещения зародыша сверхпроводящей фазы из слоя Nb в слой NbZr при понижении температуры усиливается поверхностным эффектом, а именно, притяжением зародыша поверхностью внешнего слоя NbZr; в результате кроссовер наступает раньше. При дальнейшем понижении температуры (увеличении магнитного поля) вступает в силу поверхностная сверхпроводимость слоя NbZr как толстой пленки. Наоборот, стремление зародыша сверхпроводящей фазы локализоваться при больших магнитных полях в слое NbZr нивелирует поверхностную сверхпроводимость в случае, когда внешним слоем является Nb.

Одновременно с экспериментальной работой [113] вышла теоретическая работа [115] (см. также [116]), посвященная той же проблеме влияния внешней поверхности структуры на характеристику  $H_{c2||}(T)$ , и связанной с ней проблеме зародышеобразования сверх-

проводящей фазы в полубесконечной слоистой среде. В [115] рассматривался тот же класс полубесконечных  $S1/S2$  структур, с материалами, отличающимися лишь коэффициентами диффузии. Авторы [115] независимо пришли к тем же результатам, что и экспериментаторы в [112, 113]. Прямое сравнение теоретических зависимостей и экспериментальных характеристик  $H_{c2||}(T)$ , которое было проведено в [117], показало их согласие.

Общее рассмотрение критического состояния полубесконечной слоистой  $S/N$  структуры дано в рамках теории ТТ в работе [118]. На основе точных вычислений в [118] были получены, для различных наборов значений материальных и геометрических параметров, верхние критические поля, в том числе и  $H_{c3}(T)$ , а также построены функции критических состояний.

Поверхностная сверхпроводимость структур, находящихся в наклонном магнитном поле, рассматривалась в работе [96] в рамках теории ТТ при малых углах  $\theta$  для случая  $S1/S2$  с одинаковыми критическими температурами составляющих материалов.

### 1.5. Конечные $S/N$ структуры. Эффекты симметрии

Как и для однородных сверхпроводников [4, 6, 12, 13, 119, 120], естественным образом возникает задача о критическом состоянии  $S/N$  структур с конечным количеством бислоев, то есть, *реальных* структур. Если, с одной стороны, сверхпроводящий конденсат распределен с заметной амплитудой по всему образцу, а, с другой стороны, плотность его распределения заметно меняется от бислоя к бислою, то обе внешние поверхности существенно влияют на сверхпроводимость. Впервые оценка этого влияния на критическую температуру  $T_c$   $S/N$  структуры дана в работе [121].

В [121] были рассчитаны в приближении Вертхамера критические температуры для структур вида  $n \times (S/N)$  при  $n = 1-4$ , зависимости  $T_c(n)$  для структур  $N/n \times (S/N)$  и  $S/n \times (N/S)$ . График  $T_c(n)$ , фактически, позволяет судить о том, когда можно многослойную структуру считать сверхрешеткой (при отсутствии внешнего магнитного поля); кроме того, в [121] дано корректное определение понятия сверхрешетка.

Исследование критического состояния конечных  $S/N$ , находящихся во внешнем параллельном магнитном поле, впервые было проведено в рамках модели ГЛ в [122, 123]. В работе [124] проведен детальный анализ критических состояний многослойных структур конечной толщины в рамках теории ГТ.

Как оказалось, воздействие на сверхпроводящий конденсат еще одной поверхности приводит к новому эффекту, предсказанному в [122], а именно, к эффекту симметрии. Он состоит в разительном отличии характеристик  $H_{c2\parallel}(T)$ ,  $H_{c2}(\theta)$   $S/N$  структур с четным и нечетным количеством бислоев (структур  $N$ - и  $S$ - типа, соответственно). Для структур  $N$ -типа (плоскость их зеркальной симметрии находится в  $N$  слое) наблюдается размерный переход с выраженным неаналитическим поведением функций  $H_{c2\parallel}(T)$ ,  $H_{c2}(\theta)$  в точках 2D-3D кроссовера  $T^*$ ,  $\theta^*$ , соответственно. Для структур  $S$ -типа (плоскость зеркальной симметрии структуры – в  $S$  слое) 2D-3D переход на указанных зависимостях практически не заметен. Резкий размерный переход, проявляющийся на характеристике  $H_{c2\parallel}(T)$  структуры  $N$ -типа, объясняется скачкообразным изменением характера симметрии волновой функции конденсата в точке  $T^*$ . Физически это соответствует скачкообразному изменению места локализации и топологии зародыша сверхпроводящей фазы [122, 123, 125–127]; той же причиной объясняется и характер кроссовера на угловых зависимостях  $S/N$  структур  $N$ -типа [128–134].<sup>1</sup> Еще более удивительным проявлением эффекта оказалось уширение резистивных характеристик  $R(T)$  структур  $S$ -типа для определенного температурного интервала  $(T_1, T_2)$  [125, 135, 136]. Объяснение эффекта уширения  $R(T)$  основано на рассмотрении окрестности верхнего критического поля. Оказалось, что при  $H < H_{c2\parallel}(T)$  и при  $T \in (T_1, T_2)$  устойчивость сверхпроводящего состояния в структуре  $S$ -типа нарушается из-за образования цепочки абрикосовских вихрей вдоль центрального ( $S$ ) слоя. Теория и результаты экспериментальных исследований эффекта приведены в [121–129].<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Подчеркнем отличие описываемого эффекта симметрии от эффекта ГТ на структурах  $S1/S2$ . В обоих случаях происходит смещение центра зародыша сверхпроводящей фазы при  $T = T^* - 0$ . Однако в нашем случае происходит еще и потеря симметрии состояния.

<sup>2</sup> См. также главу 5 настоящего издания.

## 1.6. Условия на $S$ - $M$ границах

Описание сверхпроводимости слоистых структур в рамках квазиклассического или диффузионного приближении микроскопической теории сопряжено с проблемой задания условий, связывающих функции состояния на границах между слоями. Подробный обзор работ по решению названной проблемы дан в статье [137]. Здесь же мы кратко остановимся на ключевых работах.

В контактных граничных условиях (г.у.) должны быть учтены следующие факторы, приводящие к возникновению потенциально-го барьера на  $S$ - $M$  границе: во-первых, различные кристаллические решетки, зонная структура и различные скорости Ферми  $S$  и  $M$  материалов; во-вторых, наличие неоднородностей и примесей в области контакта. В работе Купера [9] эти факторы были учтены одним феноменологическим параметром в формуле для эффективного электрон-электронного взаимодействия. Для уравнений ГЛ контактное г.у. было получено в [138], исходя из требования отсутствия сверхпроводящего тока в нормальном слое.

Впервые общий вид граничных условий в диффузионном пределе был задан де Женом [11] для ядра интегрального уравнения самосогласования Горькова. Первое (из двух) граничное условие де Жена равносильно требованию непрерывности нормальной к границе составляющей плотности тока. Второе граничное условие («уравнение баланса») определяет скачок «конденсатной волновой функции» диффузионного предела. Один из двух параметров второго граничного условия определяется самосогласованно из свойства симметрии ядра интегрального уравнения. Другой параметр,  $\beta$ , второго граничного условия пропорционален длине свободного пробега  $\ell$  электрона в металле (в [11] он не рассчитывался). В [11] отмечается, что параметр  $\beta$  не может быть принят равным нулю, как того требует диффузионный предел, если только не оговорено дополнительное условие: коэффициент прозрачности границы  $\mathcal{T}$  должен быть много больше величины  $\ell/\xi$ . В [11] принимается дополнительное условие о полной прозрачности  $S$ - $M$  границы,  $\mathcal{T} = 1$ .<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Принятое допущение методически было вполне оправданным, поскольку в то время не существовало экспериментальных данных, позволяющих определить ве-

Случай низкой прозрачности  $S$ - $M$  границ ( $T \rightarrow 0$ ) впервые был рассмотрен в работе [139] в рамках «туннельной модели» эффекта близости при малой толщине  $M$  слоя.

В рамках квазиклассической теории сверхпроводимости [80, 140, 141] граничные условия для  $S$ - $M$  контакта были получены в 1984 г. Зайцевым А.В. [142] и Шеланковым А.Л. [143] при произвольной форме и произвольной прозрачности потенциального барьера. В дальнейшем контактные г.у. записывались для структур  $S/X$  в различных вариантах в ряде работ (их список см. в [137]). В частности, в [144] сформулированы г.у. для триплетных сверхпроводников, в [145] рассмотрены магнитоактивные границы, наиболее общая форма граничных условий дана в [137].

Между тем, в экспериментах использовались и используются слоистые структуры, удовлетворяющие условиям диффузионного предела. Для этого случая граничные условия были получены, на основе контактных условий А.В. Зайцева [142], в работе [107]. В работе [146] рассчитаны функции состояния, а также, плотности числа состояний и критические токи для структур  $SNINS$  и  $SNIS$  в зависимости от параметров, характеризующих  $S$ - $N$  контакт, в частности, от параметра квантово-механической прозрачности КЛ ( $\gamma_b$ ). В [147, 148] проведены детальные исследования зависимости критической температуры, а также, плотности числа состояний [148] от параметра прозрачности для  $S$ - $N$  контактов и сверхрешеток. В [149] исследованы микроскопические характеристики  $SN$ ,  $SNISN$  и  $NSISN$  структур с тонкими  $S$  слоями – параметр порядка  $\Delta$ , плотность куперовских пар, плотность числа состояний и «минищель» в плотности числа состояний – в зависимости от сопротивления  $S$ - $N$  границы. В работе Лоддера и сотр. [150] дано полное описание экспериментов на сверхрешетках Nb/Cu [52–56] и V/Ag [57, 58] с учетом контактных условий КЛ.

Более точные условия шивания узделевских функций Грина были сформулированы Ю. В. Назаровым в [151] на основе конечно-элементного численного подхода [152], имитирующего теорию электрических цепей. В соответствии с [151] (см. также [153, 154])

---

личину  $T$ . Кроме того, устранение дополнительного параметра из теории существенно облегчает расчеты.

условия КЛ являются точными лишь в пределе  $T \rightarrow 0$ , а также,  $T \rightarrow 1$ . Этот вывод подтвержден в работе [155], при этом, с использованием «многоканальной» теории кондактанса [156], получены более корректные формулы для параметров условий КЛ с сохранением самой формы условий. Уточненные таким образом условия КЛ позволяют, как показано в [156], с большей надежностью оценить коэффициент прозрачности по экспериментальным данным.

### 1.7. Предельные эффекты. Прозрачность $S$ - $N$ границ и проблема идентификации параметров $S/N$ структур по их критическим характеристикам

В работах [157, 158], а также [159], впервые проведено детальное экспериментальное исследование квантовомеханической прозрачности  $S$ - $N$  границ на основе критических характеристик  $T_c(d_S)$ ,  $T_c(d_N)$ ,  $H_{c2\perp}(T)$  двухслойных и трехслойных  $S/N$  структур. Однако при этом использовались формулы, полученные в пределе  $T \rightarrow 0$  теории КЛ, что некорректно, как показано в [160]. В [160] и далее в [109, 110] исследуемые в [157–159] системы Nb/Cu и Nb/Pd проанализированы на основе приближения Вертхамера и на основе точного решения уравнений диффузионного предела. При этом выяснилось, что только на основе измерений зависимостей  $T_c(d_S)$ ,  $T_c(d_N)$  и  $H_{c2\perp}(T)$  невозможно определить однозначно набор микроскопических параметров, характеризующих структуру. Это связано с тем, что экспериментальные характеристики  $T_c(d_S)$  с необходимостью удовлетворяют т.н. критерию предельного поведения. В [109, 110, 160–166] была разработана методика идентификации параметров  $S/N$  системы, основанные на измерении критических характеристик, каждая из которых удовлетворяет названному критерию. В результате набор параметров системы определяется как пересечение множеств их допустимых значений.<sup>1</sup>

Проблемы, связанные с трактовкой экспериментальных данных в рамках диффузионного предела, в частности, проблема прозрачности  $S$ - $N$  границы, рассматривались также в работах [167, 168]. В [167] (как и в более ранних работах этого же автора, их список при-

<sup>1</sup> Данная методика будет изложена в главе 3.

веден в [167]) исследуются характеристики структуры при очень малых толщинах  $d_N$  нормального слоя ( $d_N \approx \ell_N$ ). Автор отмечает несоответствие результатов теории де Жена при  $d_N \rightarrow 0$  экспериментальным данным. Авторы работы [168], подразумевая это несоответствие очевидным (квазиклассический и диффузионный предел исключают по определению эту область толщин из рассмотрения), находят удобный способ описания экспериментальных характеристик; они обращают внимание на то, что при малых  $d_N$  следует учесть зависимость  $\ell_N(d_N)$ , в силу которой  $\ell_N(d_N \rightarrow 0) \rightarrow 0$ .

### **1.8. $S/M$ структуры в «чистом» и квазиклассическом пределе. Параметр порядка $\Delta(r)$ . Локальная плотность числа состояний**

Теоретические исследования сверхпроводящего состояния “чистых” сверхпроводников, в том числе и слоистых структур, подразумевают решение уравнений Боголюбова – де Жена с самосогласованным определением параметра порядка  $\Delta(r)$  (потенциала спаривания). Результатом этого решения является спектр возбужденных состояний над основным состоянием сверхпроводимости. В частности определяется наименьшая энергия возбуждения  $E_1$ , или энергетическая щель между основным и возбужденными состояниями. Для слоистых структур возникает также задача определения локальной плотности числа состояний ( $LDoS$ ). Величины  $E_1$  и  $LDoS$  могут быть измерены методами туннельной спектроскопии [169]. Расчету  $E_1$  и  $LDoS$  и уделяется основное внимание в теоретических работах, посвященных исследованию  $S/M$  в чистом пределе. Кроме того, в чистом пределе рассчитывались критическая температура и критический ток.

Использование чистого предела предполагает, что толщины слоев структуры меньше длин свободного пробега электрона в соответствующих металлах. Следовательно, в настоящее время теоретические результаты могут быть применены лишь к структурам с очень тонкими слоями (продольные размеры слоев не так важны в силу теоремы Андерсона [13]), либо к т.н. точечным контактам. Обсуждение таких структур выходит за рамки настоящего обзора. Поэтому здесь кратко перечислим работы, в которых достигнуто су-

шественное продвижение в разработке теоретических методов исследования чистых  $S/M$  структур.

Как уже говорилось, основным результатом работы де Жена [11] является теория  $S/M$  структур, построенная в диффузионном пределе. Вместе с тем, в [11] де Женом даны оценки потенциала спаривания  $\Delta(\mathbf{r})$ , величины энергетической щели  $E_1$  для чистых двухслойных и трехслойных  $S/N$  структур. Оценки выполнялись на основе вариационного принципа, сформулированного для уравнений Боголюбова. Существенным результатом [11] явилось доказательство теоремы о том, что для  $SNS$  структуры величина  $E_1$  почти совпадает с величиной минимума функции  $\Delta(\mathbf{r})$ . Исходя из предварительных оценок де Жена, авторы работ [170 – 172] построили приближенные решения уравнений чистого предела для двухслойных  $S/N$  структур с тонким  $N$ -слоем. В [170] принималось, что функция  $\Delta(\mathbf{r})$  является константой в каждом из слоев ( $\Delta_N$  – в нормальном слое и  $\Delta_S$  – в сверхпроводящем слое). В [171, 172] функция  $\Delta(\mathbf{r})$  аппроксимировалась тригонометрическим и гиперболическим косинусом в  $S$ -слое и  $N$ -слое, соответственно.

Расчеты спектра квазичастиц сверхрешетки  $S/N$  с осуществлением итерационной процедуры для определения потенциала спаривания и волновых функций квазичастиц были проведены впервые в работах Танаки и Цукады [173, 174]. На каждом шаге итерации для вычисления горьковских функций Грина использовался кусочно-постоянный потенциал по типу Кронига – Пенни, полученный усреднением уравнения самосогласования, определенного предыдущей итерацией. Функции Грина (заданные приближенными уравнениями) вычислялись точно с использованием метода, разработанного этими же авторами в [175, 176]. Теория, разработанная в работах [173–176], включила в качестве предельных или частных случаев прежние результаты, полученные для  $S/N$  структур в чистом пределе (наряду с [170–172], следует назвать работы [177, 178]). Тем не менее, это отмечают сами авторы [173], их метод не является полностью самосогласованным, поскольку при расчете собственных функций квазичастиц использовался усредненный потенциал  $\Delta(\mathbf{r})$ . На основе метода Танаки – Цукады группой Лоддера в работах [179–181] был развит улучшенный метод, являющийся (по утвер-

ждению авторов) точным (в [180] был предложен анзац, позволяющий осуществить сходящуюся процедуру для определения  $\Delta(\mathbf{r})$ ).

Квазиклассический подход к решению уравнений Боголюбова был впервые использован в работе Андреева [20] при исследовании задачи о переносе тепла на границе раздела сверхпроводящей и нормальной фаз. Данный метод был развит в ряде работ (см. например [182– 87]). В частности, в [184] рассмотрена  $S/N$ -структура с толщиной  $S$ -слоя много большей  $\xi_S$ , и толщиной  $N$ -слоя порядка  $\xi_N$ . В работе [185] андреевское приближение было сформулировано на языке горьковских функций Грина. При этом оказалось, что оно эквивалентно квазиклассическому подходу Эйленбергера. В [185] разработана также методика вычислений функций Грина с использованием оператора эволюции и усреднением по быстро меняющимся фазам. Плотность числа состояний рассчитывалась в приближении кусочно-постоянного потенциала спаривания. В следующих работах этих же авторов были проведены детальные вычисления потенциала спаривания и  $LDOS$  [186], а также критической температуры [187]. Андреевское приближение было проанализировано с позиции точного решения уравнений чистого предела в работах [180, 188, 189].

Статья [20] на самом деле инициировала в физике сверхпроводимости научное направление, связанное с исследованием транспорта квазичастиц, в частности, андреевского отражения (полная теория андреевского отражения была построена в работе [190]<sup>1</sup>), и кроме того, явилась основой экспериментального метода (андреевская спектроскопия). По данным направлениям, равно как и по исследованиям процессов переноса в  $S/N$  структурах существует обширная литература; соответствующие обзоры экспериментальных и теоретических работ приведены в [191–193].

Завершая обзор исследований сверхпроводящих структур типа  $S/N$ , перечислим ряд важных работ, не попавших в основной текст.

В экспериментальной [194] и теоретической [195] работах исследовано критическое состояние “экзотических”  $S/N$  структур, слои которых чередовались по закону Фибоначчи.

---

<sup>1</sup> Работа [190] входит в число 100 наиболее цитируемых работ по физике.

С конца 90-х годов резко возрос интерес к исследованию промежуточного состояния слоистых наноструктур. Состояние исследований вихревой среды, характеризующей промежуточное состояние, отражено в материалах специализированной конференции “Vortex Matter in Nanostructured Superconductors”, проходящей с 1999 г. раз в 2 года (материалы конференции публикуются в журнале Physica C).

Исследованию окрестности нижнего критического поля  $H_{c1}(T)$  посвящена серия работ [196–202]. В работах [196, 197] рассчитывалась зависимость  $H_{c1\perp}(T)$  при значениях параметра Гинзбурга – Ландау  $\kappa \gg 1$ . Нижнее критическое поле определялось стандартным способом как наименьшее поле, при котором может появиться элементарный вихрь. Показано, что при  $d_{N,S} \ll \delta_{N,S}$  ( $\delta$  – глубина проникновения магнитного поля) выражение для  $H_{c1\perp}$  определяется по той же формуле, что и для однородного сверхпроводника, в которой фигурирует эффективная глубина проникновения (рассчитанная в [196, 197]). Показано также, что при дополнительном условии  $\sigma_N \gg \sigma_S$  (проводимости  $N$ - и  $S$ - материалов), характеристика является аномальной (имеет положительную кривизну при низких температурах). В [198, 199] получена зависимость  $H_{c1\parallel}(T)$  и исследована анизотропия многослойной структуры (принималось, что  $S$  и  $N$  слои разделены бесконечно тонкими диэлектрическими прослойками). В [200, 201] для структур Nb/Cu обнаружен 3D-2D размерный кроссовер на характеристиках  $H_{c1\parallel}(T)$ ; кроме того, обнаружен еще один переход, трактуемый как переход от двумерного к сильно связанному двумерному поведению сверхпроводящего конденсата. Развернутое физическое толкование экспериментальных результатов [200, 201] дано в [202] на основе численного решения одномерных уравнений Узаделя.

Наконец, в работе [203] рассмотрено мейсснеровское состояние для двухслойной  $S/N$  структуры на основе численного решения одномерных уравнений Узаделя, записанных в  $\theta$ -параметризации. Для различных наборов материальных параметров, характеризующих, в том числе и  $S$ - $N$  интерфейс, построены зависимости восприимчивости  $\chi$  от  $(T/T_c)^{-1/2}$ . В [203] можно найти и обзор литературы по исследованиям мейсснеровского состояния в  $S/N$  структурах.

## 1.9. Эффекты в слоистых структурах сверхпроводник/ферромагнетик

Интенсивность исследований сверхпроводимости  $S/F$  структур можно выразить количеством обзоров [204–211], вышедших за период с 1999 по 2006 годы. Столь высокий интерес обусловлен антагонистическим характером двух типов упорядочения – синглетной сверхпроводимости и ферромагнетизма. Их сосуществование редко встречается в естественных объемных соединениях (магнитных сверхпроводниках с локализованными магнитными моментами),<sup>1</sup> но достаточно легко достигается, в силу эффекта близости, в структурах с контактирующими сверхпроводящим и ферромагнитным материалами. Действительно, как упоминалось в начале главы, уже в эксперименте Мейсснера сверхпроводимость была зафиксирована в структурах Sn/Fe, Sn/Co, Sn/Ni [3]. Систематическое исследование слоистых  $S/F$  структур открывается работой [215]. В [215] кривые  $T_c(d_S)$  двухслойных структур Pb/Fe, Pb/Gd, и Pb/Ni были проанализированы на основе теории эффекта близости де Жена – Вертхамера, в которой учтено обменное рассеяние куперовских пар на хаотически ориентированных локализованных магнитных моментах [216].<sup>2</sup> Полученное хорошее согласие теоретических и экспериментальных зависимостей дало основание утверждать, что, во-первых, в  $F$ -слое индуцируется сверхпроводящий конденсат, и во-вторых, обменное взаимодействие есть основной фактор подавления сверхпроводимости в  $S/F$  структуре (куперовские пары образованы электронами с противоположными спинами, обменное же взаимодействие в ферромагнетике стремится сориентировать спины электронов в одном направлении).<sup>3</sup> Факт сосуществования сверхпроводимости

---

<sup>1</sup> Аналитический обзор работ (вышедших до 1984 года) по исследованию таких соединений, приведен в [212, 213]; дальнейшее развитие этого направления можно проследить по работам А.И. Буздина (см. в частности [214]).

<sup>2</sup> Моделирование ферромагнетизма  $F$ -слоя локализованными моментами, как показано в [215], является самосогласованным, поскольку в тонкой пленке ферромагнетика длина рассеяния оказалась порядка размеров доменных зерен.

<sup>3</sup> В результате анализа двухслойной структуры Pb/Fe авторы [216] заключают: “We are forced to conclude that the ferromagnetism of the iron plays an important role in determining the sandwich transition temperature”.

и ферромагнетизма был подтвержден в работах [217, 218] наблюдением трехмерного поведения критических зависимостей  $H_{c2\perp}(T)$  и 2D-3D перехода на характеристиках  $H_{c2\parallel}(T)$  трехслойных Fe/V/Fe и многослойных V/Fe структур. Но наиболее примечательный результат работы [218] – это немонотонная зависимость критической температуры от толщины  $F$ -слоя.<sup>1</sup> Как было показано впоследствии, данный факт есть проявление следующего фундаментального свойства  $S/F$  структур: Обменное взаимодействие обуславливает не только сильное затухание конденсатной волновой функции вглубь ферромагнетика, но и ее осцилляции. В результате сверхпроводящее состояние  $S/F$  структур может реализоваться, в зависимости от геометрических и микроскопических параметров, в двух термодинамических состояниях – в 0-состоянии и  $\pi$ -состоянии (для трехслойных  $S/F/S$  структур, обладающих плоскостью зеркальной симметрии, параллельной слоям, 0-состоянию соответствует симметричная конденсатная волновая функция без нулей;  $\pi$ -состоянию соответствует антисимметричная волновая функция). Вполне естественно ожидать, что в случае магнитно-неоднородных  $F$ -слоев обменное взаимодействие может инициировать триплетные состояния сверхпроводимости; по всей видимости, эти состояния действительно наблюдались в  $S/F$  структурах (см. раздел 1.9.2).

### 1.9.1. Осцилляционные эффекты, 0- и $\pi$ -состояния

Возможность реализации 0- и  $\pi$ -состояний была предсказана в работах [219, 220] для  $S/F/S$  контактов, удовлетворяющих условиям баллистического предела; 0- и  $\pi$ -состояния должны обнаружить себя *осцилляциями критического тока*  $I_c$  как функции толщины ферромагнитного слоя  $d_F$ . В работе [221] осциллирующие зависимости  $I_c(d_F)$  были получены в диффузионном пределе микроскопической теории, что важно с экспериментальной точки зрения. Далее, в работах [222–225] было показано, что следствием осциллирующей конденсатной волновой функции может быть *немонотонное пове-*

---

<sup>1</sup> Первая теоретическая работа, посвященная обсуждению данного результата (1986 г.), вышла только через 4 года (1990 г.); очевидно, в этот период доминировала тематика ВТСП.

дение (в частности, осцилляции) критической температуры в зависимости от толщины ферромагнитного слоя. При этом в работе [223] на основе точного решения уравнений Узаделя<sup>1</sup> для сверхрешетки воспроизведены экспериментальные зависимости  $T_c(d_F)$ , полученные в [218] (выяснилось, однако, что с точки зрения проверки теории, экспериментальные данные, приведенные в [218], являются неполными). Наконец, в р работе [226] были предсказаны осцилляции локальной плотности числа состояний. Существенно, что на названных термодинамических зависимостях  $S/F$  структуры смена состояний отражается точками неаналитичности (или точками «кроссовера» состояний).

Работами [219–226] были инициированы многочисленные эксперименты.

Немонотонная зависимость критической температуры от толщины  $F$ -слоя, впервые после выхода работ [222–225], была обнаружена в экспериментах с многослойными структурами Nb/Gd [227] и с трехслойными структурами Nb/Gd/Nb [228] (рис. 1.5).

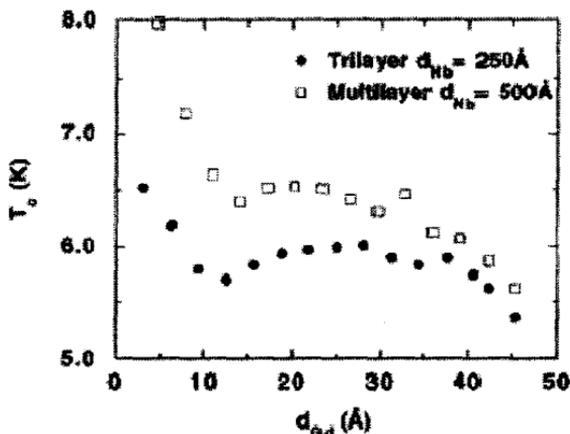


Рис. 1.5 [228]. Зависимости критической температуры трехслойной структуры Nb/Gd/Nb и многослойной структуры Nb/ $n_b$ ×[Gd/Nb] от толщины  $F$ -слоя

<sup>1</sup> Решение строилось разложением в ряд Фурье.

Как видим из рисунка 1.5, на зависимостях  $T_c(d_F)$  имеет место излом при  $d_F = d_F^* \sim 1.2-1.5$  нм с минимумом в этой точке; при этом значение  $d_F^*$  является, если следовать теории [223], точкой кроссовера между 0- (при  $d_F < d_F^*$ ) и  $\pi$ - (при  $d_F > d_F^*$ ) состояниями. Фиттирование экспериментальных данных, проведенное в [227, 228], показало, что действительно, между теорией и экспериментом имеется качественное согласие. Почти сразу же аналогичный результат был получен для многослойных структур Nb/CuMn [229–231].

Тем не менее работы [227–231] не были восприняты как безоговорочное экспериментальное доказательство существования  $\pi$ -состояния. Например, в [232, 233] для структуры Fe/Nb/Fe была также получена немонотонная зависимость  $T_c(d_F)$  (см. рис. 1.6), однако авторам этих работ не удалось описать экспериментальную характеристику количественно в рамках формализма, разработанного в [223].<sup>1</sup>

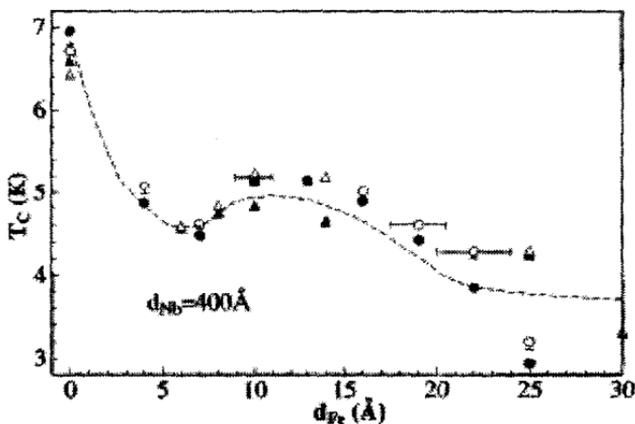


Рис. 1.6 [232]. Зависимости критической температуры трехслойной структуры Fe/Nb/Fe от толщины F-слоя. Локальный минимум соответствует наибольшей толщине пленки Fe с утраченным ферромагнетизмом

<sup>1</sup> В заключении работы [232] сказано: “The first conclusion from our results is that the experimental finding of Jiang *et al.* [8] cannot be taken unambiguously as an evidence for the existence of a  $\pi$  coupling [3].”

В [232, 233] было предложено альтернативное объяснение (качественное), учитывающее наличие между слоями Nb и Fe тонкой нормальной прослойки Fe с утраченным ферромагнетизмом (“magnetically dead layer”).

Далее, кроме работ, в которых немонотонная зависимость  $T_c(d_F)$  толковалась не в пользу гипотезы о  $\pi$ - состояниях, в ряде экспериментов (на многослойных структурах V/Fe [234], Nb/Gd [235], V/V<sub>1-x</sub>Fe<sub>x</sub> [236], Nb/Fe [237], двухслойных структурах Pb/Ni [238]), были получены характеристики  $T_c(d_F)$  без осцилляций и признаков  $\pi$ -состояния. Любопытной особенностью характеристик, измеренных в [235, 237] является их ступенчатое изменение.

Таким образом, по результатам экспериментов [227–238], теория критического состояния в  $S/F$  структурах, изложенная в [222–225], далеко не полностью описывала экспериментальные данные. Причины этого вполне очевидны. Во-первых, было принято приближение полной прозрачности  $S-F$  границы ( $T = 1$ ). Во-вторых, в ряде случаев важен учет спин-орбитального рассеяния, а также рассеяние на парамагнитных примесях. Наконец, наиболее сложная проблема состоит в следующем. В большинстве перечисленных экспериментальных структур использовались сильные ферромагнетики, так что характерная длина существенного изменения конденсатной волновой функции оказывается не более 1 нм, а исследуемый диапазон изменения толщин  $F$ -слоев сводится к нескольким нм (см. рисунки 1.5, 1.6). В результате диффузионный предел оказывается чересчур грубым для описания таких структур.

Отмеченные проблемы решались в серии теоретических и экспериментальных работ. В классической работе [239] была построена теория критического состояния  $S/F$  структур с учетом спин-орбитального рассеяния.<sup>1</sup> Проблема описания критического состояния  $S/F$  структур с  $F$ -слоями из сильного ферромагнетика была рассмотрена, с учетом неполной прозрачности  $S-F$  границ, в серии статей Прошина, Хусаинова и др. [240–243] (полный список приведен в [243]) и в серии статей Тагирова и др. [244–247]. Уравнения теории в [240–242, 244, 245] были получены из уравнений Эйленберге-

---

<sup>1</sup> В данной работе дана наиболее ясная физическая картина эффекта близости в  $S/F$  структурах.

ра в диффузионном пределе с учетом первой поправки в разложении по параметру  $\tau_F E_{ex}$  ( $\tau_F$  – время свободного пробега электрона в ферромагнетике) и совпали по форме с уравнениями Узаделя, в которых коэффициент диффузии приобрел мнимую часть. (Вывод уравнений позднее был скорректирован в работах [248, 249]). Тот же комплексный коэффициент диффузии модифицирует и контактные условия КЛ. В рамках развитого формализма получили объяснение известные в то время результаты экспериментов на  $S/F$  структурах. В частности, в работе [245] в результате прямого расчета структуры  $S/M/F$  (прослойка  $M$  представляет собой нормальный металл с высокой концентрацией центров парамагнитного рассеяния и имитирует магнито-мёртвый слой) дано объяснение ступенчатых зависимостей  $T_c(d_F)$ , полученных в [235], равно как и зависимостей, приведенных на рисунках 1.5, 1.6.

Результаты теории [240–242, 244–247] были подтверждены в последующих экспериментах с многослойными структурами Nb/Co [250, 251], V/Co [250], Nb/Fe/Cu [252], Fe/Pb/Fe [253], Fe/V/Fe [254], Nb/Co/Nb [255, 256], пятислойной структурой Co/Nb/Co/Nb/Co [255, 256] и двухслойными структурами Nb/CuNi [257, 258], Nb/Ni [259], Nb/PdNi [260]. В частности, на рисунке 1.7 приведены экспериментальные зависимости  $T_c(d_F)$  с выраженными осцилляциями [256].

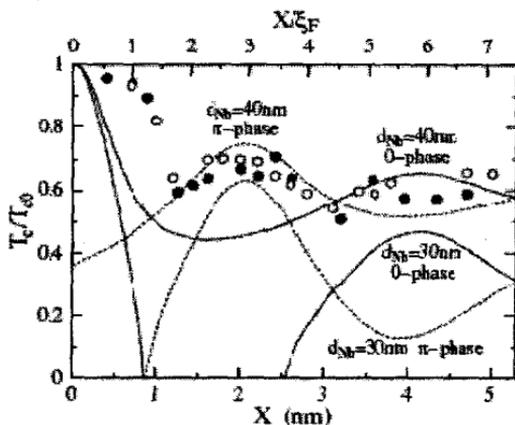


Рис. 1.7 [256]. Зависимости  $T_c(d_F)$  структуры Nb/Co от толщины  $F$ -слоя (символы)

Однако результаты тщательного эксперимента по исследованию влияния прозрачности  $S$ - $F$  границы на характеристики структуры  $V/V_{1-x}Fe_x$  [236] были объяснены теорией только качественно, поскольку в данном случае условие  $\tau_F E_{ex} < 1$  не выполняется. Противоположный предельный случай  $\tau_F E_{ex} \gg 1$  был рассмотрен в работах [261] (при расчете  $LDoS$ ), [262]; в [246, 247] рассмотрены структуры «грязный» сверхпроводник – чистый ферромагнетик.

В работах [240–242], [244, 245] было предсказано еще одно «осцилляционное» явление, а именно, явление «возвратной сверхпроводимости» (re-entrant superconductivity), обнаруженное вскоре (не совсем отчетливо) на эксперименте со структурами  $Fe/V/Fe$  [254]. Хорошо выраженный эффект был получен в эксперименте В. Здравкова и др. со структурами  $Nb/Cu_{0.49}Ni_{0.51}$  [263] (рис. 1.8).

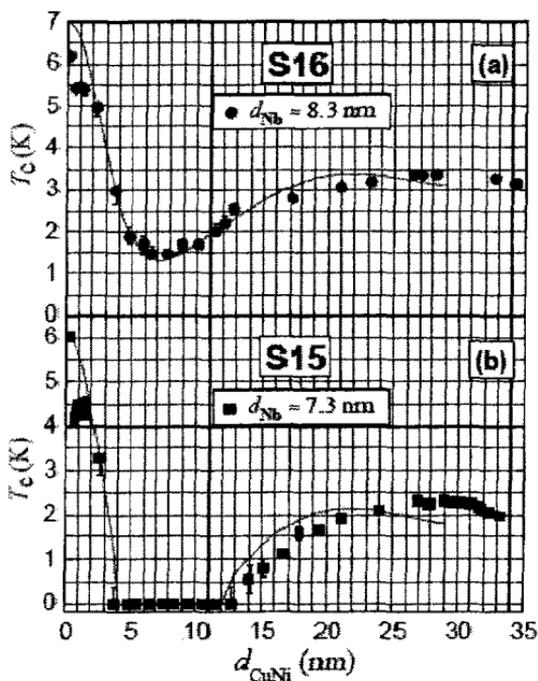


Рис. 1.8 [263]. Экспериментальные (символы) и теоретические (сплошные линии) зависимости  $T_c(d_F)$  структуры  $Nb/Cu_{0.49}Ni_{0.51}$

Как видим из рисунка 1.8(b), сверхпроводимость в структуре исчезает при толщине ферромагнитного слоя 4 нм и вновь возникает при толщине 12 нм. В 2008 г. обнаружен (рассчитанный Л.Р. Тагировым) эффект двойного исчезновения сверхпроводимости [264, 265] (см. рис. 1.9).

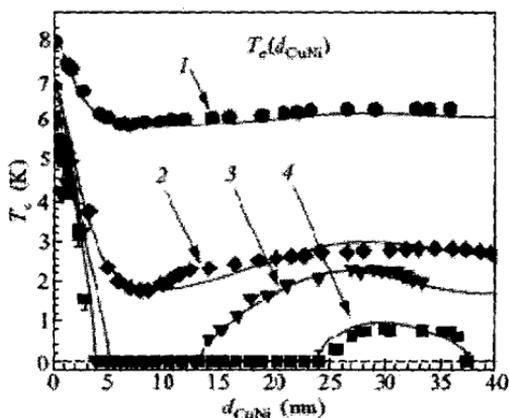


Рис. 1.9 [265]. Экспериментальные (символы) и теоретические (сплошные линии) зависимости  $T_c(d_F)$  структуры  $\text{Nb}/\text{Cu}_{0.41}\text{Ni}_{0.59}$ . Кривая 3 соответствует возвратной сверхпроводимости, кривая 4 – двойному исчезновению сверхпроводимости

Обратим еще раз внимание на то, что характерная длина изменения функции  $T_c(d_F)$  для структур с  $F$ -слоями из сильных ферромагнетиков составляет не более 1 нм, а вся картина смены состояний «разыгрывается» на интервале толщин  $d_F \sim 0\text{--}5$  нм (рисунки 1.5 – 1.7). Данное обстоятельство осложняет наблюдение критических характеристик из-за большой относительной величины  $\delta d_F/d_F$  неоднородностей ферромагнитных слоев. В то же время для структур со слабыми, или «разреженными», ферромагнетиками (ферромагнитными сплавами с достаточно малой величиной обменного потенциала  $E_{ex} \sim 100\text{--}300$  K) величина интервала наблюдения по толщинам  $d_F$  расширяется до 40 нм (рисунки 1.8, 1.9). Впервые такие структуры предложено использовать в качестве объекта исследования группой В.В. Рязанова [266, 267]. В результате измерений плотности критического тока  $J_c$  в зависимости от температуры, от

внешнего магнитного поля, а также зависимостей критического  $J_c(d_F)$ , проведенных на структурах Nb/Cu<sub>1-x</sub>Ni<sub>x</sub>/Nb, были получены явная картина осцилляций критического тока и первое бесспорное доказательство существования  $\pi$ - состояний [268] (см. также [269–272]). Одна из измеренных зависимостей плотности критического тока от толщины  $F$ -слоя, демонстрирующие переходы  $0 - \pi, \pi - 0$ , приведена вместе с теоретической зависимостью на рисунке 1.10 [272].

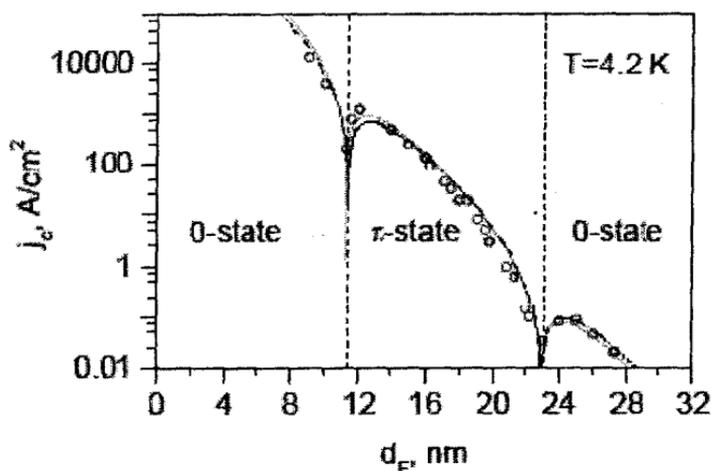


Рис. 1.10 [272]. Экспериментальная и теоретическая зависимости критического тока структуры Nb/Cu<sub>0,47</sub>Ni<sub>0,53</sub>/Nb от толщины  $F$ -слоя

Кроме того, в [268–272] были получены также осциллирующие зависимости критического тока от температуры, критического тока от внешнего магнитного поля. Почти одновременно с работами В.В. Рязанова и др. выходят и работы других групп экспериментаторов, в которых также представлены осциллирующие зависимости  $J_c(d_F)$  с явно выраженными  $0 - \pi$  кроссоверами (см., в частности, [273–277]).

Выбор в качестве объекта исследований  $S/F$  структур со слабыми ферромагнетиками определил и достаточный теоретический ап-

парат для их описания, а именно, уравнения Узаделя, дополненные условиями шивания КЛ (либо условиями для спин-активных  $S$ - $F$  границ [278]); мнимая поправка к коэффициенту диффузии в этих уравнениях оказывается уже излишней. В работах [248, 279] разработан точный метод решения граничной задачи (метод Фурье) для уравнений Узаделя, описывающих критическое состояние двухслойных (или трехслойных) структур и сверхрешеток (более эффективный метод, позволяющий рассчитывать многослойные структуры, будет изложен в следующей главе). В работе [280] дан анализ влияния спин-орбитального рассеяния и рассеяния с переворотом спина на характеристики  $T_c(d_F)$ ,  $J_c(d_F)$  при различных значениях параметра квантовомеханической прозрачности  $S$ - $F$  границы.

Наконец, приведем экспериментальные графики, демонстрирующие немонотонную зависимость локальной плотности числа состояний  $\mathcal{N}_F(0; x)$  (рис. 1.11) и  $\pi$ - фазную плотность числа состояний  $\mathcal{N}_F(\epsilon)$  в ферромагнетике (рис. 1.12), измеренные для структур Nb/PdNi/Nb [281].

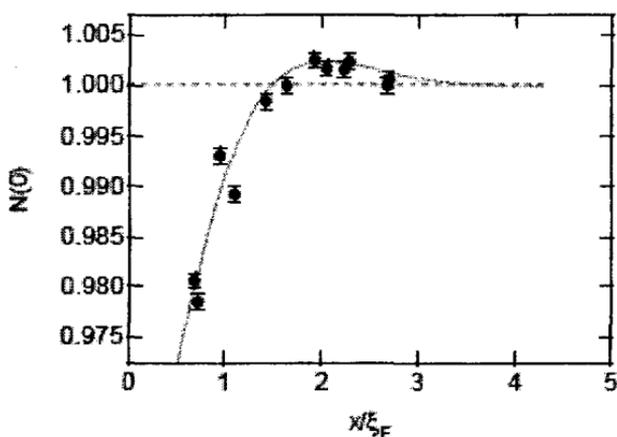


Рис. 1.11 [281]. Экспериментальная (символы) и теоретическая (сплошная кривая) зависимости  $\mathcal{N}_F(0; x)$ ,  $LDoS$  в ферромагнетике, нормированной на величину  $\mathcal{N}_F(0; d_F^*)$ , для структуры Nb/PdNi.

Ось  $Ox$  направлена перпендикулярно плоскости слоев

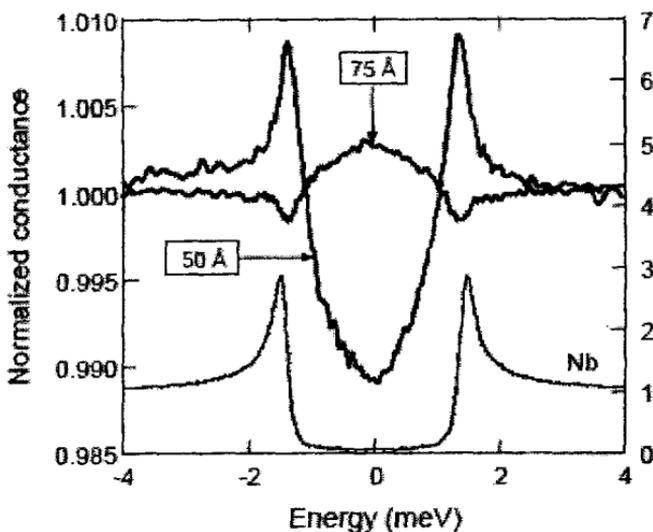


Рис. 1.12 [281]. Спектральная плотность числа состояний в окрестности уровня Ферми  $\mathcal{N}_F(\epsilon)$  в ферромагнетике, измеренная для структуры Nb/PdNi при толщинах ферромагнитного слоя  $d_F = 5$  нм (0-состояние) и  $d_F = 7.5$  нм ( $\pi$ -состояние). (Нормализованный кондактанс равен нормированной плотности числа состояний). Характеристика  $\mathcal{N}_F(\epsilon)/\mathcal{N}_F(0)$  сверхпроводящего ниобия приведены для сравнения

Результаты эксперимента [281] моделировались в работе [282] в чистом пределе в рамках квазиклассического приближения. Было получено хорошее согласие теоретических кривых  $\mathcal{N}_F(\epsilon)/\mathcal{N}_F(0)$  с экспериментальными зависимостями (но при очень низком значении коэффициента прозрачности  $T$ ). В [283] приведены характеристики  $\mathcal{N}_F(\epsilon)$  для двухслойных структур Nb/CuNi, также демонстрирующие 0- $\pi$  переход; моделирование экспериментальных данных проводилось на основе уравнений Узаделя с учетом процессов релаксации спина в ферромагнитном слое. Строгий метод расчета плотности числа состояний в рамках диффузионного приближения, с учетом спин-орбитального и парамагнитного рассеяния, для  $S/F$  структур (в том числе) впервые был предложен в [284].

## 1.9.2. Эффект спинового переключения, триpletные состояния

Кроме «осцилляционных» эффектов, на  $S/F$  структурах обнаруживаются явления, обусловленные макроскопическими неоднородностями магнитных свойств ферромагнитных слоев. Если направление вектора намагниченности меняется в одном  $F$ -слое (что связано с наличием крупных доменов), либо направление вектора обменного поля  $\mathbf{E}_{ex}$  меняется от  $F$ -слоя к  $F$ -слою, то неизбежно возникают *триpletные составляющие сверхпроводящего конденсата*; исключение составляет случай антипараллельных векторов обменного поля.

Случай антипараллельных векторов обменного поля в ферромагнитных слоях трехслойной структуры  $F/S/F$  был рассмотрен в работах Тагирова [285] и Буздина и др. [286]. Полученный теоретический эффект «спинового переключения» (spin-valve effect)  $\Delta T_{P,AP} = T_{AP} - T_P > 0$  ( $T_P, T_{AP}$  – критические температуры структуры с параллельной и антипараллельной ориентацией  $\mathbf{E}_{ex}$  в  $F$ -слоях) оказался малым, но, тем не менее, был обнаружен в экспериментах со структурой  $\text{CuNi/Nb/CuNi}$  в работе [287] (экспериментальное значение  $\Delta T_{P,AP} \sim 6$  мК) и воспроизведен в [288]. В работах [289–292] был достигнут эффект от нескольких десятков до 200 мК [290, 291]. Между тем в экспериментах [293–299] наблюдался и «обратный» эффект  $\Delta T_{P,AP} < 0$  (см. рис. 1.13), хотя, в соответствии с расчетами [300], теоретический эффект всегда положителен.<sup>1</sup> В работе [301] продемонстрировано, что эффекта переключения можно достичь на двухслойной структуре (эксперимент проводился на структуре  $\text{Ru/Nb}$ ), если в  $F$ -слое имеется доменная стенка. Более сложные структуры, а именно  $F/S/F'/S'$ , с антипараллельными векторами обменного поля в слоях  $F$  и  $F'$  были рассмотрены в работах [243, 302]. В силу большого набора состояний эти структуры выглядят более перспективными для приложений.

Изменение взаимной ориентации векторов обменного поля с параллельной на антипараллельную имеет следствием не только из-

---

<sup>1</sup> На момент написания данного текста не существует количественного объяснения обратного эффекта «спинового переключения».

менение критической температуры, но и критического тока  $I_c$ . При этом оценки критического тока для структуры  $S/F/I/F/S$ , выполненные в [303], показали возможность значительного его увеличения. К аналогичному результату пришли авторы работ [304], рассматривая два массивных сверхпроводника с тонкими слоями ферромагнетика (в этом случае параметр порядка в сверхпроводнике можно принять постоянным) и прослойкой диэлектрика в двух предельных случаях, высокой и низкой прозрачности интерфейса. В работе [305] та же система с полубесконечными сверхпроводниками, но с  $F$ -слоями произвольной толщины, рассмотрена на основе точного (численного) решения уравнений Узаделя при произвольной прозрачности границы. В работах [306] критический ток при параллельных и антипараллельных векторах намагниченности рассчитывался (в качестве одной из задач) для достаточно сложной системы  $S/F-N-F/S$  (между двумя слоями сверхпроводника расположена, перпендикулярно их поверхности, трехслойная структура  $F/N/F$ ); при этом решалась, очевидно, двумерная граничная задача.

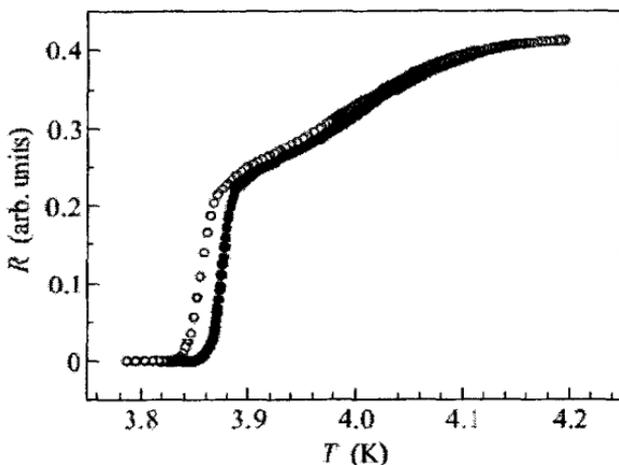


Рис. 1.13 [299]. Резистивные характеристики структуры  $Ni(1.8\text{nm})/V/Ni(4\text{nm})$  при параллельных (сплошные символы) и антипараллельных (открытые символы) векторах намагниченности слоев ферромагнетика

Более подробную информацию об эффекте спинового переключения можно найти в [208, 211, 307].

Относительно триплетной составляющей сверхпроводящего конденсата в  $S/F$  структурах необходимо следующее уточнение. Основной физической величиной, описывающей конденсат (на языке горьковских функций Грина), является двухчастичная аномальная функция Грина  $F_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \tau_1; \mathbf{r}_2, \tau_2)$  (здесь  $\tau$  – температурная переменная, или мнимое время), удовлетворяющая в силу принципа Паули условию антисимметрии  $F_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \tau_1; \mathbf{r}_2, \tau_2) = -F_{\beta\alpha}(\mathbf{r}_2, \tau_2; \mathbf{r}_1, \tau_1)$ . Триплетному состоянию соответствует симметричная по спиновым переменным  $\alpha, \beta$  функция  $F_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \tau_1; \mathbf{r}_2, \tau_2)$ . Существуют сверхпроводящие материалы, в которых обнаруживает себя  $p$ -волновая сверхпроводимость ( $\text{Sr}_2\text{RuO}_4$  [308, 309]), которой соответствует антисимметричная по перестановке координат и, соответственно, симметричная относительно перестановки температурных переменных функция  $F_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \tau_1; \mathbf{r}_2, \tau_2)$ . Возможность другого типа триплетного спаривания, описываемого пространственно-симметричной и антисимметричной по переменным  $\tau_1, \tau_2$  аномальной функцией Грина, впервые рассмотрена в работе [310] в связи с проблемой существования нескольких сверхтекучих фаз  $\text{He}^3$ . В работах группы Бержерет – Волков – Ефетов [311–313, 209] показано, что именно такой тип (нечетного по мацубаровским частотам) триплетного спаривания реализуется в  $S/F$  структурах, удовлетворяющих условиям диффузионного предела. В качестве примера в [311, 312] была рассмотрена  $S/F/S$  структура с локальной неоднородностью намагниченности ферромагнетика вблизи  $S-F$  интерфейса (спиральная доменная стенка). В [313, 314] рассмотрена многослойная структура с неколлинеарными векторами обменного поля в различных  $F$ -слоях. В результате оказалось, что синглетная и триплетная компоненты одного порядка вблизи  $S-F$  границы; при этом две триплетные компоненты ( $\uparrow\uparrow$  и  $\downarrow\downarrow$ ) сверхпроводящего конденсата распространяются вглубь ферромагнетика на характерную длину  $\xi_F = \sqrt{D_F / 2\pi T_c}$  (как в нормальном металле), что много больше характерной длины затухания  $\zeta_F = \sqrt{D_F / E_{ex}}$  синглетной компоненты (см. рис. 1.14). Это объясняется достаточно просто тем, что сверхпроводящая пара электронов с параллельными спинами не разрушается обменным

взаимодействием. В соответствии с расчетами [313, 314] при толщинах ферромагнитного слоя  $\zeta_F \ll d_F \ll \xi_F$  триплетная компонента обнаруживает себя аномально большим критическим током, достигающим максимума при взаимно ортогональных векторах обменного поля в соседних  $F$ -слоях. Это может служить объяснением значительного увеличения низкотемпературной проводимости на больших расстояниях вглубь ферромагнетика, наблюдавшегося на экспериментах [315, 316].

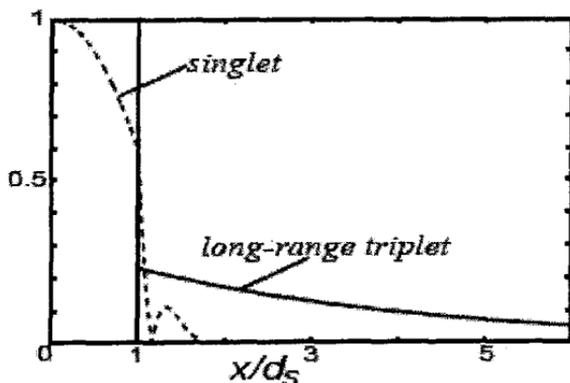


Рис. 1.14 [312]. Нормализованные синглетная (четная функция) и триплетная (нечетная функция) компоненты конденсатной волновой функции структуры  $F/S/F$  с неколлинеарными векторами намагниченности

Решение уравнений Узаделя, построенное в [311–314], основано на допущении однородности параметра порядка в  $S$ -слоях, что является практически точным для системы, состоящей из массивных сверхпроводников и ферромагнитной нити между ними; однако для слоистых структур с  $S$ -слоями конечной толщины это допущение оказывается чересчур сильным. В работе [300] было построено точное решение линеаризованных уравнений Узаделя для произвольной трехслойной структуры  $F/S/F$  с векторами обменного поля  $E_{ex} = E_{ex}(\mathbf{0}, \pm \sin \alpha, \cos \alpha)$  в соседних  $F$ -слоях (ось  $Ox$  направлена перпендикулярно поверхности слоев). В работе [317] метод, вычислений, использованный в [300], обобщен на случай несимметричной трехслойной структуры  $F1/S/F2$ , что автоматически включает в рас-

смотрение и пятислойные структуры вида  $F1/S/2F2/S/F1$ . Для исследования триплетных состояний структуры  $F/S/F$  при  $T < T_c$  в работе [318] использован метод, основанный на параметризации Риккати [319] (рассчитывались парные амплитуды, распределение намагниченности, магнитный момент образца), разработанный для решения уравнений диффузионного предела в [320]. В [320] на основе этого метода были рассмотрены также и баллистические  $S/F/S$  структуры с доменной стенкой в  $F$ -слое. В [321, 322] рассмотрены в диффузионном пределе двухслойные  $S/F$ , и в [323] – трехслойные  $S/F/S$  структуры с мультидоменной структурой ферромагнитного слоя; в [324] исследованы структуры с геликоидальным ферромагнетиком, в [325] – двухслойная структура с узкой доменной стенкой.

Своеобразным предельным случаем является структура  $S/HM/S$  ( $HM$  – полуметалл), рассмотренная в [326]. Синглетная сверхпроводимость в  $HM$ -слое исключена ввиду полной его поляризации по спину. В [326] показано, что в чистом пределе для спин-активного  $S-HM$  интерфейса, так что имеет место рассеяние с переворотом спина, возможно индуцирование в  $HM$ -слое триплетной компоненты сверхпроводящего конденсата. В результате  $S/HM/S$  контакт может переносить сверхпроводящий ток. Работой [326] был стимулирован эксперимент на структуре  $NbTiN/CrO_2/NbTiN$  [327], в котором действительно наблюдался джозефсоновский сверхток сквозь слой  $CrO_2$ . Данный эксперимент инициировал серию теоретических работ [328–332] по исследованию  $S/HM/S$  структур. В частности, в [328] показано, что  $p$ -волновая частотно-четная, и  $s$ -волновая частотно-нечетная компоненты дают вклад одного порядка в функцию состояния в ферромагнетике  $S/F/S$  структуры со спин-активными  $S-F$  интерфейсами в чистом пределе. Результаты эксперимента [327] подробно обсуждались в [329–331] (см. также [333]). В [330, 331] показано, что более прямое подтверждение существования триплетных состояний в структурах  $S/HM/S$  может быть получено из измерений плотности числа состояний.

Кроме эксперимента со структурой  $S/HM/S$  [327], были проведены эксперименты на системах  $Al/No/Al$  ( $No$  является геликоидальным ферромагнетиком) [334] и  $Nb/F/Nb$  [335–337] (здесь  $F$  – блок слоев, включающий, в частности, слои сильного ферромагнетика  $Co$

с прослойкой антиферромагнетика, слабых ферромагнетиков PdNi или Cu/Ni); результаты этих экспериментов можно трактовать с позиции нечетно-частотных триплетных состояний.

Завершая тему триплетных состояний, отметим, что в большинстве перечисленных работ (см. также [338–340]) подробно исследовалось влияние неоднородной намагниченности на  $0 - \pi$  кроссовер и на величину осцилляционных эффектов. На рисунке 1.15 приведена фазовая диаграмма [317], отображающая области значений в пространстве параметров  $(d_{F1}, \theta)$  пятислойной структуры  $F2/S/2F1/S/F2$ , соответствующие  $0$ - и  $\pi$ - состояниям (параметр  $\theta$  есть угол между векторами обменного поля в центральном и внешних  $F$ -слоях). На рисунке 1.16 приведены зависимости критической температуры от толщины  $F$ -слоя, рассчитанные в [300] при нескольких углах  $2\alpha$  между векторами обменного поля в  $F$ -слоях трехслойной структуры  $F/S/F$ . Рисунки 1.15, 1.16 достаточно хорошо иллюстрируют эффект спинового переключения с углом рассогласования намагниченностей в качестве управляющего параметра.

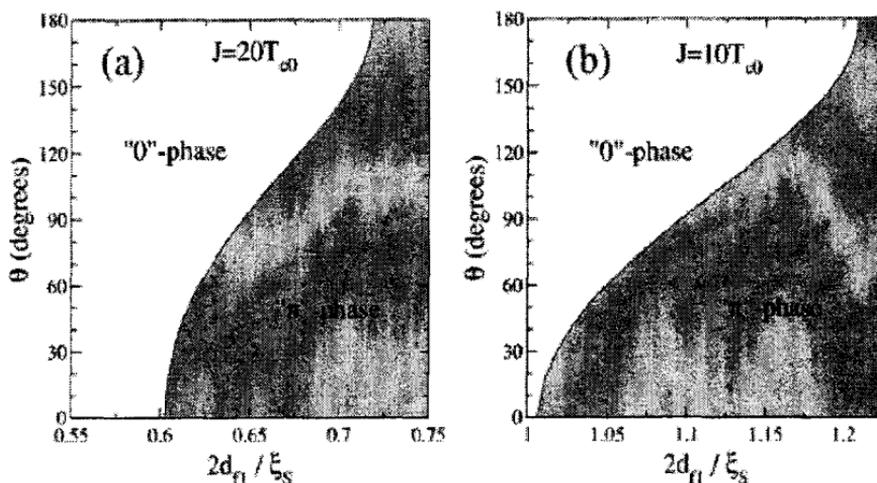


Рис. 1.15 [317]. Фазовые диаграммы  $0 - \pi$  перехода в структуре  $F2/S/2F1/S/F2$ .  
Здесь  $J$  – вектор обменного поля

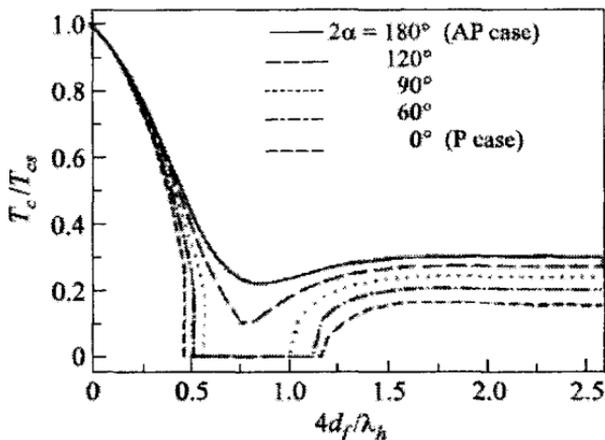


Рис. 1.16 [300]. Критическая температура структуры  $F/S/F$  в зависимости от толщины  $F$ -слоя, нормализованной на период осцилляций синглетной компоненты

### 1.9.3. Уширение переходных резистивных характеристик<sup>1</sup>

Эффект уширения переходных резистивных характеристик был обнаружен на многослойных  $S/F$  структурах  $Nb/PdNi$  с толщинами ферромагнитных слоев  $d_F \lesssim d_F^*$  [341, 342] и на трехслойных структурах  $Nb/CuNi/Nb$  с толщиной  $F$ -слоя, принимающей значения в окрестности точки кроссовера [343–345]. Возможное объяснение эффекта уширения резистивной характеристики для многослойной структуры дано в [342, 346, 347] в рамках концепции многомодового фазового перехода на основе точного решения уравнений Узаделя [347, 348]. Объяснение уширения резистивной характеристики в области кроссовера (для структур  $Nb/CuNi/Nb$ ) дано в [344, 345] на основе предположения о циркулирующих в структуре джозефсоновских токах. Вычисления, приведенные в [349], продемонстрировали, что уширение резистивной характеристики структуры  $Nb/CuNi/Nb$  обусловлено в основном кластеризацией  $Ni$ ; кроме того, именно через кластеры  $Ni$  и происходит замыкание токов. В со-

<sup>1</sup> Более подробное изложение данного вопроса будет дано в главе 4.

общении [350] приводятся результаты исследования состояний многослойной  $S/F$  структуры в окрестностях точек кроссовера. При этом показано, что слабый транспортный ток, необходимый для измерения резистивной характеристики, индуцирует в ферромагнитных слоях противотоки, что приводит к вихревым токам, которые, в свою очередь могут привести к затягиванию фазового перехода в сверхпроводящее состояние.

#### 1.9.4. Численное решение уравнений Боголюбова – де Жена

Используемые в эксперименте искусственные слоистые структуры пока, вообще говоря, не удовлетворяют условиям применения чистого предела. Тем не менее ввиду быстрого прогресса в технологиях, и особенно в измерительной технике (см., например, [351, 352]), актуальны теоретические исследования  $S/F$  структур на основе решений уравнений Боголюбова–де Жена (БдЖ). Решение уравнений БдЖ позволяет провести анализ сверхпроводимости  $S/F$  структур из «первых принципов», что гораздо важнее прикладных проблем. Такой анализ, на основе точных численных решений уравнений, был выполнен в серии работ Халтермана – Валлса и Барсича [353–363].

В работе [353] уравнения БдЖ для двухслойной  $S/F$  структуры при температуре  $T = 0$  решены итерациями в сочетании с разложением в ряд Фурье по синусам; в каждой итерации решалась задача на собственные векторы и собственные значения для матриц размером  $1100 \times 1100$ . Рассчитывались парный потенциал, конденсатные волновые функции (горьковские аномальные функции Грина в чистом пределе),  $LDoS$ . В примерах использовались значения обменного потенциала  $E_{ex} / \varepsilon_F = 0$  (нормальный металл),  $1/3$ ,  $2/3$  (оба значения соответствуют сильному ферромагнетику),  $1$  (полуметалл), где  $\varepsilon_F = (\varepsilon_{F,\uparrow} + \varepsilon_{F,\downarrow}) / 2$  – средняя энергия Ферми в ферромагнетике, которая полагалась равной энергии Ферми в сверхпроводнике. Толщины слоев выбирались достаточно большими, для того чтобы их можно было считать полубесконечными. В результате расчетов подтвердились следующие факты. Во-первых, конденсатная волновая испытывает в ферромагнетике затухание с осцилляциями, при

этом период осцилляций обратно пропорционален величине обменного потенциала. Во-вторых, (как показал расчет плотности числа состояний) в чистом ферромагнетике, контактирующем со сверхпроводником, имеет место бесщелевая сверхпроводимость. Интересно, что испытав первоначальное падение на расстоянии  $\sim 1/E_{ex}$ , волновая функция далее хорошо аппроксимируется функцией Бесселя  $j_0(z/\xi_2)$  (ось  $OZ$  направлена перпендикулярно поверхности слоев) с характерной длиной  $\xi_2$  (обозначение [353]). Было рассмотрено также влияние ферромагнетика на сверхпроводящий слой («обратный» эффект близости): расчеты продемонстрировали неравенство значений  $LDoS$  с противоположными направлениями спина.

В следующей работе [354] уравнения БДЖ были решены для двухслойной структуры во всем диапазоне температур ( $0 < T < T_c$ ) с учетом конечной толщины слоев, при наличии потенциального барьера (спин-неактивного) между слоями и при различных энергиях Ферми ферромагнитного и сверхпроводящего материалов. Было проведено сравнение результатов теории с экспериментами по измерению  $LDoS$  для  $S/N$  и  $S/F$  структур (рис. 1.17).

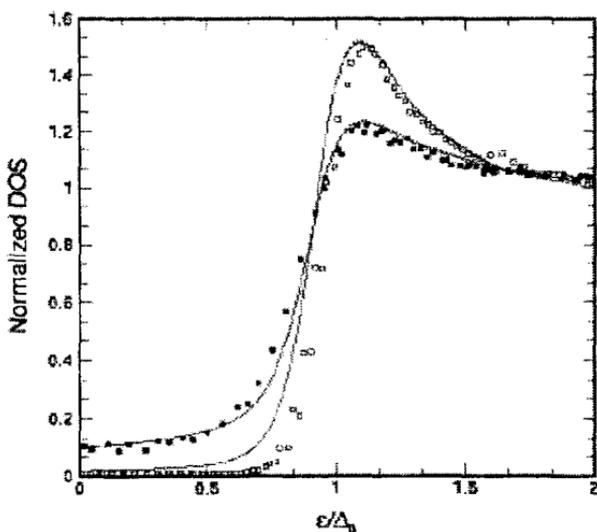


Рис. 1.17 [354]. Результаты фитирования (сплошные линии) экспериментальных данных (символы), полученных на Al/Ni [364]

В работе [355] рассмотрены трехслойные  $S/F/S$  и пятислойные  $S/F/S/F/S$  структуры с толстыми слоями сверхпроводника,  $d_S \gg \xi_0$  ( $\xi_0$  – длина когерентности теории БКШ) в пределе  $T \rightarrow 0$ ; как и в [353]  $S$ - $F$  граница принималась полностью прозрачной. Оказалось, что в этом случае при небольших  $d_F$  система всегда обладает устойчивыми 0- и  $\pi$ - состояниями; устойчивость состояний следует из устойчивости итерационной процедуры: тип состояния, заданный на начальном шаге, остается неизменным в процессе итерационной процедуры. Это свидетельствует о наличии двух локальных минимумов свободной энергии,  $E_0$  и  $E_\pi$ . Реализация 0- или  $\pi$ - состояния, очевидно, определяется знаком разности  $\Delta E = E_0 - E_\pi$ , которая оказывается осциллирующей функцией толщины  $F$ - слоя (рис. 1.18).

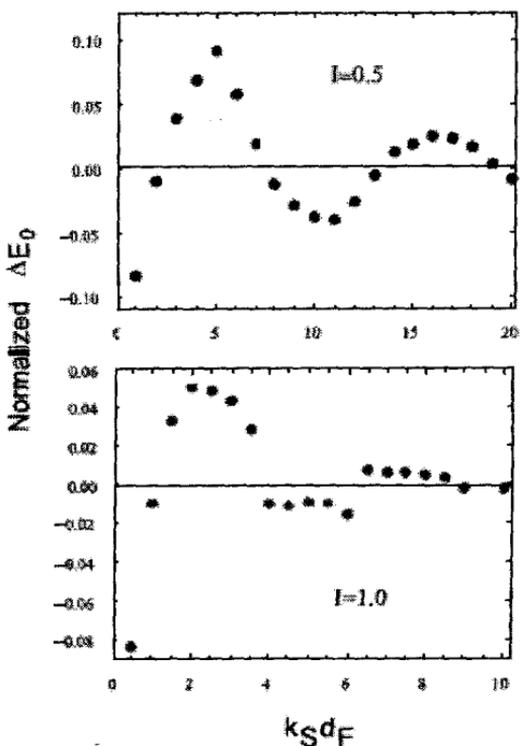


Рис. 1.18 [355]. Разность свободных энергий 0- и  $\pi$ - состояний для структуры  $S/F/S/F/S$

В работах [356, 357] проведен численный анализ  $S/F$  структур уже с произвольной прозрачностью  $S-F$  границы, с учетом бесконечно тонкой диэлектрической прослойки между слоями и с произвольной величиной обменного потенциала. Рассмотрены при температуре, близкой к нулю, трехслойные  $S/F/S$  структуры и семи-слойные структуры вида  $S/3 \times (F/S)$  и  $3 \times (S/F/S)$ . Основным результатом этих работ явилось исследование возможных конфигураций основного состояния сверхпроводящего конденсата.

Низкотемпературный эффект спинового переключения в  $S/F/S$  структуре, удовлетворяющей условиям чистого предела, был рассмотрен в [358]. На рисунке 1.19 приведены полученные в [358] графики зависимости нормализованной энергии конденсации от толщины  $F$ -слоя при значениях обменного потенциала  $E_{ex} = I\epsilon_F = 0.1\epsilon_F$  и  $E_{ex} = \epsilon_F$ . Видно, что и в чистом пределе состояние с антипараллельными векторами обменного поля является энергетически более выгодным.

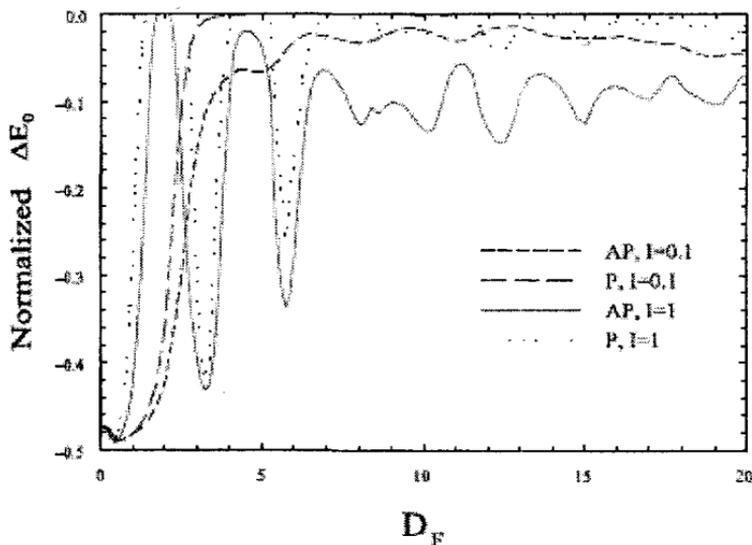


Рис. 1.19 [358]. Свободные энергии состояний с параллельными (P) и антипараллельными (AP) векторами обменного поля структуры  $F/S/F$

Триплетные (нечетные во времени) состояния сверхпроводимости в чистых  $F/S/F$  структурах при температурах  $(0, 0.315T_c)$ , и в структуре  $S/HM/S$  со спин-активными границами были исследованы в работах [359, 360] и в [361], соответственно.

Вероятно, наиболее выразительные результаты были получены этой группой авторов в работах [362, 363]. В [362] проанализированы конфигурации состояний  $S/F/S$  и  $3 \times (S/F/S)$  структур в зависимости от температуры. Выяснилось, что при понижении температуры от критической возможен кроссовер состояний. В рассмотренном численном примере  $\pi$ - состояние трехслойной структуры сменяется при температуре кроссовера  $T_x$   $0$ - состоянием, а  $\pi\pi\pi$ - состояние  $3 \times (S/F/S)$  структуры сменяется  $\pi 0\pi$ - состоянием ( $\pi\pi\pi$ -состояние соответствует антисимметричная волновая функция с нулями в каждом  $F$ -слое,  $\pi 0\pi$ - состоянию соответствует симметричная конденсатная волновая функция с двумя нулями в первом и третьем  $F$ -слоях). Графики зависимости свободной энергии от температуры, из которых это следует, приведены на рисунке 1.20 [362]. Далее, из полученных зависимостей, а также из зависимостей энтропии и энергии от температуры следует, что при  $d_S \gg \xi_0$  и при низкой прозрачности  $S$ - $F$  границы  $0 - \pi$  кроссовер является фазовым переходом первого рода. Это заключение, полученное строго, согласуется с экспериментами [365, 366]. В [363] вывод о фазовом переходе первого рода из  $\pi$ - в  $0$ - состояние подтвержден для всей области разумных значений параметров структуры; кроме того, расчеты показали, что переход из нормального в любое из сверхпроводящих состояний всегда второго рода. Этот вопрос, как впервые показано в [367], не является тривиальным. Подробное исследование, проведенное в [368] для  $F1/S/F2$  структур, удовлетворяющим условиям диффузионного предела, показало, что при малой толщине слоев ферромагнетика с сонаправленными векторами обменного поля, и при высокой прозрачности  $S$ - $F$  границы, переход в сверхпроводящее состояние является фазовым переходом первого рода. В [363] были проанализированы, кроме того, результаты эксперимента [250] на  $Nb/Co$  с позиции чистого предела микроскопической теории. Результаты сравнения теоретической и экспериментальной зависимости, полученные в [363], приведены на рисунке 1.21.

В заключение заметим, что уравнения БДЖ рассматривались в различных приближениях для различных  $S/F$  структур и другими авторами. В частности в работах [369] анализировались структуры  $F1/S/F2$  с диэлектрическими прослойками на основе метода Танаки – Цукады [173], разработанного для  $S/N$  структур.

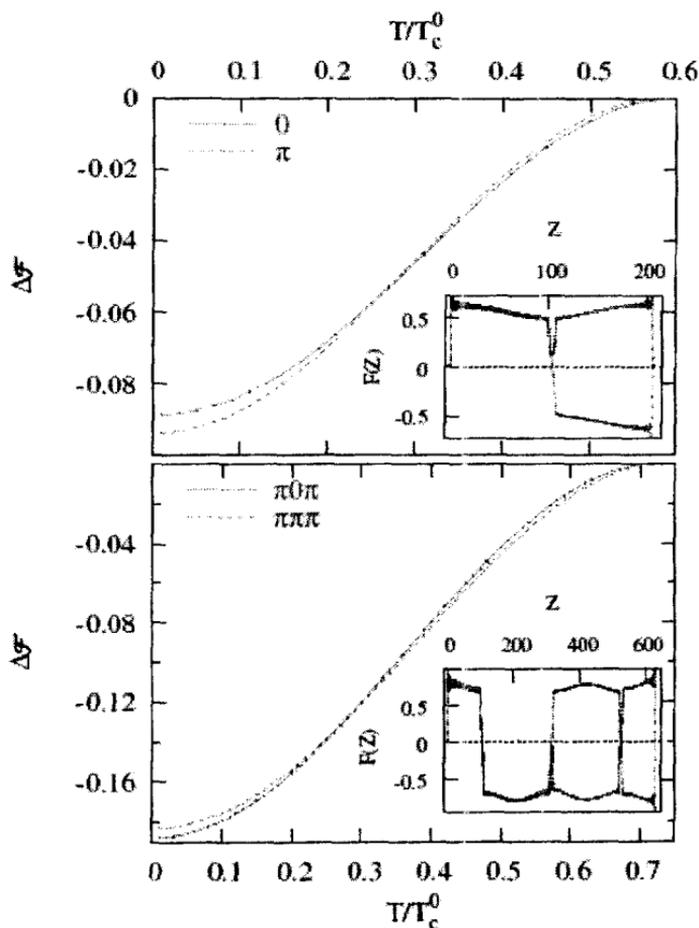


Рис. 1.20 [362]. Свободная энергия структур  $S/F/S$  (верхняя панель) и  $3 \times (S/F/S)$  (нижняя панель) в зависимости от температуры. На вставках показаны графики волновых функций состояний, соответствующих рассчитанным свободным энергиям

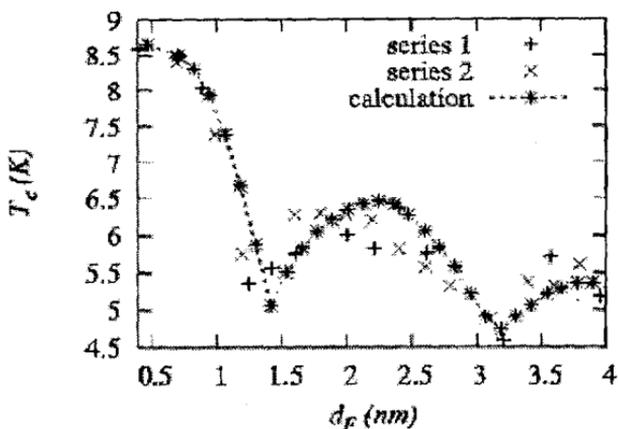


Рис. 1.21 [363]. Экспериментальная [250] и теоретическая зависимости критической температуры от толщины  $F$ -слоя для структуры Nb/Co

Подведем итоги раздела 9, оценив степень законченности рассмотренных задач. Во-первых, задача о  $0$  и  $\pi$  состояниях в  $S/F/S$  структурах с однородным магнитомягким ферромагнетиком на современном этапе перешла в область приложений [370–372]. Во-вторых, проблема слабого эффекта спинового переключения является скорее технической (раздел 9.2). Задача о триплетных состояниях решена теоретически, но пока еще не решена экспериментально (раздел 9.2). В-третьих, проблема состояний сверхпроводимости в многослойных  $S/F$  структурах (разделы 9.3, 9.4) требует дальнейших теоретических и экспериментальных исследований. Наконец, остается нерешенной наиболее сложная теоретическая проблема, актуальная также и для  $S/N$  структур: – выход за рамки квазиклассического приближения микроскопической теории; это означает возможность рассматривать структуры с толщинами  $S$ -слоев порядка длины когерентности и тонкими слоями ферромагнетика.

## Глава 2. Линеаризованные уравнения Узаделя и их решение

В данной главе строится точное матричное решение системы линеаризованных уравнений диффузионного предела квазиклассического приближения микроскопической теории сверхпроводимости – уравнений Узаделя. Это решение позволяет полностью исследовать критическое состояние многослойных  $S/N$  и  $S/F$  структур при нулевом магнитном поле, а также, при внешнем магнитном поле, перпендикулярном поверхности слоев.

### 2.1. Нелинейные уравнения Узаделя и функционал свободной энергии

Рассматривается структура, состоящая из чередующихся плоских слоев сверхпроводящего ( $S$ ) и несверхпроводящего материалов ( $M$ ). Несверхпроводящим материалом может быть нормальный металл ( $N$ ), ферромагнетик ( $F$ ), или парамагнетик ( $PM$ ). Будем учитывать процессы парамагнитного и спин-орбитального рассеяния на неоднородностях в несверхпроводящих слоях.

Выбирается система координат с осью  $OZ$ , направленной перпендикулярно плоскости слоев. Толщина структуры равна  $L$ . В направлениях  $OX$  и  $OY$  структура полагается бесконечной. Координатную плоскость  $XOY$  будем совмещать либо с одной из плоских внешних границ структуры, либо с ее серединной плоскостью (с плоскостью зеркальной симметрии, параллельной слоям, если  $S/M$ -структура таковой обладает). Полагаем, что выполнены условия диффузионного предела. Тогда сверхпроводящее состояние структуры описывается уравнениями Узаделя [79, 208]

$$-\frac{D_S}{2} \partial_{\mathbf{r}} \left( G_{\uparrow, \omega} \partial_{\mathbf{r}} F_{\uparrow, \omega} - F_{\uparrow, \omega} \nabla_{\mathbf{r}} G_{\uparrow, \omega} \right) + \omega F_{\uparrow, \omega} = \Delta G_{\uparrow, \omega} \quad (2.1)$$

при  $z \in I_S$ , и

$$-\frac{D_M}{2} \partial_{\mathbf{r}} \left( G_{\uparrow, \omega} \partial_{\mathbf{r}} F_{\uparrow, \omega} - F_{\uparrow, \omega} \nabla_{\mathbf{r}} G_{\uparrow, \omega} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \omega + iE_{ex} + \tau_z^{-1} G_{\uparrow, \omega} + (\tau_x^{-1} + \tau_{so}^{-1}) G_{\downarrow, \omega} \right) F_{\uparrow, \omega} + \\
& + (\tau_x^{-1} - \tau_{so}^{-1}) G_{\uparrow, \omega} F_{\downarrow, \omega} = 0 \quad (2.2)
\end{aligned}$$

при  $z \in I_M$ .

Еще два уравнения получаются из (2.1), (2.2) заменой  $\uparrow \leftrightarrow \downarrow$ . В уравнениях (2.1), (2.2) использованы следующие обозначения.  $G_{\sigma, \omega} \equiv G_{\sigma, \omega}(\mathbf{r})$ ,  $F_{\sigma, \omega} \equiv F_{\sigma, \omega}(\mathbf{r})$  ( $\sigma = \uparrow, \downarrow$ ) – нормальные и, соответственно, аномальные узеллевские функции Грина, которые получены из квазиклассических функций Грина [80] усреднением по поверхности Ферми;  $\omega = \omega_n = \pi T \cdot (2n + 1)$  – мацубаровские частоты с  $n = 0, \pm 1, \dots$ ;  $|\omega_n| \leq \omega_D$ , где  $\omega_D$  – дебаевская частота, выбранная в качестве параметра обрезания;  $D_S$  ( $D_M$ ) – постоянная диффузии сверхпроводящего (несверхпроводящего) материала;  $I_S$  ( $I_M$ ) – область значений  $z$ , соответствующая сверхпроводящим (несверхпроводящим) слоям;  $\tau_x$ ,  $\tau_z$  и  $\tau_{so}$  – характерные времена парамагнитного и спин-орбитального рассеяния, соответственно;  $E_{ex}$  – энергия обменного взаимодействия;  $\partial_{\mathbf{r}} = \nabla_{\mathbf{r}} - \frac{2ie}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{r})$ , где  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  – вектор-потенциал внешнего магнитного поля.

Функции  $G_{\sigma, \omega}$  и  $F_{\sigma, \omega}$  связаны условиями

$$G_{\sigma, \omega}^2 + \tilde{F}_{\sigma, \omega} F_{\sigma, \omega} = 1, \quad (2.3)$$

где

$$\tilde{F}_{\sigma, \omega} = F_{\sigma, -\omega}^*. \quad (2.4)$$

Нормальная функция Грина удовлетворяет соотношению

$$G_{\sigma, \omega} = -G_{\sigma, -\omega}^*. \quad (2.5)$$

Параметр сверхпроводящего порядка  $\Delta \equiv \Delta(\mathbf{r})$  в диффузионном пределе выражается формулой

$$\Delta(\mathbf{r}) = \frac{\pi T \lambda}{2} \sum_{|\omega| \leq \omega_D} (F_{\uparrow, \omega}(\mathbf{r}) + F_{\downarrow, \omega}(\mathbf{r})) \quad (2.6)$$

( $\lambda$  – константа эффективного электрон-электронного взаимодействия). Обратим сразу внимание на то, что для неоднородных сверхпроводящих структур под параметром порядка удобнее понимать величину  $\Delta(\mathbf{r})/\lambda$ , что и примем в дальнейших рассмотрениях.

Уравнения (2.1) – (2.6) дополняются граничными условиями, заданными на внешних поверхностях  $z = Z_0$ ,  $z = Z_0 + L$ :

$$\partial_z F_{\sigma, \omega}(Z_0) = \partial_z F_{\sigma, \omega}(Z_0 + L) = 0, \quad (2.7)$$

а также условиями сшивания функций  $F_{\sigma, \omega}$ ,  $\tilde{F}_{\sigma, \omega}$  и их производных  $\partial_z F_{\sigma, \omega}$ ,  $\partial_z \tilde{F}_{\sigma, \omega}$  на границах между слоями (интерфейсах). В диффузионном пределе в качестве таковых используем условия Куприянова – Лукичева [107], которые будут записаны ниже в линейном приближении.

Уравнения (2.1), (2.2), вместе с уравнениями для функций  $F_{\downarrow, \omega}$ , а также для функций  $\tilde{F}_{\sigma, \omega}$ , могут быть получены, варьированием функционала<sup>1</sup>

$$\Omega = \int_{I_S \cup I_M} d^3 r N(z) \left\{ \pi k_B T \sum_{\omega} \left[ \frac{\hbar D(z)}{2} \sum_{\sigma} \left( (\nabla_{\mathbf{r}} G_{\sigma, \omega})^2 \right) + \right. \right.$$

<sup>1</sup> Данный функционал можно назвать свободной энергией с некоторыми оговорками (возможно, по этой причине его выражение не приводится в литературе).

$$\begin{aligned}
& + \partial_{\mathbf{r}}^* \tilde{F}_{\sigma, \omega} \cdot \partial_{\mathbf{r}} F_{\sigma, \omega} - 2\omega \left( G_{\uparrow, \omega} + G_{\downarrow, \omega} - 2 \operatorname{sgn} \omega \right) - 2|\Delta|^2 / \lambda(z) \Big\} + \\
& + \int_{I_M} d^3 r N_M \pi k_B T \sum_{\omega} \left[ 2i E_{ex} (G_{\downarrow, \omega} - G_{\uparrow, \omega}) + \tau_z^{-1} \sum_{\sigma} \tilde{F}_{\sigma, \omega} F_{\sigma, \omega} + \right. \\
& + \left. \left( \tau_x^{-1} - \tau_{s0}^{-1} \right) \left( \tilde{F}_{\uparrow, \omega} F_{\downarrow, \omega} + \tilde{F}_{\downarrow, \omega} F_{\uparrow, \omega} \right) + \right. \\
& \left. + 2 \left( \tau_x^{-1} + \tau_{s0}^{-1} \right) \left( 1 - G_{\uparrow, \omega} G_{\downarrow, \omega} \right) \right]. \quad (2.8)
\end{aligned}$$

В формуле (2.8) для удобства использованы ступенчатые функции  $N(z)$ ,  $D(z)$ ,  $\lambda(z)$ , принимающие значения  $N_S$ ,  $D_S$ ,  $\lambda$  и  $N_M$ ,  $D_M$ , 0 в сверхпроводящих и несверхпроводящих слоях, соответственно;  $N_{S(M)}$  есть плотность числа состояний на уровне Ферми сверхпроводящего (несверхпроводящего) материала.

Кроме уравнений (2.1), (2.2), из (2.8) следует выражение для плотности сверхпроводящего тока:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = -ieD(z)N(z)\pi k_B T \sum_{\omega, \sigma} \left( \tilde{F}_{\sigma, \omega} \partial_{\mathbf{r}} F_{\sigma, \omega} - F_{\sigma, \omega} \partial_{\mathbf{r}}^* \tilde{F}_{\sigma, \omega} \right). \quad (2.9)$$

## 2.2. Линеаризованные уравнения Узаделя

Оставляя в уравнениях Узаделя члены, линейные по функциям  $F_{\sigma, \omega}$ ,  $\tilde{F}_{\sigma, \omega}$ , получим

$$\left( -D_S \partial_{\mathbf{r}}^2 + 2|\omega| \right) F_{\sigma, \omega} = 2\Delta(z), \quad \sigma = \uparrow, \downarrow \quad z \in I_S, \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned}
& \left( -D_M \partial_{\mathbf{r}}^2 + 2 \left( |\omega| + iE_{ex} \operatorname{sgn} \omega + \tau_x^{-1} + \tau_z^{-1} + \tau_{s0}^{-1} \right) \right) F_{\uparrow, \omega} + \\
& + 2 \left( \tau_z^{-1} - \tau_{s0}^{-1} \right) F_{\downarrow, \omega} = 0, \quad z \in I_M, \quad (2.11)
\end{aligned}$$

$$\left(-D_M \partial_{\mathbf{r}}^2 + 2\left(\omega - iE_{ex} \operatorname{sgn} \omega + \tau_x^{-1} + \tau_z^{-1} + \tau_{s0}^{-1}\right)\right) F_{\downarrow, \omega} + \\ + 2\left(\tau_z^{-1} - \tau_{s0}^{-1}\right) F_{\uparrow, \omega} = 0, \quad z \in I_M. \quad (2.12)$$

Аналогичные уравнения имеют место и для функций  $\tilde{F}_{\sigma, \omega}$ . Обратим внимание на то, что в линейном приближении системы уравнения для функций  $\tilde{F}_{\sigma, \omega}$  и  $F_{\sigma, \omega}$  распелились. Граничные условия (2.7), очевидно, остаются в силе; условия сшивания на  $S/M$ -интерфейсах  $z = z_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N_l - 1$  (здесь  $N_l$  — количество слоев) имеют вид [107]:

$$\rho^{-1}(z_i + 0) \partial_z F_{\sigma, \omega}(z_i + 0) = \rho^{-1}(z_i - 0) \partial_z F_{\sigma, \omega}(z_i - 0), \quad (2.13)$$

$$F_{\sigma, \omega}(z_i + 0) = F_{\sigma, \omega}(z_i - 0) + \frac{\rho_M}{\rho(z_i - 0)} \frac{2\ell_M}{3t_M} \partial_z F_{\sigma, \omega}(z_i - 0). \quad (2.14)$$

Здесь  $\rho(z) = \rho_S$ , если  $z \in I_S$ , и  $\rho(z) = \rho_M$ , если  $z \in I_M$ ;  $\rho_S$  и  $\rho_M$  — нормальные низкотемпературные удельные сопротивления сверхпроводящего и нормального материала, соответственно;  $\ell_M$  — длина свободного пробега электрона в нормальном материале;  $t_M$  — параметр квантово-механической прозрачности  $S/M$  интерфейса [244].

Для удобства, следуя работе Демлера и др. [239], осуществим преобразование к новым переменным

$$\Phi_{\sigma, \omega, \pm}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \left( F_{\sigma, \omega}(\mathbf{r}) \pm F_{\sigma, -\omega}(\mathbf{r}) \right), \quad (2.15)$$

В соответствии с очевидными соотношениями

$$\Phi_{\sigma, -\omega, +} = \Phi_{\sigma, \omega, +}, \quad \Phi_{\sigma, -\omega, -} = -\Phi_{\sigma, \omega, -}, \quad (2.16)$$

выбираем в качестве независимых переменных функции  $\Phi_{\sigma,\omega,\pm}(\mathbf{r})$  с положительными частотами ( $\omega > 0$ ). Тогда в новых переменных уравнения (2.10) – (2.12) примут вид, соответственно:

$$\left(-D_S \partial_{\mathbf{r}}^2 + 2\omega\right) \Phi_{\sigma,\omega,+} = 2\Delta, \quad (2.17)$$

$$\left(-D_S \partial_{\mathbf{r}}^2 + 2\omega\right) \Phi_{\sigma,\omega,-} = 0 \quad (2.18)$$

для  $S$ -слоев и

$$\begin{aligned} \left[-D_M \partial_{\mathbf{r}}^2 + 2\left(\omega + \tau_x^{-1} + \tau_z^{-1} + \tau_{s0}^{-1}\right)\right] \Phi_{\uparrow,\omega,+} + \\ + 2iE_{ex} \Phi_{\uparrow,\omega,-} + 2\left(\tau_z^{-1} - \tau_{s0}^{-1}\right) \Phi_{\downarrow,\omega,+} = 0, \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \left[-D_M \partial_{\mathbf{r}}^2 + 2\left(\omega + \tau_x^{-1} + \tau_z^{-1} + \tau_{s0}^{-1}\right)\right] \Phi_{\uparrow,\omega,-} + \\ + 2iE_{ex} \Phi_{\uparrow,\omega,+} + 2\left(\tau_z^{-1} - \tau_{s0}^{-1}\right) \Phi_{\downarrow,\omega,-} = 0, \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \left[-D_M \partial_{\mathbf{r}}^2 + 2\left(\omega + \tau_x^{-1} + \tau_z^{-1} + \tau_{s0}^{-1}\right)\right] \Phi_{\downarrow,\omega,+} - \\ - 2iE_{ex} \Phi_{\downarrow,\omega,-} + 2\left(\tau_z^{-1} - \tau_{s0}^{-1}\right) \Phi_{\uparrow,\omega,+} = 0, \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \left[-D_M \partial_{\mathbf{r}}^2 + 2\left(\omega + \tau_x^{-1} + \tau_z^{-1} + \tau_{s0}^{-1}\right)\right] \Phi_{\downarrow,\omega,-} - \\ - 2iE_{ex} \Phi_{\downarrow,\omega,+} + 2\left(\tau_z^{-1} - \tau_{s0}^{-1}\right) \Phi_{\uparrow,\omega,-} = 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

для  $M$ -слоев.

Легко видеть, что для новых неизвестных граничные условия также записываются в виде (2.7), (2.13), (2.14).

Далее, как и в работе [239], сделаем еще одну замену переменных

$$\Phi_{+, \omega, \pm} \equiv \frac{\Phi_{\uparrow, \omega, \pm} + \Phi_{\downarrow, \omega, \pm}}{2}, \quad \Phi_{-, \omega, \pm} \equiv \frac{\Phi_{\uparrow, \omega, \pm} - \Phi_{\downarrow, \omega, \pm}}{2}. \quad (2.23)$$

Тогда система (2.17) – (2.22) разбивается на две независимых подсистемы уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} (-D_S \partial_{\mathbf{r}}^2 + 2\omega) \Phi_{+, \omega, +} = 2\Delta \\ (-D_S \partial_{\mathbf{r}}^2 + 2\omega) \Phi_{-, \omega, -} = 0 \end{array} \right. \quad z \in I_S, \\ \left\{ \begin{array}{l} [-D_M \partial_{\mathbf{r}}^2 + 2(\omega + \tau_x^{-1} + 2\tau_z^{-1})] \Phi_{+, \omega, +} + \\ \quad + 2iE_{ex} \Phi_{-, \omega, -} = 0 \\ [-D_M \partial_{\mathbf{r}}^2 + 2(\omega + \tau_x^{-1} + 2\tau_{so}^{-1})] \Phi_{-, \omega, -} + \\ \quad + 2iE_{ex} \Phi_{+, \omega, +} = 0 \end{array} \right. \quad z \in I_M \end{array} \right. \quad (2.24)$$

и

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} (-D_S \partial_{\mathbf{r}}^2 + 2\omega) \Phi_{+, \omega, -} = 2\Delta \\ (-D_S \partial_{\mathbf{r}}^2 + 2\omega) \Phi_{-, \omega, +} = 0 \end{array} \right. \quad z \in I_S, \\ \left\{ \begin{array}{l} [-D_M \partial_{\mathbf{r}}^2 + 2(\omega + \tau_x^{-1} + 2\tau_z^{-1})] \Phi_{+, \omega, -} + \\ \quad + 2iE_{ex} \Phi_{-, \omega, +} = 0 \\ [-D_M \partial_{\mathbf{r}}^2 + 2(\omega + \tau_x^{-1} + 2\tau_{so}^{-1})] \Phi_{-, \omega, +} + \\ \quad + 2iE_{ex} \Phi_{+, \omega, -} = 0 \end{array} \right. \quad z \in I_M. \end{array} \right. \quad (2.25)$$

В силу граничных условий (1.7) система уравнений (2.25) имеет только тривиальное решение:  $\Phi_{+, \omega, -} = \Phi_{-, \omega, +} = 0$ . Это значит, что, наряду с (2.6), выполняются соотношения

$$\Phi_{\uparrow, \omega, +} = \Phi_{\downarrow, \omega, +}, \quad \Phi_{\uparrow, \omega, -} = -\Phi_{\downarrow, \omega, -}, \quad (2.26)$$

или  $F_{\uparrow, \omega} = F_{\downarrow, -\omega}$ <sup>1</sup>. В результате система уравнений (2.17) – (2.22) редуцируется к системе (2.24) для функций  $\Phi_{+, \omega, +}$ ,  $\Phi_{-, \omega, -}$ . Упростим обозначения:  $\Phi_{\pm, \omega, \pm} \rightarrow \Phi_{\pm, n}$ . Параметр порядка (2.6) в этих обозначениях запишется в виде

$$\Delta(\mathbf{r}) = 2\pi T\lambda \sum_{n=0}^{n_D} \Phi_{+, n}(\mathbf{r}), \quad (2.27)$$

где  $n_D$  есть целая часть выражения  $(\omega_D / 2\pi T - 0.5)$ , а выражение для плотности тока (2.9) примет вид

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = -4ieD(z)N(z)\pi k_B T \sum_{n=0}^{n_D} (\Phi_{+, n}^* \partial_{\mathbf{r}} \Phi_{+, n} - \Phi_{-, n}^* \partial_{\mathbf{r}} \Phi_{-, n} - \text{к.с.}). \quad (2.28)$$

Введем теперь эффективные параметры системы уравнений (2.14) (измеримые на эксперименте):

длины когерентности диффузионного предела

$$\xi_{S(M)} = \sqrt{\frac{D_{S(M)}}{2\pi T_S}}, \quad (2.29)$$

<sup>1</sup> При учете первой поправки к диффузионному пределу данная спиновая симметрия исчезает [244].

характерную длину затухания сверхпроводящей фазы в ферромагнетике

$$\zeta_M = \sqrt{D_M / E_{ex}} \quad (2.30)$$

и эффективные «частоты рассеяния»

$$v_1 = \tau_z^{-1} + \tau_x^{-1} + \tau_{so}^{-1}, \quad v_2 = \tau_z^{-1} - \tau_{so}^{-1}. \quad (2.31)$$

С учетом (2.28) – (2.31) систему уравнений (2.24) можно переписать в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( -\xi_S^2 T_S \partial_{\mathbf{r}}^2 + T(2n+1) \right) \Phi_{+,n} = 2\lambda T \sum_{m=0}^{n_D} \Phi_{+,m} \\ \left( -\xi_S^2 T_S \partial_{\mathbf{r}}^2 + T(2n+1) \right) \Phi_{-,n} = 0 \\ \left( -\xi_M^2 T_S \partial_{\mathbf{r}}^2 + T(2n+1) + \frac{v_1 + v_2}{\pi} \right) \Phi_{+,n} + \\ \quad + 2iT_S \frac{\xi_M^2}{\zeta_M^2} \Phi_{-,n} = 0 \\ \left( -\xi_M^2 T_S \partial_{\mathbf{r}}^2 + T(2n+1) + \frac{v_1 + v_2}{\pi} \right) \Phi_{-,n} + \\ \quad + 2iT_S \frac{\xi_M^2}{\zeta_M^2} \Phi_{+,n} = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} z \in I_S, \\ \\ \\ z \in I_M. \end{array} \quad (2.32)$$

Таким образом, для описания критического состояния слоистой структуры необходимо решить граничную задачу (2.7) для системы  $2(n_D+1)$  линейных однородных дифференциальных уравнений (ЛОДУ) (2.32). В результате решения граничной задачи получим

набор собственных значений для температуры  $T$ , зависящих от внешнего магнитного поля.<sup>1</sup> Наибольшее из собственных значений является истинной критической температурой.

### 2.3. Решение линеаризованных одномерных уравнений Узалея. Матричный метод

Уравнения (2.32) сводятся к одномерным при отсутствии внешнего магнитного поля, а также в случае параллельного или перпендикулярного слоям внешнего магнитного поля, величины которых  $H$  равны соответствующим верхним критическим значениям. Кроме того, одномерными уравнениями описывается критическое состояние слоистой структуры, вдоль которой протекает слабый постоянный ток, необходимый для измерения ее резистивной характеристики. Пусть магнитное поле направлено вдоль оси  $OY$ . Тогда дифференциальные операторы, фигурирующие в (2.32), преобразуются к виду

$$\partial_{\mathbf{r}}^2 \rightarrow \frac{d^2}{dz^2} - \left( p - \frac{2eH}{\hbar c} z \right)^2, \quad (2.33)$$

где  $p$  – неизвестный параметр, появившийся в результате подстановки  $\Phi_{\pm, n}(\mathbf{r}) \rightarrow e^{ipx} \Phi_{\pm, n}(z)$ .

Если магнитное поле перпендикулярно поверхности слоев, то есть направлено вдоль оси  $OZ$ , то подстановка  $\Phi_{\pm, n}(\mathbf{r}) \rightarrow e^{-p^2 x^2 / 2} \Phi_{\pm, n}(z)$  со значением  $p^2 = 2eH / \hbar c$  преобразует оператор  $\partial_{\mathbf{r}}^2$  к виду

$$\partial_{\mathbf{r}}^2 \rightarrow \frac{d^2}{dz^2} - p^2. \quad (2.34)$$

---

<sup>1</sup> Любопытной особенностью данной граничной задачи является то, что размерность системы ЛОДУ зависит от параметра (температуры  $T$ ), собственное значение которого отыскивается.

Наконец, если вдоль оси  $OX$  протекает транспортный ток, «включенный» подстановкой  $\Phi_{\pm,n}(\mathbf{r}) \rightarrow e^{ipx} \Phi_{\pm,n}(z)$ , то для оператора  $\partial_{\mathbf{r}}^2$  мы получаем выражение (2.34), в котором параметр  $p$  уже не связан с внешним магнитным полем.

Во всех перечисленных случаях формальное решение системы ЛОДУ (2.32) не вызывает принципиальных затруднений: строим общие решения для каждого из слоев структуры и затем сшиваем их с помощью условий (2.13), (2.14). Построим решение системы (2.32) матричным методом [373, 109, 110, 347, 348]; при этом в данной главе будем рассматривать случай (2.34).

Пусть вектор-столбец  $Y(z) = \Phi_+ \oplus \Phi'_+ \oplus \Phi_- \oplus \Phi'_-$ , где  $(n_D+1)$ -мерные вектор-функции  $\Phi_{\pm}$  определены формулой

$$\Phi_{\pm} \equiv \Phi_{\pm}(z) = \left( \Phi_{\pm,0}(z) \Phi_{\pm,1}(z) \dots \Phi_{\pm,n_D}(z) \right)^{tr},$$

является решением системы уравнений Узаделя (2.32) (надстрочный символ  $tr$  означает операцию транспонирования). При этом в силу (2.7)

$$\Phi'_{\pm}(Z_0) = \Phi'_{\pm}(Z_0 + L) = \mathbf{0}. \quad (2.35)$$

Выразим решение  $Y(z)$  через матрицант  $\mathcal{R}(z, Z_0)$  – матрицу фундаментальной системы решений, обладающую свойством  $\mathcal{R}(z, z) = \hat{1}$  (символ  $\hat{1}$  – единичная матрица, в данном случае, размерности  $4(n_D+1)$ ):

$$Y(z) = \mathcal{R}(z, Z_0) Y(Z_0). \quad (2.36)$$

Тогда, ввиду (2.36), (2.35) граничная задача (2.7) сводится к решению системы однородных алгебраических уравнений

$$\mathcal{R}_{24,13}(Z_0 + L, Z_0) \Phi(Z_0) = \mathbf{0}. \quad (2.37)$$

Здесь вектор-столбец  $\Phi = \Phi_+ \oplus \Phi_-$ , а матрица

$$\mathcal{R}_{24,13} = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{2,1} & \mathcal{R}_{2,3} \\ \mathcal{R}_{4,1} & \mathcal{R}_{4,3} \end{pmatrix}, \quad (2.38)$$

где  $\mathcal{R}_{\alpha,\beta}(z, Z_0)$  ( $\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$ ) есть матричные блоки размерности  $(n_D + 1) \times (n_D + 1)$  матрицы  $\mathcal{R}(z, Z_0)$ . Из условия существования нетривиального решения системы (2.38) получаем характеристическое уравнение

$$\det(\mathcal{R}_{24,13}(Z_0 + L, Z_0)) = 0. \quad (2.39)$$

В результате решения уравнения (2.39) получим набор собственных значений  $T^{(k)}$  для температуры, которым соответствуют собственные вектора  $\Phi^{(k)}(Z_0)$ , определяемые из (2.37). Далее, используя (2.36), находим собственные вектор-функции  $\Phi^{(k)}(z)$ .

Приведенная схема является формальной, пока в явном виде не построен матрицант  $\mathcal{R}(z, Z_0)$ . Матрицант  $\mathcal{R}(z, Z_0)$  выражается через произведения матрицантов  $\mathfrak{S}$  и  $\mathfrak{M}$   $S$ - и  $M$ -слоев, соответственно, а также через матрицы  $\mathfrak{P}_{MS}$ ,  $\mathfrak{P}_{SM}$  условий сшивания (2.13), (2.14). (Матрица  $\mathfrak{P}_{SM}$  отображает решение из  $M$ -слоя в  $S$ -слой, и, наоборот, матрица  $\mathfrak{P}_{MS}$  отображает решение из  $S$ -слоя в  $M$ -слой.)

Для произвольных плоских структур

$$\mathcal{R}(z, Z_0) = \mathfrak{S}(z - z_i) \mathfrak{P}_{SM} \mathcal{R}(z_i, Z_0), \quad z \in (z_i, z_i + 1), \quad (2.40)$$

если  $(i+1)$ -й слой является сверхпроводящим и

$$\mathcal{R}(z, Z_0) = \mathfrak{M}(z - z_i) \mathfrak{P}_{MS} \mathcal{R}(z_i, Z_0), \quad z \in (z_i, z_i + 1), \quad (2.41)$$

если  $(i+1)$ -й слой является нормальным.

Матрица, связывающая вектора состояния на границах структуры  $M_0/S_1/M_1 \dots /S_l/M_l$  определяется по формуле

$$\mathcal{R}(Z_0 + L, Z_0) = \mathfrak{M}(d_{N+1}) \prod_{i=1}^l \mathfrak{P}_{MS} \mathfrak{S}(d_{S,i}) \mathfrak{P}_{SM} \mathfrak{M}(d_{M,i}), \quad (2.42)$$

где  $d_{S,i}$  и  $d_{M,i}$  – толщины сверхпроводящих и несверхпроводящих слоев соответственно.

Для структур вида  $M/n_{bl} \times (S/M)$  и  $n_{bl} \times (M/S/M)$ , чаще всего используемых в эксперименте, матрицант  $\mathcal{R}(Z_0 + L, Z_0) \equiv \mathcal{R}(L)$  имеет вид, соответственно

$$\mathcal{R}(L) = \mathfrak{M}(d_M) (\mathfrak{P}_{MS} \mathfrak{S}(d_S) \mathfrak{P}_{SM} \mathfrak{M}(d_M))^{n_{bl}}, \quad (2.43)$$

и

$$\mathcal{R}(L) = (\mathfrak{M}(d_M / 2) \mathfrak{P}_{MS} \mathfrak{S}(d_S) \mathfrak{P}_{SM} \mathfrak{M}(d_M / 2))^{n_{bl}}, \quad (2.44)$$

где  $n_{bl}$  – число  $S/M$  бислоев.

Решения для слоев структуры строим методом характеристического уравнения. А именно, ставим вначале задачу о собственных функциях и собственных значениях для операторов

$$\hat{\mathcal{L}}_{S(M)} \equiv -\xi_{S(M)}^2 \partial_z^2:$$

$$\hat{\mathcal{L}}_{S(M)} u_{S(M)}(z) = \varepsilon_{S(M)} u_{S(M)}(z). \quad (2.45)$$

Далее, решение ОДУ (2.32) для  $S$ - или  $M$ -слоя записываем в виде  $\Phi_{S(M)}(z) = C u_{S(M)}(z)$ , где вектор  $C$  определяется системой однородных линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Результатом решения СЛАУ будет набор собственных значений для величины  $\varepsilon_{S(M)}$  и соответствующих им собственных векторов  $C$ . Решая далее уравнение (2.45) с каждым из полученных собственных значений, находим собственные функции  $u_{S(M)}(z)$ , и затем собствен-

ные вектор функции  $\Phi_{S(M)}(z)$ . Из собственных вектор-функций и их производных строим каноническую систему решений, то есть, находим матрицант слоя.

Получим формулы для матрицантов  $\mathfrak{S}(z)$ ,  $\mathfrak{M}(z)$  и матриц  $\mathfrak{P}_{MS}$ ,  $\mathfrak{P}_{SM}$ .

### 2.3.1. Фундаментальная система решений уравнений Узалея и матрицант для $S$ -слоя

Сверхпроводящий конденсат (в критическом состоянии) в  $S$ -слое описывается первой парой подсистем уравнений для функций  $\Phi_{+,n}(z)$  и  $\Phi_{-,n}(z)$  системы (2.32). Поскольку эти подсистемы независимы, матрицант  $S$ -слоя имеет блочно-диагональную форму

$$\mathfrak{S}(z) = \begin{pmatrix} S^+(z) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & S^-(z) \end{pmatrix}, \quad (2.46)$$

где  $S^+$ ,  $S^-$  – матрицанты первой и второй подсистем ОДУ системы (2.32), соответственно.

Обратим внимание на то, что для сокращения записей при рассмотрении одного слоя мы временно совмещаем одну из поверхностей слоя с плоскостью  $XOY$ .

Определим матрицант  $S^+$  в соответствии с описанной выше процедурой. Подставив в первую подсистему (2.32) функции  $\Phi_{+,n}(z) = c_n u(z)$ , получим алгебраические уравнения

$$(T(2n+1) + \varepsilon_S T_S) c_n = 2\lambda T \sum_{m=0}^{n_D} c_m. \quad (2.47)$$

Из условия существования нетривиального решения СЛАУ (2.47) получим характеристическое уравнение

$$\sum_{n=0}^{n_D} \frac{1}{2n+1+2\mu} = \frac{1}{2\lambda}, \quad (2.48)$$

где  $\mu \equiv \varepsilon_S T_S / 2T$ .

Используя и рекуррентную формулу для дигамма-функции  $\psi(t)$  [374]

$$\psi(n+t) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{m+t} + \psi(t),$$

перепишем характеристическое уравнение (2.48) в форме, удобной для расчетов:

$$\psi\left(\frac{\omega_D}{2\pi T} + 1 + \mu\right) - \psi\left(\frac{1}{2} + \mu\right) = \psi\left(\frac{\omega_D}{2\pi T_S} + 1\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right). \quad (2.49)$$

Характеристическое уравнение (2.49) имеет  $(n_D + 1)$  различных корней  $\mu^{(k)}$  ( $k = 0, 1, \dots, n_D$ ). Легко показать, что они удовлетворяют неравенствам:  $-(k+1/2) \leq \mu^{(k)} \leq -(k-1/2)$  при  $k = 1, \dots, n_D$  и  $\mu^{(0)} \geq 0$  (формально  $\mu^{(0)} > -1/2$ , однако отрицательные значения этой величины нефизичны; более подробно о корнях  $\mu^{(k)}$  см., например, в книге де Жена [13]). Корням  $\mu^{(k)}$  соответствуют собственные вектора  $\mathbf{C}^{(k)} = (c_0 \ c_1 \ \dots \ c_{n_D})^T r^{(k)}$ , которые, в соответствии с (2.47), определяются формулами

$$c_n^{(k)} = \frac{2s^{(k)}}{2n+1+2\mu^{(k)}}. \quad (2.50)$$

Произвольные числа  $s^{(k)}$  в (2.50) доопределим из условия нормировки векторов  $\mathbf{C}^{(k)}$ ,  $\tilde{\mathbf{C}}^{(k)} \mathbf{C}^{(k)} = 1$ :

$$s^{(k)} = \left( \sum_{n=0}^{n_D} \frac{1}{(n + 1/2 + \mu^{(k)})^2} \right)^{-1/2}. \quad (2.51)$$

Легко убедиться, что матрица  $e$  с элементами  $c_{nk} \equiv c_n^{(k)}$  ( $n, k = 0, 1, \dots, n_D$ ) является ортогональной:  $\tilde{e}e = e\tilde{e} = \mathbf{1}_{n_D+1}$  (здесь  $\mathbf{1}_{n_D+1}$  — единичная матрица размерности  $n_D + 1$ ). Действительно, при  $k \neq l$

$$\begin{aligned} (\tilde{e}e)_{kl} &= \sum_{n=0}^{n_D} c_n^{(k)} c_n^{(l)} = \sum_{n=0}^{n_D} \frac{2s^{(k)}}{2n+1+2\mu^{(k)}} \frac{2s^{(l)}}{2n+1+2\mu^{(l)}} = \\ &= \frac{2s^{(k)}s^{(l)}}{\mu^{(l)} - \mu^{(k)}} \sum_{n=0}^{n_D} \left( \frac{1}{2n+1+2\mu^{(k)}} - \frac{1}{2n+1+2\mu^{(l)}} \right) = 0 \end{aligned}$$

в силу (2.48). При  $k = l$   $(\tilde{e}e)_{kk} = 1$  по определению величин  $s^{(k)}$ . Из равенства  $\tilde{e}e = \mathbf{1}_{n_D+1}$  следует, что и  $e\tilde{e} = \mathbf{1}_{n_D+1}$ . Свойство ортогональности построенной матрицы  $e$  позволяет, как мы сейчас увидим, построить простое выражение для матрицы  $S^+$ .

По найденным корням характеристического уравнения  $\mu^{(k)}$  определяем величины  $\varepsilon_S^{(k)} \equiv 2T\mu^{(k)} / T_S$ . Каждому значению  $\varepsilon_S^{(k)}$  соответствует пара линейно независимых решений уравнения (2.45)  $u_1^{(k)}(z)$ ,  $u_2^{(k)}(z)$ . Общее решение системы уравнений для функций  $\Phi_{+,n}(z)$  тогда можно записать в виде

$$\Phi_+(z) = \sum_{k=0}^{n_D} C^{(k)} \left( a_k u_1^{(k)}(z) + b_k u_2^{(k)}(z) \right). \quad (2.52)$$

На основе (2.52) легко построить матрицант  $S^+$ , выбирая систему решений  $u_1^{(k)}(z)$ ,  $u_2^{(k)}(z)$  канонической. Для дифференциального оператора  $\partial_T^2$  (2.34) каноническую систему решений уравнения (2.45) составляют функции  $ch\left(z/\xi_S^{(k)}\right)$ ,  $\xi_S^{(k)} sh\left(z/\xi_S^{(k)}\right)$  и их производные. Здесь мы ввели набор «корреляционных длин»

$$\xi_S^{(k)} \equiv \xi_S^{(k)}(T) = \xi_S \sqrt{\frac{T_S}{2T\mu^{(k)} - \xi_S^2 T_S p^2}}. \quad (2.53)$$

(Значение параметра  $p$  в (2.53) будет оговариваться, либо будет понятно из контекста решаемой задачи.)

С учетом (2.52) и свойства  $S^+(0) = \hat{1}$ , после несложных преобразований получим

$$S^+(z) = e \otimes \left( \begin{array}{cc} \text{diag} \left[ ch \left( \frac{z}{\xi_S^{(k)}} \right) \right] & \text{diag} \left[ \xi_S^{(k)} sh \left( \frac{z}{\xi_S^{(k)}} \right) \right] \\ \text{diag} \left[ \frac{1}{\xi_S^{(k)}} sh \left( \frac{z}{\xi_S^{(k)}} \right) \right] & \text{diag} \left[ ch \left( \frac{z}{\xi_S^{(k)}} \right) \right] \end{array} \right) \otimes \tilde{e}. \quad (2.54)$$

Здесь символ  $diag[a^{(k)}]$  означает диагональную матрицу с элементами  $a^{(0)}, a^{(1)}, \dots, a^{(n_D)}$  вдоль главной диагонали.

Завершая этот пункт, запишем известное выражение для матрицанта  $S^-$  второй подсистемы уравнений (2.32) [373], введя еще один набор «корреляционных» длин:

$$\zeta_{S,p}^{(k)} = \xi_S \sqrt{\frac{T_S}{T(2k+1) + T_S p^2 \xi_S^2}}. \quad (2.55)$$

Тогда

$$S^{-}(z) = \begin{pmatrix} \text{diag} \left[ \text{ch} \left( \frac{z}{\zeta_S^{(k)}} \right) \right] & \text{diag} \left[ \zeta_S^{(k)} \text{sh} \left( \frac{z}{\zeta_S^{(k)}} \right) \right] \\ \text{diag} \left[ \frac{1}{\zeta_S^{(k)}} \text{sh} \left( \frac{z}{\zeta_S^{(k)}} \right) \right] & \text{diag} \left[ \text{ch} \left( \frac{z}{\zeta_S^{(k)}} \right) \right] \end{pmatrix}. \quad (2.56)$$

### 2.3.2. Матрицант системы уравнений для $M$ -слоя

Путем прямых вычислений легко получить следующую формулу для матрицанта второй пары системы уравнений (2.32)

$$\mathfrak{M}(z) = \frac{1}{\cos \theta} \begin{pmatrix} \text{Re}(e^{-i\theta} \mathcal{M}(z)) & i \text{Im}(\mathcal{M}(z)) \\ i \text{Im}(\mathcal{M}(z)) & \text{Re}(e^{i\theta} \mathcal{M}(z)) \end{pmatrix}. \quad (2.57)$$

Здесь  $2(n_D+1) \times 2(n_D+1)$ -размерная матрица:

$$\mathcal{M}(z) = \begin{pmatrix} \text{diag}[\text{ch}(\kappa_n z)] & \text{diag}[\kappa_n^{-1} \text{sh}(\kappa_n z)] \\ \text{diag}[\kappa_n \text{sh}(\kappa_n z)] & \text{diag}[\text{ch}(\kappa_n z)] \end{pmatrix}. \quad (2.58)$$

«Угол»  $\theta$ , появившийся в (2.58) в результате учета спин-орбитального и парамагнитного рассеяния, определен формулой

$$\sin \theta = \frac{v_2}{E_{ex}} \equiv \frac{1}{E_{ex}} \left( \frac{1}{\tau_z} - \frac{1}{\tau_{so}} \right). \quad (2.59)$$

Из (2.59) видно, что при слабом парамагнитном и спин-орбитальном рассеянии параметр  $\theta$  действителен, если же обменный потенциал  $|E_{ex}| < |v_2|$ , то  $\theta$  является комплексным.

Характеристические показатели  $\kappa_n$  ( $n = 0, 1, \dots, n_D$ ) находятся по формулам

$$\kappa_n = \frac{1+i}{\zeta_M} \sqrt{\cos \theta + \frac{\omega_n + \pi T_S \xi_M^2 P^2 + v_1}{i E_{ex}}} \quad (2.60)$$

### 2.3.3. Матрицы условий сшивания на $S$ - $M$ границах

Матрицы  $\mathfrak{P}_{MS}$ ,  $\mathfrak{P}_{SM}$  даются определением:  $\mathbf{Y}(z_i + 0) = \mathfrak{P}_{MS(SM)} \mathbf{Y}(z_i - 0)$ , если слева от границы находится  $S(M)$ -слой, а справа от границы находится  $M(S)$ -слой. Из (2.13), (2.14) следует, что

$$\mathfrak{P}_{MS(SM)} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{MS(SM)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{P}_{MS(SM)} \end{pmatrix}, \quad (2.61)$$

где

$$\mathcal{P}_{MS} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{n_D+1} & \gamma_b \xi_M \eta^{-1} \cdot \mathbf{1}_{n_D+1} \\ \mathbf{0} & \eta^{-1} \cdot \mathbf{1}_{n_D+1} \end{pmatrix}, \quad (2.62)$$

$$\mathcal{P}_{SM} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{n_D+1} & \gamma_b \xi_M \cdot \mathbf{1}_{n_D+1} \\ \mathbf{0} & \eta \cdot \mathbf{1}_{n_D+1} \end{pmatrix}. \quad (2.63)$$

Здесь

$$\eta \equiv \frac{\rho_S}{\rho_M}, \quad \gamma_b \equiv \frac{2\ell_M}{3\xi_M t_M}. \quad (2.64)$$

Безразмерный параметр  $\gamma_b$  [107], характеризующий квантово-механическую прозрачность  $S/M$ -границы, удобен при анализе экспериментальных характеристик критического состояния структуры.

Из выражений (2.61) – (2.63) немедленно следует важный вывод о пределах применимости условий Куприянова – Лукичева на  $S/M$ -интерфейсах. А именно, рассмотрим ячейку  $S/M/S$  слоистой структуры в пределе  $d_M \rightarrow 0$ , то есть, в пределе исчезающего  $M$ -слоя. В этом случае матрица  $\mathcal{R}(2d_S + d_M)$ , соответствующая ячейке, должна переходить в матрицу  $S$ -слоя  $\mathfrak{S}(2d_S)$ . На самом же деле имеем

$$\mathcal{R}(2d_S + d_M) = \mathfrak{S}(d_S) \mathfrak{P}_{SM} \mathfrak{M}(d_M) \mathfrak{P}_{MS} \mathfrak{S}(d_S) \xrightarrow{d_M \rightarrow 0} \\ \xrightarrow{d_M \rightarrow 0} \mathfrak{S}(d_S) \mathfrak{P}_{SM} \mathfrak{P}_{MS} \mathfrak{S}(d_S) \neq \mathfrak{S}(2d_S),$$

поскольку

$$\mathfrak{P}_{SM} \mathfrak{P}_{MS} = \mathbf{1}_2 \otimes \mathcal{P}_{SM} \mathcal{P}_{MS} = \mathbf{1}_2 \otimes \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{n_D+1} & 2\gamma_b \xi_M \cdot \mathbf{1}_{n_D+1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_{n_D+1} \end{pmatrix}$$

( $\mathbf{1}_2$  – единичная матрица размерности 2).

Полученный результат вполне закономерен, поскольку и уравнения Узаделя, и условия Куприянова – Лукичева справедливы в диффузионном пределе, то есть в случае, когда длина свободного пробега электрона много меньше всех фигурирующих в задаче размеров. Поэтому предельный переход  $d_M \rightarrow 0$  незаконен в рамках диффузионного приближения. Вероятно, в связи с этим оказывается сложным фиттировать экспериментальные зависимости  $T_c(d_M)$  [167]. В работе [168] для улучшения согласия между теоретическими и экспериментальными характеристиками двухслойных структур вида  $S1/S2$  предложено учитывать зависимость длины свободного пробега  $\ell$  от толщины слоя  $d$  (об этом уже упоминалось в главе 1) по формуле [375]

$$\ell(d) = \ell_{bulk} \left[ 1 + \frac{3}{2} \frac{\ell_{bulk}}{d} \left( E_3 \left( \frac{d}{\ell_{bulk}} \right) - E_5 \left( \frac{d}{\ell_{bulk}} \right) - \frac{1}{4} \right) \right], \quad (2.65)$$

где  $\ell_{bulk} = l(\infty)$  – длина свободного пробега для массивного образца, функция  $E_n(x) = \int_1^{\infty} t^{-n} e^{-xt} dt$  есть интегральная показательная функция [374].

В соответствии с (2.65)  $\ell(d \rightarrow 0) \approx \frac{3}{4} d \cdot \left( 1 - 3\gamma - \ln \left( \frac{d}{\ell_{bulk}} \right) \right)$ , что

означает  $\gamma_b \xi_M (d_M \rightarrow 0) \rightarrow 0$ , то есть недиагональные элементы в матрицах шивания исчезают; это приводит, в свою очередь, к «правильному» предельному соотношению при  $d_M \rightarrow 0$ :  $\mathcal{R}(2d_S + d_M) \rightarrow \mathfrak{S}(2d_S)$ . Правда, коль скоро учтена зависимость длины свободного пробега от толщины  $M$ -слоя в недиагональном члене матриц (2.62), (2.63), то это нужно сделать и в остальных формулах. От длины свободного пробега  $\ell_M$  зависят коэффициент  $\eta \sim D_M^{-1} \sim \ell_M^{-1}$  в матрицах условий на интерфейсе, и величины  $\xi_M$ ,  $\zeta_M \sim D_M^{1/2} = (\ell_M v_{F,M}/3)^{1/2} \sim \ell_M^{1/2} (v_{F,M} - \text{скорость Ферми в нормальном металле})$ . Учет этих поправок, как видно, усложняет расчеты, и часто избыточен на фоне экспериментальных погрешностей. (Как будет видно из нижеприведенных примеров, зависимость длины свободного пробега электрона в сверхпроводящем материале от толщины  $S$ -слоя, в отличие от зависимости  $\ell_M(d_M)$ , несущественна для исследуемых на эксперименте структур).

#### 2.4. Свойства функций состояний зеркально-симметричных $S/M$ -структур. Структуры $n_b \times (M/S/M)$ и сверхрешетки

Для рассматриваемых в данном разделе структур координатную плоскость  $XOY$  удобно совместить с плоскостью зеркальной сим-

метрии структуры, параллельной поверхности слоев. В этом случае начальная координата  $Z_0 = -L/2$ .

Если внешнее магнитное поле отсутствует, либо структура находится в перпендикулярном внешнем магнитном поле, то можно доказать следующие важные свойства решений граничной задачи (2.32), (1.7).

1) Вектор-функции

$$\Phi(z) \equiv \begin{pmatrix} \Phi^+(z) \\ \Phi^-(z) \end{pmatrix} \quad (2.66)$$

являются либо четными, либо нечетными.

2) В силу первого свойства вектор-столбцы  $Y(-L/2)$  являются собственными векторами матрицы  $\mathcal{R}(-L/2, L/2)$  с собственными значениями  $\lambda_{\mathcal{R}} = \pm 1$ .

3) Собственные значения  $\lambda_{\mathcal{R}} = \pm 1$  кратны, их кратность – четна.

Свойство симметрии решений позволяет факторизовать характеристическое уравнение (2.39). А именно, собственные значения  $T^{(k)}$ , соответствующие симметричным вектор-функциям  $\Phi^{(k)}(z)$ , находятся из уравнения

$$\det \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{2,1}(L/2,0) & \mathcal{R}_{2,3}(L/2,0) \\ \mathcal{R}_{4,1}(L/2,0) & \mathcal{R}_{4,3}(L/2,0) \end{pmatrix} = 0, \quad (2.67)$$

а собственные значения, соответствующие антисимметричным вектор-функциям, – из уравнения

$$\det \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{1,1}(L/2,0) & \mathcal{R}_{1,3}(L/2,0) \\ \mathcal{R}_{3,1}(L/2,0) & \mathcal{R}_{3,3}(L/2,0) \end{pmatrix} = 0. \quad (2.68)$$

Формулы (2.67), (2.68) содержат матрицы, соответствующие половине толщины структуры, что упрощает численные расчеты.

Свойства симметрии критического состояния позволяют рассматривать одновременно двухслойные и трехслойные структуры, а также получить решения для сверхрешетки. Действительно, четная вектор-функция  $\Phi(z)$ , являющаяся решением для трехслойной структуры, и заданная на отрезке  $[0, L/2]$ , одновременно является решением граничной задачи для двухслойной структуры, полученной делением трехслойной структуры по плоскости симметрии. Периодическим продолжением решений для структур  $M/S/M$  на промежутки  $[-L/2+m\cdot L, L/2+m\cdot L]$  ( $m = \pm 1, \pm 2, \dots$ ) получим решения для сверхрешетки с толщиной  $d_{M,inf}$   $M$ -слоя, равной удвоенной толщине  $M$ -слоя трехслойной структуры. При этом четной функции  $\Phi(z)$  для трехслойной  $M/S/M$  структуры соответствует  $d$ -периодическое решение для сверхрешетки ( $d = d_S + 2d_M$ ,  $d_S$  и  $d_M$  – толщины  $S$ - и  $M$ -слоев трехслойной структуры), а нечетной –  $2d$ -периодическое решение с нулями в серединах  $S$ -слоев. Другое  $2d$ -периодическое решение (с нулями в серединах  $M$ -слоев) для сверхрешетки может быть получено периодическим продолжением решений для структур вида  $S/M/S$  (здесь  $d = 2d_S + d_M$ ).<sup>1</sup> На эксперименте сверхрешетку можно имитировать структурой  $n_{bl} \times (M/S/M)$ .<sup>2</sup> Несложно показать, что полный набор состояний этой структуры можно определить, решив следующие задачи на собственные значения  $T^{(m)}$  и собственные векторы  $Y_c^{(m)}$  для матрицанта  $\mathcal{R}_{cell}$  «элементарной ячейки»  $M/S/M$ :

$$\mathcal{R}_{cell} Y_c^{(m)} = \lambda_m Y_c^{(m)}, \quad (2.69)$$

$$(m = -n_{bl} + 1, -n_{bl} + 2, \dots, n_{bl} - 1, n_{bl}),$$

<sup>1</sup> На самом деле для реальных многослойных структур это свойство выполняется приближенно. Критическая температура структуры  $n_{bl} \times (M/S/M)$  растет с увеличением  $n_{bl}$ . Это должно происходить из-за спаривания электронов в соседних  $S$ -слоях, которое не учтено в гамильтониане де Жена.

<sup>2</sup> На самом деле в экспериментальной практике для имитации сверхрешетки используются структуры  $M/n_{bl} \times (M/S/M)$ . Ниже будет оценен эффект «лишних» внешних ( $M/2$ )-слоев.

где

$$\lambda_m = \exp\left(\frac{i\pi m}{n_{bl}}\right).$$

Очевидно, собственные вектора  $Y_c^{(m)}$  матрицы  $\mathcal{R}_{cell}$  являются также собственными для матрицанта  $\mathcal{R}$ . При этом четным (нечетным) значениям  $m$  соответствует собственное значение  $\lambda_{\mathcal{R}} = 1$  ( $\lambda_{\mathcal{R}} = -1$ ) матрицанта  $\mathcal{R}$  структуры  $n_{bl} \times (M/S/M)$ . Можно показать, что комплексно-сопряженным числам  $\lambda_m$  и  $\lambda_{-m} = \lambda_m^*$  соответствует одно и то же собственное значение температуры  $T^{(m)} = T^{(-m)}$ . При этом если  $Y_c^{(m)} \equiv (Y_{c,+}^{(m)} \ Y_{c,-}^{(m)})^{tr}$ , то  $Y_c^{(-m)} = (Y_{c,+}^{(m)*} \ -Y_{c,-}^{(m)*})^{tr}$  (здесь  $Y_{c,+}^{(m)}, Y_{c,-}^{(m)}$  —  $2(n_D+1)$ -мерные вектор-столбцы). Далее, с учетом симметрии  $M/S/M$  структуры получим, что собственному значению  $T^{(m)}$  соответствуют два собственных вектора вида  $Y_c^{(m)} = (\Phi_+ \ i\Psi_+ \ i\Phi_- \ \Psi_-)^{tr}$  и  $Y_c^{(-m)} = (\Phi_+ \ -i\Psi_+ \ i\Phi_- \ -\Psi_-)^{tr}$ , где  $\Phi_{\pm}, -\Psi_{\pm}$  —  $(n_D+1)$ -мерные действительные вектор-столбцы. Линейная комбинация этих векторов  $Y^{(m)} = (Y_c^{(m)} + Y_c^{(-m)})/2 = (\Phi_+ \ 0 \ i\Phi_- \ 0)^{tr}$ , является, во-первых, собственным вектором матрицы  $\mathcal{R}$ , и, во-вторых, удовлетворяет граничному условию. Таким образом, вектора  $Y^{(m)}$  вместе со значениями температуры  $T^{(m)}$ , найденные из (2.69), определяют  $n_{bl}$  решений граничной задачи структуры  $n_{bl} \times (M/S/M)$ . Еще одно решение задачи (2.69), соответствующее значению  $\lambda_{n_{bl}} = -1$ , оказывается непригодным, поскольку в

этом случае, как можно показать, собственный вектор  $Y^{(n_{bl})}$  имеет вид  $(0 \ \Phi_+' \ 0 \ \Phi_-')^{tr}$ . Отметим очевидный факт, что не все  $n_{bl}$  значений  $T^{(m)}$  могут иметь физический смысл (то есть, быть действительными положительными).

Проведенный анализ важен и для исследования состояний многослойных структур вида  $M/n_{bl} \times (S/M)$ , поскольку при больших значениях  $n_{bl}$  набор собственных значений температур для них можно оценить, решив достаточно простую задачу (2.69).

## 2.5. Матричное решение уравнений Узаледа. Структуры типа S/N. Двухслойные и трехслойные структуры

Если несверхпроводящий материал является нормальным металлом или парамагнетиком, то уравнения (2.32) значительно упрощаются. Действительно, полагая  $E_{ex} = 0$  (а также,  $\tau_{so}^{-1} = 0$ ) находим, что функции  $\Phi_{-,n}(\mathbf{r}) = 0$ . В таком случае система (2.32) редуцируется к виду

$$\begin{cases} -\xi_S^2 T_S \partial_{\mathbf{r}}^2 \Phi_n + T(2n+1)\Phi_n = 2\lambda T \sum_{m=0}^{n_D} \Phi_m, & z \in I_S, \\ -\xi_M^2 T_S \partial_{\mathbf{r}}^2 \Phi_n + T(2n+1 + (\pi\tau)^{-1})\Phi_n = 0, & z \in I_M. \end{cases} \quad (2.70)$$

Здесь введены упрощения в обозначениях:  $\Phi_{+,n}(\mathbf{r}) \rightarrow \Phi_n(\mathbf{r})$ ,  $\tau^{-1} \equiv \tau_z^{-1} + 2\tau_x^{-1}$ .

Матричное решение уравнений (2.70) по-прежнему дается формулой (2.36), не изменяются и формулы (2.40) – (2.44), выражающие матрицант  $\mathcal{R}$  через матрицанты слоев и матрицы границ. Однако при этом размеры всех матриц эффективно уменьшаются в 4 раза. Матрица  $\mathfrak{S}(z)$  редуцируется к матрице  $S^+(z)$ , матрицы  $\mathfrak{P}_{MS}$ ,  $\mathfrak{P}_{SM}$  – к матрицам  $\mathcal{P}_{MS}$ ,  $\mathcal{P}_{SM}$ , а матрица  $\mathfrak{M}(z)$  – к матрице  $\mathcal{M}(z)$ , причем последняя становится действительной. Характеристические показатели (2.60) для нормального металла преобразуются к виду

$$\kappa_n = \frac{1}{\xi_M} \sqrt{(2n+1) \frac{T}{T_S} + \frac{1}{\pi\tau T_S} + p^2}. \quad (2.71)$$

Характеристическое уравнение (2.39) приобретает форму

$$\det(\mathcal{R}_{2,1}(Z_0 + L, Z_0)) = 0. \quad (2.72)$$

Аналогично, уравнения (2.67), (2.68) определяющие собственные значения  $T^{(k)}$  для симметричных и антисимметричных решений зеркально-симметричных структур, редуцируются к уравнениям, соответственно

$$\det(\mathcal{R}_{2,1}(0, -L/2)) = 0, \quad (2.73)$$

$$\det(\mathcal{R}_{1,1}(0, -L/2)) = 0. \quad (2.74)$$

Для трехслойных структур  $N/S/N$ , имеющих важное экспериментальное значение, уравнения (2.73), (2.74) можно преобразовать к виду, гораздо более удобному для численных расчетов. Поскольку наибольшему собственному значению  $T$  для этих структур соответствует симметричная функция состояния  $Y(z)$ , ограничимся преобразованием уравнения (2.74). В результате простых выкладок получим

$$\det(S_t + (1 + \gamma_b \xi_M \mathcal{M}_t)^{-1} \eta \mathcal{M}_t) = 0. \quad (2.75)$$

Здесь

$$S_t = e \operatorname{diag} \left[ \left( \xi_S^{(k)} \right)^{-1} \operatorname{th} \left( d_S / 2 \xi_S^{(k)} \right) \right] \tilde{e}, \quad (2.76)$$

$$\mathcal{M}_t = \operatorname{diag} \left[ \left( \xi_M^{(k)} \right)^{-1} \operatorname{th} \left( d_M / \xi_M^{(k)} \right) \right], \quad (2.77)$$

где

$$\xi_M^{(k)} = \xi_M \sqrt{\frac{T_S}{T(2k+1)}}. \quad (2.78)$$

## 2.6. Одномодовое приближение

Одномодовое приближение предложено Вертхаммером [16] для расчета двухслойных и трехслойных структур, а также сверхрешеток. Оно основано на том соображении, что при достаточно больших толщинах слоев структуры, а именно, при  $d_S, d_M \gtrsim \xi_S$ , волновая функция сверхпроводящего конденсата, а также параметр порядка, изменяются медленно. В диффузионном пределе параметр порядка в каждом слое разлагается на составляющие, пропорциональные гиперболическим функциям от аргументов  $(z-z_i)/\xi_{S(M)}^{(k)}$  (здесь  $z_i$  — левая граница слоя). Поскольку  $\xi_{S(M)}^{(k)} \sim \xi_{S(M)} / \sqrt{2k+1}$  ( $k=0,1,\dots$ ), то наиболее медленная составляющая соответствует значению  $k=0$ . Ее и оставляют в приближенном решении уравнений критического состояния. Существует тривиальный случай, когда одномодовое приближение совпадает с точным решением. Именно, в случае однородного плоского сверхпроводника легко получить, что  $\mu^{(0)} = 0$ , и этому собственному значению соответствуют аномальные функции Грина  $F_n(z) = C_n^{(0)}$ ; Соответственно, параметр порядка  $\Delta(z) = \Delta(0) = const$ . Для многослойной структуры типа  $S/N$  применение одномодового приближения оправдано, поскольку условие  $d_S, d_M \gtrsim \xi_S$  выполняется для экспериментальных образцов. Так, экспериментальные структуры Nb/Cu, Nb/Pd имеют толщину слоев Nb 12–100 нм, и толщину нормальных слоев (Cu или Pd) порядка 5–100 нм [157, 158]. При этом длина когерентности  $\xi_S \sim 5.5$ –6.5 нм. При расчете экспериментальных структур, включающих тонкие слои ферромагнетика, одномодовое приближение дает скорее качественную картину критического состояния.

В одномодовом приближении схема матричного метода остается прежней, но при этом фигурирующие в решении матрицы существенно упрощаются. Для структур типа  $S/F$  матрицант имеет размерность  $4 \times 4$ , а для структур  $S/N$  — размерность  $2 \times 2$ . Выражения (2.54), (2.56), (2.57) очевидным образом редуцируются к одномодовому приближению. При этом для  $S/N$  структур вида  $N/n_b \times (S/N)$  можно провести упрощения в выражении для матрицанта (при отсутствии магнитного поля или при наличии перпендикулярного магнитного поля). Действительно, для степени двумерной унимодулярной мат-

рицы  $A$  с равными диагональными элементами  $a_{11} = a_{22}$  легко доказывается формула

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{\beta^n + \beta^{-n}}{2} & a_{12} \cdot \frac{\beta^n - \beta^{-n}}{\beta - \beta^{-1}} \\ a_{21} \cdot \frac{\beta^n - \beta^{-n}}{\beta - \beta^{-1}} & \frac{\beta^n + \beta^{-n}}{2} \end{pmatrix}, \quad (2.79)$$

где собственное значение  $\beta = a_{11} + \sqrt{a_{11}^2 - 1}$ . Имея в виду, что матрицант (2.43) имеет вид  $\mathcal{R}(L) = \mathbf{M}(d_M/2)(A)^{n_{bl}} \mathbf{M}(d_M/2)$  с матрицей  $A = \mathbf{M}(d_M/2) \mathbf{P}_{MS} \mathbf{S}(d_S) \mathbf{P}_{SM} \mathbf{M}(d_M/2)$ , в которой

$$\mathbf{S}(z) = \begin{pmatrix} ch(z/\xi_S^{(0)}) & \xi_S^{(0)} sh(z/\xi_S^{(0)}) \\ \xi_S^{(0)-1} sh(z/\xi_S^{(0)}) & ch(z/\xi_S^{(0)}) \end{pmatrix}, \quad (2.80)$$

$$\mathbf{M}(z) = \begin{pmatrix} ch(z/\xi_M^{(0)}) & \xi_M^{(0)} sh(z/\xi_M^{(0)}) \\ \xi_M^{(0)-1} sh(z/\xi_M^{(0)}) & ch(z/\xi_M^{(0)}) \end{pmatrix}, \quad (2.81)$$

$$\mathbf{P}_{MS} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma_b \xi_M \eta^{-1} \\ 0 & \eta^{-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_{SM} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma_b \xi_M \\ 0 & \eta \end{pmatrix}, \quad (2.82)$$

получим, с учетом (2.79), для определения критической температуры или зависимости  $H_{c2\perp}(T)$  вполне обозримое трансцендентное уравнение.

В случае двухслойных и трехслойных структур (а также сверхрешеток) уравнение (2.39) относительно критической температуры приобретает особенно простую форму. Для структур  $N/S/N$  оно

(точнее, уравнение (2.75)) сводится к следующему трансцендентному уравнению

$$\frac{1}{\xi_S^{(0)}} \operatorname{tg} \left( \frac{d_S}{2\xi_S^{(0)}} \right) = \eta \frac{\operatorname{th} \left( d_M / \xi_M^{(0)} \right)}{\xi_M^{(0)} + \gamma_b \xi_M \operatorname{th} \left( d_M / \xi_M^{(0)} \right)}. \quad (2.83)$$

Поскольку выполняется неравенство  $\omega_D \gg T_S$  (для ниобия критическая температура  $T_S \sim 9$  К, дебаевская частота  $\omega_D = 275$  К), в уравнении (2.49) можно избавиться от параметра  $\omega_D$ , воспользовавшись асимптотической формулой для дигамма-функции:  $\psi(z) \sim \ln(z)$ . В результате получим уравнение

$$\psi \left( \frac{1}{2} + \mu^{(0)}(T) \right) - \psi \left( \frac{1}{2} \right) = \ln \left( \frac{T_S}{T} \right). \quad (2.84)$$

Рассмотрим предельные решения уравнений (2.83), (2.84).

1)  $d_S \rightarrow 0$ . Поскольку толщина  $d_M$  фиксирована, решение уравнения (2.83) может существовать лишь при  $\mu^{(0)} \rightarrow \infty$ , что означает  $T \rightarrow 0$ . Используя асимптотическую формулу для дигамма-функции, получим  $2\mu^{(0)}(T) \approx e^{-\gamma} T_S / 2T$  (здесь  $\gamma$  – число Эйлера). Подставляя это выражение в (2.83), имеем

$$\frac{e^{-\gamma/2}}{\xi_S} \sqrt{\frac{T_S}{2T}} \left( \frac{d_S}{2\xi_S} \frac{e^{-\gamma/2}}{\sqrt{2}} \right) \approx \frac{\eta}{\xi_M} \frac{d_M}{\xi_M} \sqrt{\frac{T}{T_S}}$$

или

$$\frac{T}{T_S} \approx \frac{e^{-\gamma}}{4\eta} \frac{\xi_M^2}{\xi_S^2} \frac{d_S}{d_M}. \quad (2.85)$$

Последнее соотношение показывает, что для любой сколь угодно малой толщины  $S$ -слоя решение уравнения (2.83) существует, то

есть критическая температура не равна нулю. Между тем, из точного решения следует (и это подтверждается экспериментом), что существует некоторая малая конечная толщина  $S$ -слоя, при которой сверхпроводимость исчезает. Таким образом, область применимости однододового приближения ограничена снизу по  $d_S$ .

2)  $d_S \rightarrow \infty$ . Здесь стремление  $T_c(d_S \rightarrow \infty) \rightarrow T_S$  должно сопровождаться стремлением  $\mu(T \rightarrow T_S) \rightarrow 0$ , так что аргумент тангенса в левой части уравнения (2.83) приближается к  $\pi/2$ . При этом волновая функция сверхпроводящего конденсата стремится к нулю на границе  $S/N$ . Это значит, что для слоя сверхпроводника большой толщины соседние слои нормального металла любой, даже малой, толщины эффективно подавляют сверхпроводимость в сверхпроводящем материале вблизи его границ. Это отражается в формуле для отклонения критической температуры структуры от температуры  $T_S$ :  $\delta T = T_S - T \approx T_S \cdot (\pi^2 \xi_S / d_S)^2 / 2$ , — видим, что толщина нормального слоя не входит в первую поправку к  $T_S$ . Напротив, при любой, сколь угодно малой, но фиксированной толщине  $S$ -слоя распределение сверхпроводящего конденсата становится все более однородным с уменьшением толщины нормальных слоев (первая производная от конденсатной волновой функции стремится к нулю на границе  $S/N$ ). Экспериментальный материал не достаточно проанализирован для ответа на вопрос: является отмеченное противоречие между этими двумя предельными случаями артефактом, или граничным эффектом.

3) В случае  $d_M \gg \xi_M$  при любой, сколь угодно малой фиксированной температуре из (2.83) получим:

$$\sqrt{2\mu^{(0)}(T)} \operatorname{tg} \left( \frac{d_S}{2\xi_S} \sqrt{\frac{2T\mu^{(0)}(T)}{T_S}} \right) = \eta \frac{\xi_S}{\xi_M} \frac{1}{1 + \gamma_b \sqrt{\frac{T}{T_S}}}. \quad (2.86)$$

Это означает, что имеет место эффект «насыщения» по толщине нормального слоя (кривая  $T_c(d_M)$  имеет горизонтальную асимптоту). Использование данного эффекта является необходимым составляющим элементом установившихся экспериментальных методик

по определению параметров многослойных структур. Действительно, в приведенную формулу входят два эффективных безразмерных параметра:  $\chi \equiv \eta (\xi_S/\xi_M)$  ( $\gamma$ - в терминах [107]) и  $\gamma_b$ . Подгонкой экспериментальной характеристики  $T_c(d_S)$ , полученной на образцах с  $N$ -слоем толщиной  $d_M \gg \xi_M$ , можно получить значения этих параметров (при этом длина  $\xi_S$  должна быть определена из независимых измерений). Если из каких-либо соображений (основанных, в частности, на идеализированной модели границы  $S$ - $N$  как прямоугольного потенциального барьера) известно, что параметр  $\gamma_b$  мал (почти полностью прозрачная граница), то вместо формулы (2.83) имеем

$$\sqrt{2\mu^{(0)}(T)} \operatorname{tg} \left( \frac{d_S}{2\xi_S} \sqrt{\frac{2T\mu^{(0)}(T)}{T_S}} \right) = \chi. \quad (2.87)$$

Если же, наоборот, квантово-механическая прозрачность  $S$ - $N$ -интерфейса мала ( $\gamma_b \rightarrow \infty$ ), то уравнение (2.83) можно заменить приближенными уравнением

$$\sqrt{\frac{2T\mu^{(0)}(T)}{T_S}} \operatorname{tg} \left( \frac{d_S}{2\xi_S} \sqrt{\frac{2T\mu^{(0)}(T)}{T_S}} \right) = \frac{\chi}{\gamma_b}. \quad (2.88)$$

Заметим при этом, что последняя формула не может быть использована, как не трудно показать, для определения коэффициента прозрачности из экспериментальной характеристики  $T_c(d_S)$  (что часто делается экспериментаторами).

Приведем теперь уравнения одномодового приближения для трехслойных структур типа сверхпроводник/ферромагнетик.

Используя формулу (2.67), получим следующее уравнение, определяющее критическую температуру  $T_{c0} \equiv T^{(0)}$  (ей соответствует собственное значение  $\lambda_R = +1$ , и симметричная вектор-функция состояния) структуры  $F/S/F$ :

$$\frac{1}{\xi_S^{(0)}} \operatorname{th} \left( \frac{d_S}{2\xi_S^{(0)}} \right) = - \frac{\operatorname{Re} \left[ \left( s_{21}^- m_{11} + m_{21} \right) \cdot m_{21}^* \right]}{\operatorname{Re} \left[ \left( s_{21}^- m_{11} + m_{21} \right) \cdot m_{11}^* \right]}. \quad (2.89)$$

Здесь

$$m_{11} = 1 + \gamma_b \xi_M \cdot \kappa_0 \operatorname{th}(\kappa_0 d_M), \quad (2.90)$$

$$m_{21} = \eta \cdot \kappa_0 \operatorname{th}(\kappa_0 d_M), \quad (2.91)$$

$$s_{21}^- = \frac{1}{\zeta_S^{(0)}} \operatorname{th} \left( \frac{d_S}{2\zeta_S^{(0)}} \right). \quad (2.92)$$

Критическая температура  $T_{c0}$  структуры  $S/F/S$  определяется этими же уравнениями (2.89) – (2.92), в которых произведена замена толщин:  $d_S/2 \rightarrow d_S$ ,  $d_M \rightarrow d_M/2$ . Эти же формулы определяют и критическую температуру двухслойной структуры  $S/F$  с толщиной  $S$ -слоя  $d_S/2$ , а также температуру  $T_{c0}$  сверхрешетки с толщиной  $S$ -слоя  $d_S$  и толщиной  $F$ -слоя  $2d_M$ .

Уравнение, определяющее критическую температуру  $T_{c\pi} \equiv T^{(1)}$  (ей соответствует собственное значение  $\lambda_{\mathcal{R}} = -1$ , и антисимметричная вектор-функция состояния) структуры  $F/S/F$ , имеет вид

$$\xi_S^{(0)} \operatorname{th} \left( \frac{d_S}{2\xi_S^{(0)}} \right) = - \frac{\operatorname{Re} \left[ \left( s_{12}^- m_{21} + m_{11} \right) \cdot m_{11}^* \right]}{\operatorname{Re} \left[ \left( s_{12}^- m_{21} + m_{11} \right) \cdot m_{21}^* \right]}, \quad (2.93)$$

где

$$s_{12}^- = \zeta_S^{(0)} \operatorname{th} \left( \frac{d_S}{2\zeta_S^{(0)}} \right). \quad (2.94)$$

Как можно показать, уравнение (2.93) может иметь решение только в случае достаточно больших толщин S-слоя:  $d_S > \pi \left| \xi_S^{(0)}(T) \right|$ .

Для структуры  $S/F/S$  уравнение, которое определяет критическую температуру  $T_{cp}$ , выглядит следующим образом:

$$\frac{1}{\xi_S^{(0)}} \operatorname{th} \left( \frac{d_S}{2\xi_S^{(0)}} \right) = - \frac{\operatorname{Re} \left[ \left( s_{21}^- m_{22} + m_{12} \right) \cdot m_{12}^* \right]}{\operatorname{Re} \left[ \left( s_{21}^- m_{22} + m_{12} \right) \cdot m_{22}^* \right]}. \quad (2.95)$$

Здесь

$$m_{12} = \eta \kappa_0 \operatorname{cth}(\kappa_0 d_M / 2), \quad (2.96)$$

$$m_{22} = 1 + \gamma_b \xi_M \cdot \kappa_0 \operatorname{th}(\kappa_0 d_M / 2). \quad (2.97)$$

В этом случае, как было сказано выше, сверхпроводящий конденсат в  $S/F/S$  описывается антисимметричной волновой функцией. В литературе для данного состояния используется термин « $\pi$ -фаза» или « $\pi$ -состояние».

## 2.7. Структуры типа $S/F$ в приближении сильного ферромагнетика

На эксперименте со слоистыми  $S/F$  структурами почти всегда используются ферромагнитные материалы, характеризующиеся обменным потенциалом  $E_{ex} \gg 2\pi T_S$ , либо с достаточно большим отношением  $E_{ex}/2\pi T_S$ . Поэтому, и с учетом того, что моды с большими значениями  $\omega_n$  дают не очень большой вклад в термодинамические характеристики реальных структур, отношением  $\omega_n/E_{ex} = \pi T(2n+1)/E_{ex}$  можно пренебречь в (2.60). Если, кроме того, эффекты парамагнитного и спин-орбитального рассеяния малы, то вместо (2.60) для характеристических показателей получим формулу

$$\kappa_n = \frac{1+i}{\zeta_M} . \quad (2.98)$$

Следовательно, матрицант  $F$ -слоя становится не зависящим от температуры. Но более существенно (с вычислительной точки зрения) то, что в этом случае количество эффективных параметров, описывающих систему, уменьшается на 1. Действительно, в матрице  $\mathcal{M}$  длины масштабируются на характерную длину  $\zeta_M$ . В матрицу граничных условий входит еще один параметр, имеющий размерность длины — «корреляционная длина»  $\xi_M$ . Однако этот параметр входит в сочетании  $\gamma_b \xi_M$ , так что, переопределяя параметр  $\gamma_b$ , то есть, вводя вместо определения (3.32) определение

$$\tilde{\gamma}_b \equiv \frac{2\ell_M}{3\zeta_M t_M} , \quad (2.99)$$

получим в результате вместо параметров  $\gamma_b$ ,  $\xi_M$ ,  $\zeta_M$  параметры  $\tilde{\gamma}_b$ ,  $\zeta_M$ .

### Глава 3. Критическая температура структур типа $S/N$ и $S/F$ . *Предельные и граничные эффекты и методика идентификации параметров структуры*

Авторы работы [98] впервые обратили внимание, во-первых, на резкую количественную несогласованность различных теоретических описаний одной и той же  $S/N$  структуры и, во-вторых, на невозможность полного описания критического состояния структуры в рамках существовавших теоретических моделей. Эта ситуация была охарактеризована следующим образом: “Generally speaking, the effort to compare the theory with measurements has been limited. Many of the experimental data were presented without reference to the theory, whereas many of the theoretical extensions restricted themselves to model systems”. Решая далее проблему идентификации параметров структуры по экспериментальным данным, авторы работы [98], пришли к важному физическому выводу: процессы квантово-механического рассеяния на границах между слоями дают существенный вклад в термодинамические свойства критического состояния структур. С математической точки зрения эти процессы учитываются условиями Куприянова – Лукичева на  $S/N$  интерфейсах (в терминах матричного решения уравнений Узаделя, неидеальной квантово-механической прозрачности  $S/N$  границы соответствуют ненулевые недиагональные элементы в матрицах (2.62), (2.63)). Между тем, кроме выше означенной проблемы, обнаруживается проблема противоположного свойства. А именно, оказывается, что различные наборы подгоночных параметров, выбранные экспериментаторами с большой степенью произвола (хотя и из разумных соображений), одинаково успешно моделируют критические характеристики  $T_c(d_S)$ ,  $T_c(d_M)$ . В данной главе будет показано, что это происходит потому, что экспериментальные характеристики удовлетворяют почти на всем своем протяжении неким условиям предельного поведения.<sup>1</sup> Оказывается, этот факт можно обратить в эффективную методику определения параметров структуры из экспериментальных данных.

---

<sup>1</sup> Это, в свою очередь, связано с экспериментальными сложностями измерения низкотемпературного участка характеристики.

### 3.1. Параметры критического состояния $S/N$ структур

Перечислим эффективные параметры решения уравнений критического состояния.

Количество уравнений в системе уравнений Узаделя определяется параметром обрезания по частоте. Величина данного параметра должна быть достаточно большой, чтобы не влиять на критические характеристики структуры. Как показывают вычисления, дебаевская частота  $\omega_D$  удовлетворяет этому условию.

Критическая температура сверхпроводящего материала  $T_S$ , казалось бы, определена вполне однозначно. Это так, если для приготовления  $S/N$  структуры используется сверхпроводящий материал очень высокого качества. В этом случае критическая температура пленки сверхпроводящего материала  $T_f$  почти не зависит от ее толщины  $d_f$  вплоть до очень малых значений  $d_f$ . Но, как правило, используемый сверхпроводящий материал обладает характеристикой  $T_f(d_f)$  с существенным изменением. С другой стороны, напрашивающееся измерение этой зависимости также не позволяет выявить однозначно значение параметра  $T_S$ , фигурирующего в уравнениях слоистой структуры. Дело в том, что основную роль в уменьшении критической температуры пленки сверхпроводника (обычного качества) играют процессы рассеяния электронов на ее неоднородных поверхностях. Если пленка сверхпроводника соседствует с нормальным металлом, то эти процессы замещаются процессами рассеяния на неоднородностях  $S-N$  интерфейсов. Но процессы рассеяния на интерфейсах учтены, так или иначе, в условиях сшивания на интерфейсе. Следовательно, параметр  $T_S$  остается неопределенным (то есть фиттируемым) в пределах  $T_f < T_S < T_{c,bulk}$  ( $T_{c,bulk}$  – критическая температура массивного образца). Получить значение  $T_S$  с небольшой погрешностью можно достаточно просто, оценивая асимптотику экспериментальной характеристики  $T_c(d_S)$ .

Длина когерентности сверхпроводящего материала  $\xi_S$  достаточно надежно определяется по асимптотическому поведению зависимости  $dH_{c2\perp}(T_c; d_S)/dT$ , полученной в результате измерения характеристик  $H_{c2\perp}(T; d_S)$  серии трехслойных  $N/S/N$  структур с фиксированной толщиной  $N$ -слоев (см. раздел 5.2). Этот способ, однако, приводит к ощутимым погрешностям при положительной кривизне кривой

$H_{c21}(T)$  в окрестности  $T_c$ , в частности, при  $\xi_N \gg \xi_S$ . На самом деле параметр  $\xi_S$  достаточно быстро определяется в процессе подгонки экспериментальной зависимости  $T_c(d_S)$ , поскольку малые его изменения существенно влияют на результат расчета. Это понятно по следующим соображениям. Длина когерентности определяет степень изменения волновой функции сверхпроводящего конденсата в  $S$ -слое. Малые изменения формы волновой функции приводят к значительному изменению свободной энергии конденсата, и соответственно, изменению критической температуры.

Длина когерентности  $\xi_N$  нормального металла с малой степенью надежности определяется априори. Действительно,  $\xi_{N(S)} \sim \sqrt{\ell_{N(S)}}$ , а длина свободного пробега существенно зависит от технологии напыления слоев; при этом, в отличие от параметра  $\xi_S$ , величина  $\xi_N$  не может быть извлечена непосредственно из характеристик структур  $N/S/N$ . Поэтому, для определения параметра  $\xi_N$  проводятся обычно измерения критических температур серии трехслойных  $S/N/S$  или двухслойных  $S/N$  структур с фиксированной толщиной  $S$ -слоя и различными толщинами  $N$ -слоя. Величину  $\xi_N$  оценивают эмпирически по виду полученной экспериментальной характеристики  $T_c(d_N)$ , либо подгонкой этой характеристики посредством одномодового приближения. Ниже мы покажем, что этот способ может дать неправильные результаты. Таким образом, величина  $\xi_N$  является подгоночным параметром, варьируемым в широком диапазоне.

В соответствии с (2.64) для определения параметра  $\eta$  достаточно измерить удельные сопротивления  $\rho_S$  и  $\rho_N$  массивных материалов. Поскольку их зависимость от длин свободного пробега существенна при малых толщинах слоев, параметр  $\eta$  определяется достаточно уверенно для структур  $N/S/N$  при больших значениях  $d_N$ . Именно такие структуры используются для измерения характеристик  $T_c(d_S)$ . В общем случае параметр  $\eta$  является подгоночным с ограниченной областью изменения.

Параметр прозрачности  $t_N$  связан с эффективным квантово-механическим коэффициентом прозрачности  $\mathcal{T}$  соотношением  $t_N = \mathcal{T}(1 - \mathcal{T})$ . Верхней границей для величины  $\mathcal{T}$  является ее табличное значение  $\mathcal{T}_m = 4v_{F,S}v_{F,N} / (v_{F,S} + v_{F,N})^2$ , получаемое при моделировании интерфейсов прямоугольными потенциальными

барьерами [376]. Для реальной структуры величина  $T$  может принимать значения от очень малых до  $T_m$ .

Таким образом, используемая модель содержит пять подгоночных параметров ( $T_S$ ,  $\xi_S$ ,  $\xi_N$ ,  $\eta$ ,  $t_N$ ), два из которых ( $\xi_N$ ,  $t_N$ ) варьируются в широком диапазоне.

### 3.2. Критическая температура трехслойных структур N/S/N (примеры расчета)

Перейдем теперь к анализу экспериментальных данных, приведенных в работах [110, 157, 158] для двух видов трехслойных структур, Cu/Nb/Cu и Pd/Nb/Pd. Для измерения характеристики  $T_c(d_S)$  были изготовлены по две серии образцов с фиксированными толщинами нормальных слоев ( $d_N = 150$  нм), и различными толщинами слоя Nb ( $d_S = 20$ –160 нм для Cu/Nb/Cu, и  $d_S = 20$ –130 нм – для Pd/Nb/Pd). Два набора структур Cu/Nb/Cu (названных cs1 и cs2) получены методом молекулярно-лучевой эпитаксии, и два набора структур Pd/Nb/Pd (названных ps1 и ps2) получены методом магнетронного напыления. Кроме того, для определения параметра  $\xi_N$  ( $\xi_{Cu}$  и  $\xi_{Pd}$ ) была изготовлена серия образцов Nb/Cu/Nb с фиксированными толщинами сверхпроводящего металла и различными толщинами Cu, и серия Pd<sub>out</sub>/Nb/Pd<sub>in</sub>/Nb/Pd<sub>out</sub> с переменной толщиной центрального нормального слоя. Экспериментальные зависимости  $T_c(d_S)$  для структур Pd/Nb/Pd приведены на рисунках 3.1, для структур Cu/Nb/Cu – на рисунке 3.2.

Для определения параметра  $\xi_S$  были проведены измерения верхнего перпендикулярного критического поля, откуда получено значение  $\xi_S = 6.4$  нм [157, 158]; расчет теоретической зависимости  $T_c(d_S)$  показывает, что это значение является удовлетворительным. Погрешности в определении  $\xi_S$  вызваны как раз обстоятельствами, названными в §3.1, более детальное рассмотрение характеристик  $H_{c2\perp}(T; d_S)$  совместно с  $T_c(d_S)$  приводит к области допустимых значений  $\xi_S \sim 5.7$ –6.5 нм.

На эксперименте измерена также критическая температура массивного ниобия,  $T_{c,Nb} = 9.2$  К и 8.8 К и для образцов, изготовленных методом МЛЭ и методом магнетронного напыления, соответственно. Между тем из асимптотического поведения характеристики

$T_c(d_S)$  получаем значения  $T_S = 8.44$  К для серии ps1,  $T_S = 8.3$  К – для набора ps2,  $T_S = 9$  К – для серий cs1 и cs2.

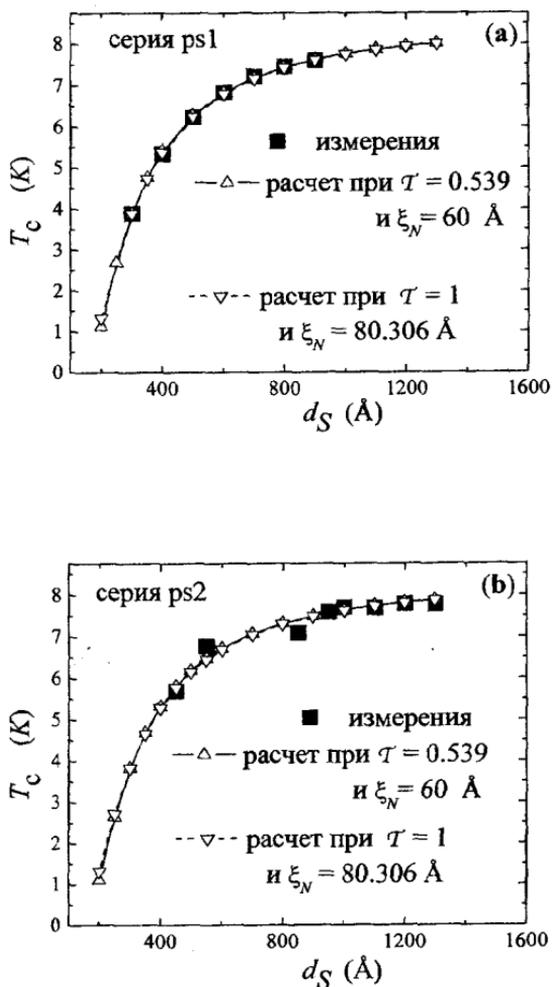


Рис. 3.1. Экспериментальная и теоретическая зависимости критической температуры от толщины сверхпроводящего слоя для серий ps1 (a) и ps2 (b) структур Pd/Nb/Pd

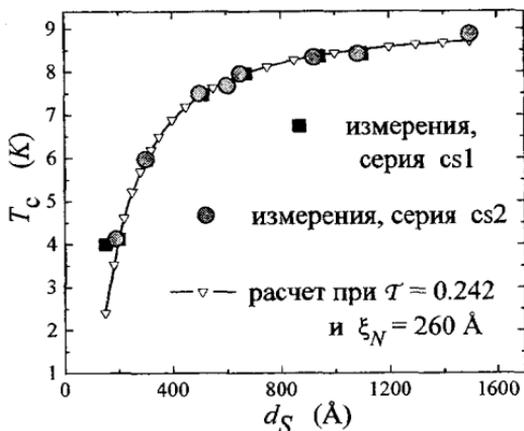


Рис. 3.2. Экспериментальная и теоретическая зависимости критической температуры от толщины сверхпроводящего слоя для серий cs1 и cs2 структуры Cu/Nb/Cu

Видим, что критическая температура массивного сверхпроводника, вообще говоря, не может быть использована как параметр теории  $S/N$ .

В соответствии с измерениями на толстых пленках, удельные сопротивления нормальных металлов  $\rho_{Pd} = 5.0$  мкОм·см,  $\rho_{Cu} = 1.3$  мкОм·см. Удельное сопротивление ниобия в структуре Cu/Nb/Cu  $\rho_{Nb,mbe} = 3.6$  мкОм·см; для структуры Pd/Nb/Pd  $\rho_{Nb,sput} \approx 5.0$  мкОм·см. Значения удельных сопротивлений нормальных металлов вполне могут быть приняты, поскольку слои нормального металла можно считать полубесконечными. Действительно, значения длин когерентности нормального материала составляют  $\xi_N \approx 40$  нм для Cu и  $\approx 8$  нм — для Pd. Следовательно,  $d_N/\xi_N \gg 1$ . Для того, чтобы с уверенностью можно было использовать значения удельного сопротивления для Nb, следует оценить, в соответствии с (2.65), эффект тонкой пленки. Найдем вначале коэффициент диффузии для Nb:

$$D_{Nb} = \frac{2\pi k_B T_S \xi_S^2}{\hbar} \sim 2.8 - 3.1 \text{ см}^2/\text{с}. \text{ Отсюда, и с}$$

учетом того, что  $v_{F,Nb} = 2.73 \cdot 10^7$  см/с, для длины свободного пробега получим значение  $\ell_{Nb,bulk} = 3D_{Nb}/v_{F,Nb} \sim 3.1-3.4$  нм. Отсюда следует, что для наименьшей толщины слоя Nb, 20 нм,  $\ell_{Nb}(20\text{нм}) \approx 0.94\ell_{Nb,bulk}$ , что делает значения удельного сопротивления массивного Nb вполне приемлемыми для расчетов. (Заметим, что полученная оценка длины свободного пробега электрона в ниобии, и аналогичные оценки для нормальных металлов, несомненно, подтверждают законность использования диффузионного предела микроскопической теории.) Таким образом, имеем хорошо определенные значения параметра  $\eta$  для обеих структур: для структуры Cu/Nb/Cu  $\eta = 2.77$ , для структуры Pd/Nb/Pd  $\eta \approx 1$ .

Значения длины когерентности нормального материала  $\xi_N$  (26 нм для Cu и 6 нм для Pd) были получены в экспериментальных работах [157, 158] из эмпирического условия эффективного спада конденсатной волновой функции в нормальном слое. Данный метод, как было уже сказано, вызывает некоторую неуверенность в результате. Кроме того, как будет показано ниже, структуры вида  $S/N \dots N/S$ , использованные для определения  $\xi_N$ , отличаются по своим свойствам от рассматриваемых структур. Поэтому при расчетах параметр  $\xi_N$  варьировался в широком диапазоне: 15–45 нм для Cu и 5–8 нм — для Pd.

Наконец, оставшийся параметр — параметр прозрачности  $t_N$  — полностью подгоночный.

Процедура подгонки экспериментальных зависимостей  $T_c(d_S)$  проводилась следующим образом [110]. Для заданного значения  $\xi_N$  из условия совпадения теоретического и экспериментального значений критической температуры при заданной толщине  $d_S$  находилась параметр  $T$ . Для структуры ps1 достигалось совпадение теоретического и экспериментального значений  $T_c(30 \text{ нм})$ , для структуры cs1 —  $T_c(20 \text{ нм})$ . Далее, для полученной пары значений  $(\xi_N, T)$  рассчитывалась вся кривая  $T_c(d_S)$ . Для расчета характеристик  $T_c(d_S)$  структур ps2 и cs2 подгонка заново не производилась, а использовались параметры  $(\xi_N, T)$  структур ps1 и cs1 соответственно. Результаты расчета приведены на рисунках 3.1(a, b) для Pd/Nb/Pd, и на рисунке 3.2 — для Cu/Nb/Cu. Согласие между теоретическими и экспериментальными зависимостями кажется удивительным. Более того,

оказалось, что кривые  $T_c(d_S)$ , построенные для последовательности пар значений  $(\xi_N, T)$ , практически накладываются друг на друга. Это отражено на рисунках 3.1. На них приведены теоретические зависимости, полученные для двух пар значений  $(\xi_N, T)$ : одна из них соответствует параметру  $\xi_N = 6$  нм, использованному в [157] при моделировании экспериментальных данных, другая соответствует полной прозрачности границы  $S/N$ , то есть параметру  $T = 1$  ( $\xi_N = 8$  нм). Аналогичное слияние («вырождение») зависимостей  $T_c(d_S)$ , соответствующих различным парам  $(\xi_N, T)$ , имеет место и для наборов cs1 и cs2; одна из зависимостей, полученная для значения длины когерентности  $\xi_N = 26$  нм ( $T = 0.24$ ), приведена на рисунке 3.2.

Зависимость между параметрами  $\xi_N$  и  $T$ , которые соответствуют одной и той же экспериментальной характеристике  $T_c(d_S)$ , приведена на рисунке 3.3 для структуры Pd/Nb/Pd и на рисунке 3.4 – для структуры Cu/Nb/Cu.

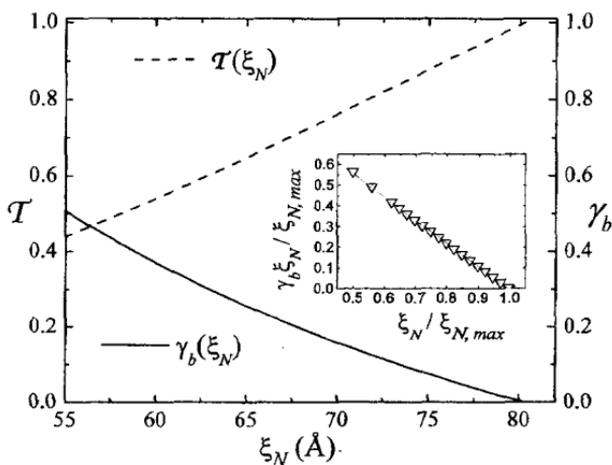


Рис. 3.3. Кривые в пространствах параметров  $(T, \xi_N)$  и  $(\gamma_b, \xi_N)$ , соответствующие характеристике  $T_c(d_S)$  структуры Pd/Nb/Pd. На вставке: зависимость  $\gamma_b(\xi_N)\xi_N$  и ее аппроксимация (3.1)

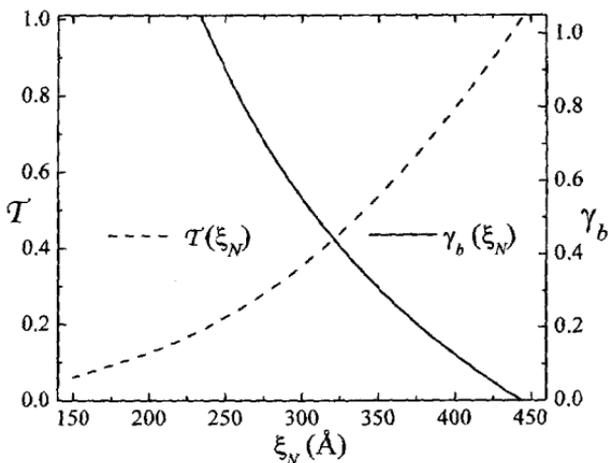


Рис. 3.4. Кривые в пространствах параметров  $(T, \xi_N)$  и  $(\gamma_b, \xi_N)$ , соответствующие экспериментальной характеристике  $T_c(d_S)$  структуры Cu/Nb/Cu

На этих же рисунках приведены важные с экспериментальной точки зрения зависимости  $\gamma_b(\xi_N)$ . Из рисунков видно, что область значений  $\xi_N$ , при которых решение уравнений Узаделя существует, ограничена сверху некоторым  $\xi_{N,max}$ , этому значению соответствует полная прозрачность  $S$ - $N$  границы. Оказывается можно найти очень простую эмпирическую формулу для описания зависимости  $\gamma_b(\xi_N)$ , а именно

$$\gamma_b(\xi_N) \xi_N = \alpha \cdot (\xi_{N,max} - \xi_N) \quad (3.1)$$

В (3.1)  $\alpha$  – коэффициент порядка 1; для Pd/Nb/Pd  $\alpha = 1.125$  и  $\xi_{N,max} = 8$  нм; для Cu/Nb/Cu  $\alpha = 1.115$  и  $\xi_{N,max} = 44$  нм. На вставке к рисунку 3.3 представлены зависимости  $\gamma_b(\xi_N) \cdot \xi_N$ , полученные в результате точного решения уравнения (II.5.6) (треугольники), и по формуле (3.1) (сплошная прямая).

Существование кривой  $T(\xi_N)$  «вырождения» характеристики  $T_c(d_S)$  можно объяснить двумя факторами.

Во-первых, для изготовленных трехслойных структур достигнут случай полубесконечного слоя нормального металла. Действительно, в формуле (2.77) для рассматриваемого интервала температур  $th(d_N / \xi_N^{(k)}) \geq th((d_N / \xi_N) \sqrt{T/T_S}) \geq th(100 / \xi_N)$ . Последняя величина для Cu/Nb/Cu равна 0.98, для Pd/Nb/Pd – 1.00. Во-вторых, сверхпроводящий слой имеет достаточно большую толщину по сравнению с длиной когерентности  $\xi_S$ . Этим объясняется и то, что одномодовое приближение столь же хорошо описывает экспериментальные результаты, как и точные уравнения теории (см. рисунки 3.5, 3.6). При этом, однако, коэффициент прозрачности  $T$  сильно смещается в большую сторону, и почти совпадает с коэффициентом прозрачности, полученным в соответствии с моделью прямоугольного потенциального барьера для  $S$ - $N$ -границы. Например, для структуры ps1 точное решение дает значение  $T = 0.539$  ( $\xi_N = 6$  нм), а в соответствии с одномодовым приближением получаем  $T \approx 1$ .

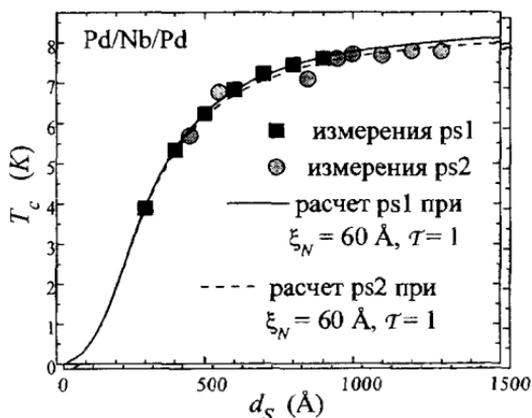


Рис. 3.5. Экспериментальная зависимость критической температуры структуры Pd/Nb/Pd от толщины сверхпроводящего слоя и теоретические кривые, полученные в одномодовом приближении

Расчет по одномодовому приближению также выявляет кривую в пространстве параметров ( $\xi_N$ ,  $T$ ), любая точка которой соответ-

вует практически одной и той же зависимости  $T_c(d_S)$ ; эта кривая, однако, значительно смещена в сторону меньших значений  $\xi_N$ .

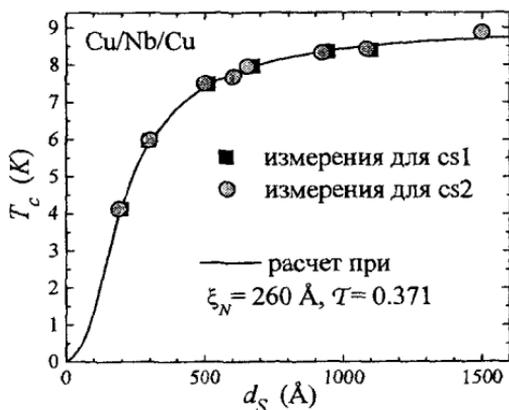


Рис. 3.6. Экспериментальная зависимость критической температуры структуры Cu/Nb/Cu от толщины сверхпроводящего слоя и теоретические кривые, полученные в одномоновом приближении

Математические выкладки, объясняющие существование кривой  $T_c(d_S)$  приближенного вырождения характеристики  $T_c(d_S)$ , тривиальны и здесь не приводятся. Следовало также дать теоретическую оценку норм высших мод в сравнении с нулевой модой, однако мы ограничимся графической иллюстрацией. На рисунках 3.7(a) и 3.7(b) представлены компоненты  $\Phi^{(0)}_{(k)}(-L/2)$  вектор-функции основного состояния сверхпроводящего конденсата в Cu/Nb/Cu, вычисленной на границе структуры, в зависимости от толщины S-слоя  $d_S$  и критической температуры  $T_c$ , соответственно. Напомним, что нижний индекс  $k$  пробегает значения от 0 до  $n_D(T_c)$ ; поэтому количество компонент, как видно из рисунков 3.7, меняется в зависимости от толщины слоя и от температуры. Верхний индекс означает симметричную функцию состояния без нулей, соответствующую наибольшему собственному значению температуры. Для  $S/N$  структур аномальные функции Грина действительны.

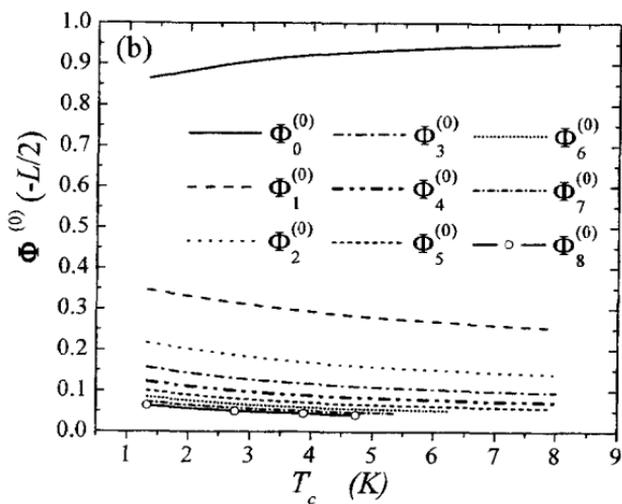
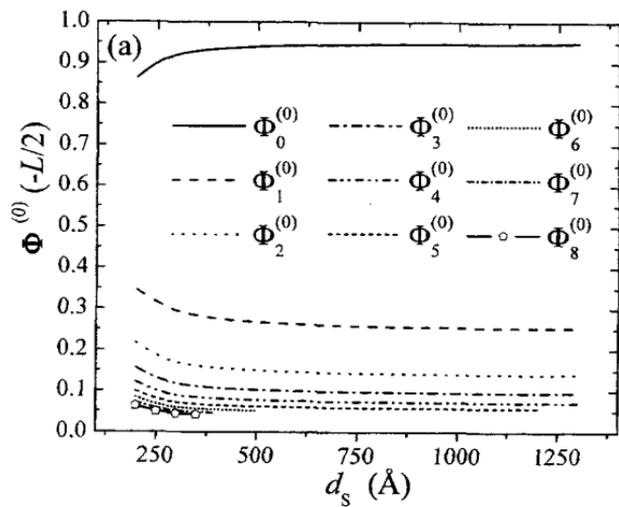


Рис. 3.7. Вектор-функция критического состояния, вычисленная на границе структуры Cu/Nb/Cu, в зависимости от толщины S-слоя (а) и критической температуры (б)

Из рисунка (3.7) видно следующее. Во-первых, удельный вес нулевой моды составляет порядка 80% почти для всей области рассматриваемых толщин  $S$ -слоя и почти для всей области критических температур. Во-вторых, вектор состояния не меняется в области значений  $d_S \sim 40\text{--}150$  нм (или в области значений  $T_c \sim 4\text{--}8$  К). Первый факт наглядно показывает эффективность одномодового приближения, второй факт является существенным в объяснении вырождения характеристики  $T_c(d_S)$  по параметрам. Заметим, что соотношение между различными компонентами вектор-функции состояния не изменяется вглубь структуры.

Таким образом, мы выявили следующее.

- 1) Точное решение уравнений Узаделя хорошо описывает экспериментальные данные. При этом мы имеем возможность надежно устанавливать значения материальных параметров структуры.
- 2) Существует область в пространстве параметров такая, что каждая точка этой области соответствует почти одной и той же характеристике  $T_c(d_S)$   $N/S/N$  структуры с полубесконечными нормальными слоями.
- 3) Одномодовое приближение вполне пригодно для описания экспериментальных данных для структур с толщиной  $S$ -слоев порядка  $(2.5\text{--}3)\xi_S$  и более. Однако, при этом возможны значительные отклонения подгоночных параметров (длины когерентности нормального слоя и прозрачности  $S/N$ -интерфейса) от их истинного значения.

### 3.3. Критическая температура трехслойных структур $S/N/S$ . Краевой эффект (примеры расчета)

Коль скоро получено очень хорошее согласие между теорией и экспериментом при описании одного вида структур, естественно надеяться, что измерения критических характеристик другого вида структур будут описаны теоретически столь же успешно. При этом в результате процедуры фиттирования должны быть доопределены оставшиеся параметры теории, в нашем случае — это  $\xi_N$  либо  $T$ . В рассматриваемом примере мы располагаем экспериментальной характеристикой  $T_c(d_N)$  [158], полученной для структур Nb/Cu/Nb с толщиной каждого слоя Nb  $d_S = 22$  нм, и толщинами слоя Cu

$d_N = 10\text{--}160$  нм. Экспериментальная зависимость  $T_c(d_N)$  приведена на рисунке 3.8.

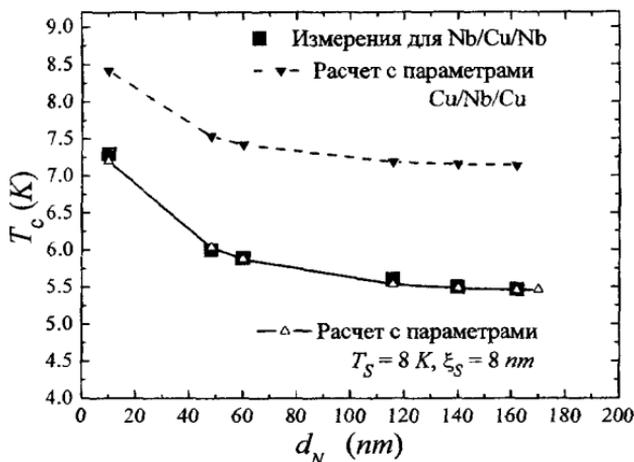


Рис. 3.8. Экспериментальная и теоретическая зависимость критической температуры от толщины нормального слоя. Пояснения – в тексте

Проанализируем данные измерений по Nb/Cu/Nb на основе точного решения граничной задачи для уравнений Узаделя с набором параметров, определенных в задаче о восстановлении зависимости  $T_c(d_S)$ . Фиксируя  $\xi_S = 6.4$  нм,  $T_S = 9$  К,  $\eta = 2.77$ , и последовательно задавая ( $\xi_N$ ,  $T(\xi_N)$ ), после вычислений приходим к следующему результату: не существует значений ( $\xi_N$ ,  $T(\xi_N)$ ), фиттирующих экспериментальную зависимость  $T_c(d_N)$ . Одна из теоретических кривых  $T_c(d_N)$ , построенная по значениям  $T = 0.495$ ,  $\xi_N = 34$  нм, представлена на рисунке 8 штриховой линией с темными треугольниками, – видим полное несоответствие экспериментальным данным. Воспроизвести экспериментальную зависимость  $T_c(d_N)$ , тем не менее, можно с хорошей точностью, изменив значения параметров  $\xi_S$ ,  $T_S$ , или  $\eta$ . На рисунке 8 сплошной линией со светлыми треугольниками

показана кривая, рассчитанная при значениях подгоночных параметров  $T = 0.495$ ,  $\xi_N = 34$  нм,  $\eta = 2.77$ , соответствующих структуре Cu/Nb/Cu, но при  $T_S = 8$  К,  $\xi_S = 8$  нм.

Коль скоро нашлась одна точка в пространстве параметров, фитирующих зависимость  $T_c(d_N)$ , естественно попытаться отыскать множество таких точек. Такое множество точек действительно существует [163], т. е. критическая характеристика  $T_c(d_N)$  трехслойной структуры Nb/Cu/Nb, как и характеристика  $T_c(d_S)$  структуры Cu/Nb/Cu, «вырождена». Вырождение имеет место относительно «движения» точки в пространстве параметров  $(\eta, T_S, \xi_S)$  по определенной кривой  $\{T_S(\eta), \xi_S(\eta)\}$ . Множество ограничено условиями  $T_c(2d_S) < T_S < T_c(\infty)$  и

$$\inf_{\{d_S, d_N\}} \left( \frac{\rho_S(d_S)}{\rho_N(d_N)} \right) < \eta < \sup_{\{d_S, d_N\}} \left( \frac{\rho_S(d_S)}{\rho_N(d_N)} \right),$$

или, в соответствии с экспериментальными данными [157],  $7.5 \text{ К} < T_S < 9.2 \text{ К}$ ,  $2 < \eta < 8.5$ . В результате вычислений выясняется удивительный факт: множества параметров, восстанавливающих зависимости  $T_c(d_N)$  и  $T_c(d_S)$ , не пересекаются. Это означает, что не существует набора параметров, одновременно фитирующих характеристики  $T_c(d_N)$  и  $T_c(d_S)$ . Подчеркнем, что обе структуры были изготовлены с использованием одних и тех же мишеней.

Полученное различие в материальных параметрах, описывающих свойства  $S/N/S$  и  $N/S/N$  структур, объясняется, в первую очередь, различием свойств внутреннего  $S$  слоя в Cu/Nb/Cu и внешних  $S$  слоев в образцах Nb/Cu/Nb. Действительно, параметры интерфейсов ( $T$  или  $\gamma_b$ ), очевидно, одни и те же и для  $S/N/S$ , и для  $N/S/N$ . Параметры нормального металла ( $\xi_N$ ) тоже не отличаются друг от друга. — Это понятно, поскольку внешние поверхности  $N$ -слоев почти не оказывают влияния на свойства  $N/S/N$  (плотность числа сверхпроводящих пар стремится к нулю у внешних границ  $N/S/N$ ), а уменьшение длины свободного пробега для  $N$ -слоя структуры  $S/N/S$  не очень существенно. Напротив, неоднородность внешних поверхностей  $S/N/S$  оказывает сильное влияние на ее характеристики. Фак-

тически вместо трехслойной структуры  $S/N/S$  мы имеем пятислойную структуру  $S'/S/N/S/S'$ , в которой свойства слоя  $S'$  точно не известны, и могут изменяться неконтролируемым образом для разных образцов.<sup>1</sup> С практической точки зрения это значит, что, для идентификации параметров многослойных структур вида  $N/S/.../S/N$  нельзя использовать измерения на  $S/N/S$ . Возможные способы преодоления этих сложностей – использовать серии пятислойных структур  $N/S/N1/S/N$  с переменной толщиной центрального нормального слоя, либо (что еще лучше) серии трехслойных структур  $N1/S/N2$  с переменной толщиной одного из  $N$ -слоев. Наиболее простой способ уменьшения краевого эффекта состоит в использовании двухслойных структур  $S/N$ , сверхпроводящий слой которых находится на диэлектрической подложке.

Прямым подтверждением вышеизложенных соображений о влиянии дефектности внешней поверхности сверхпроводящего материала на критическую температуру многослойной структуры является установление неравенства критических температур следующей пары 3-слойных  $S/N$ : первая структура – это  $N/S/N$  с толщинами и нормальных слоев  $d_N$  и с толщиной сверхпроводящего слоя  $d_S$ ; вторая структура – это  $S/N/S$  с толщинами  $d_S/2$  сверхпроводящих слоев, и толщиной  $2d_N$  нормального слоя.<sup>2</sup> Для идеальной пары названных структур критические температуры должны быть равны тождественно, поскольку каждую из них можно представить в виде суммы двуслойной  $S/N$  структуры с толщиной  $S$ -слоя  $d_S/2$  и толщиной  $N$ -слоя  $d_N$  и одного из ее зеркальных отображений.

---

<sup>1</sup> Заметим, что аналогичная ситуация имеет место и для обычных низкотемпературных сверхпроводников: при полной ясности механизма сверхпроводимости в них (теория БКШ), оказывается достаточно сложным моделирование даже зависимости критической температуры тонкой пленки от ее толщины. Это связано с тем, что при малой толщине пленки возникают сразу несколько трудно учитываемых факторов подавления сверхпроводимости. (Наиболее простой из них – диффузионное рассеяние на граничных плоскостях, моделируемое в терминах куперовского эффекта близости). Тем большие сложности возникают при решении задачи прогнозирования материальных и геометрических параметров гетероструктур.

<sup>2</sup> Такой эксперимент был выполнен и подтвердил асимметрию характеристик  $S(d_S/2)/N(2d_N)/S(d_S/2)$  и  $N(d_N)S(d_S)/N(d_N)$ .

### 3.4. Критическая температура структур $N/n_{bl} \times (S/N)$ . Асимптотическое поведение характеристики $T_c(n_{bl})$ и идентификация параметров (пример расчета)

Выше мы выяснили, что получаемые на эксперименте зависимости  $T_c(d_S)$  являются предельными в том смысле, что экспериментально реализуется предельный случай по толщинам  $N$ -слоев  $d_N \rightarrow \infty$ , и кроме того, толщина  $S$ -слоя является достаточно большой (в рассмотренном примере  $d_S/\xi_S \approx 3$ ). В результате характеристика оказывается почти инвариантной относительно «движения» вдоль кривой  $\mathcal{T}(\xi_N)$ . Хотя по этой причине цель однозначного определения параметров системы не достигается измерением зависимости  $T_c(d_S)$ , мы получаем следующее очевидное преимущество. По данным измерений какой-либо дополнительной характеристики достаточно легко найти на кривой  $\mathcal{T}(\xi_N)$  точку, соответствующую исследуемой структуре. Такой характеристикой может быть зависимость критической температуры структуры  $N/n_{bl} \times (S/N)$  от количества ее бислоев  $n_{bl}$ .<sup>1</sup> Как мы увидим ниже, для надежного определения параметров следует использовать предельное (асимптотическое) поведение зависимости  $T_c(n_{bl})$ .<sup>2</sup>

Продемонстрируем данный способ, используя экспериментальные данные, приведенные в [158, 127, 165, 166] для системы, в которую входят серия трехслойных структур  $\text{Cu/Nb/Cu}$  и серия многослойных структур  $\text{Cu}/n_{bl} \times (\text{Nb/Cu})$  с числом бислоев от 5 до 12, изготовленных методом катодного распыления на постоянном токе

---

<sup>1</sup> Заметим при этом, что расчет критических характеристик многослойных сверхпроводящих структур, в том числе и критической температуры, до настоящего времени является сложной вычислительной задачей.

<sup>2</sup> Очевидно, при увеличении количества бислоев, критическая температура многослойной структуры стремится к критической температуре сверхрешетки. Под сверхрешеткой понимается бесконечная периодическая структура, полученная повторением элементарной ячейки  $N/S/N$ . На эксперименте сверхрешетку имитировать могут многослойные структуры с толщиной внутренних  $N$ -слоев  $d_N$  и толщиной внешних  $N$ -слоев  $d_N/2$ . В экспериментальной практике последнее условие обычно не соблюдается: все  $N$ -слои имеют толщину  $d_N$ . Очевиден критерий, в соответствии с которым многослойную структуру можно с заданной точностью считать сверхрешеткой – отношение нормы матрицанта нормального слоя к норме матрицанта элементарной ячейки, возведенной в степень  $n_{bl}$ , должно быть малым.

(системой называем множество структур, описываемых одним набором параметров).

Характеристика  $T_c(d_S)$  (график этой зависимости мы опускаем), полученная на серии трехслойных структур Cu/Nb/Cu, выявляет параметры системы ( $T_S = 8.8$  K,  $\xi_S = 6.7$  нм,  $\eta = 2.55$ ), близкие к параметрам аналогичных структур, приведенным в разделе 3.2. При этом зависимость (3.1), определяющая множество пар значений  $(T_c, \xi_N)$ , восстанавливающих характеристику  $T_c(d_S)$ , характеризуется коэффициентами  $\alpha = 1.11$  и  $\xi_{N,max} = 52.24$  нм.

Экспериментальная характеристика  $T_c(n_{bl})$ , полученная на серии многослойных структур  $N/n_{bl} \times (S/N)$  приведена на рисунке 3.9.

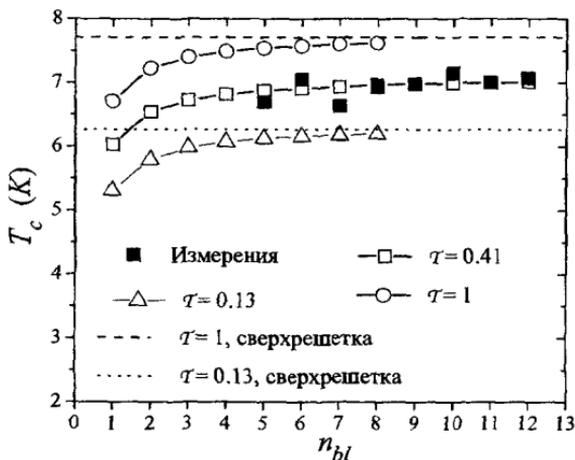


Рис. 3.9. Зависимость критической температуры от количества бислоев структуры  $Cu/n_{bl} \times (Nb/Cu)$

На этом же рисунке представлены теоретические зависимости  $T_c(n_{bl})$  для трех значений параметра  $\xi_N$ , и соответствующих значений коэффициента прозрачности. Видно, что теоретическая зависимость очень хорошо воспроизводит экспериментальную зависимость при значении коэффициента прозрачности  $\tau = 0.41$  (соответ-

ственно.  $\xi_N = 36$  нм). Полученное значение  $T$  оказывается ощутимо выше оценки, рассчитанной в [158] на основе приближенных формул. Обратим также внимание на то, что наилучшее согласие между теоретической и экспериментальной зависимостью  $T_c(n_{bl})$  имеет место в асимптотической области значений  $n_{bl}$ . Это, в частности, объясняется тем, что при увеличении количества бислоев уменьшается относительное влияние неоднородностей структуры на ее критическую температуру. (Критическая температура сверхрешетки устойчива по отношению к возмущениям.) Как видно из рисунка 3.9, можно считать, что асимптотическое поведение экспериментальной зависимости достигается в данном случае при  $n_{bl} \sim 8$ .

Между тем, для рассмотренной в примере системы существует прямой способ определения длины свободного пробега  $\ell_N$ , а по ней и параметра  $\xi_N$ . Действительно, из закона Видемана – Франца, в соответствии с теорией проводимости в металлах Зоммерфельда, имеем соотношение [377]  $\ell_N = (1/\rho_N v_{F,N} \gamma_N) \cdot (\pi k_B / e)^2$ . Здесь  $\gamma_N$  есть коэффициент в линейной зависимости удельной теплоемкости  $c_{v,N} = \gamma_N T$  при низких температурах; для Cu  $\gamma_{Cu} = 124$  Дж/(K<sup>2</sup> м<sup>3</sup>). С учетом измеренного значения  $\rho_{Cu} = 1.8$  мкОм·см, а также табличного значения  $v_{F,Cu} = 1.57 \cdot 10^6$  м/с, получим длину когерентности  $\xi_N = 38$  нм, которой соответствует найденное на кривой  $T(\xi_N)$  значение прозрачности  $T \approx 0.45$ . Согласие между значениями параметров, полученными двумя способами, представляется очень хорошим.

Таким образом, мы продемонстрировали методику идентификации микроскопических параметров  $S/N$  структур основанную на анализе двух экспериментальных характеристик: 1) зависимости критической температуры трехслойной  $N/S/N$  структуры от толщины  $S$ -слоя; 2) зависимости критической температуры многослойной  $S/N$  структуры от количества бислоев. При этом толщина  $N$ -слоев используемых трехслойных структур намного больше длины когерентности нормального материала; серия используемых многослойных структур удовлетворяет критерию асимптотического поведения зависимости критической температуры от количества бислоев. В главе 5 будет обсуждаться альтернативная возможность извлечь параметры  $S/N$  системы, а именно, из анализа характеристик  $T_c(d_S)$  и  $H_{c21}(T)$ .

### 3.5. Критические характеристики $T_c(d_S)$ , $T_c(d_F)$ и микроскопические параметры двухслойных $S/F$ структур. Предельные и краевые эффекты

Выше мы продемонстрировали, насколько безуспешными могут быть попытки описать одним и тем же набором параметров теории характеристики  $T_c(d_S)$ ,  $T_c(d_N)$  для структур сверхпроводник/нормальный металл. Проблема состояла, как оказалось, не в недостаточно точной теории, а в «нефизичности» серии  $S/N/S$  экспериментальных образцов. Это означает, что несовершенства технологии приготовления образцов (в данном случае – шероховатые внешние поверхности) неконтролируемым образом меняют их свойства. Ясно, что для получения каких-либо данных фундаментального характера такие экспериментальные образцы не пригодны. Например, мы не можем вынести в оговариваемом случае никакого заключения о квантово-механической прозрачности  $S/N$  границы.

Рассмотрим противоположный случай, а именно, серии структур, «технологически» однородных по своим свойствам. Примером таковых могут служить серии двухслойных структур типа  $S/F$   $Nb/Pd_{0.81}Ni_{0.19}$ , данные о которых опубликованы в работах [260, 378] (см. также [164]). При изготовлении этих структур неконтролируемые эффекты неоднородной поверхности  $S$ -слоя предполагалось устранить тем, что на подложку осаждался сверхпроводящий слой (ниобий), а не нормальный. Убедимся, что в данном случае методика определения микроскопических параметров, изложенная выше, приводит к положительным результатам.

Экспериментальная характеристика  $T_c(d_S)$  (Рис. 3.10) была получена для серии двухслойных образцов с фиксированной толщиной  $F$ -слоя  $d_F = 19$  нм. Обратим внимание, что данное значение толщины удовлетворяет критерию предельного поведения зависимости  $T_c(d_S)$ , поскольку характерной длиной затухания конденсатной волновой функции в ферромагнетике является не длина когерентности  $\xi_F$ , а параметр  $\zeta_F$ , определенный формулой (2.30). В силу соотношения  $E_{ex} \gg 2\pi T_S$ , имеющего место для подавляющего большинства экспериментальных структур, длина  $\zeta_F$  значительно меньше длины  $\xi_F$ . Поэтому слой ферромагнетика толщиной 19 нм в структуре  $S/F$  можно считать полубесконечным.

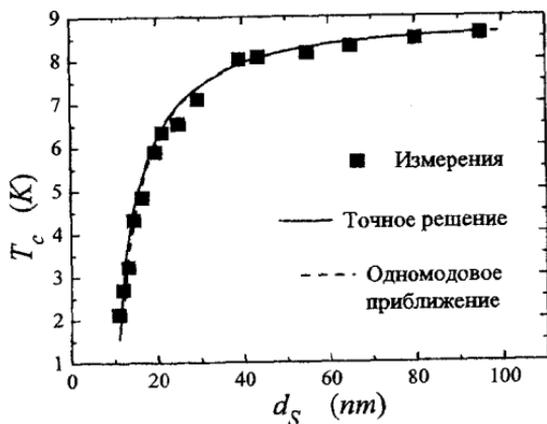


Рис. 3.10. Экспериментальная и теоретическая зависимости  $T_c(d_S)$  для структуры Nb/Pd<sub>0.81</sub>Ni<sub>0.19</sub>

Зависимость  $T_c(d_F)$  (Рис. 3.11) определялась для серии двухслойных образцов с фиксированной толщиной S-слоя  $d_S = 14$  нм.

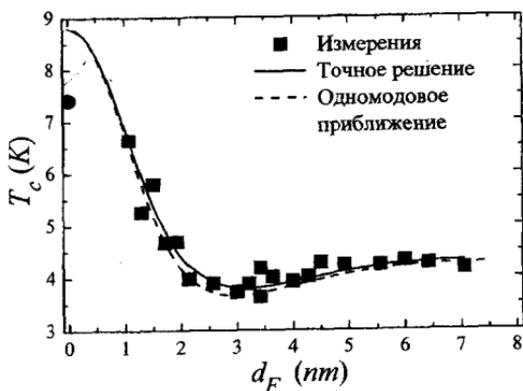


Рис. 3.11. Экспериментальная и теоретическая зависимости  $T_c(d_F)$  для структуры Nb/Pd<sub>0.81</sub>Ni<sub>0.19</sub>

Значение  $d_S = 14$  нм достаточно велико, тем более, что с длиной когерентности  $\xi_S \sim 6$  нм следует сопоставлять толщину эквивалентной трехслойной структуры  $F/S/F$  ( $2d_S/\xi_S \sim 4.7$ ).

Для построения теоретических кривых определим параметры решения уравнений Узаделя так же, как и для  $S/N$  структур. По асимптотическому поведению характеристики  $T_c(d_S)$  находим параметр  $T_S = 8.8$  К. Имея экспериментальные значения нормальных удельных сопротивлений сверхпроводящего и ферромагнитного материала [378], получим  $\eta = 0.3 \pm 0.03$ . Из измерений верхнего критического перпендикулярного магнитного поля для длины когерентности в сверхпроводящем материале получим  $\xi_S = 5.8\text{--}6.4$  нм. Оставшиеся параметры — длина когерентности  $\xi_F$ , коэффициент прозрачности  $\mathcal{T}$ , и энергия обменного взаимодействия  $E_{ex}$  — определяются в процедуре фиттирования. При этом уверенное определение параметров оказывается возможным, как мы покажем, в силу существования кривой вырождения  $\mathcal{T}(\xi_F)$  характеристики  $T_c(d_S)$  (для всех вышеуказанных значений  $\eta$  и  $\xi_S$ ). На рисунке 3.12 она представлена для значений  $\eta = 0.29$ ,  $\xi_S = 6$  нм. На графике переменная  $\xi_F$  промасштабирована на величину  $\xi_{F, max} = 7.92$  нм. Теоретическая зависимость  $T_c(d_S)$ , полученная в результате точного решения граничной задачи с параметрами  $T_S = 8.8$  К,  $\xi_S = 6$  нм,  $\eta = 0.29$ ,  $E_{ex} = 230$  К,  $\mathcal{T} = 0.76$ , представлена на рисунке 3.10 сплошной линией. Аналогичная процедура подгонки характеристики  $T_c(d_F)$  приводит к другому множеству в пространстве параметров, соответствующему данной характеристике. Оказывается, что множества параметров, фиттирующих зависимости  $T_c(d_S)$  и  $T_c(d_F)$ , пересекаются. Точки пересечения этих множеств, при заданных значениях  $T_S = 8.8$  К,  $\xi_S = 6$  нм,  $\eta = 0.29$ ,  $E_{ex} = 230$  К, обозначены на рисунке 3.12 сплошными квадратами на кривой  $\mathcal{T}(\xi_F)$  и сплошными треугольниками на прямой  $\gamma_b(\xi_F)$ .

Таким образом, мы получаем достаточно узкий диапазон значений материальных параметров, соответствующих рассматриваемой структуре. На рисунке 3.11 приведена теоретическая зависимость  $T_c(d_F)$  (сплошная линия), полученная в результате точного решения граничной задачи с параметрами, восстанавливающими зависимость  $T_c(d_S)$ .

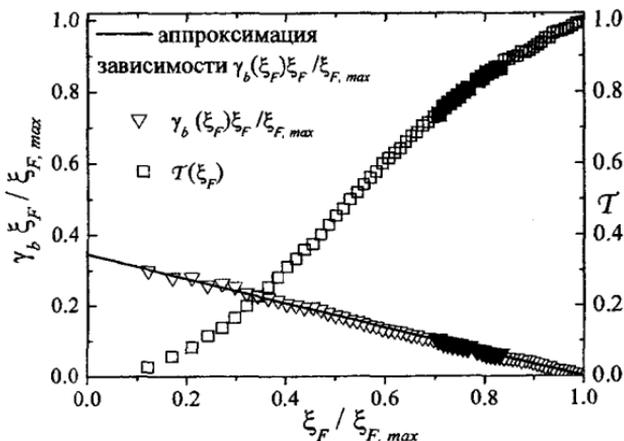


Рис. 3.12. Кривая в пространстве параметров  $(T, \xi_F)$ , соответствующая экспериментальной характеристике  $T_c(d_S)$  для  $\text{Nb/Pd}_{0,81}\text{Ni}_{0,19}$ . Зависимость  $\gamma_b \xi_F(\xi_F) \cdot \xi_F$  и ее аппроксимация (3.1)

Подчеркнем два обстоятельства, связанные с подгонкой экспериментальных зависимостей.

1) Обе зависимости восстановлены одним и тем же набором параметров, что разительно отличает рассматриваемые структуры от структур, рассмотренных в разделе 3.3. Это качество структур достигнуто за счет эффективного «сглаживания» внешней поверхности  $S$ -слоя посредством подложки, о чем и говорилось выше. О величине краевого эффекта, который был устранен, можно судить по разнице между теоретической температурой двухслойной  $S/F$  структуры в пределе бесконечно малой толщины  $F$  слоя ( $T_c(d_F \rightarrow 0) = 8.8$  К) и критической температурой тонкой пленки Nb (измеренное значение  $T_c(d_F = 0) = 7.42$  К). Неаналитическое поведение функции  $T_c(d_F)$  в нуле как раз и обусловлено тем, что открытая поверхность тонкой пленки неоднородна, в результате чего критическая температура пленки значительно снижается (на рисунке 3.11 критической температуре пленки соответствует сплошной кружок). Предельный переход  $d_F \rightarrow 0$  означает стремление к идеально гладкой гра-

нице, экспериментальная же точка  $T_c(d_F = 0)$  соответствует шероховатой поверхности пленки. Моделирование края пленки нормальным слоем (по эффекту близости Купера) дает толщину этого слоя, как можно показать, до 2 нм.

2) Применение диффузионного предела микроскопической теории для описания критического состояния данного вида структур можно считать надежно обоснованным. Результаты точного решения уравнений диффузионного предела и одномодового приближения, рассчитанного с теми же параметрами, практически не отличаются друг от друга для рассматриваемых диапазонов толщин  $d_S$  и  $d_F$ , как это видно из рисунков 3.10, 3.11. (Зависимости  $T_c(d_S)$  и  $T_c(d_F)$ , полученные в одномодовом приближении, изображены штриховой линией.) Это позволяет надеяться на то, что нижеследующие результаты (см. гл. 4), полученные для  $S/F$  структур в одномодовом приближении, верны хотя бы качественно.

Далее, обратим внимание на физический смысл полученных значений микроскопических параметров структуры. Коэффициент квантово-механической прозрачности границы может иметь значения в диапазоне 0.74–0.83. Эти значения близки к величине  $T \approx 0.97$ , полученной в результате моделирования границ Nb/PdNi прямоугольными потенциальными барьерами со значениями скоростей Ферми Nb и Pd соответственно (формально Ni улучшает прозрачность, поскольку его скорость Ферми почти совпадает со скоростью Ферми Nb). Мы видим, что диффузное рассеяние электронов на  $S/F$  границе достаточно мало влияет на квантово-механическую ее характеристику  $T$ , однако не настолько мало, чтобы не учитывать это рассеяние при определении характеристик сверхпроводящего состояния  $S/F$  структуры. Длина когерентности  $\xi_F$ , соответствующая заданному коэффициенту прозрачности, может принимать значения 5.5–6.5 нм, откуда для характерной длины затухания, и одновременно, характерной длины осцилляций волновой функции в ферромагнетике получим  $\zeta_F = 2.7$ –3.2 нм. Как видно из рисунка 3.11, именно при таких значениях толщины ферромагнитного слоя критическая температура двухслойной структуры принимает наименьшие значения.

## Глава 4. Критические состояния и критическая температура многослойных $S/F$ структур

В данной главе будут рассмотрены вопросы, недостаточно освещенные в литературе. А именно, будут рассмотрены пространственные характеристики критических состояний многослойных  $S/F$  структур (функции состояния и распределения плотности транспортного тока) и их взаимосвязь с термодинамическими характеристиками, при этом особое внимание будет уделено окрестности кроссовера состояний. Критические характеристики двухслойных, трехслойных ( $F_1/S/F_2$  и  $S/F/S$ ) и четырехслойных структур ( $F_1/S/F_2S$ ), а также, сверхрешеток в диффузионном пределе исследованы очень подробно (см. раздел 1.9). Однако использованные для этого методы приближенного и точного решения уравнений Узаделя плохо приспособлены для расчета многослойных  $S/F$  структур (точные решения уравнений Узаделя для двух- и трехслойных структур на самом деле представляют собой ряды [223, 248]). Матричный метод (см. главу 2) позволяет решить задачу о многослойных структурах точно (во всяком случае, как мы показали в предыдущей главе, до достижения асимптотики сверхрешетки). Однако мы ограничимся одномодовым приближением (формально двухмодовым, так как учитываются аномальные функции Грина с индексами 0 и 1), поскольку получаемые при этом качественные результаты дают вполне определенную картину критического состояния структуры.

Мы рассматриваем структуры, для которых выполняется неравенство  $E_{ex} \gg T_S$ , и не учитываем спин-орбитальные и парамагнитные эффекты. В таком случае характеристические показатели (2.71) без существенной потери точности (по крайней мере, в одномодовом приближении) можно записать в виде (2.98).

Результаты, приводимые в данной главе, имеют общий характер, однако они демонстрируются на численных примерах, в которых используются параметры системы  $Nb/Pd_{0.81}Ni_{0.19}$ , описанной в предыдущей главе. Для полноты рассмотрения в разделах 4.1 – 4.3 комментируются известные результаты по двухслойным и трехслойным структурам (воспроизведенные для системы  $Nb/PdNi$ ).

#### 4.1. Критическое состояние двухслойных S/F структур

Одна из особенностей критического состояния в слоистых структурах, включающих ферромагнетики, – это немонотонная зависимость критической температуры  $T_c$  от толщины слоя ферромагнетика  $d_F$ . Пример такой зависимости (для двухслойной структуры Nb/PdNi) приведен в предыдущей главе на рисунке 3.11. Из рисунка видно, что функция  $T_c(d_F)$  испытывает минимум в точке  $d_{F,min} \sim 3$  нм. Для того чтобы глубже понять физическую причину немонотонности функции  $T_c(d_F)$  и определить физические условия ее минимума, приведем графики функций  $\text{Re}[\Phi^{(0)}(z)]$  для четырех значений толщины  $d_F$ :  $d_F < d_{F,min}$ ,  $d_F = d_{F,min} = 2.96$  нм,  $d_F > d_{F,min}$ , и  $d_F \gg d_{F,min}$  (рис.4.1).

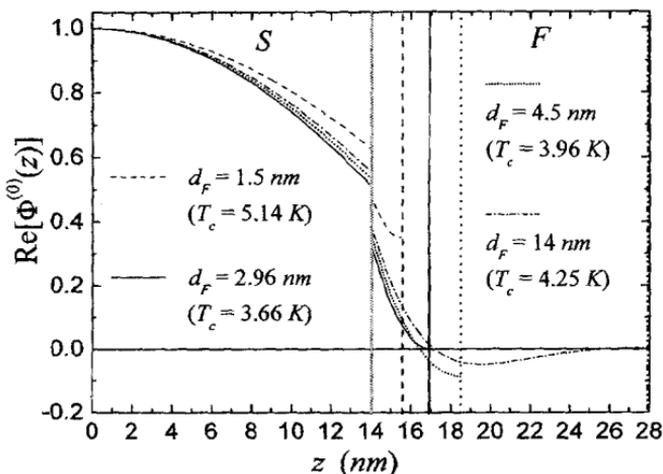


Рис. 4.1. Конденсатная волновая функция при различных толщинах ферромагнетика двухслойной S/F структуры. Светло-серая вертикальная линия означает границу между S и F слоем, остальные вертикальные линии означают границу структуры при различных толщинах F-слоя

(Значение 2.96 нм есть точка минимума теоретической кривой одномодового приближения; экспериментальный минимум, как видно из рисунка 3.11, формально достигается при толщине 3.42 нм; правда, критическая температура еще одной структуры с той же толщиной примерно на 0.5 К выше). Напомним, что функция  $\text{Re}[\Phi^{(0)}(z)] \sim F_0(z)$ , где  $F_0(z)$  – аномальная функция Грина одномодового приближения, может служить оценкой волновой функции сверхпроводящего конденсата. На рисунке 4.1 эти графики изображены штриховой, сплошной, пунктирной и штрихпунктирной линиями, соответственно.

Как мы видим, при малых толщинах  $d_F$  (на рисунке  $d_F = 1.5$  нм) куперовские пары заполняют весь ферромагнитный слой достаточно однородно и с достаточно большой плотностью. Следовательно, энергия сверхпроводящего конденсата оказывается достаточно большой по величине, и, соответственно, критическая температура двуслойной структуры оказывается не намного ниже, чем критическая температура  $T_S$ . Для малых толщин  $d_F$  эффект близости проявляет себя примерно одинаково для структур  $S/F$  и  $S/N$  (с оговоркой, что понятие малые толщины имеет разные количественные выражения в том и другом случае).

При увеличении толщины  $d_F$  плотность куперовских пар уменьшается вглубь несверхпроводящего слоя (вероятность проникновения пар на большую глубину мала), при этом имеет место и «обратный эффект близости» – волновая функция сверхпроводящего конденсата оказывается подавленной и в сверхпроводящем слое вблизи границы сверхпроводник/несверхпроводник. В результате критическая температура структуры уменьшается. Однако, если несверхпроводник – ферромагнетик, то волновая функция конденсата имеет осциллирующий характер. Поэтому при определенном значении  $d_{F,m}$  она имеет узел непосредственно на внешней границе ферромагнетика. Волновая функция сверхпроводящего конденсата, соответствующая данному значению толщины ферромагнитного слоя (2.96 нм), изображена на рисунке 4.11 сплошной линией. Более того, в силу граничных условий на внешней границе реализуется левый локальный минимум функции  $\text{Re}[\Phi^{(0)}(z)]$ . Данному значению толщины как раз и соответствует минимум характеристики  $T_c(d_F)$ .

Возрастание критической температуры при  $d_F$ , несколько больших, чем  $d_{F,m}$  понятно: для сверхпроводящего конденсата эти толщины энергетически более выгодны, поскольку увеличение толщины влечет за собой увеличение плотности сверхпроводящих пар у края ферромагнитного слоя. (см. пунктирную линию на рисунке 1, ей соответствует значение  $d_F = 4.5$  нм).

Наконец, неограниченной возрастание толщины ферромагнитного слоя не приводит к заметному изменению критической температуры (как и для  $S/N$  структур): при больших значениях  $d_F$  сверхпроводящие пары почти отсутствуют в глубине несверхпроводящего слоя; следовательно, увеличение толщины не изменяет свободной энергии системы (см. штрихпунктирную линию на рисунке 1, ей соответствует значение  $d_F = 14$  нм).

#### 4.2. Критические состояния трехслойных $S/F/S$ структур и сверхрешеток

Перейдем к анализу критического состояния трехслойных структур  $S/F/S$  и сверхрешеток, взяв для них параметры, рассчитанные для двухслойных структур  $Nb/Pd_{0.81}Ni_{0.19}$ . Критическое состояние  $S/F/S$  может проявиться, в зависимости от толщин  $S$ - и  $F$ -слоев, в одном из двух квантовых состояний: 0-состоянии, описываемом симметричной вектор-функцией, и  $\pi$ -состоянии, описываемом антисимметричной вектор-функцией (см. главы 1, 2). На рисунках 4.2 (а, б) представлены графики функций 0- и  $\pi$ - состояний, рассчитанные при значениях толщин  $d_S = 14$  нм,  $d_F = 6$  нм. Для этой структуры критическая температура 0-состояния  $T_{c0} = 3.6$  К, а критическая температура  $\pi$ - состояния  $T_{c\pi} = 4.49$  К.

Рассматривая  $S/F/S$  как зеркальное отражение двуслойной структуры относительно внешней поверхности ферромагнитного слоя, сразу получаем характеристику  $T_{c,0}(d_F)$ , которая совпадает с характеристикой  $T_c(d_F/2)$  двухслойной структуры. Критическую температуру  $\pi$ - состояния  $T_{c,\pi}(d_F)$  определяем из уравнений (2.93), (2.94), (2.90), (2.91) одномодового приближения. На рисунке 4.3 приведены графики  $T_{c,0}(d_F)$ ,  $T_{c,\pi}(d_F)$  для структуры с толщиной  $d_S = 14$  нм.

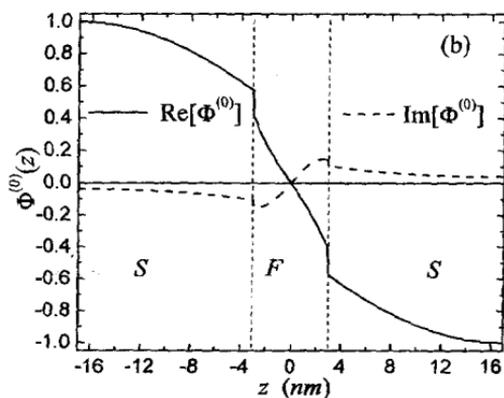
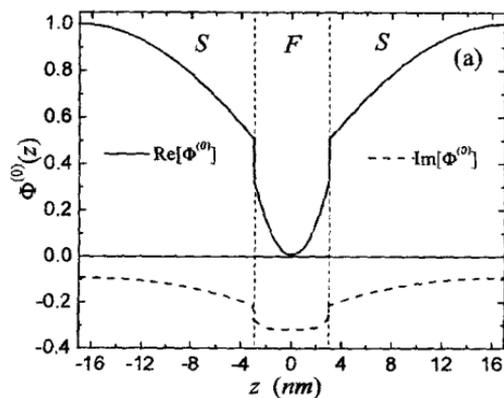


Рис. 4.2. Функции 0- (a) и  $\pi$ - (b) состояний для трехслойной структуры Nb/Pd<sub>0.81</sub>Ni<sub>0.19</sub>/Nb ( $d_{S3} = 14$  нм)

Эти же графики (на рисунке 4.3) описывают 0- и  $\pi$ - состояния сверхрешетки с толщиной  $S$ -слоя  $d_{S,inf} = 28$  нм. Для удобства сравнения с экспериментом, на рисунке вдоль нижней оси абсцисс взята

половинная толщина  $F$ -слоя (то есть толщина  $F$ -слоя двуслойной структуры).

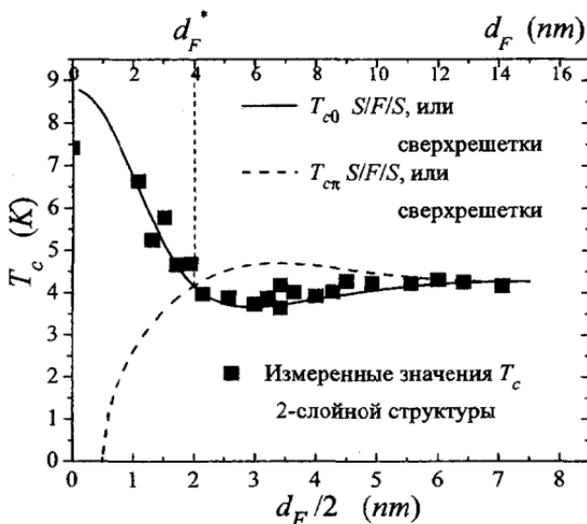


Рис. 4.3. Характеристики  $T_{c0}(d_F)$  и  $T_{c\pi}(d_F)$  для трехслойной структуры ( $d_S = 14$  нм) или сверхрешетки ( $d_{S,inf} = 28$  нм) Nb/Pd<sub>0.81</sub>Ni<sub>0.19</sub>/Nb. Экспериментальная зависимость  $T_c(d_F)$  для структуры Nb/Pd<sub>0.81</sub>Ni<sub>0.19</sub>

Видно, что в данном случае при  $d_F > d_F^* \approx 4$  нм энергетически более выгодным становится сверхпроводящее  $\pi$ - состояние, описываемое антисимметричной функцией состояния (рис. 4.2.(b)). Явление смены 0-состояния на  $\pi$ - состояние называют 0- $\pi$  -кроссовером, а точку  $d_F^*$  – точкой кроссовера. Существование  $\pi$ - состояния – это нетривиальное явление (в задачах квантовой механики, в соответствии с осцилляционной теоремой, основное состояние описывается волновой функцией без узлов).

Другие особенности, присущие S/F структурам, обнаруживаются на характеристиках  $T_c(d_F)$  при уменьшении толщины сверхпроводящего слоя  $d_S$ . В частности, на рисунке 4.4 показаны характеристики  $T_{c0}(d_F)$  (сплошная линия),  $T_{c,\pi}(d_F)$  (штриховая линия) структу-

ры  $S/F/S$  с толщиной  $S$ -слоя 12 нм. Характеристика  $T_{c0}(d_F)$  есть также критическая температура 2-слойной структуры с половинной толщиной  $F$ -слоя. Из рисунка 4.4 видно, что существует значение толщины  $d_F'/2 \approx 1.8$  нм двухслойной структуры, когда сверхпроводимость исчезает, и значение  $d_F''/2 \approx 3.5$  нм, когда сверхпроводимость вновь возникает.

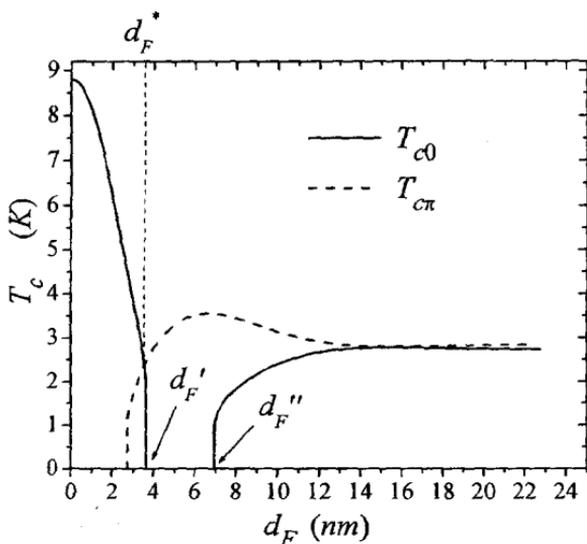


Рис. 4.4. Характеристики  $T_{c0}(d_F)$  и  $T_{c\pi}(d_F)$  для трехслойной структуры  $Nb/Pd_{0.81}Ni_{0.19}/Nb$  при  $d_S = 12$  нм (ось абсцисс – сверху). Нижняя ось абсцисс соответствует толщинам двухслойной структуры  $Nb/Pd_{0.81}Ni_{0.19}$

Для трехслойной же  $S/F/S$  структуры, как видно из рисунка 4.4, на соответствующем интервале ( $d_F'$ ,  $d_F''$ ) сверхпроводящее состояние существует, но в  $\pi$ -состоянии. Видно, что в данном случае кроссовер происходит при  $d_F^* \approx d_F'$ , при этом переход от 0-состояния к  $\pi$ -состоянию является более резким, чем при обычном кроссовере. Соответственно, экспериментальная зависимость  $T_c(d_F)$  должна была бы испытывать резкий излом в этой точке. Заметим еще, что на

экспериментальной зависимости  $T_c(d_F)$ , вероятно, должна проявляться некоторая хаотичность в ее асимптотике из-за близости значений  $T_{c\pi}$  и  $T_{c0}$  в этой области (в силу погрешностей в задании материальных и геометрических параметров образцов, могут наблюдаться случайные переходы между двумя состояниями).

На рисунке 4.5. показаны характеристики  $T_{c0}(d_F)$  и  $T_{c\pi}(d_F)$  S/F/S структуры с еще меньшей толщиной S-слоя (11 нм).

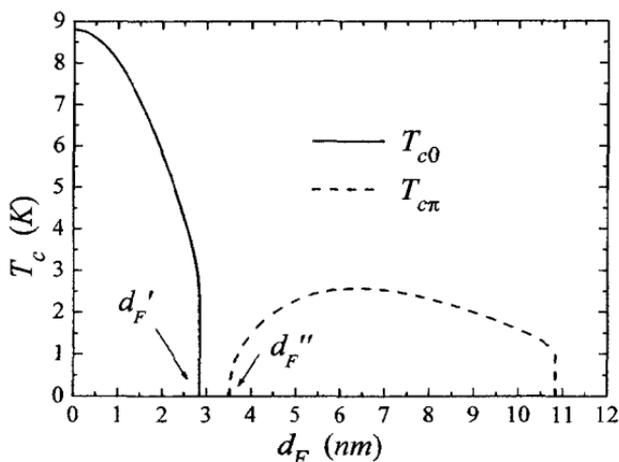


Рис. 4.5. Характеристики  $T_{c0}(d_F)$  и  $T_{c\pi}(d_F)$  трехслойной структуры при  $d_S = 11$  нм

В этом случае 0-состояние существует только при значениях  $d_F < d_F'$ . Более того, при  $d_F > d_F'$  сверхпроводимость вообще исчезает вплоть до некоторого значения  $d_F''$ , где происходит ее возврат уже в виде  $\pi$ -состояния, которое существует для конечного интервала толщин  $d_F'' < d_F < d_F'''$ . Для соответствующей двухслойной структуры сверхпроводимость существует при толщинах  $d_F < d_F'/2$ .<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Данный эффект обнаружен на структурах Nb/CuNi в 2008 г.

### 4.3. Спиновый переключатель Тагирова и его состояния

Как говорилось в главе 1, эффект переключателя состоит в некотором различии характеристик  $T_c(d_F)$  двух состояний  $F\uparrow/S/F\uparrow$  и  $F\uparrow/S/F\downarrow$  структуры  $F/S/F$ . Здесь мы обратим внимание на функции этих состояний (рис. 4.6).

Состоянию с параллельными векторами намагниченности в  $F$ -слоях соответствует симметричная конденсатная волновая функция, состоянию с антипараллельными векторами намагниченности соответствует функция с симметричной действительной частью и антисимметричной мнимой частью. Следовательно, на языке функций состояния, эффект переключения состоит в изменении симметрии мнимой части конденсатной волновой функции. Мы видим, что набор возможных состояний  $S/F$  не ограничен 0- и  $\pi$ - состояниями.

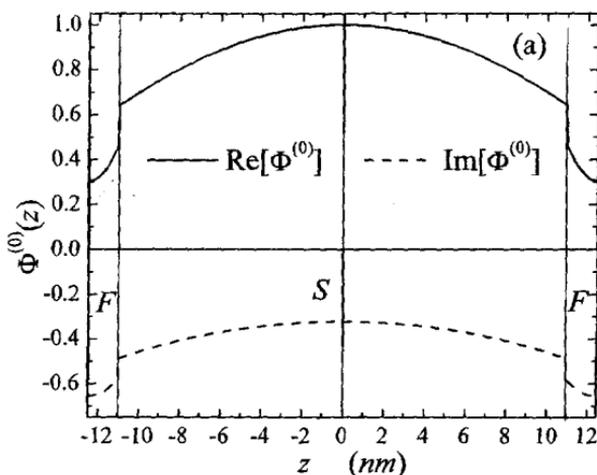


Рис. 4.6 (а). Функция состояния структуры  $F\uparrow/S/F\uparrow$

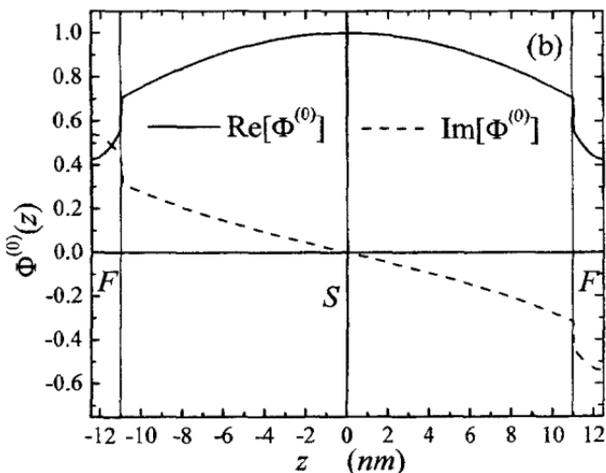


Рис. 4.6 (b). Функции состояния структуры  $F\uparrow/S/F\downarrow$

#### 4.4. Критические состояния многослойных $S/F$ структур и их кроссовер. Об уширении резистивной характеристики в окрестности кроссовера

Решая уравнения Узаделя для многослойных структур, мы получаем набор состояний, характеризуемых собственными значениями  $T^{(k)}(d_F)$  и соответствующими собственными вектор-функциями  $\Phi^{(k)}(z; d_F)$ . При этом имеют место следующие достаточно очевидные свойства зеркально-симметричных структур, выполняющиеся в области значений  $d_F$ , не принадлежащих окрестности точек кроссовера  $d_F^*$ : 1) Количество собственных состояний совпадает с числом бислоев структуры. 2) Собственные значения можно пронумеровать в соответствии с количеством нулей вектор-функции состояния. При этом собственным значениям с четными (нечетными) номерами можно сопоставить пространственно четные (нечетные) вектор-функции.

Проиллюстрируем свойство 1 на примере структур  $F/n_{bl} \times (S/F)$  и  $n_{cell} \times (F/S/F)$ . Пусть материальные и геометрические параметры этих структур таковы, что характеристика  $T_c(d_F)$  трехслойной структуры  $S/F/S$  имеет вид, представленный на рисунке 4.3. На рисунках 4.7 (а,б) приведены графики зависимостей  $T^{(k)}$  от числа бислоев ( $n_{bl} = 1-5$ ) для первой структуры и от числа ячеек  $n_{cell}$  для второй структуры при двух толщинах:  $d_F < d_F^*$  и  $d_F > d_F^*$ .

Для иллюстрации свойства 2 на рисунке 4.8 приведены графики функций состояния  $\Phi^{(k)}(z)$ , соответствующих собственным значениям  $T^{(k)}$  ( $k = 0, 1, 2, 3$ ) 4-бислоевой структуры  $F/4 \times (S/F)$  с толщинами  $F$ -слоев  $d_F < d_F^*$ . Аналогичные графики функций состояния имеют место и для  $d_F > d_F^*$ .

Из рисунков 4.7, 4.8 мы видим следующее. При  $d_F < d_F^*$  критическому состоянию многослойной структуры соответствует квантовое состояние, описываемое пространственно четной функцией состояния  $\Phi^{(0)}(z)$ , эта функция не имеет нулей во внутренних слоях. Кроме того, собственные состояния нумеруются по количеству нулей во внутренних слоях, так что при  $d_F < d_F^*$  выполняется соотношение  $T^{(k)} > T^{(k+1)}$ .

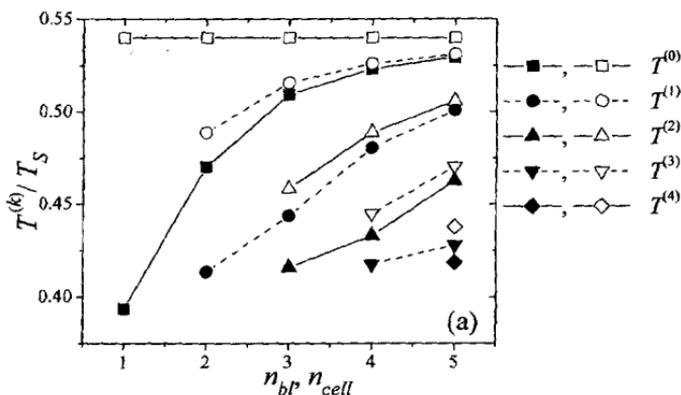


Рис. 4.7 (а). Собственные значения температуры  $T^{(k)}$  в зависимости от числа бислоев  $n_{bl}$  для структуры  $F/n_{bl} \times (S/F)$  (сплошные символы), и от числа элементарных ячеек  $n_{cell}$  для структуры  $n_{cell} \times (F/S/F)$  (открытые символы) при  $d_F < d_F^*$ .

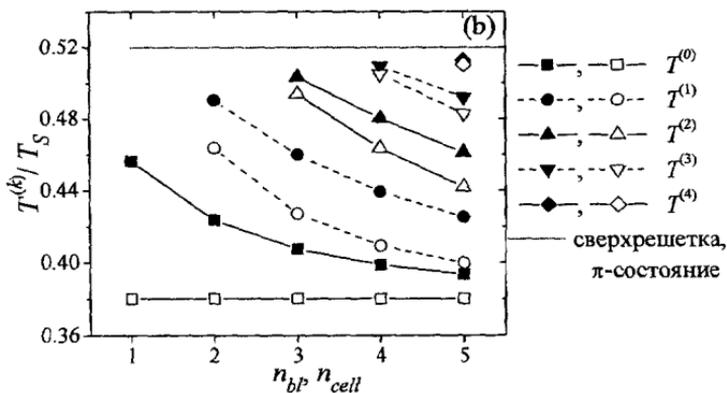


Рис. 4.7 (b). Собственные значения температуры  $T^{(k)}$  в зависимости от числа бислоев  $n_{bF}$  для структуры  $F/n_{bF} \times (S/F)$  (сплошные символы), и от числа элементарных ячеек  $n_{cell}$  для структуры  $n_{cell} \times (F/S/F)$  (открытые символы) при  $d_F > d_S$ .

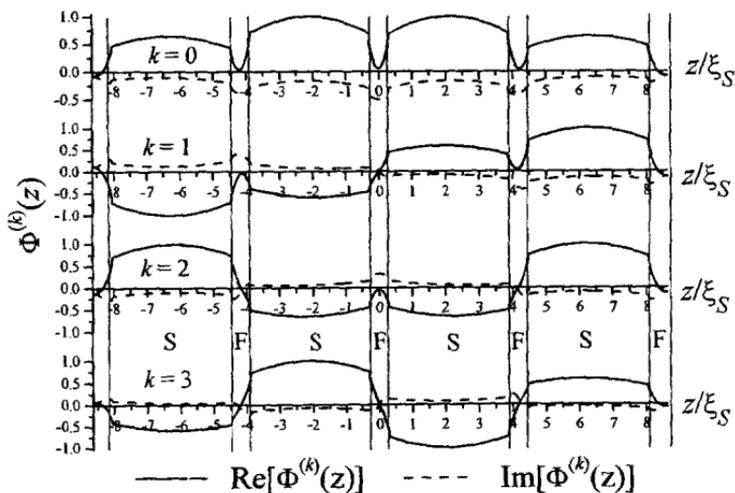


Рис. 4.8. Собственные функции состояний структуры  $F/4 \times (S/F)$

При  $d_F > d_F^*$  имеет место обратное: критическому состоянию соответствует функция состояния с пространственной четностью  $(-1)^{N-1}$ , обладающая нулями в каждом  $F$ -слое, то есть, функция  $\pi$ -состояния (на рисунке 4.8 – это функция  $\Phi^{(3)}(z)$ ); при этом, собственные значения образуют возрастающую последовательность,  $T^{(k)} < T^{(k+1)}$ . Как видно из рисунка 4.7, критическая температура многослойной структуры асимптотически стремится к критической температуре сверхрешетки с элементарной ячейкой  $(F/2)/S/(F/2)$  ( $F/2 \equiv F(d_F/2)$ ). При этом при  $d_F > d_F^*$  все собственные значения заключены между температурами 0- и  $\pi$ - состояний сверхрешетки. На том же рисунке приведены собственные значения  $T^{(k)}$  в зависимости от числа периодов  $n_{cell}$  структуры  $n_{cell} \times (F/2)/S/(F/2)$ ). Такая структура (назовем ее регулярной многослойной структурой) может служить экспериментальной имитацией сверхрешетки, поскольку каждое собственное значение регулярной структуры одновременно является и собственным значением сверхрешетки.

Мы рассмотрели состояния многослойной  $S/F$  структуры при двух частных значениях толщин ферромагнитного слоя. При этом обнаружили себя как критические только 0-, и  $\pi$ - состояния (поскольку им соответствуют, в зависимости от  $d_F$ , наибольшие собственные значения температуры). Из общих соображений достаточно понятно, что именно так и должно быть. Тем не менее, продолжим численный пример, рассчитав зависимости  $T^{(k)}(d_F)$  для структуры  $F/5 \times (S/F)$ . Графики  $T^{(k)}(d_F)$  приведены на рисунке 4.9 (температура масштабирована на критическую температуру массивного сверхпроводника, а толщины  $F$ -слоев – на характерную длину  $\zeta_F$ ). Из рис. 4.9 видно, что для любых толщин, кроме толщин, близких к  $d_F^* \approx 1.35\zeta_F$ , критическим по-прежнему может быть либо 0-, либо  $\pi$ -состояние. Видно также, что все кривые пересекаются примерно в одной точке  $d_F^*$ . С увеличением количества бислоев ситуация мало изменится. При этом мы видим важный с экспериментальной точки зрения факт: при  $d_F > d_F^*$  собственные значения  $T^{(k)}$  структуры с большим количеством бислоев плотно заполняют интервал  $(T_{c0}, T_{c\pi})$ .

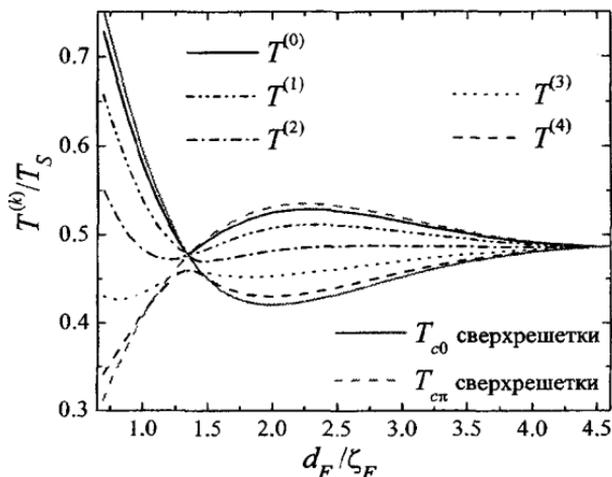


Рис. 4.9. Собственные значения температуры в зависимости от толщины  $F$ -слоя для структуры  $F/5 \times (S/F)$

Это значит, что в силу неоднородностей структуры в этой области может наблюдаться нерегулярность экспериментальной характеристики  $T_c(d_F)$  (хаотическое поведение экспериментальных точек). С еще большим основанием можно ожидать, что в окрестности точки кроссовера  $d_F^*$  экспериментальная характеристика  $T_c(d_F)$  будет еще более нерегулярной. Более того, в точке кроссовера и в непосредственной ее окрестности возможно затягивание фазового перехода на некоторый температурный интервал, что должно отразиться уширением резистивной характеристики. Можно полагать, что уширение резистивных характеристик, имеющее место для некоторых 2-бислойных структур, рассмотренных в работах [256], объясняется именно близостью толщин  $F$ -слоев этих структур к точке кроссовера. Рассмотрим более детально окрестность точки  $d_F^*$ . На рисунке 4.10 представлены зависимости  $T^{(k)}(d_F)$ , приведенные на рис. 4.9, в увеличенном масштабе в интервале значений  $d_F \in [1.3, 1.4] \zeta_F$ .

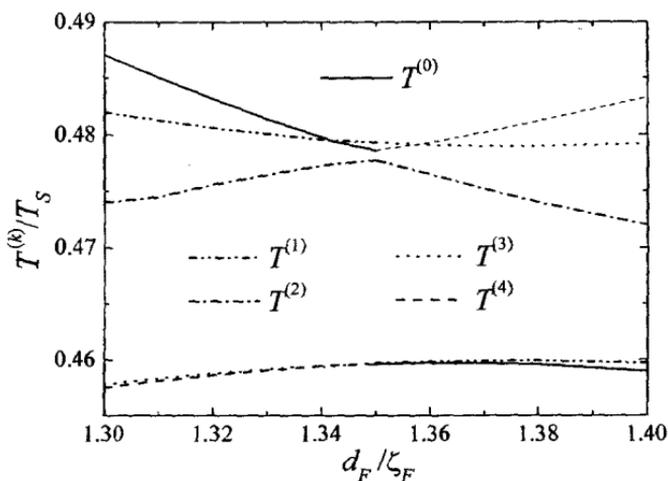


Рис. 4.10. Собственные значения температуры в зависимости от толщины  $F$ -слоя для структуры  $F/5 \times (S/F)$  при  $d_F \sim d_F^*$  (см. рис. 4.9)

Мы видим, что для узкого диапазона толщин (величина этого диапазона может составить до 0.5 нм, то есть порядка атомного слоя) для 5-бислойной структуры критическому состоянию формально соответствуют поочередно значения  $T^{(0)}$ ,  $T^{(1)}$ ,  $T^{(3)}$ ,  $T^{(4)}$ . (Для 4-бислойной структуры сменяют друг друга состояния с собственными значениями  $T^{(0)}$ ,  $T^{(2)}$ ,  $T^{(3)}$ .) Фактически разница между этими значениями исчезающе мала с экспериментальной точки зрения, так что критическое состояние является вырожденным. При этом следует ожидать реализации либо линейной комбинации симметричных, либо линейной комбинации антисимметричных состояний с наибольшими критическими температурами. Однако, как мы сейчас убедимся, состояния с наибольшими собственными значениями в окрестности кроссовера вероятно вообще не наблюдаемы при обычном способе измерения критической температуры. Проследим за изменением функции состояния, соответствующей наибольшему значению из  $T^{(k)}(d_F)$ , при изменении  $d_F$ . На рисунках 4.11. (а) – (ф) приведены графики функций состояния для структуры  $F/5 \times (S/F)$  с

толщинами  $d_F$  в диапазоне  $(0.7-2.2)\zeta_F$ . Из рисунков мы видим следующее. Для значений, лежащих далеко слева от точки кроссовера, состояние структуры описывается функцией  $\Phi^{(0)}(z)$ , имеющей обычную форму (рис. 4.11(a)). При движении к точке кроссовера слева, функция состояния деформируется, приближаясь к нулю в крайних слоях. На рисунке 4.11(b) показан график функции  $\Phi^{(0)}(z)$  для значения  $d_F = 1.33\zeta_F$ , близкой к точке пересечения характеристик  $T^{(0)}(d_F)$  и  $T^{(1)}(d_F)$ .

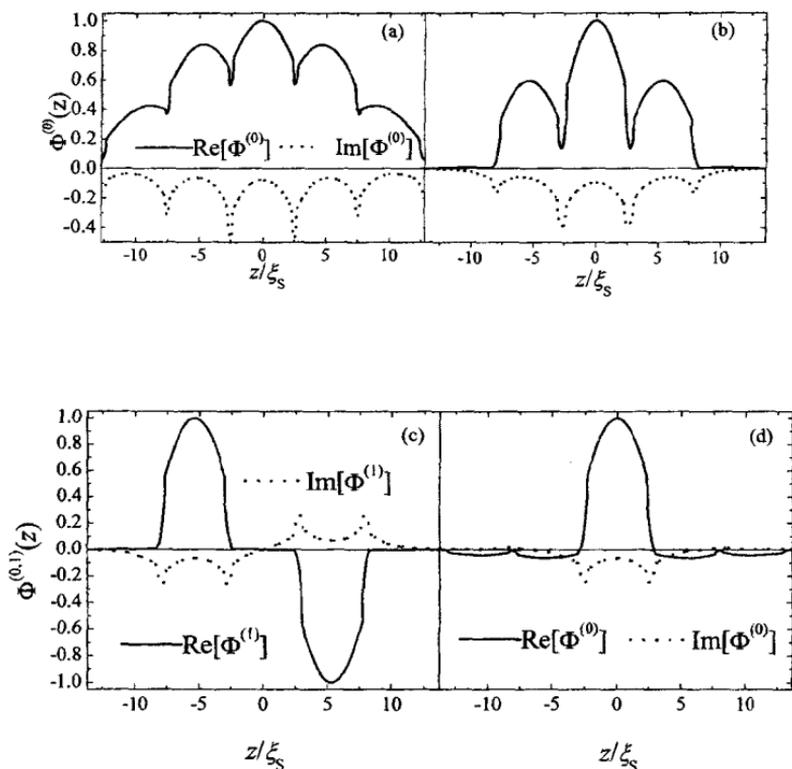


Рис. 4.11. Собственные функции состояния структуры  $F/5 \times (S/F)$  с наибольшим собственным значением  $T^{(k)}$  при  $d_F = 0.7\zeta_F$  (a),  $1.33\zeta_F$  (b),  $1.35\zeta_F$  (c,d)

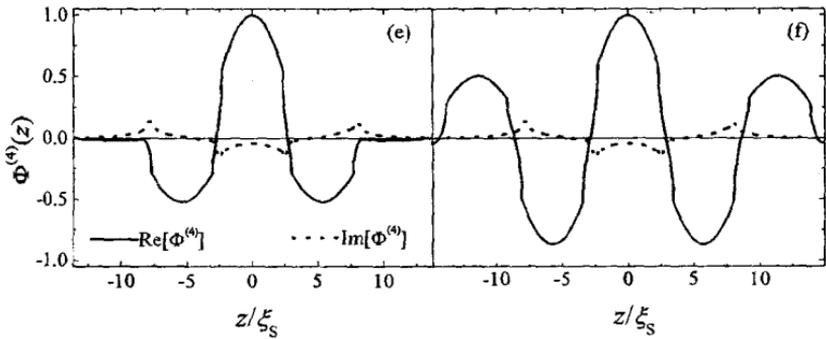


Рис. 4.11. Собственные функции состояния структуры  $F/5 \times (S/F)$  с наибольшим собственным значением  $T^{(k)}$  при  $d_F = 1.36\zeta_F$  (e),  $2.2\zeta_F$  (f)

Из графика на рис. 4.11 (b) мы видим, что в крайних  $S$ - и  $F$ - слоях сверхпроводящий конденсат почти отсутствует. При  $d_F = 1.35\zeta_F = d_F^*$  критической температурой формально является собственное значение  $T^{(1)}$ , ему соответствует функция состояния, представленная на рисунке 4.11 (c). Как мы видим, в этом случае сверхпроводящая фаза существует только в двух  $S$ -слоях, соседних с центральным  $S$ -слоем. Для этого же значения толщины несколько меньшей температурой обладает состояние с симметричной волновой функцией, которую с трудом можно отнести к какому-либо типу (условно мы ей сопоставили индекс 0); как видно из рисунка 4.11(d), она обращается почти в нуль во всех слоях, кроме центрального  $S$ -слоя. Далее, при удалении вправо от точки кроссовера функция критического состояния постепенно трансформируется в функцию  $\pi$ -состояния  $\Phi^{(4)}(z)$  (рис. 4.11(f)). Из рисунка 4.11(e) мы видим, что для значений  $d_F$ , принадлежащих правой окрестности точки кроссовера, также происходит подавление сверхпроводимости в крайних слоях структуры.

Подчеркнем, что описанный на конкретном примере эффект, имеет место, как показывают расчеты, для любых разумных значений параметров структуры.

Подавление сверхпроводящей фазы в крайних слоях структуры означает, что состояния, соответствующие наибольшей критической температуре, вероятно, не наблюдаемы обычным 4-зондовым методом транспортных измерений. Действительно, при измерении резистивной характеристики фазового перехода контакты присоединяют к внешней поверхности структуры. Расстояние между контактами на много порядков превышает толщину структуры. Поэтому можно считать, что транспортный ток, протекающий вдоль структуры (вдоль оси  $OX$ ), исходит из  $-\infty$  и уходит в  $+\infty$ . В таком случае легко рассчитать, на основе построенных функций состояния, распределение транспортного тока по толщине структуры. На рисунке 4.12 (а) приведен график плотности транспортного тока  $J_x(z)$  для структуры с толщиной  $d_F = 1.33\zeta_F$ , соответствующий функции состояния  $\Phi^{(0)}(z)$  (см. рис. 4.11(b)). На рисунках 4.12 (b,c) представлены графики  $J_x(z)$  для структуры с толщиной  $d_F = 1.35\zeta_F$ , находящейся в антисимметричном  $\Phi^{(1)}(z)$  и симметричном  $\Phi^{(0)}(z)$  состояниях соответственно (см. рис. 4.11(c,d)). Видно, что в крайних слоях структуры ток отсутствует; более того, при толщине  $d_F = 1.35\zeta_F$  транспортный ток может проходить либо только по центральному  $S$ -слою, либо по соседним с ним  $S$ -слоям. Отсутствие тока в крайних слоях структуры означает, очевидно, что, в силу метода измерений, сверхпроводящий ток вообще не будет зарегистрирован. Таким образом, состояния с наибольшим значением критической температуры оказываются ненаблюдаемыми в окрестности кроссовера, иначе говоря, при данных температурах будет регистрироваться конечное сопротивление. При понижении температуры от наибольшего собственного значения, амплитуда соответствующей функции состояния возрастает, однако остается малой вплоть до наименьшего собственного значения  $T^{(k)}$  (как видно из рисунка 4.10, относительное изменение температуры в области кроссовера меньше 0.05). Это означает, что пространственная конфигурация функции состояния, рассчитанная в линейном приближении, существенно не меняется, а, следовательно, и распределение транспортного тока также остается прежним. Поэтому, возможно, и сопротивление образца будет ненулевым. По достижении следующего, после наибольшего, собственного значения температуры ситуация мало изменится, поскольку симметричное и антисимметричное со-

стояние не смешиваются (временно мы принимаем, что структура идеальна). Зато при прохождении системой состояний той же четности, что и основное, возможно существенное уменьшение регистрируемого сопротивления образца.

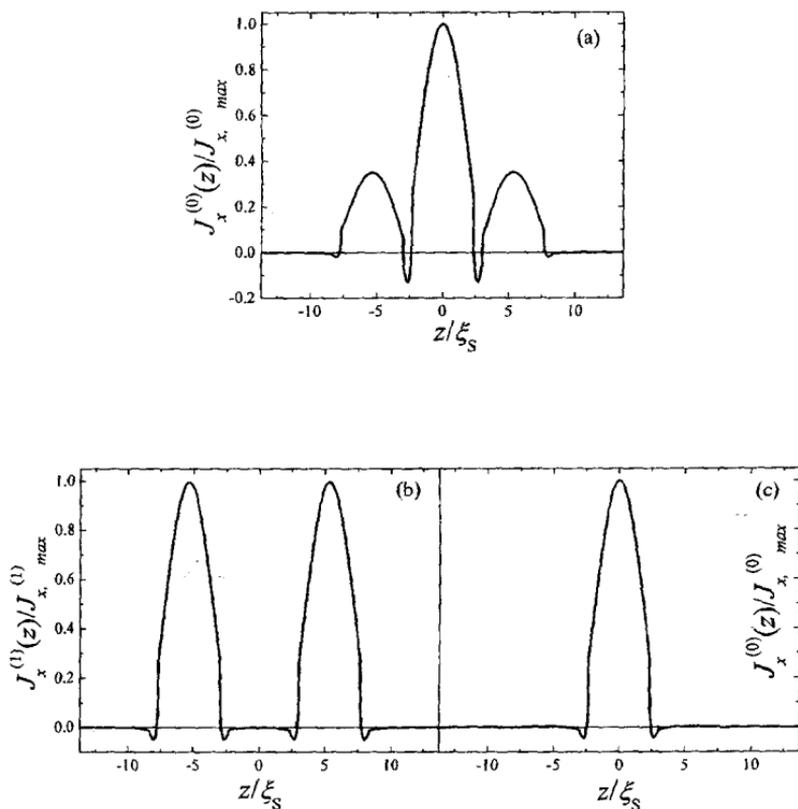


Рис. 4.12. Распределение плотности транспортного тока  $J_x(z)$  в структуре  $F/5 \times (S/F)$ : (a)  $d_F = 1.33\xi_F$ , состояние  $\Phi^{(0)}(z)$ ; (b)  $d_F = 1.35\xi_F$ , состояние  $\Phi^{(1)}(z)$ ; (c)  $d_F = 1.35\xi_F$ , состояние  $\Phi^{(0)}(z)$

Пусть  $T^{(0)}$  есть наибольшее собственное значение. Тогда при  $T = T^{(2)}$  граничная задача имеет два решения: одно из них оценива-

ется функцией  $\Phi^{(0)}(z)$  с ненулевой амплитудой (которую можно найти из вариационного принципа), другое решение есть  $\Phi^{(2)}(z)$  с нулевой амплитудой. При отклонении  $T$  от  $T^{(2)}$  можно искать решение в виде линейной комбинации  $\Phi(z) = a^{(0)}\Phi^{(0)}(z) + a^{(2)}\Phi^{(2)}(z)$  с коэффициентами, определяемыми варьированием свободной энергии. Аналогично, в окрестности температуры  $T^{(4)}$   $\Phi(z) = a^{(0)}\Phi^{(0)}(z) + a^{(2)}\Phi^{(2)}(z) + a^{(4)}\Phi^{(4)}(z)$ . Вес состояния зависит, очевидно, от того, насколько равномерно распределен сверхпроводящий конденсат по поперечному сечению образца в данном «чистом» состоянии. На рисунках 4.13 (а) и (б) представлены графики функций состояния  $\Phi^{(2)}(z)$  и  $\Phi^{(4)}(z)$  для 5-бислойной структуры с толщиной  $d_F = 1.33\zeta_F$ .

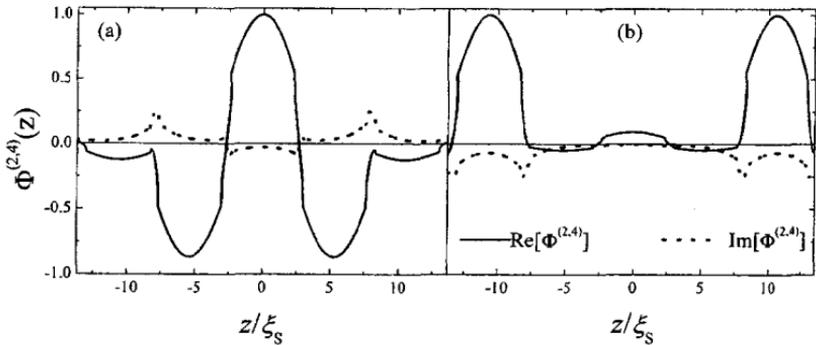


Рис. 4.13. Симметричные собственные функции состояния  $\Phi^{(2)}(z)$  (а) и  $\Phi^{(4)}(z)$  (б) структуры  $F/5 \times (S/F)$  с толщиной  $F$ -слоев  $d_F = 1.33\zeta_F$

Сравнивая их с функцией  $\Phi^{(0)}(z)$  (см. рис. 11. (б)) видим, что состояние, задаваемое функцией  $\Phi^{(2)}(z)$ , казалось бы, должно быть энергетически более выгодным, чем состояние с функцией  $\Phi^{(0)}(z)$ , тем не менее, оно имеет меньшее собственное значение температуры. Разумеется, если бы была возможность решить нелинейные уравнения теории, то данный качественный анализ не понадобился. Рассмотрим теперь распределения токов, соответствующие состояниям  $\Phi^{(2)}(z)$ ,  $\Phi^{(4)}(z)$  при  $d_F = 1.33\zeta_F$ . Очевидно, в отличие от плотности тока  $J_x^{(0)}(z)$ , ток  $J_x^{(2)}(z)$  (соответствующий состоянию  $\Phi^{(2)}(z)$ )

распределен более равномерно по центральным  $S$ -слоям, и захватывает также и крайние  $S$ -слои, а значит, измерим. Если структура находилась бы в состоянии с функцией  $\Phi^{(4)}(z)$ , то транспортный ток протекал бы только по крайним  $S$ -слоям, а значит, регистрировался бы при принятом способе измерения.

Обратим внимание еще на одну особенность распределения тока в рассматриваемой  $S/F$  структуре. Как видно из графиков на рисунках 4.12, в ферромагнитных слоях возникают противотоки (они направлены из  $+\infty$  в  $-\infty$ ). Особенно большие противотоки возникают в состоянии с функцией  $\Phi^{(0)}(z)$  (рис. 4.12 (а)). Это формально означает, что транспортный ток, направленный из  $-\infty$  в  $+\infty$ , должен замыкаться на бесконечностях. Надо полагать, что реально в  $S/F$  структуре имеют место (из-за неоднородностей) конечно-размерные вихревые токи. Как известно, существование вихрей может приводить к диссипации энергии (при малой силе пиннинга). Таким образом, приходим к выводу, что даже для структур высокого качества (с достаточно гладкими внешними границами, границами между слоями, а также с магнитно однородными ферромагнитными слоями) возможно уширение резистивной характеристики в непосредственной окрестности точки кроссовера.

Наконец отметим, что какая-либо классификация состояний  $F/n_{bl} \times (S/F)$  структур в окрестностях точек кроссовера страдает недостатками. Между тем, для регулярных структур состояния классифицируются совершенно точно по собственным значениям  $\lambda_m \equiv e^{i\pi m/N}$  элементарной ячейки (см. раздел 2.4); отметим также, что для регулярных структур кроссовер является более узким, как по толщинам, так и по температурам.

Мы привели доводы в пользу того, что в окрестности кроссовера состояния с наибольшей критической температурой не наблюдаемы. Попытаемся теперь описать влияние неоднородностей структуры (неизбежных для экспериментальных образцов) на ее фазовый переход в сверхпроводящее состояние, если толщины  $F$ -слоев близки по значениям к точке кроссовера. Рентгеноструктурный анализ показывает (см. например [344]), что типичное среднеквадратичное отклонение толщины внутреннего ферромагнитного слоя  $\delta_1 d_F$  от средней может достигать величины 0.7 нм вдоль слоя. Тогда для

среднеквадратичного отклонения  $\delta d_F$  толщины  $F$  слоя всей многослойной структуры можно получить оценку 0.2–0.3 нм (в предположении, что на одной структуре реализуется статистическая выборка из гауссовского распределения; см. [347]). Типичный размер неоднородностей (шероховатостей) в проекции на поверхность слоя составляет величину порядка 10 нм. Это означает, что такие неоднородности не учтены в рамках диффузионного предела (но не означает, что диффузионный предел следует отбросить как непригодный; тогда пришлось бы отбросить большое количество экспериментально подтвержденных результатов). Невозможно рассчитать критическое состояние структуры с учетом хаотичности, поэтому используем следующую упрощенную модель. Примем, что структура со средней толщиной  $F$  слоя  $d_F$  разбивается на области (кластеры) с локальными толщинами  $d_{F,i} \pm \delta d_{F,i}$ . Примем также, что кластеры содержат полное количество слоев (это допущение основано на том, что полная толщина структуры на много порядков меньше двух других ее размеров). Пусть каждая область характеризуется локальным набором собственных значений  $T^{(k)}(d_{F,i}) = T^{(k)}(d_F) \pm \delta T^{(k)}$ . Примем также, что функция состояния каждого кластера может быть либо симметричной, либо антисимметричной. При  $d_F \approx d_F^*$ , очевидно, удовлетворяется одно из неравенств:  $d_{F,i} < d_F^*$ ,  $d_{F,j} > d_F^*$ . Рассмотрим переход в сверхпроводящее состояние структуры с четным количеством бислоев. В этом случае слева от точки кроссовера ( $d_{F,i} < d_F^*$ ) наибольшая температура  $T^{(0)}(d_{F,i})$  соответствует симметричной функции состояния, а при  $d_{F,j} > d_F^*$  наибольшая температура  $T^{(n_{bl}-1)}(d_{F,i})$  соответствует антисимметричной функции состояния. Следовательно, состояние структуры оказывается неопределенным. (Заметим, что при толщинах, далеких от толщины кроссовера, неоднородности структуры приводят только к деформации функций состояний.) При понижении температуры от большего из значений  $T^{(0)}(d_{F,i})$ ,  $T^{(N-1)}(d_{F,j})$ , при некоторой температуре  $T_{c1}$  образуется некоторое количество сверхпроводящих областей. Их рост определяется эффектом близости. Если эффект близости сильный, то фазовый переход начинается при меньшей температуре и занимает меньший температурный интервал, и наоборот. Очевидно, сверхпроводящие области, описываемые сим-

метричной и антисимметричной функцией состояния, разделены нормальными областями. По достижению температуры  $T^{(0)}(d_F^*) = T^{(n_{bl}-1)}(d_F^*)$  сверхпроводящие области не могут слиться, поскольку симметричное и антисимметричное состояние не совместимы (из-за граничных условий). Следовательно, нормальные области, «перемежающие» сверхпроводящие области остаются до температуры, при которой происходит смена симметрии состояния одного из двух классов сверхпроводящих областей. Обратим внимание на то, что устойчивость нормальных областей обеспечивается кольцевыми токами, огибающими сверхпроводящие области. Стремление сверхпроводящего конденсата изменить свою симметрию сопряжено с перераспределением куперовских пар, что вызывает токи. Но, в соответствии с вышесказанным о токах, в ферромагнитных слоях возникают противотоки, что и приводит к замкнутым токам. Это явление должно обнаружить себя полкой на переходной резистивной характеристике образца с толщинами  $d_F \approx d_F^*$ . Таким образом, переход  $S/F$  структуры в сверхпроводящее состояние растягивается на некоторый температурный интервал.

#### 4.5. Многомодовый фазовый переход в сверхпроводящее состояние

Уширение резистивных характеристик  $R(T)$  перехода в сверхпроводящее состояние было обнаружено для многослойных  $F/S/\dots/S/F$  структур со сверхпроводящими слоями Nb и ферромагнитными слоями  $Pd_{0.81}Ni_{0.19}$  [341]. Эффект был подтвержден на экспериментах со структурами Nb/CuNi. На рисунке 4.14 приведена резистивная характеристика  $R(T)$  9-бислойной структуры Nb/ $Pd_{0.81}Ni_{0.19}$  [341]. Видно, что ширина перехода  $\Delta T_c = T_c(90\%) - T_c(10\%)$  составляет примерно 2.2 К. (Здесь  $T_c(90\%)$  и  $T_c(10\%)$  – критические температуры, измеренные по критерию 90% и 10% от нормального сопротивления соответственно.) По совокупности данных измерений, проведенных со структурой, невозможно трактовать приведенную характеристику как признак «испорченного» образца. В частности, эти данные включают резистив-

ные характеристики в параллельном магнитном поле, результаты рентгеноструктурного анализа.

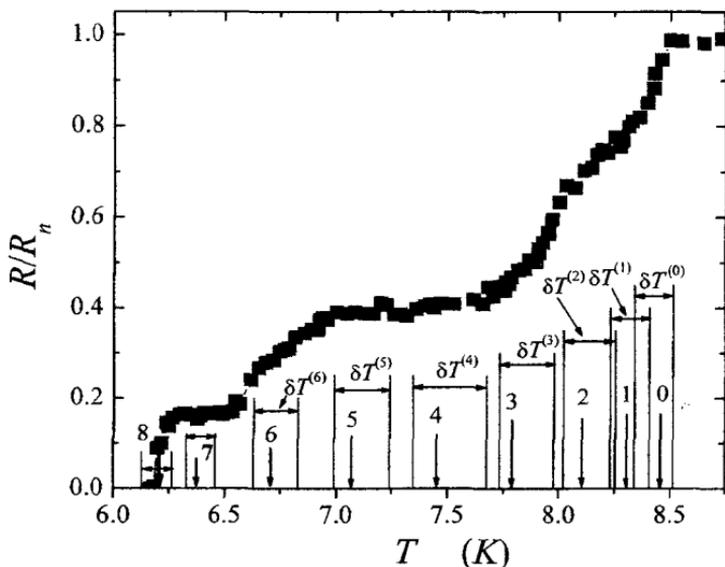


Рис. 4.14. Резистивная характеристика перехода в сверхпроводящее состояние для 9-бислойной структуры Nb/Pd<sub>0.81</sub>Ni<sub>0.19</sub>.  $d_S = 18.7$  нм,  $d_F = 2.2$  нм. По оси ординат отложено сопротивление образца, отнесенное к его нормальному сопротивлению при 10K. См. также пояснения в тексте

В работе [347] была предложена трактовка протяженного по температуре фазового перехода, основанная на многомодовости решения граничной задачи для уравнений микроскопической теории сверхпроводимости слоистых структур. Каждой моде соответствует собственное значение критической температуры и, соответственно, собственное критическое состояние; различные моды (состояния) обнаруживают себя по причине неидеальности внешних границ структуры, а также границ между слоями. Кратко изложим эту точку зрения.

Рассчитаем для рассматриваемой 9-бислойной  $S/F$  структуры собственные значения  $T^{(k)}$  и собственные вектор-функции  $\Phi^{(k)}(z)$ . Для расчета используем экспериментальные оценки материальных параметров структуры  $\text{Nb/Pd}_{0.81}\text{Ni}_{0.19}$ , приведенные в [8, 9, 29] (см. также главу 3). Некоторая свобода в выборе параметра прозрачности  $t_M$  и отношения нормальных удельных сопротивлений  $S$ - и  $F$ -металлов позволяют задать верхнее и нижнее собственные значения:  $T^{(0)} = T_c(90\%)$ ,  $T^{(8)} = T_c(10\%)$  (начальная и конечная точки резистивного перехода). Все значения  $T^{(k)}$  указаны на рисунке 4.14 стрелками (рядом со стрелкой указан номер собственного значения). Таким образом, набор собственных значений для критической температуры отображается на температурный интервал резистивного перехода. Заметим, что допущение о том, что резистивный переход охватывает все собственные значения, не принципиально, и оказывается в данном случае оправданным в силу дальнейших вычислений.

Существование дискретного набора собственных состояний само по себе не означает фазовый переход, охватывающий все эти состояния. Вторым фактором в данном случае может быть неидеальность внешних границ структуры и границ между слоями. Для рассматриваемых образцов  $S/F$  эта неидеальность оказывается существенной из-за малых толщин слоев ферромагнетика:  $d_F = 2.2$  нм. Среднеквадратичное отклонение от толщины  $d_F$  вдоль внутренних  $F$ -слоев составляет  $(\delta d_F)_{in} \sim 0.24$  нм, и вдоль внешних слоев —  $(\delta d_F)_{out} \sim 1.1$  нм [347]. Эти значения свидетельствуют о хорошем качестве образцов, но, тем не менее, соответствующие отклонения собственных значений  $\delta T^{(k)} = \delta T^{(k)}(d_F, \delta d_F)$  оказываются сравнимыми с разницей между собственными значениями  $\Delta T^{(k)} = T^{(k-1)} - T^{(k)} \sim 0.2-0.4$  К. В частности оказывается, что неидеальность внутренних границ больше влияет на верхние собственные значения, так что  $\delta T^{(k)} \sim \Delta T^{(k)}$  при  $k = 0, 1, 2$ , а неоднородность поверхности внешних слоев структуры приводит к существенному «размытию» собственных значений  $T^{(k)}$  с индексами  $k = 3, \dots, 6$ . Результат расчета отклонений  $\delta T^{(k)}$  при вариациях  $\pm(\delta d_F)_{in}$  толщин внутренних  $F$ -слоев, и вариациях  $\pm(\delta d_F)_{out}$  толщин внешних  $F$ -слоев представлен на рисунке 4.14: вертикальные линии выделяют

границы температурных интервалов, соответствующих  $k$ -му состоянию. Видно, что эти интервалы покрывают практически всю область резистивного перехода, а интервалы  $\delta T^{(0)}$ ,  $\delta T^{(1)}$ ,  $\delta T^{(2)}$  вообще перекрываются. В итоге переход рассматриваемой  $S/F$  структуры в сверхпроводящее состояние можно описать следующим образом. При температурах, слегка превышающих  $T^{(0)}$ , возникают области сверхпроводимости, пересекающие пленку  $S/F$  вдоль оси  $OZ$ . По мере понижения температуры, эти области расширяются. Критическому состоянию при этом соответствуют симметричная вектор-функция  $\Phi^{(0)}(z)$ . По прохождению температурного интервала  $\delta T^{(0)}$  происходит смена критического состояния  $\Phi^{(0)}(z)$  критическим состоянием с антисимметричной вектор-функцией  $\Phi_0^{(1)}(z)$ . При этом, в области перекрытия интервалов  $\delta T^{(0)}$ ,  $\delta T^{(1)}$  происходят флуктуационные процессы (спонтанные токи), в результате которых области сверхпроводимости могут быть распределены в образце хаотически. При дальнейшем понижении температуры процесс зарождения и разрушения критических состояний повторяется вплоть до температуры  $T^{(8)}$ , при которой происходит переход в сверхпроводящее состояние. В общем случае, при произвольном количестве бислоев  $S/F$  структуры, представленная картина фазового перехода остается такой же. При этом фазовый переход охватывает некоторый температурный интервал  $(T_1, T_2)$ , где значения  $T_1, T_2$  удовлетворяют неравенствам  $T^{(n_{bl}-1)} \leq T_1 < T_2 \leq T^{(0)}$  и зависят от степени неоднородности границ между слоями и неоднородности внешних границ структуры.

Приведенная трактовка уширения резистивной характеристики (основанная на многомодовом решении граничной задачи для уравнений Узаделя) косвенно подтверждается вычислениями свободной энергии, проведенными в чистом пределе в [362, 363] (см. раздел 1.9.4). Тем не менее, обратим внимание на то, толщины  $F$ -слоев, при которых наблюдается эффект уширения, существенно меньше длины когерентности  $\xi_S \sim 6$  нм и порядка  $\zeta_F$ . Это означает, что ощутимый вклад в сверхпроводимость вносит спаривание электронов в соседних  $S$ -слоях вблизи  $S/F$  границ. Поэтому полное объяснение эффекта требует, видимо, отказа от точечного характера эффективного электрон-электронного взаимодействия в теории БКШ.

## Глава 5. Критическое состояние $S/N$ структур во внешнем постоянном магнитном поле – феноменологическое описание

В предыдущих главах дано описание критического состояния  $S/N$  и  $S/F$  структур в диффузионном пределе квазиклассического приближения микроскопической теории. При этом оказалось, что решение уравнений может быть записано в замкнутой форме при отсутствии внешнего магнитного поля и при наличии внешнего перпендикулярного слоям магнитного поля. В главе II даны ссылки на работы [124, 150], в которых в рамках формализма ГТ были, во-первых, проанализированы конечные  $S/N$  структуры, находящиеся во внешнем параллельном магнитном поле, и, во-вторых, полностью воспроизведены критические характеристики  $T_c$ ,  $H_{c2\perp}(T)$ ,  $H_{c2\parallel}(T)$  экспериментальных структур Nb/Cu [52 – 56] и V/Ag [57, 58]. Однако процедура фиттирования экспериментальных данных с использованием точных уравнений оказывается очень трудоемкой. Поэтому для анализа критического состояния  $S/N$  структур на качественном уровне можно использовать либо модель ГЛ, либо одномодовое приближение микроскопической теории. В нижеследующих разделах приводятся результаты такого анализа.

### 5.1. Модель Гинзбурга – Ландау

С очень формальной точки зрения модель ГЛ есть приближение микроскопической теории при  $T \rightarrow T_c$ , в котором учитываются два первых члена разложения в ряд по степеням парной волновой функции, и, кроме того, производится разложение по степеням дифференциального оператора уравнений микроскопической теории до первого порядка включительно. Последнее дает возможность уменьшить количество компонент вектор-функции состояния до одной неизвестной комплексной функции, являющейся параметром сверхпроводящего порядка.

Приведем стандартный вывод уравнения ГЛ для  $S/N$  структур, параметры которых удовлетворяют условиям применимости диффузионного предела. Нелинейные уравнения Узаделя (2.1) – (2.5) для  $S/N$  структур можно записать в виде

$$-\frac{D(z)}{2\pi T} \left( G_n \partial_{\mathbf{r}}^2 F_n - F_n \nabla^2 G_n \right) + (2n+1)F_n = 2\lambda(z)\Psi G_n, \quad (5.1)$$

$$n = 0, 1, \dots, n_D.$$

Здесь в качестве параметра порядка, вместо  $\Delta(\mathbf{r})$ , используется функция

$$\Psi = \Psi(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{n_D} F_n(\mathbf{r}). \quad (5.2)$$

Еще одна подсистема уравнений получается комплексным сопряжением (5.1).

Осуществим вначале разложение в уравнениях (5.1) по степеням  $F_n(\mathbf{r})$ , с точностью до членов  $o(|F_n|^3)$ . В силу соотношения (2.3) имеем

$$G_n^{-1} = \left( 1 - F_n^* F_n \right)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2} F_n^* F_n,$$

$$F_n \nabla_{\mathbf{r}}^2 G_n \approx -\frac{F_n}{2} \left( 2|\nabla_{\mathbf{r}} F_n|^2 + F_n^* \nabla_{\mathbf{r}}^2 F_n + F_n \nabla_{\mathbf{r}}^2 F_n^* \right)$$

и аналогично – для выражения  $F_n^* \nabla_{\mathbf{r}}^2 G_n$ .

Из последней формулы ясно, что полученное разложение имеет малую ценность, если не сделать еще одного допущения, а именно, о медленном изменении узделевских функций внутри слоев. Тогда  $F_n \nabla_{\mathbf{r}}^2 G_n, F_n^* \nabla_{\mathbf{r}}^2 G_n = o(|F_n|^3)$ . Данное допущение, разумеется, не корректно вблизи границ между слоями – на  $S-N$  границах функции  $F_n(\mathbf{r})$  и их производные  $\partial_z F_n(\mathbf{r})$  испытывают разрывы первого рода, и это сказывается на быстроте изменения функций внутри слоев. Но зато уравнения (5.1) сильно упрощаются и приобретают вид

$$\left(-\frac{D(z)}{2\pi T}\partial_{\mathbf{r}}^2 + (2n+1)\right)F_n + \frac{1}{2}(2n+1)|F_n|^2 F_n = 2\lambda(z)\Psi. \quad (5.3)$$

Для  $z \in I_S$  в (5.3) можно выполнить далее разложение по степеням оператора  $-D_S\partial_{\mathbf{r}}^2/2\pi T$ :

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{2n+1 - D_S\partial_{\mathbf{r}}^2/2\pi T} \left( 2\lambda\Psi - \frac{1}{2}(2n+1)|F_n|^2 F_n \right) \approx \\ &\approx \frac{2\lambda\Psi}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)^2} \frac{D_S\partial_{\mathbf{r}}^2}{2\pi T} 2\lambda\Psi - \frac{1}{2}|F_n|^2 F_n \approx \\ &= \lambda \left( \frac{2}{2n+1}\Psi + \frac{2}{(2n+1)^2} \frac{D_S}{2\pi T} \partial_{\mathbf{r}}^2 \Psi - \frac{4\lambda^2}{(2n+1)^3} |\Psi|^2 \Psi \right). \end{aligned}$$

Просуммировав левую и правую части полученного выражения по  $n$ , получим уравнение

$$\begin{aligned} \Psi = \lambda \left\{ \left[ \sum_{n=0}^{n_D} \frac{2}{2n+1} \right] \Psi + \left[ \sum_{n=0}^{n_D} \frac{2}{(2n+1)^2} \right] \frac{D_S}{2\pi T} \partial_{\mathbf{r}}^2 \Psi - \right. \\ \left. - 4\lambda^2 \left[ \sum_{n=0}^{n_D} \frac{1}{(2n+1)^3} \right] |\Psi|^2 \Psi \right\}. \quad (5.4) \end{aligned}$$

Воспользуемся формулами [374]

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{n_D(T)} \frac{2}{2n+1} &= \Psi\left(\frac{\omega_D}{2\pi T} + 1\right) - \Psi\left(\frac{1}{2}\right) \approx \ln\left(\frac{2e^\gamma \omega_D}{\pi T}\right) = \\
&= \ln\left(\frac{2e^\gamma \omega_D}{\pi T_S}\right) - \ln\left(\frac{T}{T_S}\right) = \frac{1}{\lambda} - \ln\left(\frac{T}{T_S}\right) \approx \frac{1}{\lambda} + 1 - \frac{T}{T_S}, \\
\sum_{n=0}^{n_D(T)} \frac{2}{(2n+1)^2} &\approx \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1/2)^2} = \frac{\pi^2}{4}, \\
\sum_{n=0}^{n_D(T)} \frac{1}{(2n+1)^3} &\approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} = \frac{7\zeta(3)}{8} = 1.052.
\end{aligned}$$

Тогда для  $S$ -слоев уравнение (5.4) принимает вид

$$\xi_{GL,S}^2 \frac{T_S}{T} \partial_{\mathbf{r}}^2 \Psi(\mathbf{r}) + \left(1 - \frac{T}{T_S}\right) \Psi(\mathbf{r}) - \frac{7\zeta(3)\lambda^2}{2} |\Psi(\mathbf{r})|^2 \Psi(\mathbf{r}) = 0, \quad (5.5)$$

где  $\zeta(t)$  – дзета-функция Римана,  $\xi_{GL,S(N)}$  – длина когерентности Гинзбурга – Ландау, определяемая формулой

$$\xi_{GL,S(N)} = \sqrt{\frac{\pi D_{S(N)}}{8T_S}} = \frac{\pi}{2} \xi_{S(N)}. \quad (5.6)$$

Из (5.5) следует классическая форма уравнения ГЛ для параметра порядка  $\Delta(\mathbf{r}) = 2\pi T\lambda \Psi(\mathbf{r})$ , если в первом слагаемом (5.5) подставить  $T = T_S$ .

Между тем, для  $N$ -слоев процедуру разложения по степеням оператора  $-D_N \partial_{\mathbf{r}}^2 / 2\pi T$  непосредственно осуществить нельзя

(формальное ее применение приводит к тривиальному решению  $\Psi(\mathbf{r}) \equiv 0$  при  $z \in I_N$ ).

Полученный результат, – невозмущенные уравнения ГЛ (5.5) для  $S$ -слоев и невозможность получить уравнения ГЛ для  $N$ -слоев непосредственно из микроскопической теории, – разумеется, не может быть удовлетворительным. Можно попытаться исправить положение, введя «перенормированную» константу эффективного электрон-электронного взаимодействия в нормальном металле  $\lambda_N \neq 0$ . Тогда, как легко видеть, уравнение ГЛ для нормальных слоев можно записать в виде

$$\xi_{GL,N}^2 \frac{T_S}{T} \partial_{\mathbf{r}}^2 \Psi(\mathbf{r}) - a_N \Psi(\mathbf{r}) - \frac{7\zeta(3)\lambda_N^2}{8} |\Psi(\mathbf{r})|^2 \Psi(\mathbf{r}) = 0, \quad (5.7)$$

где введено обозначение

$$a_N = \frac{1}{\lambda_N} - \ln \left( \frac{2e^\gamma \omega_D}{\pi T} \right). \quad (5.8)$$

Полученные таким образом уравнения (5.5) – (5.8) уже в значительной степени теряют связь с микроскопическими уравнениями диффузионного предела. Можно пойти дальше, постулировав на основе (5.5), (5.7) уравнения ГЛ вида

$$\partial_{\mathbf{r}}^2 \Psi(\mathbf{r}) + \eta(z; T) \Psi(\mathbf{r}) - \chi(z; T) |\Psi(\mathbf{r})|^2 \Psi(\mathbf{r}) = 0, \quad (5.9)$$

где  $\eta(z; T)$ ,  $\chi(z; T)$  – кусочно-постоянные функции, характеризующие  $S/N$  структуру; при этом температурные зависимости этих функций не обязаны совпадать с соответствующими температурными зависимостями в (5.5), (5.7).

Граничные условия и условия на интерфейсах для функций  $\Psi(\mathbf{r})$  имеют тот же вид, что и условия, соответственно, (2.7) и (2.13), (2.14) для узделевских функций:

$$\partial_z \Psi(-L/2) = \partial_z \Psi(L/2) = 0, \quad (5.10)$$

$$\tilde{\rho}^{-1}(z_i + 0) \partial_z \Psi(z_i + 0) = \tilde{\rho}^{-1}(z_i - 0) \partial_z \Psi(z_i - 0), \quad (5.11)$$

$$\Psi(z_i + 0) = \Psi(z_i - 0) + \frac{\tilde{\rho}_N}{\tilde{\rho}(z_i - 0)} \frac{2\ell_N}{3\tilde{t}_N} \partial_z \Psi(z_i - 0). \quad (5.12)$$

В этих соотношениях, однако, параметры, отмеченные тильдой, не совпадают с параметрами микроскопической теории.

На основе (5.9) легко строится функционал ГЛ  $\Omega$ , который очевидно имеет классическую форму [28], но с более общими коэффициентными функциями. Этот функционал, как и функционал (2.8), не является в полном смысле свободной энергией системы, в частности потому, что в нем не учтена поверхностная энергия конденсата на  $S$ - $N$  интерфейсах. Если поверхностная энергия не учитывается, то оказываются некорректными и недиагональные условия (5.12) – при варьировании функционала ГЛ с этими условиями мы не получаем экстремума, поскольку в результирующем выражении для вариации  $\delta\Omega$  остаются поверхностные члены. Напротив, поверхностную энергию можно учесть, включив условия (5.12) в функционал по методу Лагранжа.<sup>1</sup> Ниже модель ГЛ будет использоваться для анализа экспериментальных данных на качественном уровне.

## 5.2. Верхнее критическое магнитное поле $H_{c2\perp}(T)$ . Идентификация параметров $S/N$ структур. Положительная кривизна зависимости $H_{c2\perp}(T)$

Задачу об определении верхнего перпендикулярного критического поля рассмотрим в связи с двумя проблемами: во-первых, с точки зрения проблемы идентификации параметров  $S/N$  структур;

<sup>1</sup> Мы видим, что построенная для  $S/N$  структур модель ГЛ “не самосогласована, не замкнута и противоречива”. Строгое построение теории ГЛ для джозефсоновских  $S/N$  структур, удовлетворяющее названным критериям, дано, в частности, в работе [379], а также в книге [380].

во-вторых, в связи с проблемой исследования влияния внешних поверхностей структуры на свойства критического состояния.

С математической точки зрения задача о верхнем критическом перпендикулярном магнитном поле  $H_{c2\perp}(T)$  ничем не отличается от задачи определения критической температуры  $T_c$ , поскольку решаются те же уравнения, но с переопределенными длинами когерентности. В главе 2 было построено точное решение для многослойной структуры, находящейся в перпендикулярном слоем внешнем магнитном поле, при этом «длины когерентности» определяются формулами (2.53), (2.55). В одномодовом приближении, использовании которого мы и ограничимся в данном разделе, в алгебраическом уравнении для  $H_{c2\perp}(T)$  фигурируют две «длины когерентности»:

$$\xi_{S,H}^{(0)}(T) = \xi_S \left( -\frac{2T\mu^{(0)}(T)}{T_S} + \frac{H}{H_S} \right)^{-1/2} \equiv \frac{\xi_S}{ik(T,H)}, \quad (5.13)$$

$$\xi_{N,H}^{(0)}(T) = \xi_N \left( \frac{T}{T_S} + \frac{H}{H_N} \right)^{-1/2} \equiv \frac{\xi_N}{\kappa(T,H)}. \quad (5.14)$$

Здесь  $H_S$  и  $H_N$  – характерные магнитные поля сверхпроводящего и нормального металла,  $H_{S(N)} = \Phi_0 / 2\pi\xi_{S(N)}^2$  (эти величины отличаются от полей  $H_{c2}$  заменой  $\xi_{GL,S(N)}$  на  $\xi_{S(N)}$ ).

Рассматривая проблему идентификации параметров  $S/N$  структур (в главе 3), мы сослались на метод определения параметра  $\xi_S$  из измерений верхнего перпендикулярного критического поля на серии трехслойных  $N/S/N$  структур [157] с фиксированной толщиной  $N$ -слоев  $d_N$  и толщинами  $S$ -слоя, принимающими значения в диапазоне от  $d_S \approx \xi_S$  до  $d_S \gg \xi_S$ . Достаточно очевидно, что при неограниченном увеличении  $d_S$  зависимость  $H_{c2\perp}(T)$  асимптотически приближается к зависимости массивного сверхпроводника  $H_{c2}(T)$  (см., например, экспериментальные графики в [158]), которая в линейной своей части определяется формулой ГЛ

$$H_{c2}(T) = \frac{\Phi_0}{2\pi\xi_{GL,S}^2} \left( 1 - \frac{T}{T_S} \right). \quad (5.15)$$

Следовательно, измеряя наклон кривой  $H_{c2\perp}(T)$  к оси температур в точке  $T_c$  и определяя величину  $\xi_{GL} \equiv \sqrt{-\Phi_0 / 2\pi T_c \alpha_{\perp}}$ , где  $\alpha_{\perp} \equiv dH_{c2\perp}(T_c)/dT$ , можем оценить длину когерентности  $\xi_{GL,S} = \lim_{d_S \rightarrow \infty} \xi_{GL}(d_S)$ , и далее, в соответствии с (5.6), получим искомого  $\xi_S$ .

В качестве примера приведем экспериментальные зависимости  $\xi_{GL}(d_S)$  для серии cs1 системы Cu/Nb/Cu, обсуждавшейся подробно в главе 3 (рис. 5.1).

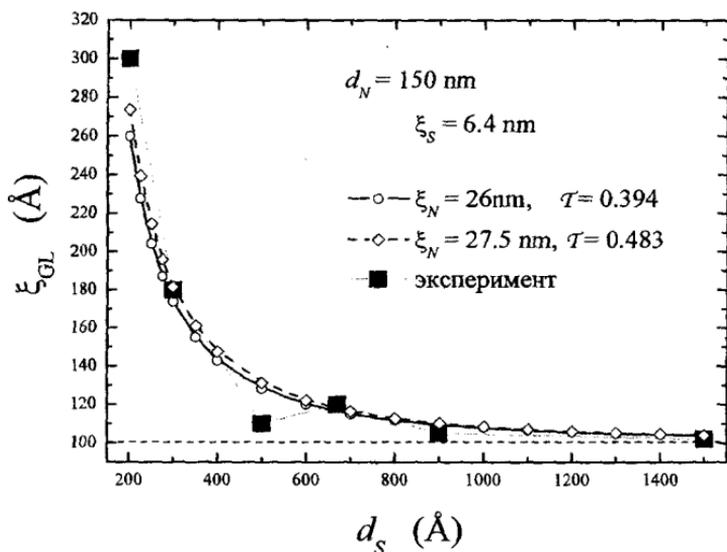


Рис. 5.1. Экспериментальные (черные квадраты) и теоретические зависимости длины когерентности ГЛ (линии с открытыми символами) от толщины S-слоя для системы Cu/Nb/Cu, полученной методом МЛЭ [158]

Из рисунка видим, что асимптотика экспериментальной зависимости определяется вполне однозначно:  $\xi_{GL,S} = 100 \text{ \AA}$ , или  $\xi_S = 6.4 \text{ нм}$ . Для расчета теоретических зависимостей  $H_{c2\perp}(T; d_S)$ , и затем, величины  $\xi_{GL}(d_S)$ , используем значения параметров  $\eta = 2.77$ ,  $T_S = 9 \text{ К}$ , найденное значение  $\xi_S$ , а также различные пары параметров  $(\xi_N, T)$ , принадлежащих «кривой инвариантности»  $T(\xi_N)$  характеристики  $T_c(d_S)$ , полученной в одномоновом приближении (см. главу 3). Все теоретические зависимости  $\xi_{GL}(d_S)$  при больших значениях  $d_S$  (свыше  $500 \text{ \AA}$ ) почти сливаются (что очевидно, коль скоро модель самосогласованна). В целом экспериментальная характеристика воспроизводится при больших коэффициентах прозрачности (и, соответственно, больших длинах когерентности  $\xi_N$ ); на рисунке 5.1 приведены две теоретические кривые  $\xi_{GL}(d_S)$ , удовлетворительно моделирующие экспериментальные данные, одна из них соответствует почти максимальной прозрачности интерфейса Nb-Cu. Сравнивая способы идентификации параметров, видим, что в данном случае, погрешность в определении  $T$  является достаточно большой из-за разброса экспериментальных точек.

Таким образом, мы видим, что еще одна предельная характеристика  $\xi_{GL}(d_S)$  позволяет достаточно надежно определить длину когерентности  $\xi_S$ , и, кроме того, несколько сузить область допустимых значений параметров  $(\xi_N, T)$ .

Рассмотрим теперь эффект, свойственный критическому состоянию  $S/N$  структур с длиной когерентности нормального металла  $\xi_N \gg \xi_S$ . В разделе 2.4 уже обсуждался поверхностный эффект, обнаруженный авторами работ [112, 113] на характеристиках  $H_{c2\perp}(T)$  для многослойных структур  $S/S'$  с таким же соотношением длин когерентности, но с равными критическими температурами материалов слоев. В работе [112] были приведены также и экспериментальные характеристики  $H_{c2\perp}(T)$ , на которых эффект отражался положительной кривизной участка этой зависимости в окрестности критической температуры. Покажем на численном примере, что положительная кривизна зависимости  $H_{c2\perp}(T)$  при выполнении соотношения  $\xi_N \gg \xi_S$  имеет место и для  $S/N$  структур. При расчете оставим материальные параметры, кроме длины когерентности  $\xi_N$ , примерно такими же, как и в первом примере. На рисунке 5.2, а)

приведены характеристики  $H_{c2L}(T)$   $N/S/N$  структуры, рассчитанные при значениях длины когерентности  $\xi_N$ , изменяющейся от  $2.5\xi_S$  до  $10\xi_S$ . На рисунке 5.2 (b) приведены соответствующие характеристики  $dH_{c2L}(T)/dT$ , которые в достаточной мере отражают аналитические свойства зависимостей  $H_{c2L}(T)$ .

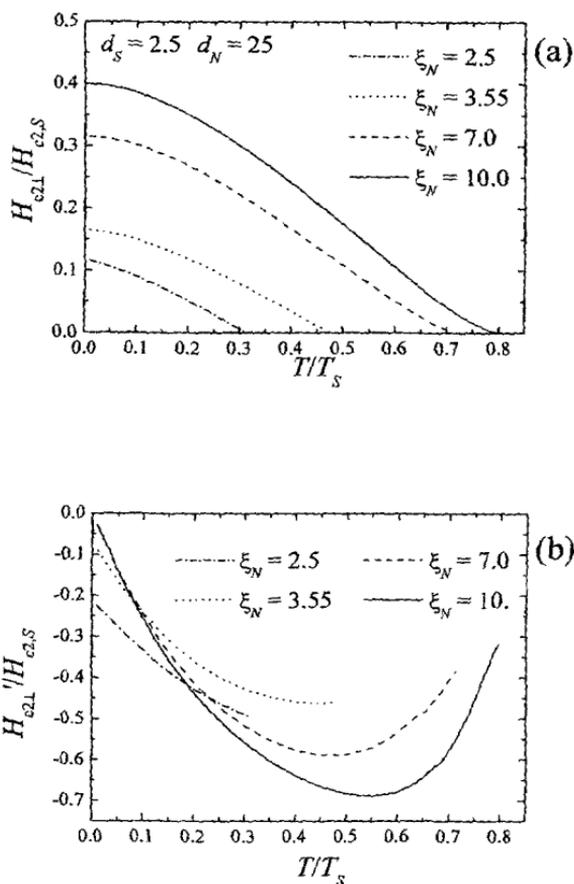


Рис. 5.2. Зависимости  $H_{c2L}(T)$  (a) и  $dH_{c2L}(T)/dT$  (b) рассчитанные для структур  $N/S/N$ . Линейные величины промасштабированы на величину  $\xi_S$

Как видно из рисунков, участок зависимости  $H_{c2\perp}(T)$ , имеющий положительную кривизну в окрестности  $T_c$ , появляется, начиная с некоторого значения  $\xi_N^* \approx 3.6\xi_S$ , и расширяется с увеличением  $\xi_N$  (началом этого участка является точка минимума производной  $H_{c2\perp}'(T)$ ). Формально эффект легко объясняется из уравнения для перпендикулярного критического поля (2.83), которое, с учетом (5.13), (5.14), запишем в форме

$$ktg\left(\frac{kd_S}{2\xi_S}\right) = \eta \frac{\xi_S}{\xi_N} \frac{\kappa th(\kappa d_N / \xi_N)}{1 + \gamma_b \kappa th(\kappa d_N / \xi_N)}. \quad (5.16)$$

Отсюда, во-первых, следует, что при  $H \rightarrow 0$  из-за малого параметра  $\xi_S/\xi_N$  в правой части (2.4) критическая температура структуры оказывается близкой к  $T_S$  (как видно из рис. 5.2.(а),  $T_c \approx 0.8T_S$  для  $\xi_N = 10\xi_S$ ). Во-вторых, при увеличении  $H$  от нуля до примерно  $H_N$  правая часть (5.16) растет очень быстро, при дальнейшем увеличении поля быстрый рост сменяется медленным. В результате мы и имеем вначале быстрое, а затем относительно медленное уменьшение критической температуры в растущем внешнем поле.

Попытаемся теперь увидеть физическую картину, соответствующую графику  $H_{c2\perp}(T)$  при  $\xi_N = 10\xi_S$ . Для этого рассчитаем в одномоновом приближении  $z$ -составляющие  $\psi(z)$  конденсатных волновых функций  $\Psi(x, z) = \exp\{-Hx^2/2\Phi_0\}\psi(z)$ <sup>1</sup> критического состояния при трех значениях температуры:  $T_c$  (нулевое внешнее поле), при температуре наибольшей кривизны (ей соответствует малое значение напряженности магнитного поля), и в точке перегиба кривой  $H_{c2\perp}(T)$ . Графики этих функций приведены на рисунке 5.3. Из рисунка видим, что при отсутствии внешнего магнитного поля и при очень малых магнитных полях (сплошная линия на рис. 5.3) куперовские пары распределены в  $N$ - слоях с достаточно большой относительной плотностью по всей толщине слоев (с очевидным затуханием сверхпроводимости в направлении  $Ox$ ). При уменьшении температуры, и при соответствующем увеличении внешнего

<sup>1</sup> Выбрана калибровка  $A(0, A_y, 0)$ .

магнитного поля сверхпроводимость постепенно подавляется вблизи поверхностей образца. Для температуры наибольшей кривизны кривой  $H_{c2\perp}(T)$  сверхпроводимость у внешних поверхностей  $N$ -слоев практически исчезает (штриховая линия на рисунке 5.3). В этом случае образец можно считать бесконечным в направлении оси  $OZ$ , а точку наибольшей (положительной) кривизны можно назвать (условно) точкой перехода от конечной к бесконечной структуре.

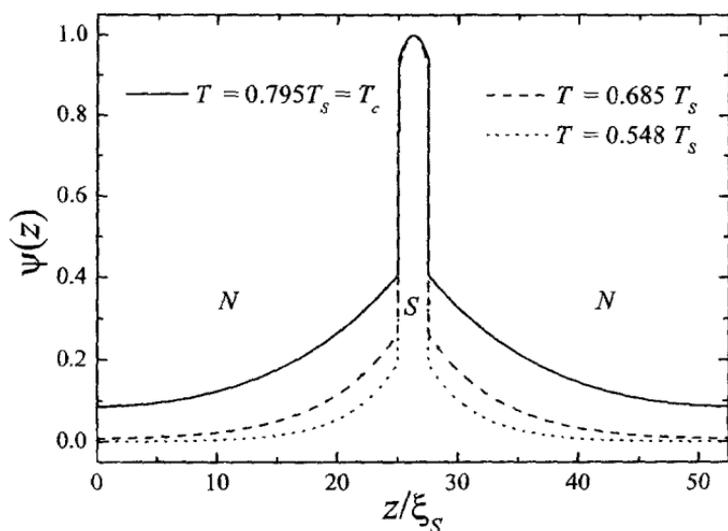


Рис. 5.3. Конденсатные волновые функции критического состояния, соответствующие трем точкам на характеристике  $H_{c2\perp}(T)$ , приведенной на рисунке 5.2.(а) для  $\xi_N = 10\xi_S$

При дальнейшем понижении температуры (увеличении  $H$ ) зародыш сверхпроводящей фазы сжимается все больше к  $S$ -слою (в еще большей степени сжимаясь в направлении оси  $OX$ ), оказываясь локализованным в  $S$ -слое и в небольшой его окрестности при температуре нулевой кривизны кривой  $H_{c2\perp}(T)$  (см. пунктирный график на

рис. 5.3). Нетривиальность этого явления состоит в том, что изменение магнитного поля в ортогональном слоем направлении влечет за собой и изменение степени локализации зародыша сверхпроводящей фазы в этом же направлении, и кроме того, изменение при определенной температуре топологии зародыша. Для того чтобы подчеркнуть эту нетривиальность, приведем в качестве примера два рисунка с волновыми функциями, рассчитанными при обычном соотношении длин когерентности,  $\xi_N \sim \xi_S$ . На рисунке 4.(а) приведены графики волновых функций критического состояния, рассчитанных для  $N/S/N$  структуры с толстыми  $N$ -слоями для температуры  $T = T_c$  (сплошная линия), для средней (штриховая линия), и для низкой температуры (штрихпунктирная линия). Аналогичные графики приведены на рисунке 4.(b) для  $N/S/N$  структуры с тонкими  $N$ -слоями. Видно, что в первом случае три графика сливаются, во втором случае – почти сливаются. Это означает, что при длинах когерентности  $\xi_N$  и  $\xi_S$  одного порядка внешнее перпендикулярное магнитное поле не влияет на топологию зародыша сверхпроводящей фазы; в первом случае (толстых  $N$ -слоев) – это топология зародыша структуры с полубесконечными  $N$ -слоями, во втором случае, как хорошо видно из рис. 4(b),  $N$ -слои (как и  $S$ -слой) являются тонкими пленками.

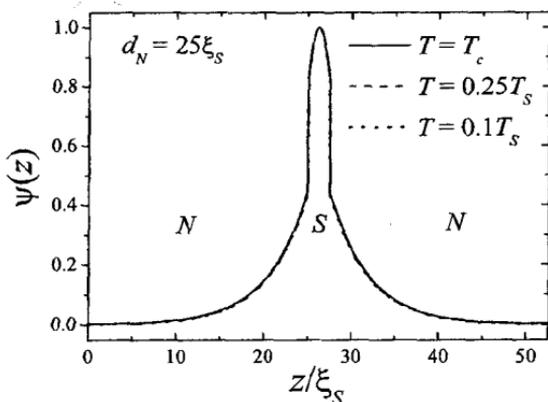


Рис. 5.4 (а). Конденсатные волновые функции, соответствующие трем точкам на характеристике  $H_{c21}(T)$ , рассчитанной при  $\xi_N = 2.5\xi_S$  для толщины  $d_N = 25\xi_S$

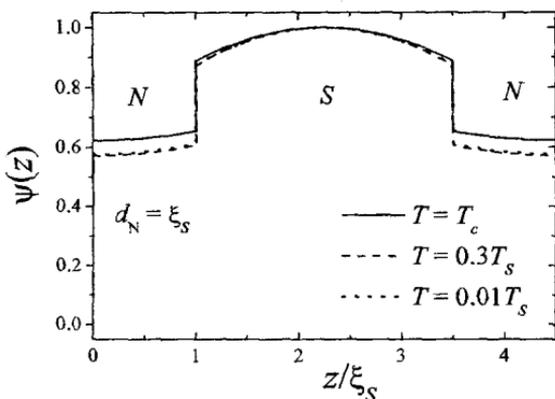


Рис. 5.4 (b). Конденсатные волновые функции, соответствующие трем точкам на характеристике  $H_{c2\perp}(T)$ , рассчитанной при  $\xi_N = 2.5\xi_S$  для толщины  $d_N = \xi_S$

Обратим внимание на то, что эффект положительной кривизны характеристики  $H_{c2\perp}(T)$ , рассчитанный для  $N/S/N$  структуры с толстыми нормальными слоями (см. рис. 5.3), с уменьшением толщины  $N$ -слоев только усиливается.

В заключение подчеркнем, что результаты, приведенные в этом разделе для конкретных систем, имеют общий характер.

### 5.3. Критическое состояние $S/N$ структур в параллельном магнитном поле. Эффект симметрии

В данном разделе приводятся основные результаты исследования структур вида  $N/n_{bl} \times (S/N)$ , опубликованные в [122, 123, 125–127]. Экспериментальные данные в этих работах анализировались в рамках модели ГЛ с диагональными условиями на  $S-N$  границах. Поскольку в этом случае прозрачность интерфейса принимается полной, постольку, по крайней мере, один из подгоночных параметров теории оказывается искаженным. Однако, как показывает расчет, при учете реальной квантовомеханической прозрачности,

правильные значения остальных параметров также восстанавливаются.

Критическое состояние описываем линейным уравнением ГЛ

$$-\left(\nabla - i \frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{A}(\mathbf{r})\right)^2 \Psi(\mathbf{r}) = \eta(z; T) \Psi(\mathbf{r}), \quad (5.17)$$

в котором ступенчатую функцию определим формулой

$$\eta(z; T) = \begin{cases} \frac{1}{\xi_{GL,N}^2} \cdot \left(1 - \frac{T}{T_S}\right), & z \in I_S, \\ -\frac{1}{\xi_{GL,N}^2} \cdot \frac{T}{T_S}, & z \in I_N; \end{cases} \quad (5.18)$$

координатную плоскость  $XOY$  в рассматриваемом случае совместим с продольной плоскостью симметрии структуры.

Будем считать, что вектор напряженности внешнего магнитного поля направлен вдоль оси  $OY$ , тогда вектор потенциал может быть выбран в виде  $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (Hz \ 0 \ 0)$ . Разделяя переменные в (5.17) подстановкой  $\Psi(\mathbf{r}) = e^{ikx} \psi(z)$ , получаем следующее уравнение

$$\psi''(z) + \left[ \eta(z; T) - \frac{1}{\zeta_H^4} (z - z_0)^2 \right] \psi(z) = 0, \quad (5.19)$$

где  $\zeta_H^2 \equiv \Phi_0 / 2\pi H$ ,  $z_0 \equiv k \zeta_H^2$ .

Запишем граничные условия:

$$\psi'(z) \Big|_{\pm L/2} = 0 \quad (5.20)$$

и условия на  $S$ - $N$  интерфейсах

$$\frac{\Psi'_S}{\Psi_S} \Big|_S = P \frac{\Psi'_N}{\Psi_N} \Big|_N, \quad (5.21)$$

где индексом  $S(N)$  обозначен интерфейс со стороны  $S(N)$ -слоя.

Заметим, что условия (5.21) не подразумевают непрерывности конденсатной волновой функции ГЛ на интерфейсах, но фиксируют отношение скачков функции  $\psi(z)$  и ее производной.

Результатом решения граничной задачи (5.19) – (5.21) является набор собственных значений для поля  $H$ , зависящих от температуры  $T$  и свободного параметра  $z_0$ . Максимум по параметру  $z_0$  наибольшего собственного значения  $H_0(z_0)$  и является верхним критическим полем. Параметр  $z_0$  может быть вычислен самосогласованно из условия минимума свободной энергии, которое приводит к формуле

$$z_0 = \frac{\int z \psi^2(z; z_0) dz}{\int \psi^2(z; z_0) dz} = \bar{z}. \quad (5.22)$$

Очевидно, при ненулевых значениях внешнего поля параметр  $z_0$  может служить для обозначения положения зародыша сверхпроводящей фазы. Для сверхрешетки критическое состояние вырождено, поскольку положение зародыша определено с точностью до периода. В случае конечной структуры, обладающей плоскостью зеркальной симметрии (именно такие здесь и рассматриваются), критическому состоянию соответствуют два тождественных состояния, описываемых, вообще говоря, асимметричными волновыми функциями. Между тем, как видно из (3.6), (3.3), всегда существует симметричное решение, доставляющее локальный минимум свободной энергии и соответствующее значению параметра  $z_0 = 0$ . Попытаемся выяснить, как могут реализоваться эти состояния на всем диапазоне температур  $(0, T_c)$ . При отсутствии внешнего магнитного поля ( $T = T_c$ ) критическое состояние описывается четной волновой функцией (соответственно,  $z_0 = 0$ ); это всегда 3D состояние; на рисунке 5.5 приведен для такого состояния график волновой функции, соот-

ветствующей одному из возможных наборов материальных параметров системы Nb/Cu.

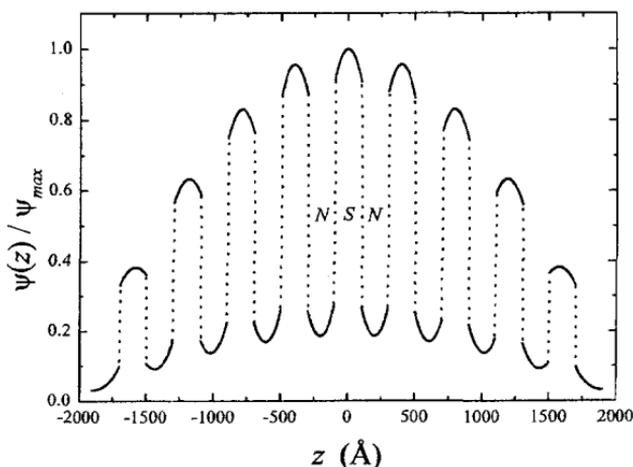


Рис. 5.5. Волновая функция критического состояния структуры Cu/9x(Nb/Cu) при  $H = 0$ .

При понижении температуры от  $T_c$  до  $T^*$  и при соответствующем увеличении магнитного поля сверхпроводящий конденсат постепенно локализуется либо в центральных слоях, либо в одном из крайних  $S$ -слоев. Во втором случае (аналог поверхностной сверхпроводимости) симметрия состояния нарушается. Предположим, имеет место первый случай. Тогда должно наблюдаться существенное отличие в поведении зародыша сверхпроводящей фазы в структурах с четным (структуры  $N$ -типа) и нечетным (структуры  $S$ -типа) количеством бислоев. Действительно, в структурах  $S$ -типа (плоскость зеркальной симметрии есть срединная плоскость центрального  $S$ -слоя) зародыш сверхпроводящей фазы локализуется при  $T = T^*$  в центральном  $S$ -слое и некоторой его окрестности. При этом симметрия состояния сохраняется. В структурах  $N$ -типа (плоскость зеркальной симметрии структур находится в нормальном слое) локализация сверхпроводящего конденсата в одном из  $S$ -слоев, сосед-

них с центральным  $N$ -слоем, сопровождается переходом от состояния симметричного к асимметричному. При этом значение параметра  $z_0$ , указывающего место локализации зародыша, меняется от 0 до  $\pm d/2$ . Смещение зародыша, очевидно, сопровождается преодолением потенциального барьера (и то, и другое значение  $z_0$  реализуют локальный минимум свободной энергии), поэтому сверхпроводящий конденсат остается в симметричном состоянии еще на некотором температурном интервале; дальнейший переход к асимметричному состоянию сопровождается более быстрым ростом критического поля. Следует в связи с этим заметить, что смещение зародыша сверхпроводящей фазы, вызвано оно описанным симметричным эффектом, или поверхностным эффектом, или эффектом ТТ, одинаково отражается на характеристике  $H_{c2\parallel}(T)$ . Таким образом, характеристика  $H_{c2\parallel}(T)$  структуры  $N$ -типа должна отличаться от характеристики структуры  $S$ -типа более выраженным 3D-2D кроссовером.

При понижении температуры от  $T^*$  различие в характеристиках  $H_{c2\parallel}(T)$  структур  $S$ - и  $N$ - типов должно исчезать, поскольку, в силу все большей локализации конденсата, исчезает влияние внешних поверхностей образца. Структура превращается в сверхрешетку, обладающую плоскостью зеркальной симметрии в каждом  $S$ -слое (так же как и в каждом  $N$ -слое).

Предсказанный в [122] на основе изложенных соображений, эффект был обнаружен экспериментально на структурах Nb/Cu и Nb/Pd [123, 125–127]. На рисунках 5.6.(а, б) приведены экспериментальные зависимости (символы)  $H_{c2\parallel}(T)$  для пар структур Cu/9×(Nb/Cu), Cu/10×(Nb/Cu) и Pd/9×(Nb/Pd), Pd/10×(Nb/Pd), соответственно. Каждая пара структур изготавливалась в одном процессе напыления, поэтому образцы, принадлежащие одной паре, идентичны во всем, кроме количества бислоев. Тем не менее мы видим, что по своим характеристикам  $H_{c2\parallel}(T)$  9-бислоевые и 10-бислоевые структуры отличаются очень сильно. Сразу обращает на себя внимание то, что 3D-2D кроссовер на характеристиках структур  $S$ -типа практически не заметен. В остальном экспериментальные характеристики ведут себя так, как описано выше; это подтверждается хорошим согласием теоретических кривых и экспериментальных зависимостей.

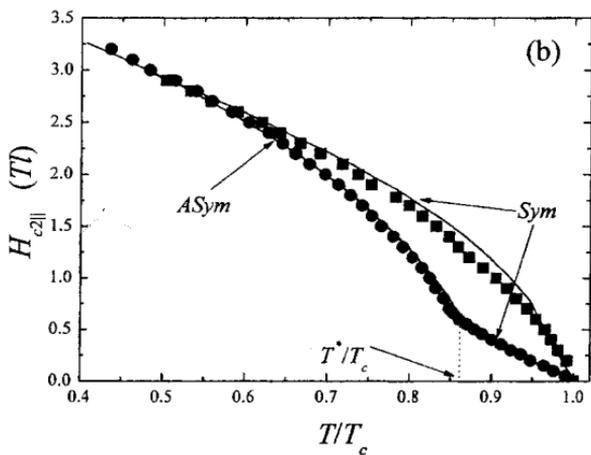
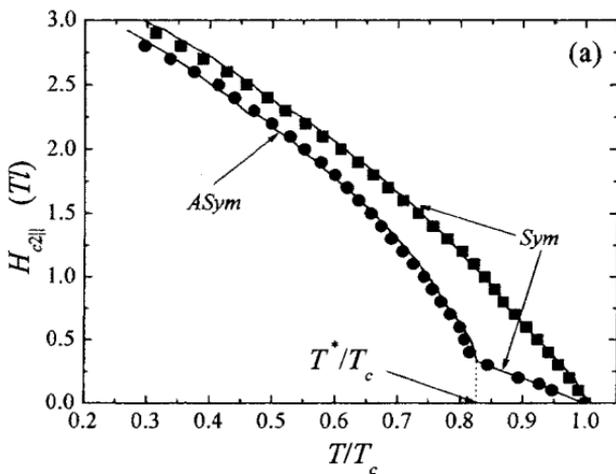


Рис. 5.6. Экспериментальные и теоретические зависимости  $H_{c2||}(T)$  для пар структур Nb/Cu (а) и Nb/Pd (б). 9 (10)- бислойным структурам соответствуют квадратные (круглые) символы. Обозначения *Sym* и *ASym* указывают на кривые, рассчитанные при значениях параметра  $z_0 = 0$  и  $\pm d/2$ , соответственно

#### 5.4. Критическое состояние $S/N$ структур в параллельном магнитном поле. Эффект симметрии на резистивных характеристиках

Рассмотрим теперь случай, оговоренный в предыдущем разделе, а именно, пусть параметры структуры таковы, что может иметь место «поверхностная» сверхпроводимость. Своеобразие этого состояния в  $S/N$  структурах передается рисунком 5.7, на котором представлены зависимости  $H_0(z_0)$ , рассчитанные при нескольких температурах для структуры  $\text{Cu}/5 \times (\text{Nb}/\text{Cu})$ , принадлежащей экспериментальной серии  $\text{Cu}/n_b \times (\text{Nb}/\text{Cu})$  [135, 136] ( $d_{\text{Cu}} = d_{\text{Nb}} = 20 \text{ нм}$ ).

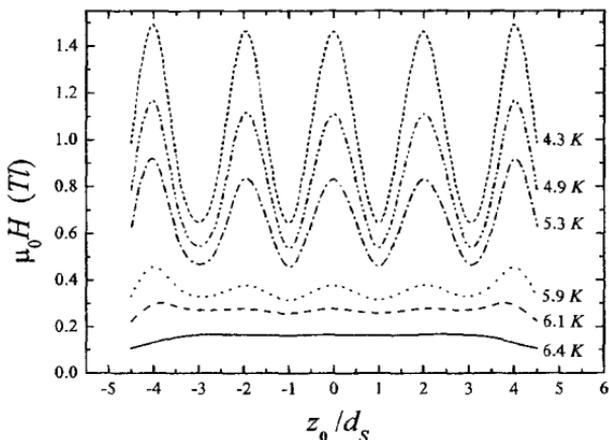


Рис. 5.7. Зависимости  $H_0(z_0)$ , рассчитанные по параметрам структуры  $\text{Cu}/5 \times (\text{Nb}/\text{Cu})$ , описанной в [135, 136], для нескольких значений температур

Температура 6.4 К, соответствующая нижней кривой, принадлежит окрестности  $T_c = 6.7 \text{ К}$ . Мы видим, что при  $T \sim T_c$  значения параметра  $z_0$ , соответствующие делокализованному состоянию сверхпроводящего конденсата, почти равновозможны (на самом деле имеют место слабо выраженные максимумы в серединах сверхпроводящих слоев). На следующих четырех кривых, рассчитанных для

температур 6.1 К, 5.9 К, 5.3 К, 4.9 К, отчетливо видно, что верхнему критическому полю  $H_{c2||}$  соответствуют локальные максимумы в серединах крайних  $S$ -слоев структуры. Это означает, что сверхпроводящий конденсат сконцентрирован большей частью у одной из поверхностей образца. На верхней кривой, на рисунке 5.7, рассчитанной для температуры 4.3 К, различие между локальными максимумами в крайних  $S$ -слоях и в центральном  $S$ -слое уже значительно меньше. При еще большем удалении в область низких температур локальные максимумы «выравниваются», то есть, зарождение сверхпроводящей фазы происходит практически с равной вероятностью в любом из  $S$ -слоев; одновременно, как показывает расчет, сверхпроводящий конденсат оказывается полностью локализованным в  $S$ -слое.

Очевиден вопрос, каким образом проявляется на эксперименте поверхностный или эффект внешних  $S$ -слоев. Понятно, что, поскольку сверхпроводящий конденсат образуется вначале у поверхности образца, эффект симметрии на характеристиках  $H_{c2||}(T)$ , обсуждавшийся в предыдущем разделе должен обнаруживаться в значительно меньшей степени, и в непосредственной окрестности критической температуры. Именно это и показал эксперимент на серии структур  $\text{Cu}/n_b \times (\text{Nb}/\text{Cu})^1$ . Этот же эксперимент выявил другой удивительный эффект – эффект симметрии на резистивных характеристиках; резистивные характеристики структур  $S$ -типа, находящихся во внешнем параллельном магнитном поле, оказались уширенными в интервале температур  $T \in (0.6T_c, 0.9T_c)$ , в то время как для структур  $N$ -типа имело место обычное вертикальное падение зависимости  $R(T)$  в ноль. На рисунке 5.8(а) приведены резистивные характеристики уже обсуждавшейся в этом разделе структуры  $\text{Cu}/5 \times (\text{Nb}/\text{Cu})$ , на рисунке 5.8(б) – резистивные характеристики структуры  $N$ -типа (все характеристики этих структур имеют одинаковую форму). На рисунке 5.9 приведены зависимости  $H_{c2||}(T)$  для структуры  $\text{Cu}/5 \times (\text{Nb}/\text{Cu})$ , полученные на основе характеристик  $R(T)$  по критериям 90 % (квадраты) и 10 % (круглые) символы.

---

<sup>1</sup> Данные этого эксперимента опубликованы лишь частично в [135, 136].

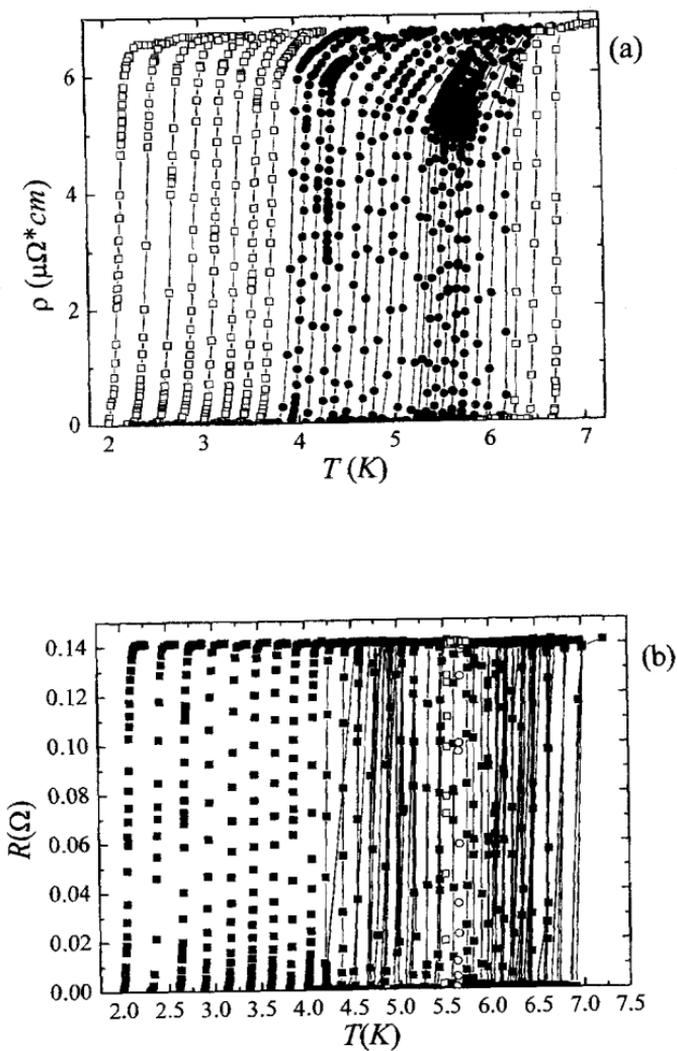


Рис. 5.8. (а) Резистивные характеристики структуры  $Cu/5 \times (Nb/Cu)$ , тёмными символами изображены уширенные характеристики; (б) Резистивные характеристики структуры  $N$ -типа

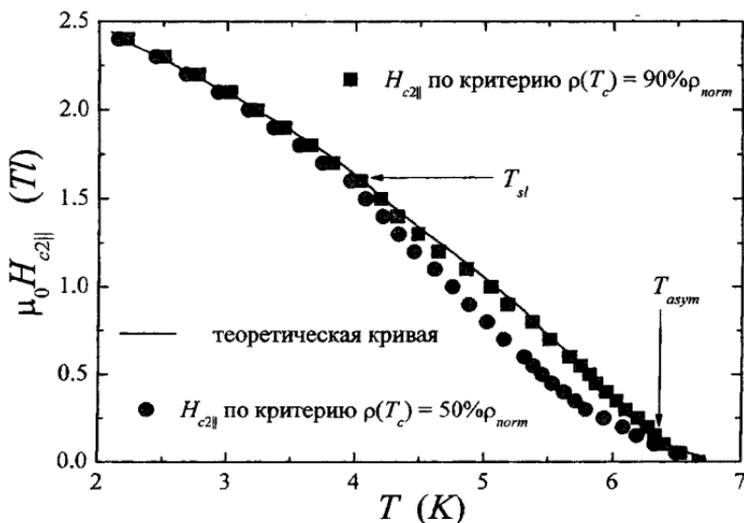


Рис. 5.9. Характеристики  $H_{c2||}(T)$  для структуры  $\text{Cu}/5 \times (\text{Nb}/\text{Cu})$ , полученные по двум критериям из характеристик  $R(T)$  на рис. 8(а). Теоретическая кривая  $H_{c2||}(T)$

Анализируя зависимости на рисунках 5.7 – 5.9, имеем следующее. Уширение характеристики  $R(T)$  начинается в точке перехода ( $T_{asym}$ ) от симметричных состояний сверхпроводимости конечной структуры (при  $T < T_{asym}$ ) к состояниям «поверхностной»<sup>1</sup> сверхпроводимости (при  $T > T_{asym}$ ). При этом зародыш сверхпроводящей фазы перемещается из центра к одной из поверхностей образца. Резистивный переход становится вновь резким, как только достигается предел сверхрешетки (при температуре  $T_{sl}$ ) с соответствующим приобретением ее симметрий. При этом зародыш сверхпроводящей

<sup>1</sup> Под обычной поверхностной сверхпроводимостью понимают состояние полубесконечной, среды, соответствующее третьему критическому полю. В нашем случае, как будет показано ниже, важны обе поверхности образца. Вместе с тем рассматриваемое состояние несколько отличается от критического состояния толстого образца однородного сверхпроводника тем, что зародыш сверхпроводящей фазы может образовываться только в одном из двух крайних  $S$ -слоев

фазы полностью локализован в любом из  $S$ -слоев. Таким образом, уширение резистивной характеристики имеет место для интервала температур, соответствующего состоянию «поверхностной» сверхпроводимости; это состояние характеризуется двукратно вырожденным собственным значением  $H_0$ . В связи с этим, обратим внимание на прямую зависимость ширины резистивного перехода,  $\Delta H = H_{c2\parallel}(90\%) - H_{c2\parallel}(10\%)$ , от разности между наибольшим и наименьшим локальным максимумом функции  $H_0(z_0)$ <sup>1</sup>.

Между тем, приведенные наблюдения, во-первых, не выявляют процесс, приводящий к затягиванию резистивного перехода в сверхпроводящее состояние, и, во-вторых, не объясняют, почему для структур  $N$ -типа, при наличии тех же факторов, резистивная характеристика не уширяется. Обе проблемы получают решение при рассмотрении околоскритического состояния структур. Для анализа окрестности верхнего критического поля  $H_{c2\parallel}(T)$  на температурном интервале  $(T_{sl}, T_{asym})$  используем теорию возмущений, построенную для исследования околоскритического состояния однородных сверхпроводников [4]. При этом в качестве исходного (нулевого) приближения для конденсатной волновой функции следует взять, так же как и в случае толстой пленки однородного сверхпроводника [6, 119, 120], функцию

$$\Psi^{(0)}(\mathbf{r}) = c_1 e^{ikx} \psi(z) + c_2 e^{-ikx} \psi(-z). \quad (5.23)$$

Опуская длинные вычисления, включающие построение первого приближения для волновой функции, построение функции распределения магнитного поля в сверхпроводнике, реализацию вариационного принципа для функционала ГЛ, приведем результат:  $c_1^2 = c_2^2$ . Этот результат, оказавшийся таким же, как и для толстой пленки сверхпроводника, означает, что в центральном слое (вдоль плоскости зеркальной симметрии) образуется цепочка абрикосовских вихрей с периодом  $\Delta x = \pi/k = \pi \zeta_H^2 / z_0$ . Для обсуждаемого интервала значений магнитного поля справедливо соотношение  $\Delta x < 0.4 \zeta_H$ . Имея также в виду, что для рассматриваемых структур

<sup>1</sup> В нашем случае  $H_{c2\parallel}(50\%) \approx H_{c2\parallel}(10\%)$ .

длины когерентности  $\xi_S \sim \xi_N \sim 15$  нм, получим, что в центральном слое сверхпроводимость оказывается почти полностью подавленной. Для структур  $S$ -типа этим слоем является  $S$ -слой, для структур  $N$ -типа –  $N$ -слой. Здесь мы видим первое отличие в отклике структур противоположных типов симметрии на внешнее магнитное поле: образование вихревой цепочки в  $N$ -слое является энергетически более выигрышным, чем в  $S$ -слое. Далее, при включении измерительного транспортного тока возникает сила Лоренца, действующая на абрикосовские вихри. Вихревая цепочка структур  $N$ -типа устойчива по отношению к действию этой силы, поскольку сила пиннинга, возникающая при смещении вихрей, действует по направлению от  $S$ -слоя к  $N$ -слою. Напротив, вихревая цепочка в структуре  $S$ -типа преодолевает гораздо меньший потенциальный барьер поля пиннинга, чтобы занять энергетически более выигрышное для сверхпроводящего конденсата положение в соседнем  $N$ -слое. Но тем самым нарушается симметрия исходного состояния нулевого приближения (5.23) (нули волновой функции  $\Psi^{(0)}(\mathbf{r})$  смещаются из плоскости симметрии). Это нарушение симметрии равносильно смещению параметра  $z_0$  внутрь структуры. В соответствии с рис. 7 новому значению параметра соответствует меньшее критическое поле. Следовательно, уменьшив значение внешнего магнитного поля, мы вновь получили критическое поле и безвихревое состояние – вихри, сместившись в  $N$ -слой, исчезли, но полная сверхпроводимость осталась не достигнутой. При дальнейшем понижении внешнего магнитного поля процесс повторяется до достижения значения наименьшего локального максимума.

В итоге, эффект симметрии на резистивных характеристиках мы объясняем тем, что в плоскости симметрии структуры образуется цепочка вихрей, которая устойчива в структурах  $N$ -типа и неустойчива в структурах  $S$ -типа.

### **5.5. Критическое состояние $S/N$ структур в наклонном магнитном поле. Размерные свойства сверхпроводящей фазы. Эффект симметрии на угловых характеристиках**

В данном разделе приводятся результаты исследований, опубликованные в [128 – 134].

Выберем оси координат так, что вектор напряженности внешнего магнитного поля имеет вид  $\mathbf{H}(0, H \cos \theta, H \sin \theta)$ ; значениям угла при  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi/2$  соответствуют уже рассмотренные случаи параллельного и перпендикулярного слоям верхнего критического поля. Для вектор-потенциала  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  выбираем калибровку  $(Hz \cos \theta - Hy \sin \theta, 0, 0)$ , тогда волновая функция ГЛ может быть представлена в виде  $\Psi(\mathbf{r}) = e^{ikx} \psi(y, z)$ . Соответственно, функционал ГЛ может быть записан в форме

$$\Omega = \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-L/2}^{L/2} dz \left\{ \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right)^2 - \eta(z, T) \psi^2(y, z) + \zeta_H^{-4} \cdot (z \cos \theta - z_0 - y \sin \theta)^2 \cdot \psi^2(y, z) + \mathbf{B}^2(\mathbf{r}) \right\}, \quad (5.24)$$

а уравнение ГЛ для функции  $\psi(y, z)$  имеет вид

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \eta(z, T) - \frac{(z \cos \theta - z_0 - y \sin \theta)^2}{\zeta_H^4} \right\} \psi(y, z) = 0. \quad (5.25)$$

Параметр  $z_0$  в (5.24), (5.25) определен, как и ранее, и может быть выражен очевидной формулой, полученной из вариационного принципа:

$$z_0 = \bar{z} \cos \theta - \bar{y} \sin \theta = \bar{z} \cos \theta. \quad (5.26)$$

(Начало системы отсчета может быть выбрано так, что  $\bar{y} = 0$ .)

По переменной  $z$  граничные условия (5.20) и условия сшивания (5.21) для функции  $\psi(y, z)$  остаются прежними. Уравнение (5.25) дополняется также граничными условиями на бесконечности

$$\psi(y, z) \Big|_{y \rightarrow \pm \infty} = 0. \quad (5.27)$$

Граничная задача (5.20), (5.27) для плоского образца однородного сверхпроводника была исследована в работе [119] посредством пертурбационного разложения (до второго порядка включительно) по перекрестному члену  $V(y, z) = -2\zeta_H^{-4}(z \cdot \cos \theta - z_0)y \sin \theta$  с очевидным условием  $\theta \ll 1$ . В качестве невозмущенного принимался оператор

$$\hat{\mathcal{L}} = \hat{L}_1 + \hat{L}_2, \quad (5.28)$$

где

$$\hat{L}_1 = -\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \zeta_H^{-4} y^2 \sin^2 \theta, \quad (5.29)$$

$$\hat{L}_2 = -\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \eta(z; T) + \zeta_H^{-4} \cdot (z - \bar{z})^2 \cos^2 \theta. \quad (5.30)$$

(В случае однородного сверхпроводника  $\eta(z; T) \rightarrow 1$ ).

Выбор  $\hat{\mathcal{L}}$  понятен: в уравнении  $(\hat{L}_1 + \hat{L}_2)\psi(y, z) = 0$  переменные разделяются. Далее теория возмущений строится вполне очевидным образом; соответствующие построения мы здесь не приводим.

Вариационное решение задачи (5.24) – (5.27), (5.20) для слоистой структуры представляется более приемлемым. Можно показать, что вполне осуществима процедура построения вариационного решения на  $K$ -элементном базисе:

$$\tilde{\Psi}(y, z) = \sum_{n=0}^K f_n(\beta y) g_n(z), \quad (5.31)$$

где  $f_n(t)$  – функции Чебышева – Эрмита [374], а параметр  $\beta$  определяется минимизацией  $\Omega$ .

Здесь мы ограничимся простейшим вариационным принципом, выбирая, как и в задаче о плоском однородном сверхпроводнике [381], пробную волновую функцию с разделенными переменными:

$$\tilde{\Psi}(y, z) = f(y)g(z). \quad (5.32)$$

В этом случае сразу получаем для  $f(y)$  решение

$$f(y) = \exp\left\{-\frac{y^2}{2\zeta_H^2} |\sin \theta|\right\}, \quad (5.33)$$

а для  $g(z)$  – уравнение

$$g''(z) + \left(\eta(z; T) - \cos^2 \theta \cdot \zeta_H^{-4} (z - \bar{z})^2 - |\sin \theta| \zeta_H^{-2}\right) g(z) = 0. \quad (5.34)$$

Уравнение (5.34) дополняется граничными условиями

$$g'(\pm L/2) = 0 \quad (5.35)$$

и условиями сшивания

$$(g'/g)_{|_S} = P(g'/g)_{|_N}. \quad (5.36)$$

В результате решения граничной задачи (5.12) – (5.14) и получаем оценку зависимости  $H_{c2}(\theta)$ .

Выясним, насколько эта, достаточно грубая, оценка может быть близка или далека от истинной зависимости  $H_{c2}(\theta)$ . В соответствии с теорией Сен-Жама – де Жена – Тинкхама вид характеристики  $H_{c2}(\theta)$  сверхпроводника конечной толщины определяется взаимодействием зародыша сверхпроводящей фазы с поверхностями образца и зависит от относительной толщины образца  $L/\zeta_H$ . А именно, при малой толщине  $L$  образца имеет место режим тонкой пленки, определяемый предельной формулой Тинкхама

$$\frac{H_{c2, film}(\theta) |\sin \theta|}{H_{c2, \perp}} + \left( \frac{H_{c2, film}(\theta) \cos \theta}{H_{c2, \parallel}} \right)^2 = 1. \quad (5.37)$$

В этом случае имеет место двумерное поведение, то есть плотность сверхпроводящего конденсата не зависит от переменной  $z$ . При большой толщине образца имеет место режим полубесконечной среды с критическим полем  $H_{c3}(\theta)$  (аппроксимация этой зависимости получена в [381]). В этом случае зародыш сверхпроводящей фазы образуется у поверхности образца. Как в первом, так и во втором случае, а также в случае образца конечной толщины ( $L \sim \zeta_H$ ) зависимость  $H_{c2}(\theta)$  характеризуется пиком в точке  $\theta = 0$ . Напротив, предел однородного анизотропного безграничного сверхпроводника выражается всюду гладкой 3D-характеристикой  $H_{c2, \infty}(\theta)$  (что очевидно). В этом случае все положения зародыша сверхпроводящей фазы равновозможны. На эксперименте описанные типы характеристик могут быть выявлены вычислением крутизны характеристики  $H_{c2}(\theta)$  в нуле,  $\alpha(\theta = 0) = H_{c2}(0)^{-1} H'_{c2}(\theta) \Big|_{\theta \rightarrow +0}$ . В частности, поверхностная сверхпроводимость характеризуется значением  $\alpha(0) = -1.35$ , пределу тонкой пленки соответствует  $\alpha(0) = -H_{c2\parallel}/2H_{c2\perp}$ , и, разумеется, в случае 3D поведения  $\alpha(0) = 0$ . В нашем случае, при выборе пробной функции в виде (5.32), величина  $\alpha(\theta)$  определяется, как можно показать, формулой

$$\alpha(\theta) = \frac{\cos \theta \cdot \left( H_{c2}(\theta) \sin \theta \cdot \tilde{\sigma}_z^2(\theta) - \text{sgn}(\theta) \right)}{H_{c2}(\theta) \cos^2 \theta \cdot \tilde{\sigma}_z^2(\theta) + |\sin \theta|}, \quad (5.38)$$

где  $\tilde{\sigma}_z^2(\theta) \equiv 2\pi\sigma_z^2(\theta)/\Phi_0$ ; параметр  $\sigma_z^2 \equiv \overline{(z - \bar{z})^2}$  количественно выражает степень локализации сверхпроводящего конденсата. В частности

$$\alpha(0) = \frac{\Phi_0}{2\pi H_{c2\parallel} \sigma_z^2(0)}. \quad (5.39)$$

Таким образом, из (5.17) следует, что, в рамках данного приближения, ни при каких температурах зависимость  $H_{c2}(\theta)$  не может быть гладкой при  $\theta = 0$ . Казалось бы, что это сильно ограничивает возможность использования уравнений (5.34) – (5.36). Например, мы видели (см. главу 1), что в экспериментах Шуллера на многослойных структурах Nb/Cu в температурной области  $T > T^*$ , соответствующей 3D характеру зависимости  $H_{c2\parallel}(T)$ , наблюдалось и 3D поведение зависимости  $H_{c2}(\theta)$ . Но с другой стороны, как показали эксперименты [63], для многослойных структур Nb/Pd 3D-поведение не наблюдается, практически, ни в какой области температур. Это можно объяснить тем, что множество плоскостей раздела  $S$  и  $N$  слоев создает «интегрированный поверхностный эффект». Этот эффект легко увидеть формально, включив, по методу Лагранжа, условия сшивания в (5.21) в виде потенциала  $V_I(z)$ , относительный вклад которого увеличивается с увеличением количества границ. Можно поэтому полагать, что для  $S/N$  структур в окрестности температуры  $T^*$  и тем более при температурах двумерного характера сверхпроводимости тривиальный выбор (5.32) приведет к разумному результату.

Приведем пример расчета, на основе (5.32), характеристики  $H_{c2}(\theta)$  для 3-слойной (1 бислой) и 8-бислойной  $S/N$ -структуры. Трехслойная структура взята как аналог тонкой пленки однородного сверхпроводника. При расчете приняты следующие соотношения для толщин и корреляционных длин.  $d_N = 0.5d_S = \xi_S(0) = 2\xi_N(T_c)$ . Данный выбор примерно соответствует значениям параметров системы Nb/Pd, использованных при анализе экспериментальных данных в [127, 136]. Температурная зависимость  $H_{c2\parallel}(T) = H_{c2}(T, \theta = 0)$ , рассчитанная по этим параметрам, подобна характеристике 10-бислойной структуры, приведенной на рисунке 5.6.(b); 3D-2D кроссовер имеет место при температуре  $T^* = 0.86T_c = 0.44T_S$ . Для 1-бислойной структуры зависимость  $H_{c2\parallel}(T)$  имеет 2D-характер практически для всех температур. На рисунках 5.10 и 5.11 представлены графики зависимостей  $H_{c2}(\theta)$ , рассчитанных при низких температурах и температурах, близких к  $T^*$ , соответственно.

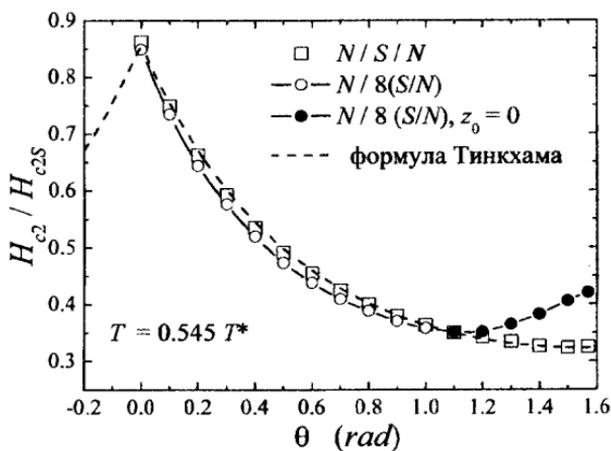


Рис. 5.10. Зависимости  $H_{c2}(\theta)$  для структур  $N/8 \times (S/N)$  (сплошная линия с круглыми символами), и  $N/S/N$  (светлые квадраты)

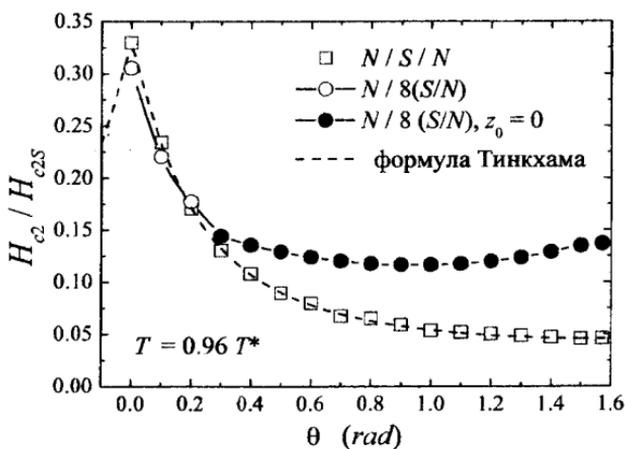


Рис. 5.11. Зависимости  $H_{c2}(\theta)$  для структур  $N/8 \times (S/N)$  (сплошная линия с круглыми символами), и  $N/S/N$  (светлые квадраты)

Из рисунков видно, что для 3-слойной структуры зависимость  $H_{c2}(\theta)$  точно воспроизводится формулой Тинкхама при любых углах и температурах. Для 8-бислойной структуры, как видно из Рис.5.10, при низких температурах 2D-поведение имеет место для широкого интервала углов. При движении к более высоким температурам (Рис.5.11) интервал 2D-поведения по углам  $\theta$  сужается. При этом аппроксимация 2D участка кривой формулой Тинкхама остается приемлемой. Обратим внимание на то, что переход к 3D поведению в точке  $\theta^*$  (примерно 1.1 рад для температуры  $0.545T^*$  и 0.3 рад для  $T = 0.96T^*$ ) сопровождается изломом кривой  $H_{c2}(\theta)$ . В этой точке (точке кроссовера) происходит смена ветвей угловой характеристики. При значениях  $\theta < \theta^*$  критическое состояние описывается волновой функцией (5.32) с асимметричной  $z$ -составляющей  $g(z)$ , локализованной в  $S$ -слое ( $\sigma_z \delta d_S, \bar{z} \neq 0$ ); при углах  $\theta > \theta^*$  критическому состоянию соответствует симметричная делокализованная функция  $g(z)$  ( $\sigma_z \tau 2d_S, \bar{z} = 0$ ).

Эксперимент на Nb/Pd показал [129, 130, 133, 134], что измеренные характеристики  $H_{c2}(0)$  на качественном уровне хорошо объясняются на основе приведенного простого анализа. Более того, на эксперименте подтверждается и эффект симметрии, а именно: существенная разница угловых характеристик структур  $S$ -типа и  $N$ -типа. Если для структур  $N$ -типа выявляется неаналитичность характеристики  $H_{c2}(\theta)$  в точке кроссовера  $\theta^*$ , то для структур  $S$ -типа 2D-3D переход не выражен (см. рис. 5.12 и 5.13).

Эффект симметрии на угловых зависимостях, очевидно, объясняется так же как и на температурных зависимостях верхнего параллельного критического поля. В 9-бислойной структуре, изменяем ли мы температуру, или поворачиваем вектор напряженности внешнего магнитного поля, центр зародыша сверхпроводящей фазы остается в центральном  $S$ -слое. В 10-бислойной структуре происходит смещение центра зародыша, вместе с изменением его топологии и при  $T^*$ , и в точке  $\theta^*$ .

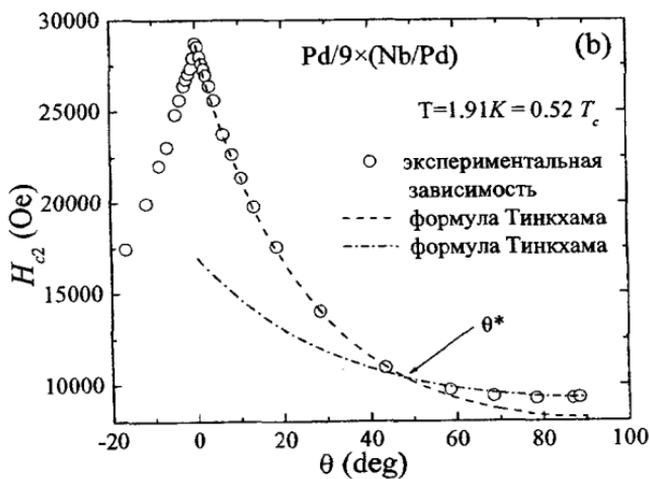
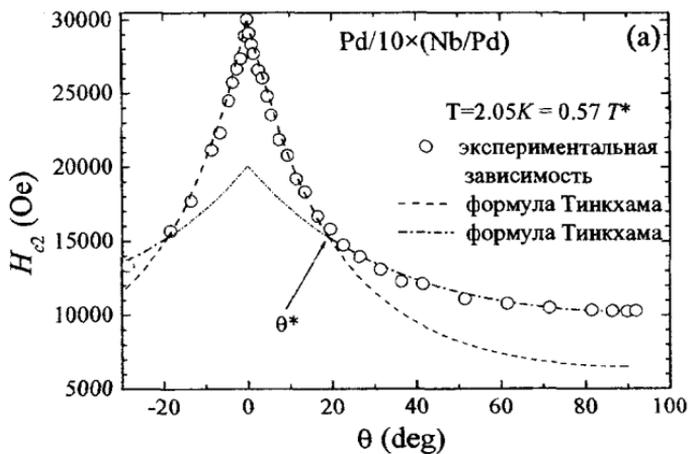


Рис. 5.12. Зависимости  $H_{c2}(\theta)$  для структур Pd/10×(Nb/Pd) (a) и Pd/9×(Nb/Pd) (b)

В заключение данного раздела заметим, что, использованный упрощенный вариационный принцип оказывается вполне пригодным для качественного и даже полуколичественного объяснения эффектов на угловых характеристиках. Вместе с тем с его помощью достаточно бесперспективно фиттировать угловую характеристику в 3D-части. Кроме того, с помощью изложенного метода можно получить «проекцию» распределения сверхпроводящего конденсата на ось  $OZ$ , но нельзя получить само распределение; один из примеров такого распределения, полученного с помощью более сложного вариационного принципа, приводится на рис. 5.13.

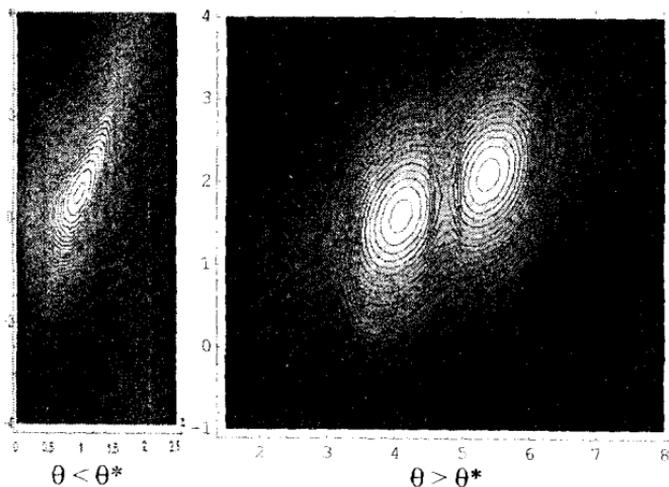


Рис. 5.13. Контурные графики функции  $\psi(y, z)$  для структуры  $N$ -типа при двух углах наклона вектора  $\mathbf{H}(\theta)$  к поверхности слоев. Яркость пропорциональна значению функции в данной точке. Координатные оси масштабированы на  $d_s$ .

Завершая главу, отметим основной ее результат: оказалось возможным установить соответствие между симметричными и топологическими свойствами сверхпроводящего конденсата, находящегося в критическом состоянии, и критическими характеристиками  $S/N$  структур.

## Глава 6. Пиннинг вихрей и пик-эффект

В данной главе кратко рассматривается в рамках модели ГЛ одна из проблем описания смешанного состояния в  $S/N$  структурах, а именно проблема пиннинга решетки абрикосовских вихрей. Из решения данной проблемы автоматически вытекает решение задачи об определении критического тока в зависимости от материальных параметров структуры, а также от внешних параметров (напряженности магнитного поля и температуры). Но предварительно затрагивается вопрос о безвихревом состоянии в сверхпроводниках второго рода, обладающих плоскими границами; в связи с этим анализируется понятие нижнего критического поля.

### 6.1. Безвихревое состояние полубесконечных структур

В данной главе принимается та же система координат, что и в предыдущих главах. Выбор начала системы координат либо оговаривается, либо будет понятен из контекста. Напряженность внешнего магнитного поля направлена вдоль оси  $OY$ .

Уравнения ГЛ, описывающие мейсснеровское состояние в слое сверхпроводника, имеют вид.

$$\begin{cases} \frac{1}{\kappa^2} \Psi''(z) + (\eta(z) - \Psi^2(z) - A^2(z)) \Psi(z) = 0, \\ A''(z) - \Psi^2(z) A(z) = 0. \end{cases} \quad (6.1)$$

В (6.1)  $A(z)$  —  $x$ -компонента векторного потенциала  $\mathbf{A}$  ( $A(z), 0, 0$ ), так что величина индукции магнитного поля  $B(z) = A'(z)$ . Пространственные переменные в (6.1) масштабированы на величину  $\delta$  (глубину проникновения магнитного поля в сверхпроводящий материал), а магнитное поле — на величину  $H_{cm} \sqrt{2}$ , где  $H_{cm}$  — термодинамическое критическое поле сверхпроводящего материала;  $\kappa$  — параметр ГЛ; ступенчатая функция  $\eta(z)$  принимает значение 1 в области  $S$ -слоев, и —  $\xi_S^2(T)/\xi_N^2(T)$  в области  $N$ -слоев соответственно.

Уравнения (6.1) дополняются граничными условиями, которые очевидны в случае сверхпроводника конечной толщины  $L$ :

$$\Psi'(0) = 0, \quad A'(0) = H_0, \quad (6.2)$$

$$\Psi'(L) = 0, \quad A'(L) = H_0. \quad (6.3)$$

В случае полубесконечной многослойной структуры граничные условия (6.3) должны быть заменены на условия

$$\Psi(z \rightarrow \infty) \rightarrow \Psi_{H=0}(z), \quad A(\infty) = 0. \quad (6.4)$$

Если рассматривается полубесконечный однородный сверхпроводник, то правой асимптотикой волновой функции является  $\Psi_{H=0}(z) = 1$ .

Рассмотрим задачу об однородном полубесконечном сверхпроводнике (сверхпроводник занимает полупространство  $z > 0$ ). В этом случае коэффициентная функция в (6.1)  $\eta(z) \equiv 1$ . Из существования решений данной граничной задачи для системы уравнений (6.1) следуют собственные значения внешнего магнитного поля  $H_0$ , зависящие от начального значения параметра  $\Psi(0) \equiv \Psi_0$  волновой функции. На рисунке 6.1 представлен график  $\Psi_0(H_0)$ , полученный в результате численного решения граничной задачи (6.2), (6.4) для системы (6.1) при  $\kappa = 3$ . Из рисунка видно, что мейсснеровское состояние может существовать вплоть до некоторого значения внешнего магнитного поля  $H_{c1}^*$ , значительно превышающего нижнее критическое поле однородного бесконечного проводника, и несколько большего, чем  $H_{cm}$ . При этом, для значений внешнего поля  $H_{cm} < H_0 < H_{c1}^*$  возможны два состояния сверхпроводимости, соответствующие двум начальным значениям  $\Psi_0$  волновой функции. Графики функций этих состояний  $\Psi(z)$  вместе с соответствующими кривыми распределения магнитного поля  $H(z)$ , полученные при  $H_0 \approx H_{cm}$  представлены на рисунке 6.2.

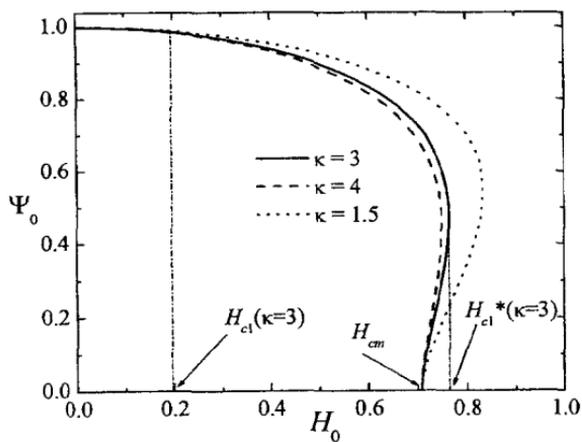


Рис. 6.1. Кривая  $\Psi_0(H_0)$ , точки которой доставляют решение граничной задачи (6.1), (6.2), (6.4) при  $\kappa = 3, 4, 1.5$

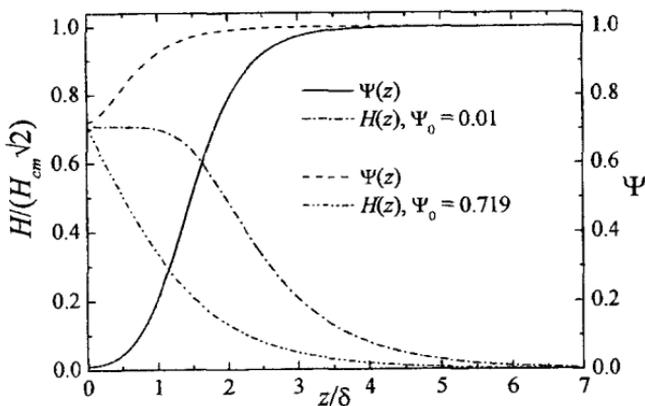


Рис. 6.2. Функции состояний  $\Psi(z)$  и распределения магнитного поля  $H(z)$ , рассчитанные при  $H_0 \approx H_{cm}$  и  $\kappa = 3$

Одно из этих состояний, с большим начальным значением  $\Psi_0 \approx 0.72$ , вполне тривиально: магнитное поле проникает в сверхпроводник на глубину  $\sim \delta$ , волновая функция  $\Psi(z)$  на этом же расстоянии почти достигает асимптотического значения 1. Второе возможное состояние, соответствующее очень малому начальному значению  $\Psi_0$ , характеризуется полным проникновением магнитного поля в слой сверхпроводника толщины  $\delta$ , дальше все происходит, как и в первом состоянии; волновая функция  $\Psi(z)$  быстро растет на интервале  $(\delta, 2\delta)$  и почти достигает асимптотики на глубине  $\sim 3\delta$ ; на той же глубине магнитное поле можно считать эффективно подавленным.

В результате возникает следующая возможная картина поведения полубесконечного сверхпроводника во внешнем магнитном поле. При увеличении поля от нуля мейсснеровское сверхпроводящее состояние сохраняется вплоть до  $H_{c1}^*$ , при  $H_0 = H_{c1}^*$  амплитуда параметра порядка падает от конечного значения до нуля. Иначе говоря, при  $H_0 = H_{c1}^*$  происходит фазовый переход первого рода. Если же напряженность магнитного поля убывает от значений, больших, чем  $H_{c1}^*$ , то фазовый переход происходит при значении  $H_0$ , равном термодинамическому критическому полю  $H_{cm}$ . В силу этого термодинамическое критическое поле (для сверхпроводников второго рода) можно определить как поле, при котором исчезает мейсснеровское состояние сверхпроводимости в полубесконечном сверхпроводнике. Полю  $H_{c1}^*$  очевидно соответствует переохлажденное состояние. Данный результат согласуется с результатом расчета первого критического поля как поля, при котором в сверхпроводник проникает одиночный вихрь [4]. А именно, для полубесконечного сверхпроводника (в соответствии с обозначениями [4])  $H_{c1}' = H_{cm}$ .<sup>1</sup> Между тем, наблюдение безвихревого состояния для значений поля в промежутке  $(H_{c1}, H_{cm})$  оказывается сложным из-за неидеальной границы сверхпроводника – подробно этот вопрос рассмотрен в [4].

---

<sup>1</sup> Обратим внимание на неэквивалентность  $H_{c1}'$  и  $H_{c1}$ .  $H_{c1}$  определяется как наименьшее поле, при котором существование вихрей в сверхпроводнике энергетически выгодно. Гладкая поверхность создает энергетический барьер для вихрей, этот барьер преодолевается, если увеличить поле до значения  $H_{c1}'$ .

Задача о безвихревом состоянии полубесконечной слоистой структуры оказывается более громоздкой. Напротив, для  $S/N$  структуры с малым числом бислоев решение строится проще, чем для образца однородного сверхпроводника, поскольку устойчивость и сходимость численного метода здесь лучше (толщины слоев нормального и сверхпроводящего материалов порядка длины когерентности сверхпроводящего материала  $\xi_S$ ); решение существует для всех  $H_0$  из области  $[0, H_{c2}]$ . По сравнению с обычным безвихревым состоянием в данном случае имеет место существенная особенность: магнитное поле практически не выталкивается из сверхпроводника. Для иллюстрации данного утверждения приводим графики распределения магнитного поля  $H(z)$  в трехслойной структуре (см. рис. 6.3). Видно, что минимальное значение поля отличается от значения напряженности внешнего магнитного поля на величину не более 7%. Критические поля, вычисленные по приведенной процедуре, отличаются следующим. Для трехслойной структуры рассчитанное по одномерной нелинейной модели поле совпадает с верхним критическим полем, соответствующим симметричному решению. Для пятислойной структуры симметричное решение не соответствует наибольшему из критических полей – существует несимметричное решение, дающее аналог полю  $H_{c3}$  однородного полубесконечного сверхпроводника.

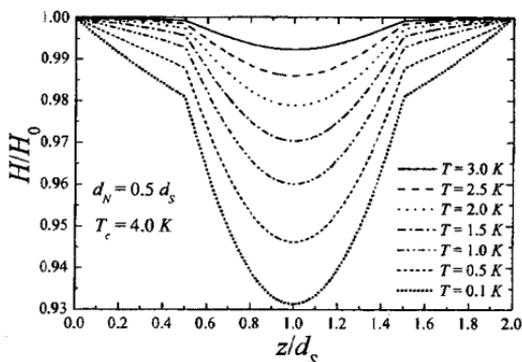


Рис. 6.3. Распределение магнитного поля в структуре  $N/S/N$ , рассчитанное для нескольких значений температуры

## 6.2. Силы пиннинга в $S/N$ структуре

Выражение для силы пиннинга решетки абрикосовских вихрей, образующейся при промежуточных значениях напряженности внешнего магнитного поля, можно получить с помощью формализма коллективных переменных. Вводим в функционал ГЛ переменную  $z_v$ , определяющую смещение конденсата относительно структуры, заменяя  $\eta(z)$  на  $\eta(z-z_v)$ :

$$\Omega_v = \int d\mathbf{r} \left\{ \left| \left( \frac{1}{\kappa} \nabla - i\mathbf{A}(\mathbf{r}) \right) \Psi(\mathbf{r}) \right|^2 - \eta(z-z_v) |\Psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{2} |\Psi(\mathbf{r})|^4 + \mathbf{B}^2(\mathbf{r}) \right\}. \quad (6.5)$$

Тогда величина

$$\begin{aligned} -\partial\Omega_v / \partial z_v = F_{p,S(N)} = \mp \sum_{l=-[N_{bl}/2]}^{[N_{bl}/2]} & \left\{ \varphi^2 \left( \frac{d_{S(N)}}{2} - z_v + ld \mp 0 \right) - \right. \\ - \varphi^2 \left( -\frac{d_{S(N)}}{2} - z_v + ld \pm 0 \right) & + \frac{\xi_S^2(T)}{\xi_N^2(T)} \left[ \varphi^2 \left( \frac{d_{S(N)}}{2} - z_v + ld \pm 0 \right) - \right. \\ \left. \left. - \varphi^2 \left( -\frac{d_{S(N)}}{2} - z_v + ld \mp 0 \right) \right] \right\} & + F_{e,S(N)} \quad (6.6) \end{aligned}$$

определяет «возвращающую силу», действующую на конденсат.

В (6.6) индекс  $S(N)$  и верхний (нижний) знак относится к структуре  $S$ - ( $N$ -) типа; слагаемое  $F_{e,S(N)}$  в (6.6) определено формулой

$$F_{e,S(N)} = \eta_{S(N)} \left[ \varphi^2 \left( \frac{L}{2} - z_v \right) - \varphi^2 \left( -\frac{L}{2} - z_v \right) \right], \quad (6.7)$$

в которой коэффициенты  $\eta_S = \xi_S^2(T)/\xi_N^2(T)$  и  $\eta_N = -1$ . Функции  $\varphi^2(z)$  означают среднее:

$$\varphi^2(z) \equiv \left\langle |\Psi(x, z)|^2 \right\rangle_x. \quad (6.8)$$

Для того чтобы выделить в (6.6), (6.7) отклик вихревой системы на внешнее возмущение, очевидно из свободной энергии  $\Omega_v$  следует вычесть свободную энергию безвихревого состояния. Полученная при этом сила пиннинга  $F_p(z)$  обладает теми же общими свойствами, что и величина  $F_{p,S(N)}$ . Перечислим эти свойства.

Пусть функция (6.8) является четной, что можно допустить для равновесного состояния вихревой среды в рассматриваемых структурах. Тогда, во-первых, сразу видно, что  $F_p(0) = 0$ ; то есть положение  $z_v = 0$  является равновесным, как и следовало ожидать. Во-вторых, легко показать, что при бесконечно малом сдвиге вихревой решетки из положения равновесия сила пиннинга станет равной

$$\begin{aligned} \delta F_{p,S(N)}(\pm 0) = \mp \left( \frac{\xi_S^2(T)}{\xi_N^2(T)} + 1 \right) \cdot \sum_{l=0}^{[N_{bl}/2]} \left| \Delta f^2 \left( \frac{d_{S(N)}}{2} + ld \right) \right| \delta z_v \mp \\ \mp \frac{\xi_S^2(T)}{\xi_N^2(T)} f^2 \left( \frac{L}{2} \right), \end{aligned} \quad (6.9)$$

где  $\Delta f^2 \left( \frac{d_{S(N)}}{2} + ld \right)$  означает величину скачка усредненного

квадрата параметра порядка на  $l$ -й границе между  $S$ - и  $N$ -слоем. Из (6.9) видим, что сила пиннинга по знаку противоположна отклоне-

нию, то есть стремится вернуть вихревую решетку в положение равновесия. Формула (6.9) означает также, что сила пиннинга испытывает разрыв первого рода в нуле, и тем больший, чем больше количество слоев в структуре. Такое усиление неаналитического поведения силы пиннинга обеспечивает дополнительную устойчивость вихревой решетки по отношению к действию силы Лоренца, вызываемой транспортным током. Понятно, что соответственно возрастает и критический ток сверхпроводящего состояния.

Для сверхрешетки формула (6.9) упрощается:

$$F_p = \left( \frac{\xi_S^2(T)}{\xi_N^2(T)} + 1 \right) \cdot \sum_l \left\{ f^2 \left( z_v - \frac{d_S}{2} + ld \right) - f^2 \left( z_v + \frac{d_S}{2} + ld \right) \right\}. \quad (6.10)$$

В этом случае функция  $F_p(z)$  обладает дополнительными свойствами: 1) периодичность,  $F_p(z) = F_p(z + d)$ ; 2) является нечетной; 3) обладает нулями в серединах  $S$ - и  $N$ - слоев.

Кроме того, из выражения (6.10) следуют выводы (достаточно понятные из физических соображений) относительно поведения силы пиннинга  $F_p$  в зависимости от внешнего магнитного поля и температуры.

Во-первых, для значений внешнего магнитного поля, которым соответствуют решения с периодической, с периодом  $d$ , функцией  $f^2(z)$  сила пиннинга становится кратной числу бислоев, которое стремится к бесконечности. Таким решениям соответствует пик на зависимости силы пиннинга от величины внешнего магнитного поля. Следовательно, формула (6.10) демонстрирует пик-эффект как своеобразное резонансное явление. Очевидно, что  $d$ -периодической функции  $f^2(z)$  соответствуют решения для волновой функции  $\Psi(x, z)$ ,  $d$ -периодические вдоль оси  $OZ$  и обладающие различными периодами вдоль оси  $OX$ , определенными параметром  $H$ ; интервал значений магнитного поля, на котором эти решения существуют и устойчивы, составляет ширину пика на зависимости  $F_p(H)$ . Пример

конфигурации нулей и максимумов волновой функции с  $d$ -периодической зависимостью  $f^2(z)$  показан на рисунке 6.4.

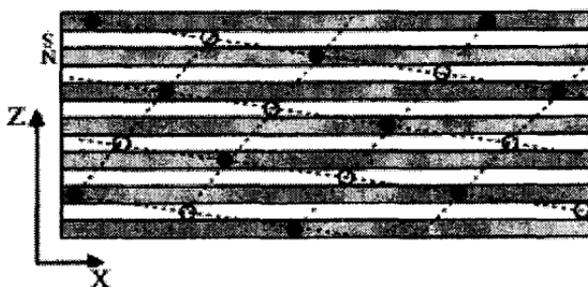


Рис. 6.4. Одна из возможных конфигураций вихревой решетки в  $S/N$  структуре. Нулям (максимумам) волновой функции соответствуют темные (светлые) кружки

Во-вторых, из (6.10) следует, что с ростом температуры сила пиннинга уменьшается как за счет уменьшения амплитуды волновой функции, так и за счет уменьшения значения разности функций  $f^2(z)$  на полупериоде (волновая функция меняется существенно на расстояниях порядка длины когерентности, растущей с увеличением температуры).

При дополнительных, достаточно общих допущениях оказывается возможным получить оценку зависимости  $F_p(H)$  во всем диапазоне изменения  $H$  (от  $H_{c1\parallel}$  до  $H_{c2\parallel}$ ) [48]. А именно, при толщинах  $S$ - и  $N$ - слоев порядка длины когерентности  $\xi_S$  и при температурах пик-эффекта можно получить аппроксимацию:

$$F_p(h) = (1-h) \cdot \{F_{p,0} + F_{p,1} h(1-h) \cdot \exp\left[-k\left(h^{-1/2} - h_m^{-1/2}\right)\right]\}, \quad (6.11)$$

если пиннингу подвержены вихревые нити по всей длине, и

$$F_p(h) = (1-h) \cdot \{F_{p,0} +$$

$$+ F_{p,1} h^{3/2} (1-h) \cdot \exp\left(-k\left(h^{-1/2} - h_m^{-1/2}\right)\right) \quad (6.12)$$

в случае образования кинков.

В формулах (6.11), (6.12)  $h \equiv H/H_{c2\parallel}$ ,  $h_m$  почти совпадает с масштабируемым на  $H_{c2\parallel}$  полем пик эффекта,  $F_{p,0}$  есть сила пиннинга в нулевом поле,  $F_{p,1}$  находится очевидным образом из экспериментального графика по максимальной силе пиннинга; параметр  $k$  определяет ширину пика на зависимости  $F_p(h)$ . Следовательно, по сути, этот параметр является единственным подгоночным.

Как оказалось, и формула (6.11) и формула (6.12) успешно описывают экспериментальные характеристики. На рисунке 6.5 приведены теоретические зависимости, полученные по этим формулам, вместе с экспериментальной характеристикой [35], измеренной для системы Nb/Pd с толщинами слоев  $d_S = 18.7$  нм и  $d_N = 13.2$  нм.

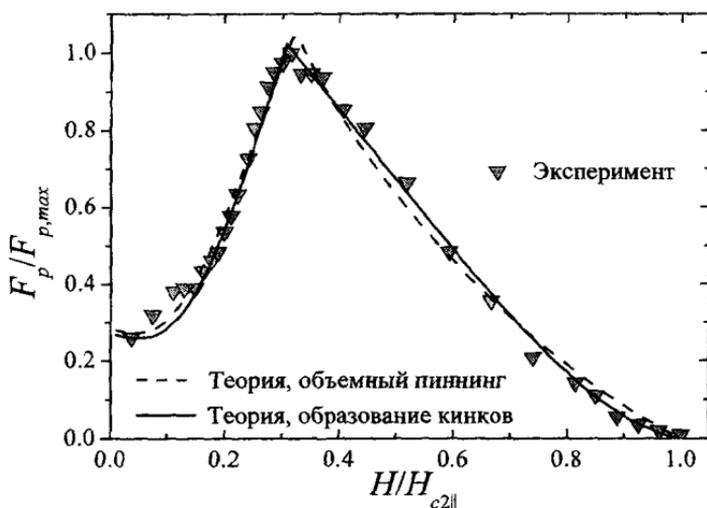


Рис. 6.5. Экспериментальная (символы) и теоретические (линии) зависимости силы пиннинга вихревой решетки в структуре Pd/10x(Nb/Pd)

### 6.3. Поле $d$ -периодического решения и поле пик-эффекта

Строго говоря, для определения поля пик-эффекта необходимо численно решать граничную задачу для уравнений ГЛ при заданных значениях напряженности внешнего магнитного поля с последующим вычислением силы пиннинга; это очень сложно. В [49] предложена оценка поля  $d$ -периодического решения, основанная на следующих соображениях. Для большинства экспериментальных  $S/N$  структур справедливо неравенство  $\kappa \gg 1$ , и более того, неравенство  $\kappa_S \gg 1$ . Поскольку в экспериментах используются преимущественно структуры с толщиной слоев порядка нескольких длин когерентности  $\xi_S$ , и поскольку рассматриваются значения поля порядка  $\Phi_0/2\pi d^2$  (окрестность пик-эффекта), усредненное значение магнитного поля по переменной  $x$   $\overline{H}(x, z) \equiv \overline{H}(z)$  испытывает малые колебания на одном периоде. Действительно, изменение магнитного поля внутри сверхпроводящего слоя оценивается величиной

$$\frac{\Delta \overline{H}(z)}{H_0} = \frac{\overline{H}(d_S/2) - \overline{H}_{\min}}{H_0} \propto \frac{1}{\kappa_S^2} \frac{d_S^2}{4\xi_S^2} \overline{f^2}(d_S/2) \ll 1,$$

и внутри нормального слоя – величиной

$$\frac{\Delta \overline{H}(z)}{H_0} = \frac{\overline{H}_{\max} - \overline{H}(d_S/2)}{H_0} \propto \frac{1}{\kappa_S^2} \frac{d_S d_N}{4\xi_S^2} \overline{f^2}(d/2) \ll 1$$

(координатная плоскость  $XOY$  совпадает с плоскостью симметрии  $S$ -слоя).

Поэтому принимаем, что в сверхпроводящем слое  $\overline{H}(z) \approx \overline{H}_{\min}$ , а в нормальном слое  $\overline{H}(z) \approx \overline{H}_{\max}$ . Нелинейный член  $|\Psi|^2\Psi$  в уравнениях учитываем амплитудной поправкой  $|\Psi|^2\Psi \rightarrow \beta\Psi$ . Это не приведет к большой ошибке, поскольку мы рассматриваем достаточно большие магнитные поля – как отмечалось в обзоре (см. гл. 1), типичные значения поля пик эффекта составляют  $(0.4-0.7)H_{c2\parallel}(T)$ . При

сравнимых толщинах сверхпроводящего и нормального слоев сверхпроводимость в  $S$ -слое таким полем подавляется ощутимо. Кроме того, для структур с высокой прозрачностью  $S$ - $N$  границ, а к таковым относится система Nb/Pd, для которой будут проанализированы экспериментальные данные, амплитуда волновой функции мала уже в отсутствии внешнего магнитного поля. В результате, учитывая дополнительное требование дифференцируемости векторного потенциала магнитного поля, придем к уравнениям (подробнее см. [49])

$$\begin{cases} f''(z) + [1 - \varepsilon - H_0 z^2] f(z) = 0, & z \in I_S, \\ f''(z) - \left[ \frac{\xi_S^2(T)}{\xi_N^2(T)} + \varepsilon + H_0 (z - d/2)^2 \right] f(z) = 0, & z \in I_N. \end{cases} \quad (6.13)$$

Здесь  $\varepsilon$  – параметр, слабо зависящий от величины внешнего магнитного поля  $H_0$ .

Из условия периодичности решения и с учетом условия (5.21) сшивания функции  $f(z)$  на  $S$ - $N$  границе, получим следующее алгебраическое уравнение

$$1 + P = 4P\alpha_N \frac{\Phi(\alpha_N + 1, 3/2; H_0 d_S d_N / 4)}{\Phi(\alpha_N + 1, 1/2; H_0 d_S d_N / 4)} + 4\alpha_S \frac{\Phi(\alpha_S + 1, 3/2; H_0 d_S^2 / 4)}{\Phi(\alpha_S + 1, 1/2; H_0 d_S^2 / 4)}. \quad (6.14)$$

Здесь  $\Phi(a, c; z)$  – вырожденная гипергеометрическая функция, и

$$\alpha_S = \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{1}{H_0} + \varepsilon \right), \quad \alpha_N = \frac{1}{4} + \frac{d_N}{4d_S} \left( \frac{\xi_S^2}{\xi_N^2 H_0} + \varepsilon \right). \quad (6.15)$$

Как видно из рисунка 6.6, зависимости, построенные в соответствии с (6.14), (6.15) вполне удовлетворительно фиттируют экспериментальные характеристики  $H_p(T)$  ( $H_p$  - поле пик-эффекта).

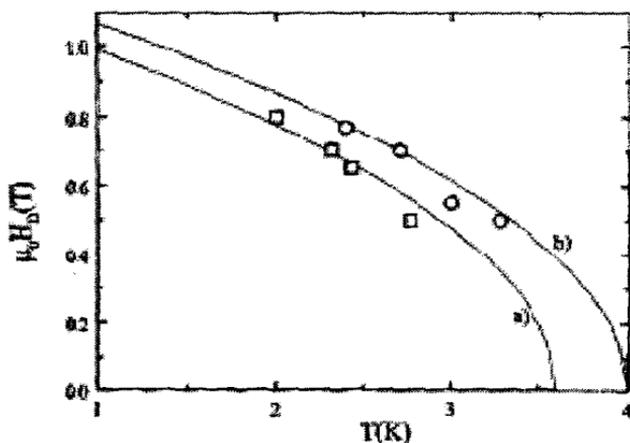


Рис. 6.6. Теоретические (линии) и экспериментальные (символы) зависимости  $H_p(T)$  для структуры Nb/Pd при двух толщинах: а)  $d_N = 17$  нм; б)  $d_N = 13.2$  нм

## Глава 7. Дополнение.

### *Микроскопическая теория сверхпроводимости. Краткая история*

#### 7.1. Идея, гамильтониан и преобразование Фрëлиха

Во введении к статье [382], в качестве посылки к гипотезе, в частности сказано: “One should then expect the velocity of sound to play an important role, and it is not accidental that the energy of an electron moving with the velocity of sound is of similar order as the energy per electron involved in the transition between the normal and superconducting state. Nor is it accidental that very good conductors do not become superconductors, for the required relatively strong interaction between electrons and lattice vibrations gives rise to large normal resistivity”.

На основании приведенного наблюдения Фрëлих выдвинул гипотезу о том, что причиной сверхпроводимости в металлах является электрон-фононное взаимодействие. В соответствии с гипотезой, в [382] при нулевой температуре была вычислена по теории возмущений энергия основного состояния электрон-фононной системы (до второго порядка включительно). Оказалось, что часть второй поправки к энергии, соответствующая взаимодействию электронов с параллельными импульсами, находящихся в узком слое вблизи поверхности Ферми, является отрицательной. Следовательно, образование макроскопического количества таких электронов может быть энергетически выгодным для системы. Это, в свою очередь, означает возможность перестройки спектра состояний электронного газа у поверхности Ферми к новой устойчивой конфигурации. Как следует из вычислений, проведенных Фрëлихом, эта устойчивая конфигурация образуется, и полная энергия системы понижается при условии, что константа электрон-фононной связи больше некоторого критического значения, при этом в спектре образуется энергетическая щель. Образовавшееся таким образом состояние Фрëлих отождествил со сверхпроводящим состоянием; сверхпроводящий ток переносится коллективом электронов с импульсами, ориентированными в узком телесном угле.

Идея Фрëлиха о природе сверхпроводимости, проанализированная и развитая также в работах Бардина [383–386], получила экспе-

риментальное основание: почти одновременно с работами [382, 383] вышли сообщения об обнаружении изотопического эффекта (см. ссылки 8, 9 в [382]), который фактически указывает непосредственно на роль электрон-фононного взаимодействия. Однако в рамках теории Фрëлиха – Бардина, ввиду математических сложностей, не удалось получить описания сверхпроводящей фазы (см. дискуссию в обзоре [387] и подробные обсуждения проблем теории в сборнике статей [388]). А именно, оказалось невозможным получить надежное выражение для энергетической щели, тем более, оказалось невозможным получить выражение для функции распределения  $f_p$ , и главное, не была выявлена основная физическая величина, описывающая сверхпроводящее состояние, – волновая функция конденсата (вначале рассматривалась сверхпроводимость при нулевой температуре). Техническая причина этого состояла в сложности выделения малой энергии взаимодействия электронов посредством обмена фононами на фоне собственно-энергетической части полной энергии. Вторая причина состояла в том, что оказалось принципиально невозможным получить функцию сверхпроводящего состояния как ряд теории возмущений по константе электрон-фононной связи с невозмущенным состоянием, построенным из блоховских функций; это стало очевидным после выхода работы Фрëлиха [389], в которой была рассмотрена одномерная модель и для энергетической щели получено выражение  $\sim \exp\{-2/3vF\}$  (в обозначениях [389]  $F$  – безразмерный параметр электрон-фононной связи,  $v$  – число электронов на атом). Позже, в работе Мигдала [390] было показано строго, что ни в каком порядке теории возмущений невозможно получить энергетическую щель, если в качестве невозмущенного состояния взять состояние без электронных пар.

Первая проблема была решена в [391] с помощью канонического преобразования, в результате которого фононные переменные исключаются, и в гамильтониане появляется член, соответствующий эффективному электрон-электронному взаимодействию. Решение второй проблемы, полученное на основе гамильтониана Фрëлиха, и привело к созданию микроскопической теории сверхпроводимости.

Перейдем к краткому изложению результатов работы [391].

Гамильтониан Фрëлиха имеет следующий вид:

$$H = H_0 + H_{e-ph} \equiv H_e + H_{ph} + H_{e-ph}, \quad (7.1)$$

где

$$H_e = \sum_{\mathbf{p}, \sigma} \varepsilon_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}, \sigma}^+ a_{\mathbf{p}, \sigma}, \quad (7.2)$$

$$H_{ph} = \sum_{\mathbf{q}} \omega_{\mathbf{q}} b_{\mathbf{q}}^+ b_{\mathbf{q}}, \quad (7.3)$$

$$H_{e-ph} = g \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \sigma} \left( \frac{\omega_{\mathbf{q}}}{2V} \right)^{1/2} \left( a_{\mathbf{p}, \sigma}^+ a_{\mathbf{p}+\mathbf{q}, \sigma} b_{\mathbf{q}}^+ + \text{э.с.} \right). \quad (7.4)$$

Здесь  $a_{\mathbf{p}, \sigma}^+$  и  $a_{\mathbf{p}, \sigma}$  – фермиевские операторы рождения и уничтожения электрона с импульсом  $\mathbf{p}$ , энергией  $\varepsilon_{\mathbf{p}}$  и проекцией  $\sigma$  спина на ось  $OZ$ ;  $b_{\mathbf{q}}^+$  и  $b_{\mathbf{q}}$  – бозевские операторы рождения и уничтожения фонона с импульсом  $\mathbf{q}$  и энергией  $\omega_{\mathbf{q}} = s q$ ,  $s$  – скорость звука;  $g$  – константа электрон-фононного взаимодействия,  $V$  – объем системы.

Затравочное электрон-фононное взаимодействие (7.4) приводит к эффективному электрон-электронному взаимодействию следующим образом. Перейдем от вектора состояния электрон-фононной системы  $\Psi(\{a_{\mathbf{p}, \sigma}^+, b_{\mathbf{q}}^+\})|0\rangle$  к вектору состояния электронной системы  $\Phi(\{a_{\mathbf{p}, \sigma}^+\})|0\rangle$  посредством преобразования

$$\Psi(\{a_{\mathbf{p}, \sigma}^+, b_{\mathbf{q}}^+\})|0\rangle = e^{iS} \Phi(\{a_{\mathbf{p}, \sigma}^+\})|0\rangle. \quad (7.5)$$

Здесь  $|0\rangle$  есть вакуумное состояние по отношению к операторам  $a_{\mathbf{p}, \sigma}$ ,  $b_{\mathbf{q}}$ ;  $S \equiv S(\{a_{\mathbf{p}, \sigma}^+, b_{\mathbf{q}}^+\})$ .

Заменяя гамильтониан (7.1) эффективным гамильтонианом

$$H'(\{a_{p,\sigma}^+\}) = e^{-iS} H(\{a_{p,\sigma}^+, b_q^+\}) e^{iS}, \quad (7.6)$$

исключаем в результате фоновые операторные переменные из уравнения Шредингера.

Преобразование (7.5) было найдено Фрелихом по теории возмущений с точностью до членов второго порядка малости<sup>1</sup>. Оператор  $S$  преобразования Фрелиха имеет вид

$$S = g \sum_{k,q} \left( \frac{\omega_q}{2V} \right)^{1/2} \left( \frac{1}{\epsilon_p - \epsilon_{p+q} - \omega_q} b_{-q}^+ + \frac{1}{\epsilon_p - \epsilon_{p+q} + \omega_q} b_q \right) a_{k+q,\sigma}^+ a_{k,\sigma}. \quad (7.7)$$

В результате эффективное электрон-электронное взаимодействие во втором порядке теории возмущений можно записать в форме

$$H'_{e-e} = \frac{g^2}{2V} \sum_{pp'q} \frac{\omega_q^2}{(\epsilon_p - \epsilon_{p+q})^2 - \omega_q^2} a_{p+q,\sigma}^+ a_{p',\sigma'}^+ a_{p'+q,\sigma'} a_{p,\sigma}. \quad (7.8)$$

Видно, что для электронов с энергиями, удовлетворяющими соотношению  $|\epsilon_p - \epsilon_{p+q}| < \omega_q$ , взаимодействие носит характер притяжения.

## 7.2. Куперовские пары

Как было сказано, существование притяжения между электронами должно, по идее Фрелиха, привести к перестройке одноэлектронного энергетического спектра так, что между основным со-

<sup>1</sup> В книге [380] выполнено точное усреднение по фоновым переменным.

стоянием и первым возбужденным состоянием системы образуется энергетическая щель  $\Delta \sim k_B T_c$ , не зависящая от объема [392]. В работе [393] Купер показал, каким образом эта энергетическая щель возникает ("We should like to point out how, primarily as a result of the exclusion principle, such a situation could arise" [393]). Для этого Купер рассмотрел пару электронов, взаимодействующих друг с другом посредством фононного поля и экранированного кулоновского поля на фоне свободного электронного газа. Эти два электрона, внесенные в систему свободных электронов, могут занимать, в силу принципа Паули, состояния с импульсами величиной  $k_1, k_2 > k_F$  ( $k_F$  — импульс Ферми). Пробную волновую функцию пары электронов можно записать в виде

$$\Psi(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = e^{i\mathbf{P}\mathbf{R}} \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}. \quad (7.9)$$

Здесь  $\mathbf{P} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$  — полный импульс пары,  $\mathbf{R}$  — радиус-вектор ее центра масс,  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор относительных координат пары.

Очевидно, формула (7.9) предполагает, что имеет место трансляционная инвариантность. Кроме того, выбор волновой функции в виде (7.9) означает, что спины электронов пары антипараллельны. Подстановка (7.9) в уравнение Шредингера приводит к следующей системе алгебраических уравнений для коэффициентов  $a_{\mathbf{k}}$ :

$$(\mathcal{E}_{\mathbf{P}} + \varepsilon_{\mathbf{k}} - E) a_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}'} (H_{e-e})_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}'} = 0, \quad (7.10)$$

где  $\mathcal{E}_{\mathbf{P}} = P^2 / 4m$  — кинетическая энергия движения пары как целого,  $\varepsilon_{\mathbf{k}} = k^2 / m$  — кинетическая энергия относительного движения электронов пары,  $H_{e-e}$  — гамильтониан эффективного электрон-электронного взаимодействия.

Далее, для оценки решения системы уравнений (7.10) Купер использовал два ключевых приближения.

1) В соответствии с идеей Фрѐлиха в сверхпроводимости участвуют электроны, остающиеся при рассеянии в слое ( $\varepsilon_F, \varepsilon_F + \omega_D$ ) у

поверхности Ферми (между такими электронами как раз и имеет место притяжение). В связи с этим при суммировании в (7.10) учитываются только слагаемые с импульсами  $k_F < k' < k_m$ , соответствующими энергиям  $2\varepsilon_F < \varepsilon_{k'} < 2\varepsilon_m$ ,  $\varepsilon_m = \varepsilon_F + 2\omega_D$ .

2) Поскольку  $\omega_D \ll \varepsilon_F$ , для матричных элементов гамильтониана взаимодействия принимается аппроксимация

$$(H_{e-e})_{kk'} = \begin{cases} -g = \text{const}, & k, k' \in (k_F, k_m), \\ 0, & k, k' \notin (k_F, k_m). \end{cases} \quad (7.11)$$

В результате система уравнений (7.10) легко разрешается, при этом характеристическое уравнение системы имеет вид

$$1 = -g \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{E - \varepsilon_{\mathbf{P}} - \varepsilon_{\mathbf{k}}}. \quad (7.12)$$

Переходя в (7.12) от суммирования к интегрированию, получим

$$1 = g \int_{2\varepsilon_F}^{2\varepsilon_m} \frac{\mathcal{N}(P, \varepsilon) d\varepsilon}{\varepsilon + \varepsilon_{\mathbf{P}} - E}. \quad (7.13)$$

Здесь  $\mathcal{N}(P, \varepsilon)$  — плотность числа двухэлектронных состояний, соответствующих полному импульсу  $P$  и энергии  $\varepsilon$ . Приняв еще одно приближение  $\mathcal{N}(P, \varepsilon) \approx \mathcal{N}(P, 2\varepsilon_F)$ , для энергии основного состояния пары получим выражение

$$E_0 = \varepsilon_{\mathbf{P}} + 2\varepsilon_F - \frac{2\omega_D}{e^{1/\beta} - 1} \approx \varepsilon_{\mathbf{P}} + 2\varepsilon_F - 2\omega_D e^{-1/\beta}, \quad (7.14)$$

где  $\beta = g \mathcal{N}(P, 2\varepsilon_F)$ .

Из (7.14) следует, что при выполнении условия  $\varepsilon_{\mathbf{P}} < 2\omega_D e^{-1/\beta}$  электронная пара находится в связанном состоянии. Если центр

масс электронной пары покоится, то есть, импульсы частиц противоположны ( $\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2$ ) то энергия связи пары – наибольшая:

$$\Delta = -2\omega_D e^{-1/\beta}. \quad (7.15)$$

Легко видеть, что остальные корни  $E_n$  характеристического уравнения (7.12) превышают значение  $2\varepsilon_F$ , и образуют континуум [14], так что величина (7.15) представляет собой энергетическую щель между основным и возбужденными состояниями пары.

Таким образом, оказывается, что электронам энергетически выгодно группироваться в пары, при этом выигрыш состояния со спаренными электронами составляет, в виду независимости  $\Delta$  от объема, величину порядка  $\Delta \cdot V$ . Обратим внимание на неаналитичность величины  $\Delta$  как функции константы связи (точка  $\beta = 0$  является существенно особой точкой функции  $E_0(\beta)$ ). Эта неаналитичность и говорит о том, что ни в каком порядке теории возмущений невозможно получить энергетическую щель, если в качестве невозмущенного состояния взять состояние без электронных пар.

### 7.3. Теория Бардина – Купера – Шриффера (БКШ)

Идея Фрëлиха о фононном механизме сверхпроводимости, развитая Бардиным, а также, открытие Купером эффекта спаривания электронов оказались необходимыми и достаточными условиями создания теории сверхпроводимости. Фактически, теория БКШ [394, 395, 8] строится на двух положениях: 1) Сверхпроводящее состояние образует система электронов с импульсами  $\mathbf{p}$ , принадлежащими узкому энергетическому слою вблизи поверхности Ферми. 2) Основное состояние системы образуется в результате рождения и уничтожения пар электронов с противоположными импульсами и спинами. Эти положения отражены в выборе гамильтониана системы

$$H = \sum_{\mathbf{p}, \sigma} (\varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu) a_{\mathbf{p}, \sigma}^+ a_{\mathbf{p}, \sigma} - \frac{g}{V} \sum_{\mathbf{p} \neq \mathbf{p}'} a_{\mathbf{p}', \uparrow}^+ a_{-\mathbf{p}', \downarrow}^+ a_{-\mathbf{p}, \downarrow} a_{\mathbf{p}, \uparrow}, \quad (7.16)$$

а также в выборе пробной функции основного состояния :

$$\Phi = \prod_{\mathbf{p}} (u_{\mathbf{p}} + v_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p},\uparrow}^+ a_{-\mathbf{p},\downarrow}^+) |0\rangle. \quad (7.17)$$

Здесь  $\mu$  — химический потенциал,  $u_{\mathbf{p}}$ ,  $v_{\mathbf{p}}$  — вещественные функции, удовлетворяющие условию нормировки

$$u_{\mathbf{p}}^2 + v_{\mathbf{p}}^2 = 1, \quad (7.18)$$

вакуумное состояние  $|0\rangle$  означает заполненную ферми-сферу. Суммирование в операторе взаимодействия в (7.16) распространено на импульсы, принадлежащие энергетическому слою  $\varepsilon_{\mathbf{p}}$ ,  $\varepsilon_{\mathbf{p}'} \in (\varepsilon_{\mathbf{F}} - \omega_m, \varepsilon_{\mathbf{F}} + \omega_m)$ , где  $\omega_m \sim \omega_D$ .

Теория БКШ объяснила все общие свойства сверхпроводимости, и, кроме того, оказалась в количественном согласии с имеющимися в то время экспериментальными фактами.

#### 7.4. Каноническое преобразование Боголюбова

Для определения спектра оператора (7.16) и с технической, и с принципиальной точки зрения гораздо более удобно использовать каноническое преобразование Боголюбова<sup>1</sup> [399–403]

<sup>1</sup> Теория Боголюбова разработана одновременно с теорией БКШ. Рассматривая в ретроспективе работы Боголюбова, начиная с нелинейной механики, и заканчивая работами по квантово-полювым методам в квантовой статистике и физике твердого тела, вышедшими до 1957 г., можно увидеть последовательную разработку и использование методов коллективных переменных [396–398]. При этом почти всегда налагались два требования на коллективные переменные: они, во-первых, должны быть каноническими и, во-вторых, избавлять ряды, возникающие при решении задачи, от особенностей. Таковыми особенностями оказывались, например, кратные нули в знаменателях (и в задачах механики о резонансах, и в задачах квантовой теории с вырождениями). В задаче о куперовских парах особенности возникают в силу виртуальных процессов рождения из вакуума пар электронов с противоположными импульсами и спинами без фононов.

$$\begin{aligned}
 a_{\mathbf{p},\uparrow} &= u_{\mathbf{p}} \alpha_{\mathbf{p},0} + v_{\mathbf{p}} \alpha_{\mathbf{p},1}^+ , \\
 a_{-\mathbf{p},\downarrow} &= u_{\mathbf{p}} \alpha_{\mathbf{p},1} - v_{\mathbf{p}} \alpha_{\mathbf{p},0}^+ .
 \end{aligned}
 \tag{7.19}$$

Здесь  $\alpha_{\mathbf{p},0}$   $\alpha_{\mathbf{p},1}$  – операторы квазичастиц, подчиняющиеся ферми-евским антикоммутиационным соотношениям

$$\alpha_{\mathbf{p},i} \alpha_{\mathbf{p}',j}^+ + \alpha_{\mathbf{p}',j}^+ \alpha_{\mathbf{p},i} = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \delta_{ij}, \quad \alpha_{\mathbf{p},i} \alpha_{\mathbf{p}',j} + \alpha_{\mathbf{p}',j} \alpha_{\mathbf{p},i} = 0, \tag{7.20}$$

$u_{\mathbf{p}}$ ,  $v_{\mathbf{p}}$  –  $c$ -числа, удовлетворяющие в силу коммутационных соотношений условию (7.18).

Легко видеть, что обратное по отношению к (7.19) преобразование имеет вид

$$\begin{aligned}
 \alpha_{\mathbf{p},0} &= u_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p},\uparrow} - v_{\mathbf{p}} a_{-\mathbf{p},\downarrow}^+ , \\
 \alpha_{\mathbf{p},1} &= v_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p},\uparrow}^+ + u_{\mathbf{p}} a_{-\mathbf{p},\downarrow} .
 \end{aligned}
 \tag{7.21}$$

Подставляя (7.19) в (7.16), и нормализуя произведения операторов, получим в результате преобразованный гамильтониан

$$H = E_0 + H_0 + H_1 + H_2 . \tag{7.22}$$

Здесь  $E_0$  –  $c$ -числовая часть гамильтониана  $H_0$  и  $H_1$  составляют квадратичную форму по операторам рождения и уничтожения квазичастиц, при этом  $H_0$  – ее диагональная составляющая, а  $H_1$  – недиагональная часть,  $H_2$  содержит четверные произведения новых операторов. Выпишем три первых слагаемых оператора  $H$ :

$$E_0 = 2 \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon_{\mathbf{p}} v_{\mathbf{p}}^2 - \frac{g}{V} \sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} u_{\mathbf{p}'} v_{\mathbf{p}'} u_{\mathbf{p}} v_{\mathbf{p}} , \tag{7.23}$$

$$H_0 = \sum_{\mathbf{p}} \left( \varepsilon_{\mathbf{p}} (u_{\mathbf{p}}^2 - v_{\mathbf{p}}^2) + \frac{2g}{V} u_{\mathbf{p}} v_{\mathbf{p}} \sum_{\mathbf{p}'} u_{\mathbf{p}'} v_{\mathbf{p}'} \right) (\alpha_{\mathbf{p}0}^+ \alpha_{\mathbf{p}0} + \alpha_{\mathbf{p}1}^+ \alpha_{\mathbf{p}1}), \quad (7.24)$$

$$H_1 = \sum_{\mathbf{p}} \left( 2\varepsilon_{\mathbf{p}} u_{\mathbf{p}} v_{\mathbf{p}} - \frac{g}{V} (u_{\mathbf{p}}^2 - v_{\mathbf{p}}^2) \sum_{\mathbf{p}'} u_{\mathbf{p}'} v_{\mathbf{p}'} \right) (\alpha_{\mathbf{p}0}^+ \alpha_{\mathbf{p}1}^+ + \alpha_{\mathbf{p}1} \alpha_{\mathbf{p}0}). \quad (7.25)$$

В формулах (7.23) – (7.25) энергия электрона  $\varepsilon_{\mathbf{p}}$  отсчитывается от величины  $\mu \approx \varepsilon_{\mathbf{f}}$ . Из условия обращения в нуль недиагональной части  $H_1$  гамильтониана  $H$  получаем уравнение

$$2\varepsilon_{\mathbf{p}} u_{\mathbf{p}} v_{\mathbf{p}} = \frac{g}{V} (u_{\mathbf{p}}^2 - v_{\mathbf{p}}^2) \sum_{\mathbf{p}'} u_{\mathbf{p}'} v_{\mathbf{p}'}. \quad (7.26)$$

Это же соотношение, как легко убедиться, можно получить минимизацией энергии  $E_0$ . Система уравнений (7.26), (7.18) разрешается. Действительно, введем обозначение

$$\Delta = \frac{g}{V} \sum_{\mathbf{p}'} u_{\mathbf{p}'} v_{\mathbf{p}'}. \quad (7.27)$$

Тогда сразу получим

$$u_{\mathbf{p}}^2 = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\varepsilon_{\mathbf{p}}}{\sqrt{\varepsilon_{\mathbf{p}}^2 + \Delta^2}} \right), \quad (7.28)$$

$$v_{\mathbf{p}}^2 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\varepsilon_{\mathbf{p}}}{\sqrt{\varepsilon_{\mathbf{p}}^2 + \Delta^2}} \right).$$

Подстановка (7.28) в (7.27) даёт условие самосогласования

$$\Delta = \frac{g}{2V} \sum_{\mathbf{p}} \frac{\Delta}{\sqrt{\varepsilon_{\mathbf{p}}^2 + \Delta^2}} \quad (7.29)$$

Очевидно, (7.29) имеет два решения для параметра  $\Delta$ . Первому из них, тривиальному решению  $\Delta = 0$ , соответствуют функции

$$\begin{aligned} u_{\mathbf{p}} &= 1, \quad v_{\mathbf{p}} = 0 & \text{при } \varepsilon_{\mathbf{p}} > 0, \\ u_{\mathbf{p}} &= 0, \quad v_{\mathbf{p}} = 1 & \text{при } \varepsilon_{\mathbf{p}} < 0. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Это означает, что каноническое преобразование равносильно формальному переходу к электронно-дырочному представлению системы электронов. Действительно, в этом тривиальном случае

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathbf{p},0} &= a_{\mathbf{p},\uparrow} & \text{при } \varepsilon_{\mathbf{p}} > 0 & \quad \text{и} & \quad \alpha_{\mathbf{p},0} = -a_{-\mathbf{p},\downarrow}^+ & \text{при } \varepsilon_{\mathbf{p}} < 0, \\ \alpha_{\mathbf{p},1} &= a_{-\mathbf{p},\downarrow} & & & \alpha_{\mathbf{p},1} &= a_{-\mathbf{p},\uparrow}^+ \end{aligned}$$

Ясно, что при этом одночастичный спектр не изменяется, и сверхпроводящее состояние не имеет места.

Определим теперь нетривиальное решение (7.29). Переходя в (7.29) от суммирования к интегрированию, получим уравнение

$$1 = \frac{g}{2(2\pi)^3} \iiint_{|\varepsilon_{\mathbf{p}}| < \varepsilon_m} \frac{d^3 p}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{p})^2 + \Delta^2}}. \quad (7.31)$$

Полагая  $\mu = \varepsilon_F$ , откуда  $\varepsilon(\mathbf{p}) \approx p_F(p - p_F)/m$ , вместо (7.31) имеем

$$1 = \frac{g p_F^2}{4\pi^2} \int_{-q_m}^{q_m} \frac{dq}{\sqrt{(p_F q / m)^2 + \Delta^2}} = \frac{g m p_F}{2\pi^2} \operatorname{Arcsh} \left( \frac{\omega_m}{\Delta} \right).$$

Отсюда, с учетом выражения для плотности числа одноэлектронных состояний на уровне Ферми  $\nu(0) = p_F m / \pi^2$ , получим

$$\Delta = \frac{\omega_D}{\operatorname{sh}(2 / g \nu(0))} \approx 2\omega_D \exp(-2 / g \nu(0)). \quad (7.32)$$

Следовательно, нетривиальное решение уравнения (7.29) существует.

Подставив (7.28) в (7.23), (7.24), и учитывая (7.27), получим

$$E_0 = -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}} \frac{\left( \sqrt{\varepsilon_{\mathbf{p}}^2 + \Delta^2} - \varepsilon_{\mathbf{p}} \right)^2}{\sqrt{\varepsilon_{\mathbf{p}}^2 + \Delta^2}}, \quad (7.33)$$

$$H_0 = \sum_{\mathbf{p}} \sqrt{\varepsilon_{\mathbf{p}}^2 + \Delta^2} \left( \alpha_{\mathbf{p}0}^+ \alpha_{\mathbf{p}0} + \alpha_{\mathbf{p}1}^+ \alpha_{\mathbf{p}1} \right). \quad (7.34)$$

Таким образом, энергия основного состояния  $|0\rangle$ , вакуумного по отношению к операторам квазичастиц, оказалась отрицательной, то есть перестройка основного состояния в соответствии с (7.19) оказывается энергетически выгодной.

Понижение энергии основного состояния, происшедшее в результате электрон-фононного взаимодействия, разумеется, не является достаточным для возникновения сверхпроводимости. Достаточное условие определяется спектром энергии квазичастиц, рождающихся при возмущениях основного состояния системы:

$$E_1(\mathbf{p}) = \sqrt{\varepsilon_{\mathbf{p}}^2 + \Delta^2}. \quad (7.35)$$

Наименьшее значение энергии возбуждения, как следует из (7.35),  $E_{1,\min}(\mathbf{p}) = E_{1,\min}(\mathbf{p}_F) = \Delta$ . Это значит, что основное состояние отделено от возбужденных состояний энергетической щелью, что и влечет за собой сверхпроводимость.

### 7.5. Аппроксимирующий гамильтониан, уравнения и условие самосогласования Боголюбова

В предыдущем разделе было описано сверхпроводящее состояние при нулевой температуре. Для полного описания сверхпроводимости необходимо выражение для свободной энергии  $\mathcal{F}$  (или термодинамического потенциала  $\Omega$ ). В работе Бардина, Купера, Шриффера [8] с помощью вариационного метода функционал свободной энергии был построен; далее на его основе были вычислены термодинамические характеристики сверхпроводящей системы. Более того, в работах Боголюбова [14, 404–406] было доказано, что полученные таким образом термодинамические функции оказываются асимптотически точными в термодинамическом пределе ( $N, V \rightarrow \infty, N/V = \text{const}, N$  – число частиц,  $V$  – объем системы). Между тем, в тех же работах [14, 404–406] был построен аппроксимирующий гамильтониан, более простой, чем модельный гамильтониан теории БКШ, и дающий точное решение в термодинамическом пределе. Аппроксимирующий гамильтониан вместе с условием самосогласования Боголюбова как раз и лежит в основе одного из двух формализмов исследования низкотемпературной сверхпроводимости.

Утверждение об аппроксимирующем гамильтониане было доказано в работе [405] (в [380] дано более прямое доказательство этой теоремы, основанное на методе функционального интегрирования). Приведем это утверждение без доказательства.

#### 7.5.1. Утверждение о модельном и аппроксимирующем гамильтониане

Запишем модельный гамильтониан БКШ (7.16) в более общем виде

$$H = \sum_{\mathbf{p}, \sigma} (\varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu) a_{\mathbf{p}, \sigma}^+ a_{\mathbf{p}, \sigma} -$$

$$- \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\sigma\sigma'} h(\mathbf{p}, \sigma; \mathbf{p}', \sigma') a_{\mathbf{p}, \sigma}^+ a_{-\mathbf{p}, -\sigma}^+ a_{-\mathbf{p}', -\sigma'} a_{\mathbf{p}', \sigma'}, \quad (7.36)$$

где  $h(\mathbf{p}, \sigma; \mathbf{p}', \sigma')$  – действительные функции, обладающие свойствами  $h(\mathbf{p}, \sigma; \mathbf{p}', \sigma') = h(\mathbf{p}', \sigma'; \mathbf{p}, \sigma) = -h(-\mathbf{p}, -\sigma; \mathbf{p}', \sigma')$ .

Выполним в (7.36) алгебраическое преобразование

$$H = H_0 + H_1, \quad (7.37)$$

Здесь

$$H_0 = \sum_{\mathbf{p}, \sigma} \left\{ (\varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu) a_{\mathbf{p}, \sigma}^+ a_{\mathbf{p}, \sigma} - \frac{1}{2} A_{\mathbf{p}, \sigma} \Delta_{\mathbf{p}, \sigma} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \Delta_{\mathbf{p}, \sigma} (a_{\mathbf{p}, \sigma}^+ a_{-\mathbf{p}, -\sigma}^+ + a_{-\mathbf{p}, -\sigma} a_{\mathbf{p}, \sigma}) \right\}, \quad (7.38)$$

$$H_1 = -\frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{p}, \sigma; \mathbf{p}', \sigma'} h(\mathbf{p}, \sigma; \mathbf{p}', \sigma') B_{\mathbf{p}, \sigma}^+ B_{\mathbf{p}', \sigma'}, \quad (7.39)$$

где

$$\Delta_{\mathbf{p}, \sigma} \equiv -\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}, \sigma; \mathbf{p}', \sigma'} h(\mathbf{p}, \sigma; \mathbf{p}', \sigma') A_{\mathbf{p}', \sigma'}, \quad (7.40)$$

$$B_{\mathbf{p}, \sigma} \equiv a_{-\mathbf{p}, -\sigma} a_{\mathbf{p}, \sigma} - A_{\mathbf{p}, \sigma}, \quad (7.41)$$

$$A_{\mathbf{p},\sigma} \equiv \langle a_{-\mathbf{p},-\sigma} a_{\mathbf{p},\sigma} \rangle_0 = \langle a_{\mathbf{p},\sigma}^+ a_{-\mathbf{p},-\sigma}^+ \rangle_0. \quad (7.42)$$

В (5.7) скобки  $\langle \dots \rangle$  означают усреднение по большому каноническому ансамблю с гамильтонианом  $H_0$ .

Тогда, в силу тождества  $\langle B_{\mathbf{p},\sigma} \rangle_0 \equiv 0$ , оператор  $H_1$  дает асимптотически малый вклад при  $V \rightarrow \infty$  и при  $N/V = \text{const}$  в каждом члене термодинамической теории возмущений.

Данное утверждение дает возможность строить термодинамический потенциал на основе гамильтониана  $H_0$ , а не  $H$ . Это кардинально упрощает задачу вычисления термодинамических функций, поскольку оператор  $H_0$  является квадратичной формой по операторам  $a_{\mathbf{p},\sigma}^+$ ,  $a_{\mathbf{p},\sigma}$  и диагонализуется посредством канонического преобразования (7.19).

### 7.5.2. Уравнения Боголюбова.

#### Уравнения Боголюбова – де Жена

Далее будем излагать математический аппарат теории Боголюбова в соответствии с [14, 404–406], а так же [11, 25, 93].

Для исследования неоднородной сверхпроводимости более естественно перейти к координатному представлению фермионных операторов

$$\psi_{\alpha}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} a_{\mathbf{p},\alpha}, \quad \psi_{\alpha}^+(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{p}} e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}} a_{\mathbf{p},\alpha}^+. \quad (7.43)$$

Операторы  $\psi_{\alpha}$ ,  $\psi_{\beta}^+$  подчиняются правилам антикоммутации.

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha}(\mathbf{r})\psi_{\beta}(\mathbf{r}') + \psi_{\beta}(\mathbf{r}')\psi_{\alpha}(\mathbf{r}) &= 0, \\ \psi_{\alpha}^+(\mathbf{r})\psi_{\beta}^+(\mathbf{r}') + \psi_{\beta}^+(\mathbf{r}')\psi_{\alpha}^+(\mathbf{r}) &= 0, \\ \psi_{\alpha}(\mathbf{r})\psi_{\beta}^+(\mathbf{r}') + \psi_{\beta}^+(\mathbf{r}')\psi_{\alpha}(\mathbf{r}) &= \delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (7.44)$$

Гамильтониан системы электронов, находящейся в магнитном поле с вектором-потенциалом  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ , записывается в виде

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(0)} + \mathcal{H}^{(1)} + \mathcal{H}^{(2)}. \quad (7.45)$$

Здесь  $\mathcal{H}^{(0)}$  – одночастичный гамильтониан,  $\mathcal{H}^{(1)}$  – гамильтониан взаимодействия электрона с примесями,  $\mathcal{H}^{(2)}$  – гамильтониан эффективного электрон-электронного взаимодействия:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{(0)} &= \int d^3 r \psi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}) \left[ \frac{1}{2m} \left( -i\nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right)^2 - \mu \right] \psi_{\alpha}(\mathbf{r}) \equiv \\ &\equiv \int d^3 r \psi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}) \mathcal{H}^{(0)}(\mathbf{r}) \psi_{\alpha}(\mathbf{r}), \quad (7.46) \end{aligned}$$

$$\mathcal{H}^{(1)} = \int d^3 r \psi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}) U^{(1)}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) \psi_{\beta}(\mathbf{r}) \quad (7.47)$$

$$\mathcal{H}^{(2)} = \frac{1}{2} \int d^3 r \int d^3 r' \psi_{\delta}^{\dagger}(\mathbf{r}) \psi_{\gamma}^{\dagger}(\mathbf{r}') U^{(2)}_{\delta\gamma,\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \psi_{\alpha}(\mathbf{r}') \psi_{\beta}(\mathbf{r}). \quad (7.48)$$

В (7.46) – (7.48)  $U^{(1)}_{\alpha\beta}(\mathbf{r})$  есть потенциал взаимодействия электрона с примесями; по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Для потенциала парного взаимодействия примем самую простую форму

$$U^{(2)}_{\delta\gamma,\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\lambda(\mathbf{r}) \delta_{\gamma\alpha} \delta_{\delta\beta} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (7.49)$$

Формула (7.49), во-первых, означает, что взаимодействие между электронами имеет точечный характер; во-вторых (и в силу этого) принимается, что пары образуются электронами с противополож-

ными спинами (синглетное спаривание<sup>1</sup>). Допущение о точечном взаимодействии вполне приемлемо для однородных сверхпроводников [19]. Действительно, эффективный радиус взаимодействия в рамках приближения Купера (7.11) определяется величиной  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|_{eff} = v_F/\omega_D$ . Для типичных сверхпроводящих материалов эта величина составляет несколько нм. Для слоистой структуры допущение о точечном взаимодействии сомнительно. Действительно, если между двумя слоями сверхпроводника содержится тонкий слой нормального металла или ферромагнетика (порядка нескольких нанометров), то спариваться посредством фононного механизма могут и электроны, находящиеся по разные стороны нормального слоя. В (7.49) такое спаривание не учтено.

Приведем аппроксимирующий гамильтониан Боголюбова для модельного гамильтониана (7.45) – (7.48) с учетом (7.49):

$$\begin{aligned}
 H_{ap} = \int d^3r \left\{ \psi_{\alpha}^{+}(\mathbf{r}) \left[ \frac{1}{2m} \left( -i\nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right)^2 \delta_{\alpha\beta} - \mu \delta_{\alpha\beta} + \right. \right. \\
 \left. \left. + U_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) \right] \psi_{\beta}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \left[ \Delta(\mathbf{r}) \psi_{\alpha}^{+}(\mathbf{r}) (i\sigma_2)_{\alpha\beta} \psi_{\beta}^{+}(\mathbf{r}) + \right. \right. \\
 \left. \left. + \Delta^{*}(\mathbf{r}) \psi_{\alpha}(\mathbf{r}) (i\sigma_2)_{\beta\alpha} \psi_{\beta}(\mathbf{r}) \right] \right\}. \quad (7.50)
 \end{aligned}$$

В формуле (7.50)  $U_{\alpha\beta}(\mathbf{r})$  – эффективный одночастичный потенциал (обладающий, очевидно свойством  $U_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) = U_{\beta\alpha}^{*}(\mathbf{r})$ ), а  $\Delta(\mathbf{r})$  – потенциал спаривания. Эти потенциалы должны быть определены самосогласованным образом, о чем пойдет речь ниже.

Вначале выполним каноническое преобразование фермионных операторов, диагонализующее гамильтониан (обобщенное преобразование Боголюбова).

<sup>1</sup> Как мы видели (см. главу 1), в слоистых структурах типа сверхпроводник/ферромагнетик может быть реализовано триплетное спаривание с дальнедействующими корреляциями.

$$\Psi_{\alpha}(\mathbf{r}) = \sum_{n,\nu} \left[ u_{n\nu;\alpha}(\mathbf{r}) \gamma_{n\nu} + v_{n\nu;\alpha}^*(\mathbf{r}) \gamma_{n\nu}^+ \right]. \quad (7.51)$$

В (7.51) введены новые канонические переменные  $\gamma_{n\nu}, \gamma_{n\nu}^+$ , зависящие от квантовых чисел  $n$ , совокупность которых должна определиться самосогласованным образом, и спиновых квантовых чисел  $\nu = 1, 2$ . Из соотношений антикоммутиации (7.44), а также из правил антикоммутиации для новых фермиевских операторов  $\gamma_{n\nu}, \gamma_{n\nu}^+$ , возникают следующие условия связи функций  $u_{n\nu;\alpha}(\mathbf{r}), v_{n\nu;\alpha}^*(\mathbf{r})$ :

$$\sum_{n,\nu} \left[ u_{n\nu;\alpha}(\mathbf{r}) v_{n\nu;\beta}^*(\mathbf{r}') + v_{n\nu;\alpha}^*(\mathbf{r}) u_{n\nu;\beta}(\mathbf{r}') \right] = 0, \quad (7.52)$$

$$\sum_{n,\nu} \left[ u_{n\nu;\alpha}(\mathbf{r}) u_{n\nu;\beta}^*(\mathbf{r}') + v_{n\nu;\alpha}^*(\mathbf{r}) v_{n\nu;\beta}(\mathbf{r}') \right] = \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (7.53)$$

Требование полноты приводит еще к соотношениям ортогональности для функций  $u_{n\nu;\alpha}(\mathbf{r}), v_{n\nu;\alpha}^*(\mathbf{r})$

$$\int d^3 r \left[ u_{m\mu;\alpha}^*(\mathbf{r}) u_{n\nu;\alpha}(\mathbf{r}) + v_{m\mu;\alpha}^*(\mathbf{r}) v_{n\nu;\alpha}(\mathbf{r}) \right] = \delta_{mn} \delta_{\mu\nu}, \quad (7.54)$$

$$\int d^3 r \left[ v_{m\mu;\alpha}(\mathbf{r}) u_{n\nu;\alpha}(\mathbf{r}) + u_{m\mu;\alpha}(\mathbf{r}) v_{n\nu;\alpha}(\mathbf{r}) \right] = 0. \quad (7.55)$$

Соотношения (7.54), (7.55) обеспечивают существование обратного преобразования

$$\gamma_{n\nu} = \int d^3 r \left[ u_{n\nu;\alpha}^*(\mathbf{r}) \Psi_{\alpha}(\mathbf{r}) + v_{n\nu;\alpha}^*(\mathbf{r}) \Psi_{\alpha}^+(\mathbf{r}) \right]. \quad (7.56)$$

Легко проверить, что для однородной сверхпроводимости формулы (7.51) – (7.55) сводятся к формулам преобразования Боголюбо-

бова при следующем выборе функций  $u_{nv;\alpha}(\mathbf{r})$ ,  $v_{nv;\alpha}^*(\mathbf{r})$ , и операторов  $\gamma_{nv}$ ,  $\gamma_{nv}^+$ :

$$\gamma_{\mathbf{p},1} = \alpha_{\mathbf{p},0}, \quad \gamma_{\mathbf{p},2} = \alpha_{-\mathbf{p},1}$$

$$\begin{aligned} u_{nv;\uparrow}(\mathbf{r}) &\rightarrow u_{\mathbf{p}} \delta_{v1} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}, & u_{nv;\downarrow}(\mathbf{r}) &\rightarrow u_{\mathbf{p}} \delta_{v2} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} \\ v_{nv;\uparrow}(\mathbf{r}) &\rightarrow v_{\mathbf{p}} \delta_{v2} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}, & v_{nv;\downarrow}(\mathbf{r}) &\rightarrow -v_{\mathbf{p}} \delta_{v1} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} \end{aligned}$$

(При записи этих формул мы положили объем системы равным единице).

Цель преобразования (7.51) состоит в приведении аппроксимирующего гамильтониана (7.50) к диагональной форме

$$H_{\text{ap}} = E_0 + \sum_{nv} \varepsilon_{nv} \gamma_{nv}^+ \gamma_{nv}, \quad (7.57)$$

где  $E_0$  – энергия основного состояния, а второе слагаемое в правой части дает энергию возбуждений.

Подставим (7.50) в (7.51) и выпишем недиагональные члены полученного гамильтониана.

$$\begin{aligned} H_{\text{nondiag}} = & \sum_{nv, m\mu} \int d^3r \left\{ u_{nv;\alpha}^*(\mathbf{r}) [\mathcal{H}^{(0)}(\mathbf{r}) \delta_{\alpha\beta} + U_{\alpha\beta}(\mathbf{r})] v_{m\mu;\beta}^*(\mathbf{r}) + \right. \\ & \left. + [\Delta(\mathbf{r}) u_{nv;\alpha}^*(\mathbf{r}) (i\sigma_2)_{\alpha\beta} u_{m\mu;\beta}^*(\mathbf{r}) + \right. \\ & \left. + \Delta^*(\mathbf{r}) v_{nv;\alpha}^*(\mathbf{r}) (i\sigma_2)_{\beta\alpha} v_{m\mu;\beta}^*(\mathbf{r}) \right] / 2 \left\} \gamma_{nv}^+ \gamma_{m\mu}^+ + \right. \\ & \left. + \sum_{nv, m\mu} \int d^3r \left\{ v_{nv;\alpha}(\mathbf{r}) [\mathcal{H}^{(0)}(\mathbf{r}) \delta_{\alpha\beta} + U_{\alpha\beta}(\mathbf{r})] u_{m\mu;\beta}(\mathbf{r}) + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + [\Delta(\mathbf{r})v_{nv;\alpha}(\mathbf{r})(i\sigma_2)_{\alpha\beta}v_{m\mu;\beta}(\mathbf{r}) + \\
& \quad + \Delta^*(\mathbf{r})u_{nv;\alpha}(\mathbf{r})(i\sigma_2)_{\beta\alpha}u_{m\mu;\beta}(\mathbf{r})] / 2 \{ \gamma_{nv}\gamma_{m\mu} \}.
\end{aligned}$$

Легко видеть, что  $H_{ndiag}$  обращается в нуль при выполнении следующих условий:

$$\left\{ \begin{aligned}
& \left[ \mathcal{H}^{(0)}(\mathbf{r})\delta_{\alpha\beta} + U_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) \right] u_{m\mu;\beta}(\mathbf{r}) + \\
& \quad + \Delta(\mathbf{r})(i\sigma_2)_{\alpha\beta}v_{m\mu;\beta}(\mathbf{r}) = \varepsilon_{m\mu}u_{m\mu;\alpha}(\mathbf{r}), \\
& \left[ \mathcal{H}^{(0)*}(\mathbf{r})\delta_{\alpha\beta} + U_{\beta\alpha}^*(\mathbf{r}) \right] v_{nv;\alpha}(\mathbf{r}) + \\
& \quad + \Delta^*(\mathbf{r})(i\sigma_2)_{\beta\alpha}u_{nv;\alpha}(\mathbf{r}) = -\varepsilon_{nv}v_{nv;\beta}(\mathbf{r}).
\end{aligned} \right. \quad (7.58)$$

Действительно, подставив (7.58) в выражение для  $H_{ndiag}$ , получим

$$\begin{aligned}
H_{ndiag} &= \frac{1}{2} \sum_{nv, m\mu} \int d^3r \{ v_{nv;\alpha}(\mathbf{r})\varepsilon_{m\mu}u_{m\mu;\alpha}(\mathbf{r}) - \\
& \quad - v_{nv;\beta}(\mathbf{r})\varepsilon_{nv}u_{m\mu;\beta}(\mathbf{r}) \} \gamma_{nv}\gamma_{m\mu} + \text{э.с.} = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{nv, m\mu} \int d^3r \varepsilon_{m\mu} \{ v_{nv;\alpha}(\mathbf{r})u_{m\mu;\alpha}(\mathbf{r}) + v_{m\mu;\alpha}(\mathbf{r})u_{nv;\alpha}(\mathbf{r}) \} \gamma_{nv}\gamma_{m\mu} + \\
& \quad + \text{э.с.} = 0
\end{aligned}$$

в силу условий ортогональности (7.55).

Для диагональной части гамильтониана (7.50) имеем

$$\begin{aligned}
H_{diag} = & \frac{1}{2} \sum_{nv, m\mu} \int d^3 r u_{nv; \alpha}^*(\mathbf{r}) \left\{ \left[ \mathcal{H}^{(0)}(\mathbf{r}) \delta_{\alpha\beta} + U_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) \right] u_{m\mu; \beta}(\mathbf{r}) + \right. \\
& \left. + \Delta(\mathbf{r}) (i\sigma_2)_{\alpha\beta} v_{m\mu; \beta}(\mathbf{r}) \right\} \gamma_{nv}^+ \gamma_{m\mu} + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{nv, m\mu} \int d^3 r \left\{ u_{nv; \alpha}^*(\mathbf{r}) \left[ \mathcal{H}^{(0)}(\mathbf{r}) \delta_{\alpha\beta} + U_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) \right] + \right. \\
& \left. + \Delta^*(\mathbf{r}) v_{nv; \alpha}^*(\mathbf{r}) (i\sigma_2)_{\beta\alpha} \right\} u_{m\mu; \beta}(\mathbf{r}) \gamma_{nv}^+ \gamma_{m\mu} + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{nv, m\mu} \int d^3 r v_{nv; \alpha}(\mathbf{r}) \left\{ \left[ \mathcal{H}^{(0)}(\mathbf{r}) \delta_{\alpha\beta} + U_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) \right] v_{m\mu; \beta}^*(\mathbf{r}) + \right. \\
& \left. + \Delta(\mathbf{r}) (i\sigma_2)_{\alpha\beta} u_{m\mu; \beta}^*(\mathbf{r}) \right\} \gamma_{nv} \gamma_{m\mu}^+ + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{nv, m\mu} \int d^3 r \left\{ v_{nv; \alpha}(\mathbf{r}) \left[ \mathcal{H}^{(0)}(\mathbf{r}) \delta_{\alpha\beta} + U_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) \right] + \right. \\
& \left. + \Delta^*(\mathbf{r}) u_{nv; \alpha}(\mathbf{r}) (i\sigma_2)_{\beta\alpha} \right\} v_{m\mu; \beta}^*(\mathbf{r}) \gamma_{nv} \gamma_{m\mu}^+,
\end{aligned}$$

или, в силу (7.58)

$$\begin{aligned}
H_{diag} = & \frac{1}{2} \sum_{nv, m\mu} \int d^3 r \left\{ \left[ u_{nv; \alpha}^*(\mathbf{r}) \varepsilon_{m\mu} u_{m\mu; \alpha}(\mathbf{r}) + \right. \right. \\
& \left. \left. + u_{m\mu; \beta}(\mathbf{r}) \varepsilon_{nv} u_{nv; \beta}^*(\mathbf{r}) \right] \gamma_{nv}^+ \gamma_{m\mu} - \left[ v_{nv; \alpha}(\mathbf{r}) \varepsilon_{m\mu} v_{m\mu; \alpha}^*(\mathbf{r}) + \right. \right. \\
& \left. \left. + v_{nv; \beta}(\mathbf{r}) \varepsilon_{nv} v_{m\mu; \beta}^*(\mathbf{r}) \right] \gamma_{nv} \gamma_{m\mu}^+ \right\} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \sum_{nv, m\mu} \int d^3 r \left\{ \varepsilon_{m\mu} \left[ u_{nv; \alpha}^*(\mathbf{r}) u_{m\mu; \alpha}(\mathbf{r}) + v_{m\mu; \alpha}(\mathbf{r}) v_{nv; \alpha}^*(\mathbf{r}) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \varepsilon_{nv} \left[ u_{m\mu; \alpha}(\mathbf{r}) u_{nv; \alpha}^*(\mathbf{r}) + v_{m\mu; \alpha}(\mathbf{r}) v_{nv; \alpha}^*(\mathbf{r}) \right] \right\} \gamma_{nv}^+ \gamma_{m\mu} - \\
&- \sum_{nv} \varepsilon_{nv} \int d^3 r v_{nv; \alpha}(\mathbf{r}) v_{nv; \alpha}^*(\mathbf{r}) .
\end{aligned}$$

Последнее выражение, в силу условий нормировки (7.54), как раз совпадает с (7.57); при этом последнее слагаемое в полученном выражении определяет энергию основного состояния системы

$$E_0 = - \sum_{nv} \varepsilon_{nv} \int d^3 r |v_{nv; \alpha}(\mathbf{r})|^2 \quad (7.59)$$

Таким образом, для диагонализации аппроксимирующего гамильтониана необходимо решить систему дифференциальных уравнений (7.58)<sup>1</sup>. Аппроксимирующий гамильтониан, а также уравнения, приводящие этот гамильтониан к диагональному виду, были получены Боголюбовым в импульсном пространстве (без учета членов, зависящих от спина электрона) при произвольном факторе эффективного электрон-электронного взаимодействия. Обобщенное преобразование и уравнения Боголюбова в пространственных координатах были записаны де Женом, поэтому в литературе уравнения (7.58) часто называют уравнениями Боголюбова – де Жена. Уравнения (7.58) оказываются, однако, неопределенными, пока не найдены эффективный одночастичный потенциал  $U_{\alpha\beta}(\mathbf{r})$  и потенциал спаривания  $\Delta(\mathbf{r})$ . Самосогласованный способ определения этих величин является, фактически, конструктивной частью теоремы о модельном и аппроксимирующем гамильтониане (точнее, ее обобщения на случай (7.50) и (7.45) – (7.48) соответственно).

<sup>1</sup> Приведенный вывод уравнений Боголюбова нам кажется более непосредственным, чем в работах [11, 12, 25, 93].

### 7.5.3. Условия самосогласования Боголюбова

Доказательство теоремы об аппроксимирующем и модельном гамильтониане, вместе с выводом выражений для эффективных потенциалов  $U_{\alpha\beta}(\mathbf{r})$  и  $\Delta(\mathbf{r})$ , было дано Боголюбовым исходя из рассмотрения большой статистической суммы.<sup>1</sup> Здесь мы приведем вывод формул для эффективных потенциалов, предложенный де Женом [11] (в [25, 93] он обобщен на зависящие от спина потенциалы). Способ де Жена воспроизводит, фактически, метод Хартри – Фока в применении к квантовой статистике; при этом, очевидно, вариационный принцип метода реализуется не для гамильтониана, а для функционала свободной энергии  $\mathcal{F} = \langle \mathcal{H} \rangle - TS$  ( $S$  – энтропия). В соответствии с идеей метода Хартри – Фока термодинамическое и квантово-механическое усреднение проводится по состояниям, доставляемым аппроксимирующим гамильтонианом, так что

$$\mathcal{F} \approx \mathcal{F}_a = \langle \mathcal{H} \rangle_a - T \cdot S_a. \quad (7.60)$$

Определим вначале общее выражение для  $\langle \mathcal{H} \rangle_a$ .

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{H} \rangle_a &= \int d^3 r \left\langle \psi_{\alpha}^{+}(\mathbf{r}) \left[ \mathcal{H}^{(0)}(\mathbf{r}) \delta_{\alpha\beta} + U^{(1)}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) \right] \psi_{\beta}(\mathbf{r}) \right\rangle_a + \\ &+ \frac{1}{2} \int d^3 r \int d^3 r' U^{(2)}_{\delta\gamma, \alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left\langle \psi_{\delta}^{+}(\mathbf{r}) \psi_{\gamma}^{+}(\mathbf{r}') \psi_{\alpha}(\mathbf{r}') \psi_{\beta}(\mathbf{r}) \right\rangle_a. \end{aligned} \quad (7.61)$$

В соответствии с теоремой Вика

$$\left\langle \psi_{\delta}^{+}(\mathbf{r}) \psi_{\gamma}^{+}(\mathbf{r}') \psi_{\alpha}(\mathbf{r}') \psi_{\beta}(\mathbf{r}) \right\rangle_a = \left\langle \psi_{\delta}^{+}(\mathbf{r}) \psi_{\gamma}^{+}(\mathbf{r}') \right\rangle_a \left\langle \psi_{\alpha}(\mathbf{r}') \psi_{\beta}(\mathbf{r}) \right\rangle_a -$$

<sup>1</sup> В книге [380] использован для вычислений метод функционального интегрирования.

$$-\langle \Psi_{\delta}^{+}(\mathbf{r}) \Psi_{\alpha}(\mathbf{r}') \rangle_a \langle \Psi_{\gamma}^{+}(\mathbf{r}') \Psi_{\beta}(\mathbf{r}) \rangle_a + \\ + \langle \Psi_{\delta}^{+}(\mathbf{r}) \Psi_{\beta}(\mathbf{r}) \rangle_a \langle \Psi_{\gamma}^{+}(\mathbf{r}') \Psi_{\alpha}(\mathbf{r}') \rangle_a.$$

Тогда для парного взаимодействия (7.49) соотношение (7.61) примет вид

$$\langle \mathcal{H} \rangle_a = \int d^3 r \langle \Psi_{\alpha}^{+}(\mathbf{r}) \left[ \left( \mathcal{H}^{(0)}(\mathbf{r}) - \frac{\lambda(\mathbf{r})}{2} \langle \Psi_{\gamma}^{+}(\mathbf{r}) \Psi_{\gamma}(\mathbf{r}) \rangle_a \right) \delta_{\alpha\beta} + \right. \\ \left. + \left( U^{(1)}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) + \frac{\lambda(\mathbf{r})}{2} \langle \Psi_{\beta}^{+}(\mathbf{r}) \Psi_{\alpha}(\mathbf{r}) \rangle_a \right) \right] \Psi_{\beta}(\mathbf{r}) \rangle_a - \\ - \int d^3 r \frac{\lambda(\mathbf{r})}{4} \langle \Psi_{\alpha}^{+}(\mathbf{r}) (i\sigma_2)_{\alpha\beta} \Psi_{\beta}^{+}(\mathbf{r}) \rangle_a \langle \Psi_{\nu}(\mathbf{r}) (i\sigma_2)_{\mu\nu} \Psi_{\mu}(\mathbf{r}) \rangle. \quad (7.62)$$

При записи последнего слагаемого использовано тождество

$$\langle \Psi_{\beta}^{+}(\mathbf{r}) \Psi_{\alpha}^{+}(\mathbf{r}) \rangle_a \langle \Psi_{\alpha}(\mathbf{r}) \Psi_{\beta}(\mathbf{r}) \rangle_a \equiv \\ \equiv \frac{1}{2} \langle \Psi_{\alpha}^{+}(\mathbf{r}) (i\sigma_2)_{\alpha\beta} \Psi_{\beta}^{+}(\mathbf{r}) \rangle_a \langle \Psi_{\nu}(\mathbf{r}) (i\sigma_2)_{\mu\nu} \Psi_{\mu}(\mathbf{r}) \rangle_a.$$

Подчеркнем, что в полученном выражении (7.62) операторные функции  $\Psi_{\alpha}(\mathbf{r})$ ,  $\Psi_{\alpha}^{+}(\mathbf{r})$  заданы каноническим преобразованием (7.51), содержащем ортонормированный, по условиям (7.52) – (7.55), набор функций  $u_{nv;\alpha}(\mathbf{r})$ ,  $v_{nv;\alpha}(\mathbf{r})$ , определяемых из уравнений (7.58). В силу этого аппроксимирующий гамильтониан является диагональным, и, следовательно, функционал свободной энергии

$\langle H_{ap} \rangle_a - TS_a$  стационарен по вариациям  $\delta u_{nv;\alpha}$ ,  $\delta v_{nv;\alpha}$ ,  $\delta f_{nv}$ .

Одновременно, спектр состояний аппроксимирующего гамильтониана должен приводить и к минимуму функционала свободной энергии  $\mathcal{F}_a$ . Это достигается, как легко показать, следующим выбором эффективных потенциалов:

$$U_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) = U^{(1)}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) - \lambda(\mathbf{r}) \sum_{\mu\nu} (i\sigma_2)_{\alpha\mu} (i\sigma_2)_{\alpha\nu} \langle \psi_{\mu}^+(\mathbf{r}) \psi_{\nu}(\mathbf{r}) \rangle_a, \quad (7.63)$$

$$\Delta(\mathbf{r}) = \frac{\lambda(\mathbf{r})}{2} \sum_{\mu\nu} \langle \psi_{\nu}(\mathbf{r}) (i\sigma_2)_{\mu\nu} \psi_{\mu}(\mathbf{r}) \rangle. \quad (7.64)$$

Уравнения (7.58), (7.63), (7.64) составляют полную систему уравнений, описывающих (с учетом сделанных выше замечаний) сверхпроводимость в неоднородных структурах, в том числе, в слоистых структурах, сверхпроводящих в силу эффекта близости.

Здесь не рассматривается альтернативное (и эквивалентное) описание сверхпроводимости, а именно, формализм горьковских функций Грина [18, 19].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Meissner H., Phys. Rev. **109** (1958) 686.
2. Meissner H., Phys. Rev. Lett. **2** (1959) 458.
3. Meissner H., Phys. Rev. **117** (1960) 672.
4. Абрикосов А.А. Основы теории металлов. М.: Наука, 1987.
5. Deutscher G., P.G. de Gennes, in: R.D. Parks Ed., Superconductivity, Marcel Dekker, NY, 1969, 1005.
6. Тинкхам М., Введение в сверхпроводимость, М., Атомиздат, 1980. См. также: Tinkham M., Introduction to Superconductivity, 2nd ed. McGraw-Hill, New York, 1996.
7. Кемпбелл А., Дж. Иветс, Критические токи в сверхпроводниках, М., «Мир», 1975.
8. Bardeen J., L.N. Cooper, and J.R. Schrieffer, Phys. Rev. **108** (1957) 1175.
9. Cooper L., Phys. Rev. Lett. **6** (1961) 689.
10. De Gennes P.G., E. Guyon, Phys. Lett. **3** (1963) 168.
11. De Gennes P.G., Rev. Mod. Phys. **36** (1964) 225.
12. Saint-James D., P.G. de Gennes, Phys. Lett. **7** (1963) 306.
13. Де Жен П. Сверхпроводимость металлов и сплавов, М.: Мир, 1968.
14. Боголюбов Н.Н., УФН **67** (1959) 549.
15. Боголюбов Н.Н. Избранные труды в трёх томах, т.3. Киев: Наукова думка, 1971, с. 5 – 243.
16. Werthamer N.R., Phys. Rev. **132** (1963) 2440.
17. Hauser J.J., H.C. Theuerer, N.R. Werthamer, Phys. Rev. **136** (1964) A637.
18. Горьков Л.П., ЖЭТФ **34** (1958) 735.
19. Абрикосов А.А., Л.П. Горьков, И.Е. Дзялошинский, Методы квантовой теории поля в статистической физике, М., Физматгиз, 1962.
20. Андреев А. Ф., ЖЭТФ **46** (1964) 1823.
21. Smith P. H., S. Shapiro, J.L. Miles, J. Nicol, Phys. Rev. Lett. **6** (1961) 686.
22. Rose-Innes A.C., B. Serin, Phys. Rev. Lett. **7** (1961) 278.
23. Simmons W.A., D.A. Douglass, Jr., Phys. Rev. Lett. **9** (1962) 153.
24. Hilsch P., Z. Physik **167** (1962) 511.
25. Jin B.Y., J.B. Ketterson, Adv. Phys. **38** (1989) 189.
26. Лыков А. Н., УФН **162** (1992) 1.
27. Lykov A.N., Adv. Phys. **42** (1993) 263.
28. Гинзбург В.Л., Л.Д. Ландау, ЖЭТФ **10** (1950) 1064.
29. Raffy H., J.C. Renard, E. Guyon, Sol. State Commun. **11** (1972) 1679.
30. Raffy H., J.C. Renard, E. Guyon, Sol. State Commun. **14** (1974) 427.
31. Raffy H., J.C. Renard, E. Guyon, Sol. State Commun. **14** (1974) 431.
32. Broussard P.R., T.H. Geballe, Phys. Rev. B **37** (1988) 68.
33. Koorevaar P., W. Maj, P.H. Kes, J. Aarts, Phys. Rev. B **47** (1993) 934.

34. Brongersma S.H., E. Verweij, N.J. Koeman, D.G. de Groot, R. Griessen, B.I. Ivlev, *Phys. Rev. Lett.* **71** (1993) 2319.
35. Coccoresse C., C. Attanasio, L.V. Mercaldo, M. Salvato, L. Maritato, J.M. Slaughter, C.M. Falco, S.L. Prischepa, B.I. Ivlev, *Phys. Rev. B* **57** (1998) 7922.
36. Vermeer A.J., C.W. Hagen, D.G. de Groot, N.J. Koeman, J.H. Rector, H. van Leuken, R. Griessen, M.G. Karkut, T.M. Triscone, Ø. Fischer, *Physica C* **162 – 164** (1989) 409.
37. Antognazza L, M.G. Karkut, J.-M. Triscone, V. Matijasevic, N. Missert, M.R. Beasley, Ø. Fischer, *Physica C* **162 – 164** (1989) 411.
38. Абрикосов А.А., *ЖЭТФ* **32** (1957) 1442.
39. Pippard A.B., *Philos. Mag.* **19** (1969) 217.
40. Ami S. K., K. Maki, *Progr. Theor. Phys.* **53**, (1975) 1.
41. Eilenberger G., *Phys. Rev.* **164** (1967) 628.
42. Kulić M., L. Dobrosavljević, *Phys. Stat. Sol. b* **75** (1976) 677.
43. Kulić M., F.S Rys, *J. Low Temp. Phys.* **76** (1989) 167.
44. Prokić V., D. Davidović, L. Dobrosavljević-Grujić, *Phys. Rev. B* **51** (1995) 6013.
45. Kugel K.I., T. Matsushita, E.Z. Melikhov, A.L. Rakhmanov, *Physica C* **228** (1994) 373.
46. Kushnir V.N., Petrov A. Yu., Prischepa S.L., *Известия Белорусской инженерной академии*, 1998, № 2, в.6, 36.
47. Prischepa S.L., V.N. Kushnir, A. Yu. Petrov, C. Attanasio, L. Maritato, *Proceedings of SPIE: Superconducting superlattices II: Native and Artificial*. Eds: I. Bozovic and D. Pavuna. 1998, **3480** (July 1998), 140.
48. Kushnir V.N., A.Yu. Petrov, S.L. Prischepa, C. Attanasio, L. Maritato, *Proc. 10<sup>th</sup> Int. Workshop on Critical Currents (IWCC)*, June 4-7 (2001), Göttingen, Ed. C. Jooss (Institut für Materialphysik Universität Göttingen) 2001, 184.
49. Kushnir V.N., S.L. Prischepa, C. Attanasio, L. Maritato, *Phys. Rev. B* **63** (2001) 092503.
50. Schuller I.K., *Phys. Rev. Lett.* **44** (1980) 1597.
51. Lowe W. P., T. W. Barbee, Jr., T. H. Geballe, D. B. McWhan, *Phys. Rev. B* **24** (1981) 6193.
52. Banerjee I., Q.S. Yang, C.M. Falco, I.K. Schuller, *Sol. State Commun.* **41** (1982) 805.
53. Banerjee I., Q.S. Yang, C.M. Falco, I.K. Schuller, *Phys. Rev. B* **28** (1983) 5037.
54. Banerjee I., I.K. Schuller, *J. Low Temp. Phys.* **54** (1984) 501.
55. Chun C. S. L., G.-G. Zheng, J.L. Vicent, I.K. Schuller, *Phys. Rev. B* **29** (1984) 4915.

56. Locquet J.P., W. Sevenhans, Y. Bruynseraede, H. Homma, I.K. Schuller, IEEE Trans. Magn. **23** (1987) 1393.
57. Kanoda K., H. Mazaki, T. Yamada, N. Hosoito, T. Shinjo, Phys. Rev. B **33** (1986) 2052.
58. Kanoda K., H. Mazaki, N. Hosoito, T. Shinjo, Phys. Rev. B **35** (1987) 6736.
59. Broussard P.R., T.H. Geballe, Phys. Rev. B **35** (1987) 1664.
60. Broussard P.R., T.H. Geballe, Phys. Rev. B **37** (1988) 60.
61. Guimpel J., M.E. de la Cruz, F. de la Cruz, H.J. Fink, O. Laborde, J.C. Villegier, J. Low Temp. Phys. **63** (1986) 151.
62. Dediu V.I., V.V. Kabanov, A.S. Sidorenko, Phys. Rev. B **49** (1994) 4027.
63. Cirillo C., C. Attanasio, L. Maritato, L.V. Mercaldo, S.L. Prischepa, M. Salvato, J. Low Temp. Phys. **130** (2003) 509.
64. Klemm R.A., M.R. Beasley, A. Luther, J. Low Temp. Phys. **16** (1974) 607.
65. Klemm R.A., A. Luther, M.R. Beasley, Phys. Rev. B **12** (1975) 877.
66. Deutscher G., Entin-Wohlman O., Phys. Rev. B **17** (1978) 1249.
67. Булаевский Л.Н., УФН **116** (1975) 449.
68. Prober D.E., R.E. Schwall, M.R. Beasley, Phys. Rev. B **21** (1980) 2717.
69. Coleman R. V., G. K. Eiserman, S. J. Hillenius, A. T. Mitchell, J. L. Vicent, Phys. Rev. B **27** (1983) 125.
70. Ruggiero S.T., T.W. Barbee, Jr., M.R. Beasley, Phys. Rev. Lett. **45** (1980) 1299.
71. Ruggiero S.T., T.W. Barbee, Jr., M.R. Beasley, Phys. Rev. B **26** (1982) 4894.
72. Tinkham M., Phys. Rev. **129** (1963) 2413.
73. Tinkham M., Phys. Lett. **9** (1964) 217.
74. Harper F.E., M. Tinkham, Phys. Rev. **172** (1968) 441.
75. ТОВАЖНЯНСКИЙ В.Л., В.Г. Черкасова, И.Я. Фогель, ЖЭТФ **93** (1987) 1384.
76. Глазман Л.И., ЖЭТФ **93** (1987) 1373.
77. Lawrence W.E., S. Doniach, in: Proceedings of the 12<sup>th</sup> International Conference of Low Temperature Physics (Kyoto, Japan, 1970), edited by E. Kanda (Keigaku, Tokyo, 1971), pp. 361 and 362.
78. Biagi K.R., V.G. Kogan, J.R. Clem, Phys. Rev. B **32** (1985) 7165.
79. Usadel K.D., Phys. Rev. Lett. **25** (1970) 507.
80. Eilenberger G., Z. Phys. **214** (1968) 195.
81. Simonin J., Phys. Rev. B **33** (1986) 1700.
82. Takashi S., M. Tachiki, Phys. Rev. B **33** (1986) 4620.
83. Takashi S., M. Tachiki, Physica B+C **135** (1985) 178.
84. Takashi S., M. Tachiki, Phys. Rev. B **34** (1986) 3162.

85. Karkut M.G., V. Matijasevic, L. Antognazza, J.M. Triscone, N. Missert, M.R. Beasley, Ø. Fisher, *Phys. Rev. Lett.* **60** (1988) 1751.
86. Aarts J., K.J. de Korver, P.H. Kes, *Europhys. Lett.* **12** (1990) 447.
87. Kuwasawa Y., U. Hayano, T. Tosaka, S. Nakano, S. Matuda, *Physica C* **165** (1990) 173.
88. Kuwasawa Y., T. Tosaka, A. Uchiyama, S. Matuda, S. Nakano, *Physica C* **175** (1991) 187.
89. Tachiki M., S. Takashi, *Physica C* **153-155** (1988) 1702.
90. Auvil P.R., J.B. Ketterson, *Sol. State Commun.* **67** (1988) 1003.
91. Auvil P.R., J.B. Ketterson, *Superlattices Microstruct.* **4** (1988) 431.
92. Auvil P.R., J.B. Ketterson, S.N. Song, *J. Low Temp. Phys.* **74** (1989) 103.
93. Ketterson J.B. and S.N. Song, *Superconductivity*, Cambridge University press, 1999.
94. Takanaka J., *J. Phys. Soc. Jpn.* **60** (1991) 1070.
95. Takanaka J., *J. Phys. Soc. Jpn.* **58** (1989) 668.
96. Takanaka J., *J. Phys. Soc. Jpn.* **61** (1992) 2865.
97. Lodder A., R.T.W. Koperdraad, *Physica C* **212** (1993) 81.
98. Koperdraad R.T.W., A. Lodder, *Phys. Rev. B* **51** (1995) 9026.
99. Koperdraad R.T.W., H.T. Wu, A. Lodder, *J. Phys.: Condens. Matter.* **8** (1996) 8787.
100. Koperdraad R.T.W., A. Lodder, *Phys. Rev. B* **54** (1996) 515.
101. Koperdraad R.T.W., A. Lodder, *Physica C* **268** (1996) 216.
102. Koyama T., N. Takezawa, Y. Naruse, M. Tachiki, *Physica C* **194** (1992) 20.
103. Takezawa N., T. Koyama, M. Tachiki, *Physica C* **207** (1993) 81.
104. Estrera J.P., G.B. Arnold, *Phys. Rev. B* **39** (1989) 2094.
105. Iwai T., S. Miyake, K. Takanaka, *Phys. Rev. B* **51** (1995) 12013.
106. Kuwasawa Y., T. Nojima, S. Hwang, B.J. Yuan, J.P. Whitehead, *Physica B* **222** (1996) 92.
107. Куприянов М.Ю., В.Ф. Лукичев, *ЖЭТФ* **94** (1988) 139.
108. Radović Z., M. Ledvij, L. Dobrosavljević-Grujić, *Phys. Rev. B* **43** (1991) 8613.
109. Кушнир В.Н., Доклады БГУИР №2(14) (2006) 8.
110. Kushnir V. N., S.L. Prischepa, C. Cirillo, C. Attanasio, *Eur. Phys. J. B* **52** (2006) 9.
111. Aarts J., *Phys. Rev. B* **56** (1997) 8432.
112. Aarts J., W. Maj, K.J. de Korver, P. Koorevaar, P.H. Kes, *Physica C* **185 - 189** (1991) 2071.
113. Maj W., J. Aarts, *Phys. Rev. B* **44** (1991) 7745.
114. Абрикосов А.А., *ЖЭТФ* **47** (1964) 720.
115. Yuan B.J., J.P. Whitehead, *Phys. Rev. B* **44** (1991) 6943.

116. Yuan B.J., J.P. Whitehead, *Phys. Rev. B* **47** (1993) 3308.
117. Takanaka K., *J. Magn. Magn. Matter.* **126** (1993) 619.
118. Suzuki T., T. Iwai, K. Takanaka, *Physica C* **242** (1995) 90.
119. Saint-James D., *Phys. Lett.* **16** (1965) 218.
120. Fink H.J., *Phys. Rev.* **177** (1969) 732.
121. Broussard P.R., *Phys. Rev. B* **43** (1991) 2783.
122. Кушнир В.Н., А.Ю. Петров, С.Л. Прищепа, *ФНТ* **25** (1999) 1265.
123. Kushnir V.N., A.Yu. Petrov, S.L. Prischepa, A. Angrisani Armenio, C. Attanasio, L. Maritato, *Physics, Chemistry and Applications of Nanostructures. Reviews and Short Notes to Nanomeeting 2001*. Eds. V.E. Borisenko, S.V. Gaponenko, V.S. Gurin. World Scientific. 2001, 247.
124. Ciuhu C., A. Lodder, *Superlattices Microstruct.* **30** (2001) 95.
125. Кушнир В.Н., *ФТТ–2003. Актуальные проблемы физики твердого тела./ Тезисы докладов Международной научной конференции к 40-летию ИФТТП НАН Беларуси и 90-летию основателя института академика Н.Н. Сироты./ 4-6 ноября 2003, Минск, 2004, 199.*
126. Kushnir V.N., S.L. Prischepa, C. Attanasio, *Microelectronics Engineering* **69** (2003) 346.
127. Kushnir V.N., S.L. Prischepa, C. Attanasio, M. Salvato, A. Angrisani Armenio, C. Cirillo, M.L. Della Rocca, L. Maritato, *Eur. Phys. J. B* **41** (2004) 439.
128. Кушнир В.Н., *Сборник расширенных тезисов докладов 1-й Международной конференции “Фундаментальные проблемы сверхпроводимости (ФПС’04)”, 18-22 октября 2004 года, г. Звенигород, Москва ФИАН 2004, 228.*
129. Прищепа С.Л., В.Н. Кушнир, Е. А. Ильина, *Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. Навук, 2006, №1, 81.*
130. Прищепа С.Л. // *Сборник расширенных тезисов докладов 1-й Международной конференции “Фундаментальные проблемы сверхпроводимости (ФПС’04)”, 18-22 октября 2004 года, г. Звенигород, Москва ФИАН 2004, 321.*
131. Кушнир В.Н., *Доклады БГУИР, 2004, №4, 5.*
132. Prischepa S.L., E.A. Ilyina, V.N. Kushnir, C. Cirillo, M. Salvato, C. Attanasio, *Physics, Chemistry and Applications of Nanostructures. Reviews and Short Notes to Nanomeeting -2005*. Minsk, Belarus 24-47 May 2005. Eds. V. E. Borisenko, S.V. Gaponenko, V.S. Gurin. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2005, 301.
133. Кушнир В.Н., С.Л. Прищепа, Е.А. Ильина, *ФТТ–2005. Актуальные проблемы физики твердого тела./ Сборник докладов международной научной конференции 26-28 октября 2005г., Минск. В двух томах. Т.2. Минск, Издательский центр БГУ, 2005, 5.*

134. Prischepa S.L., C. Cirillo, V.N. Kushnir, E. A. Ilyina, M. Salvato, C. Attanasio, *Phys. Rev. B* **72** (2005) 024535.
135. Prischepa S.L., V.N. Kushnir, M.L. Della Rocca, C. Attanasio, *Physics, Chemistry and Applications of Nanostructures. Reviews and Short Notes to Nanomeeting 2003*. Eds. V.E. Borisenko, S.V. Gaponenko, V.S. Gurin. World Scientific. 2003, 507.
136. Kushnir V.N., S.L. Prischepa, M.L. Della Rocca, M. Salvato, C. Attanasio, *Phys. Rev. B* **68** (2003) 212505.
137. Eschrig M., *Phys. Rev. B* **80** (2009) 134511.
138. Зайцев Р.О., *ЖЭТФ* **48** (1965) 664, 1759.
139. McMillan W.L., *Phys. Rev.* **175** (1968) 537.
140. Ларкин А.И., Ю.Н. Овчинников, *ЖЭТФ* **55** (1968) 2262.
141. Ларкин А.И., Ю.Н. Овчинников, *ЖЭТФ* **68** (1975) 1915.
142. Зайцев А.В., *ЖЭТФ* **86** (1984) 1742.
143. Шеланков А.Л., *ФТТ* **26** (1984) 1615.
144. Ashauer B., G. Kieselmann, D. Rainer, *J. Low Temp. Phys.* **63** (1986) 349.
145. Millis A., D. Rainer, J.A. Sauls, *Phys. Rev. B* **38** (1988) 4504.
146. Голубов А.А., М.Ю. Куприянов, *ЖЭТФ* **96** (1989) 1420.
147. Хусаинов М.Г., *Письма в ЖЭТФ* **53** (1991) 554.
148. Golubov A.A., *Proc. SPIE: Conference 215*, **2157** (1994) (WA: Bellingham) 353.
149. Fominov Ya. A., M.V. Feigel'man, *Phys. Rev. B* **63** (2001) 094518.
150. Lodder A., C. Ciuhu, *Phys. Rev. B* **64** (2001) 224526.
151. Nazarov Yu. V., *Superlattices Microstruct.* **25** (1999) 1221.
152. Nazarov Yu. V., *Phys. Rev. Lett.* **73** (1994) 1420.
153. J.C. Hammer, J.C. Cuevas, F.S. Bergeret, and W. Belzig, *Phys. Rev. B* **76** (2007) 064514; arXiv:0704.2358v1 [cond-mat.supr-con] 18 Apr 2007, 1 – 12
154. Bergeret F.S., J.C. Cuevas, *J. Low Temp. Phys.* **153** (2008) 304.
155. Tagirov L.R., N. García, *Superlattices Microstruct.* **41** (2007) 152.
156. Buttiker M., Y. Imry, R. Landauer, S. Pinhas, *Phys. Rev. B* **31** (1985) 6207.
157. Cirillo C., S.L. Prischepa, M. Salvato, C. Attanasio, *Eur. Phys. J. B* **38** (2004) 59.
158. Tesauro A., A. Aurigemma, C. Cirillo, S.L. Prischepa, M. Salvato, C. Attanasio, *Supercond. Sci. Technol.* **18** (2005) 1.
159. Cirillo C., S.L. Prischepa, A. Romano, M. Salvato, C. Attanasio, *Physica C* **369** (2004) 300.
160. Кушнир В.Н., Доклады БГУИР (2005) №4, 5.
161. Кушнир В.Н., Е.А. Ильина, Вторая международная конференция «Фундаментальные проблемы высокотемпературной сверхпроводимости»

- мости» ФПС'06 9-13 октября 2006 года, г. Звенигород/ Сборник трудов. Москва ФИАН 2006, 343.
162. Ильина Е.А., В.Н. Кушнир, С.Л. Прищепа, Вестн. НАН Беларуси, Сер. физ.-мат. наук (2007) № 4, 84.
  163. Kushnir V.N., E.A. Ilyina, S.L. Prischepa, C. Cirillo, C. Attanasio, Superlattices Microstruct. **43** (2008) 86.
  164. Prischepa S.L., V.N. Kushnir, E.A. Ilyina, C. Attanasio, C. Cirillo, J. Aarts, In: NATO Science for Peace and Security, Series B – Physics and Biophysics. “Electron Transport in Nanosystems”, Ed. Janez Bonča and Sergei Kruchinin, Springer, 2008, 269.
  165. Кушнир В.Н., С.Л. Прищепа, Вестник Фонда фундаментальных исследований (2009) №4, 99.
  166. Kushnir V.N., S.L. Prischepa, C. Cirillo, C. Attanasio, J. Appl. Phys. **106** (2009) 113917.
  167. Bergmann G., Phys. Rev. B **72** (2005) 134505.
  168. Brammertz G., A.A. Golubov, P. Verhoeve, R. Den Hartog, T. Peacock, H. Rogalla, Appl. Phys. Lett. **80** (2002) 2955.
  169. Wolf E.L., G.B. Arnold, Phys. Rep. **91** (1982) 31.
  170. Arnold G.B., Phys. Rev. B **18** (1978) 1076.
  171. Bar-Sagi J., Phys. Rev. B **18** (1978) 3105.
  172. Entin-Wohlman O., J. Bar-Sagi, B **18** (1978) 3174.
  173. Tanaka Y., M. Tsukada, Phys. Rev. B **44** (1991) 7578.
  174. Tanaka Y., M. Tsukada, Sol. State Commun. **77** (1991) 129.
  175. Tanaka Y., M. Tsukada, Phys. Rev. B **40** (1989) 4482.
  176. Tanaka Y., M. Tsukada, Sol. State Commun. **69** (1989) 195.
  177. Ishii C., Progr. Theor. Phys. **44** (1970) 1525; **47** (1972) 1464.
  178. Gallagher W.J., Phys. Rev. B **22** (1980) 1233.
  179. Blaaboeer M., R.T.W. Koperdraad, A. Lodder, D. Lenstra, Phys. Rev. B **54** (1996) 4283.
  180. Koperdraad R.T.W., R.E.S. Otadoy, M. Blaaboeer, A. Lodder, J. Phys.: Condens. Matter **13** (2001) 8707.
  181. Otadoy R.E.S., A. Lodder, Phys. Rev. B **65** (2002) 024521.
  182. Андреев А.Ф., ЖЭТФ **51** (1966) 1510.
  183. Kümmel R., Phys. Rev. B **10** (1974) 2812.
  184. Kieselmann G., Phys. Rev. B **35** (1987) 6762.
  185. Ashida M., S. Aoyama, J. Hara, K. Nagai, Phys. Rev. B **40** (1989) 8673.
  186. Hara J., M. Ashida, K. Nagai, Phys. Rev. B **47** (1993) 11 263.
  187. Hara J., M. Ashida, K. Nagai, J. Phys. Soc. Jpn. **68** (1999) 212.
  188. Šipr O., B. L. Györfy, J. Phys.: Condens. Matter **8** (1996) 169.
  189. Klapwijk T.M., Journal of Superconductivity: Incorporating Novel Magnetism **17** (2004) 593.

190. Blonder G. E., M. Tinkham, T. M. Klapwijk, *Phys. Rev. B* **25** (1982) 4515.
191. Lambert C.J., R. Raimondi, *J. Phys.: Condens. Matter.* **10** (1998) 901.
192. Pannetier B., H. Courtois, *J. Low Temp. Phys.* **118** (2000) 599.
193. Chandrasekhar V., *Supercond. Sci. Technol.* **22** (2009) 083001.
194. Karkut M.G., J. -M. Triscone, D. Ariosa, Ø. Fisher, *Phys. Rev. B* **34** (1986) 4390.
195. Китаев А.Ю., Л.С. Левитов, *ЖЭТФ* **95** (1989) 311.
196. Golubov A.A., V.M. Krasnov, *Physica C* **196** (1992) 177.
197. Krasnov V.M., V.A. Oboznov, V.V. Ryazanov, *Physica C* **196** (1992) 335.
198. Krasnov V.M., N.F. Pedersen, A.A. Golubov, *Physica C* **209** (1993) 579.
199. Krasnov V.M., A.A. Golubov, N.F. Pedersen, *Physica B* **194-196** (1994) 1423.
200. Krasnov V.M., A.E. Kovalev, V.A. Oboznov, V.V. Ryazanov, *Physica C* **215** (1993) 265.
201. Krasnov V.M., A.E. Kovalev, V.A. Oboznov, V.V. Ryazanov, *Physica B* **194-196** (1994) 2387.
202. Krasnov V.M., *Physica C* **252** (1995) 319.
203. Yokoyama T., Y. Tanaka, A. Golubov, Jun-ichiro Inoue, Y. Asano, *Physica C* **426-431** (2005) 262.
204. Chien C.L., D. Reich, *J. Magn. Magn. Mater.* **200** (1999) 83.
205. Garifullin I. A., *J. Magn. Magn. Mater.* **240** (2002) 571.
206. Изюмов Ю.А., Ю. Н Прошин, М.Г. Хусаинов, *УФН* **172** (2002) 113.
207. Golubov A.A., M. Yu. Kupriyanov, E. Il'ichev, *Rev. Mod. Phys.* **76** (2004) 411.
208. Buzdin A. I., *Rev. Mod. Phys.* **77** (2005) 935.
209. Bergeret F. S., A. F. Volkov, K.B. Efetov, *Rev. Mod. Phys.* **77** (2005) 1321.
210. I. F. Lyuksyutov; V. L. Pokrovsky, *Adv. Phys.* **54** (2005) 67.
211. Efetov K.B., I. A. Garifullin, A.F. Volkov, K. Westerholt, *Magnetic Heterostructures. Advances and Perspectives in Spinstructures and Spintransport. Series Springer Tracts in Modern Physics 227*, Eds. H. Zabel, D. Bader Samuel, 2007; arXiv:cond-mat/0610708 v1 25 Oct 2006, 1-39.
212. Буздин А.И., Л.Н. Булаевский, М.Л. Кулич, С.В. Панюков, *УФН* **144** (1984) 597 – 641.
213. Bulaevskii L.N., A.I. Buzdin, M.L. Kulić, S.V. Panjukov, *Adv. Phys.* **34** (1985) 175.
214. Denisov D., A. Buzdin, H. Shimahara, *Phys. Rev. B* **79** (2009) 064506; arXiv:0901.0502v1 [cond-mat.supr-con] 5 Jan 2009, 1-18.
215. Hauser J.J., H.C. Theuerer, N.R. Werthamer, *Phys. Rev.* **142** (1966) 118.
216. Абрикосов А.А., Л.П. Горьков, *ЖЭТФ* **39** (1960) 1781.
217. Wong H.K., J.B. Ketterson, *J. Low Temp. Phys.* **63** (1986) 139.

218. Wong H.K., B.Y. Jin, H.Q. Yang, J.E. Hilliard, J.B. Ketterson, J. Low Temp. Phys. **63** (1986) 307.
219. Булаевский Л.Н., В.В. Кузий, А.А. Собянин, Письма в ЖЭТФ **25** (1977) 314.
220. Буздин А.И., Л.Н. Булаевский, С.В. Панюков, Письма в ЖЭТФ **35** (1982) 147.
221. Буздин А.И., М.Ю. Куприянов, Письма в ЖЭТФ **53** (1991) 308.
222. Буздин А.И., М.Ю. Куприянов, Письма в ЖЭТФ **52** (1990) 1089.
223. Radović Z., M. Ledvij, L. Dobrosavljević-Grujić, A.I. Buzdin, J.R. Clem, Phys. Rev. B **44** (1991) 759.
224. Buzdin A. I., M. Yu. Kupriyanov, B. Vujčić, Physica C **185-189** (1991) 2025.
225. Буздин А.И., Б. Вуйичич, М.Ю. Куприянов, ЖЭТФ **101** (1992) 231.
226. Buzdin A., Phys. Rev. B **62** (2000) 11377.
227. Jiang J.S., D. Davidović, D.H. Reich, C.L. Chien, Phys. Rev. Lett. **74** (1995) 314.
228. Jiang J.S., D. Davidović, D.H. Reich, C.L. Chien, Phys. Rev. B **54** (1996) 6119.
229. Attanasio C., L. Maritato, S.L. Prischepa, M. Salvato, B.N. Engel, C.M. Falco, J. Appl. Phys. **77** (1995) 2081.
230. Mercaldo L.V., C. Attanasio, C. Coccorese, L. Maritato, S.L. Prischepa, M. Salvato, Phys. Rev. B **53** (1996) 14040.
231. Attanasio C., C. Coccorese, L.V. Mercaldo, S.L. Prischepa, M. Salvato, L. Maritato, Phys. Rev. B **57** (1998) 14411.
232. Mühge Th., N. N. Garif'yanov, Yu. V. Goryunov, G. G. Khaliullin, L. R. Tagirov, K. Westerholt, I. A. Garifullin, H. Zabel, Phys. Rev. Lett. **77** (1996) 1857.
233. Mühge Th., K. Westerholt, H. Zabel, N. N. Garif'yanov, Yu. V. Goryunov, I. A. Garifullin, G. G. Khaliullin, Phys. Rev. B **55** (1997) 8945.
234. Koorevaar P., Y. Suzuki, R. Coehoorn, J. Aarts, Phys. Rev. B **49** (1994) 441.
235. Stunk C., C. Sürgers, U. Paschen, H. v. Löhneysen, Phys. Rev. B **49** (1994) 4053.
236. Aarts J., J.M.E. Geers, E. Brück, A.A. Golubov, R. Coehoorn, Phys. Rev. B **56** (1997) 2779.
237. Verbanck J., C.D. Potter, V. Metlushko, R. Schad, V.V. Moshchalkov, Y. Bruynseraede, Phys. Rev. B **57** (1998) 6029.
238. Bourgeois O., R.C. Dynes, Phys. Rev. B **65** (2002) 144503.
239. Demler E.A., G.B. Arnold, M.R. Beasley, Phys. Rev. B **55** (1997) 15174.
240. Khusainov M.G., Yu. N. Proshin, Phys. Rev. B **56** (1997) R14283.
241. Прошин Ю.Н., М.Г. Хусаинов, Письма в ЖЭТФ **66** (1997) 527.

242. Прошин Ю.Н., М.Г. Хусаинов, ЖЭТФ **113** (1998) 1708; **116** (1999) 1887.
243. Izyumov I.A., M.G. Khusainov, Yu. N. Proshin, ФНТ **32** (2006) 1065.
244. Tagirov L.R., Physica C **307** (1998) 145.
245. Vodopyanov B.P., L.R. Tagirov, H.Z. Durusoy, A.V. Berezhnov, Physica C **366** (2001) 31.
246. Водопьянов Б.П., Л.Р. Тагиров, Письма в ЖЭТФ **77** (2003) 153.
247. Водопьянов Б.П., Л.Р. Тагиров, Письма в ЖЭТФ **78** (2003) 1043.
248. Fominov Ya. V., N.M. Chtchelkatchev, A.A. Golubov, Phys. Rev. B **66** (2002) 014507.
249. Buzdin A., I. Baladié, Phys. Rev. B **67** (2003) 184519; arXiv:cond-mat/0212031 v1 2 Dec 2002, 1-16.
250. Obi Y., M. Ikebe, T. Kubo, H. Fujimori, Physica C **317-318** (1999) 149.
251. Ogrin F.Y., S.L. Lee, A.D. Hillier, A. Mitchell, T.-H. Shen, Phys. Rev. B **62** (2000) 6021.
252. Vélez M., M. C. Cyrille, S. Kim, J. L. Vicent, I. K. Schuller, Phys. Rev. B **59** (1999) 14659.
253. Lazar L., K. Westerholt, H. Zabel, L. R. Tagirov, Yu. V. Goryunov, N. N. Garif'yanov, I. A. Garifullin, Phys. Rev. B **61** (2000) 3711.
254. Garifullin I. A., D.A. Tikhonov, N. N. Garif'yanov, L. Lazar, Yu. V. Goryunov, S. Ya. Khlebnikov, L. R. Tagirov, K. Westerholt, H. Zabel, Phys. Rev. B **66** (2002) 020505.
255. Obi Y., H. Fujishiro, M. Ikebe, J. Magn. Mater. **272-276** (2004) e1087.
256. Obi Y., M. Ikebe, H. Fujishiro, Phys. Rev. Lett. **94** (2005) 057008.
257. Rusanov A., R. Boogaard, M. Hesselberth, H. Sellier. J. Aarts, Physica C **369** (2002) 300.
258. Рязанов В.В., В.А. Обознов, А.С. Прокофьев, С.В. Дубонос, Письма в ЖЭТФ **77** (2003) 43.
259. Sidorenko A. S., V.I. Zdravkov, A.A. Prepelitsa, C. Helbig, Y. Luo, S. Gsell, M. Schreck, S. Klimm, S. Horn, L.R. Tagirov, R. Tidecks, Ann. Phys. **12** (2003) 37.
260. Cirillo C., A. Rusanov, C. Bell, J. Aarts, Phys. Rev. B **75** (2007) 174510.
261. Baladié I., A. Buzdin, Phys. Rev. B **64** (2001) 224514.
262. Bergeret F. S., A. F. Volkov, K.B. Efetov, Phys. Rev. B **66** (2002) 184403.
263. Zdravkov V., A. Sidorenko, G. Obermeier, S. Gsell, M. Schreck, C. Müller, S. Horn, R. Tidecks, L. R. Tagirov, Phys. Rev. Lett. **97** (2006) 057004; arXiv:cond-mat/0602448 v1 19 Feb 2009, 1 – 6.
264. Сидоренко А. С., В.И. Здравков, Р. Морари, J. Kehrle, G. Obermeier, S. Gsell, M. Schreck, C. Müller, S. Horn, R. Tidecks, В.В. Рязанов, Л.Р. Тагиров, Третья международная конференция «Фундаментальные про-

блемы высокотемпературной сверхпроводимости» ФПС'08, 13-17 октября 2008 года, г. Звенигород. Сборник трудов. Москва ФИАН 2008, 193.

265. Sidorenko A.S., V.I. Zdravkov, J. Kehrle, R. Morari, G. Obermeier, S. Gsell, M. Schreck, C. Müller, M. Yu. Kupriyanov, V.V. Ryazanov, S. Horn, L. R. Tagirov, R. Tidecks, Письма в ЖЭТФ **90** (2009) 149.
266. Рязанов В.В., УФН **169** (1999) 920.
267. Фейгельман М.В., В.В. Рязанов, В.Б. Тимофеев, УФН **171** (2001) 1099.
268. Ryazanov V.V., V.A. Oboznov, A.Yu. Rusanov, A.V. Veretennikov, A.A. Golubov, J. Aarts, Phys. Rev. Lett. **86** (2001) 2427; arXiv:cond-mat/0008364v1 [cond-mat.supr-con] 24 Aug 2000, 6 p.
269. Ryazanov V.V., V.A. Oboznov, A.V. Veretennikov, A.Yu. Rusanov, Phys. Rev. B **65** (2001) 020501(R); arXiv:cond-mat/0103240v1 [cond-mat.supr-con] 11 Mar 2001, 1 – 6.
270. Ryazanov V.V., V.A. Oboznov, A.V. Veretennikov, A.Yu. Rusanov, A.A. Golubov, J. Aarts, Usp. Fiz. Nauk (Suppl) **171** (2001) 81.
271. Рязанов В.В., В.А. Обознов, В.В. Больгинов, А.С. Прокофьев, А.К. Фефанов, УФН **174** (2004) 795.
272. Oboznov V.A., V.V. Bol'ginov, A.K. Feofanov, V.V. Ryazanov, A.I. Buzdin, Phys. Rev. Lett. **96** (2006) 197003; arXiv:cond-mat/0508573v1 [cond-mat.supr-con] 24 Aug 2005, 1 – 4.
273. Kontos T., M. Aprili, J. Lesueur, F. Genêt, B. Stephanidis, R. Boursier, Phys. Rev. Lett. **89** (2002) 137007; arXiv:cond-mat/0201104v2 [cond-mat.supr-con] 22 Jan 2002, 1 – 4.
274. Blum Y., A. Tsukernik, M. Karpovski, A. Palevski, Phys. Rev. Lett. **89** (2002) 187004; arXiv:cond-mat/0203408v1 [cond-mat.supr-con] 20 Mar 2002, 1 – 5.
275. Shelukhin V., A. Tsukernik, M. Karpovski, Y. Blum, K.B. Efetov, A.F. Volkov, T. Champel, M. Eschrig, T. Löfwander, G. Schön, A. Palevski, Phys. Rev. B **73** (2006) 174506; arXiv:cond-mat/0512593v1 [cond-mat.supr-con] 22 Dec 2005, 1 – 4.
276. Robinson J.W.A., S. Piano, G. Burnell, C. Bell, M. G. Blamire, Phys. Rev. Lett. **97** (2006) 177003; arXiv:cond-mat/0606067v2 [cond-mat.supr-con] 25 Sep 2006, 1 – 4.
277. Robinson J.W.A., S. Piano, G. Burnell, C. Bell, M. G. Blamire, Phys. Rev. B **76** (2007) 094522.
278. Cottet A., W. Belzig, Phys. Rev. B **72** (2005) 180503(R).
279. Fominov Ya. V., N.M. Chtchelkatchev, A.A. Golubov, Письма в ЖЭТФ **74** (2001) 101.
280. Faure M., A.I. Buzdin, A.A. Golubov, M. Yu. Kupriyanov, Phys. Rev. B **73** (2006) 064505.

281. Kontos T., M. Aprili, J. Lesueur, X. Grison, Phys. Rev. Lett. **86** (2001) 304307; arXiv:cond-mat/0009192v1 [cond-mat.supr-con] 13 Sep 2000, 1 – 7.
282. Zareyan M., W. Belzig, Yu. V. Nazarov, Phys. Rev. Lett **86** (2001) 308.
283. Crétonin L., A.K. Gupta, H. Sellier, F. Lefloch, M. Fauré, A. Buzdin, H. Courtois, Phys. Rev. B **72** (2005) 024511; arXiv:cond-mat/0502050v2 [cond-mat.supr-con] 13 Sep 2005, 1 – 7.
284. Gusakova D. Yu., A.A. Golubov, M.Yu. Kupriyanov, A. Buzdin, Письма в ЖЭТФ **83** (2006) 385.
285. Tagirov L.R., Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 2058.
286. Buzdin A.I., A.V. Vedyayev, N.V. Ryzhanova, Europhys. Lett. **48** (1999) 686.
287. Gu J.Y., C.-Y. You, J.S. Jiang, J. Pearson, Ya. B. Basaliy, S.D. Bader, Phys. Rev. Lett. **89** (2002) 267001.
288. Potenza A., C.H. Marrows, Phys. Rev. B **71** (2005) 180503.
289. Moraru I.C., Jr. W.P. Pratt, N.O. Birge, Phys. Rev. Lett. **96** (2006) 037004.
290. Moraru I.C., Jr. W.P. Pratt, N.O. Birge, Phys. Rev. B **74** (2006) 220507(R).
291. Westerholt K., D. Sprungmann, H. Zabel, R. Brucas, B. Hjörvarsson, D. A. Tikhonov, I. A. Garifullin, Phys. Rev. Lett. **95** (2005) 097003.
292. Novak G., H. Zabel, K. Westerholt, I. Garifullin, M. Marcellini, A. Liebig, B. Hjörvarsson, Phys. Rev. B **78** (2008) 134520.
293. Rusanov A.Yu., S. Habraken, J. Aarts, Phys. Rev. B **73** (2006) 060505(R).
294. Steiner R., P. Ziemann, Phys. Rev. B **74** (2006) 094504.
295. Stamopoulos D., E. Manios, M. Pissas, Phys. Rev. B **75** (2007) 014501.
296. Singh A., C. Sürgers, H. v. Löhneysen, Phys. Rev. B **75** (2007) 024513.
297. Singh A., C. Sürgers, R. Hoffmann, H. v. Löhneysen, T.V. Ashworth, N. Pilet, H.J. Hug, Appl. Phys. Lett. **91** (2007) 152504.
298. Dong Ho Kim, T.J. Hwang, Physica C **455** (2007) 58.
299. Leksin P. V., R. I. Salikhov, I. A. Garifullin, K. H. Vinzelberg, V. Kataev, R. Klingeler, L. R. Tagirov, B. Büchner, Письма в ЖЭТФ **90** (2009) 64.
300. Fominov Ya. V., A.A. Golubov, M. Yu. Kupriyanov, Письма в ЖЭТФ **77** (2003) 609.
301. Rusanov A.Yu., M. Hesselberth, J. Aarts, A.I. Buzdin, Phys. Rev. Lett. **93** (2004) 057002.
302. Proshin Yu. N., A. Zimin, N.G. Fazleev, M.G. Khusainov, Phys. Rev. B **73** (2006) 184514.
303. Bergeret F. S., A. F. Volkov, K.B. Efetov, Phys. Rev. Lett. **86** (2001) 3140.
304. Krivoruchko V.N., E.A. Koshina, Phys. Rev. B **64** (2001) 172511; **66** (2002) 014521.

305. Golubov A.A., M. Yu. Kupriyanov, Ya. V. Fominov, Письма в ЖЭТФ **75** (2002) 223.
306. Карминская Т.Ю., М.Ю. Куприянов, Письма в ЖЭТФ **85** (2007) 343 – 348; **86** (2007) 65.
307. Fauré M., A.I. Buzdin, D. Gusakova, Physica C **454** (2007) 61.
308. Maeno Y., H. Hashimoto, K. Yoshida, S. Nishizaki, T. Fujita, J. G. Bednorz, F. Lichtenberg, Nature **372** (1994) 532.
309. Mackenzie A.P., Maeno Y., Rev. Mod. Phys. **75** (2003) 657.
310. Березинский В.Л., Письма в ЖЭТФ **20** (1974) 628.
311. Bergeret F. S., A. F. Volkov, K.B. Efetov, Phys. Rev. Lett. **86** (2001) 4096.
312. Kadigrobov A., R.I. Shekhter, M. Jonson, Europhysics Lett. **54** (2001) 394.
313. Volkov A. F., F. S. Bergeret, K.B. Efetov, Phys. Rev. Lett. **90** (2003) 117006.
314. Bergeret F. S., A. F. Volkov, K.B. Efetov, Phys. Rev. B **64** (2001) 134506; **68** (2003) 064513.
315. Giroud M., H. Courtois, K. Hasselbach, D. Mailly, B. Pannetier, Phys. Rev. B **58** (1998) R11872.
316. Petrashov V.T., I.A. Sosnin, I. Cox, A. Parsons, C. Troadec, Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 3281.
317. Löfwander T., T. Champel, M. Eschrig, Phys. Rev. B **75** (2007) 014512.
318. Löfwander T., T. Champel, J. Durst, M. Eschrig, Phys. Rev. Lett. **95** (2005) 187003.
319. Schopohl N., K. Maki, Phys. Rev. B **52** (1995) 490.
320. Eschrig M., J. Kopu, A. Konstandin, J.C. Cuevas, M. Fogelström, G. Schön, in: Advances in Solid State Physics **44**, 533-545, edited by Bernhard Kramer, Springer Verlag Heidelberg, ISBN 3-540-21148-9 (2004).
321. Champel T., M. Eschrig, Phys. Rev. B **71** (2005) 220506(R); **72** (2005) 054523.
322. Volkov A. F., Ya. V. Fominov, K.B. Efetov, Phys. Rev. B **72** (2005) 184504.
323. Fominov Ya. V., A. F. Volkov, K.B. Efetov, Phys. Rev. B **75** (2007) 104509.
324. Volkov A. F., A. Anishchanka, K.B. Efetov, Phys. Rev. B **73** (2006) 104412.
325. Volkov A. F., K.B. Efetov, Phys. Rev. B **78** (2008) 033404.
326. Eschrig M., J. Kopu, J.C. Cuevas, G. Schön, Phys. Rev. Lett. **90** (2003) 137003.
327. Keizer R. S., S. T. B. Goennenwein, T. M. Klapwijk, G. Miao, G. Xiao, A. Gupta, Nature (London) **439** (2006) 825.

328. Eschrig M., T. Löfwander, Th. Champel, J.C. Cuevas, J. Kopu, G. Schön, J. Low Temp. Phys. **147** (2007) 457.
329. Eschrig M., T. Löfwander, Nature Physics **4** (2008) 138.
330. Asano Y., Y. Tanaka, A.A. Golubov, Phys. Rev. Lett. **98** (2007) 107002.
331. Asano Y., Y. Tanaka, A.A. Golubov, Phys. Rev. B **76** (2007) 224525.
332. Galaktionov A.V., M.S. Kalenkov, A.D. Zaikin, Phys. Rev. B **77** (2008) 094520.
333. Braude V., Yu. V. Nazarov, Phys. Rev. Lett. **98** (2007) 077003.
334. Sosnin I., H. Cho, V. T. Petrashov, A. F. Volkov, Phys. Rev. Lett. **96** (2006) 157002.
335. Khasawneh M.A., W.P. Pratt, N.O. Birge, Phys. Rev. B **80** (2009) 020506(R).
336. Khaire T.S., W.P. Pratt Jr., N.O. Birge, Phys. Rev. B **79** (2009) 094523.
337. Khaire T.S., M.A. Khasawneh, W.P. Pratt Jr., N.O. Birge, Phys. Rev. Lett. **104** (2010) 137002; arXiv: 0912.0205v1 [cond-mat.supr-con] 1 Dec 2009, 1 – 4.
338. Карминская Т.Ю., М.Ю. Куприянов, А.А. Голубов, Письма в ЖЭТФ **87** (2008) 657.
339. Houzet M., A.I. Buzdin, Phys. Rev. B **76** (2007) 060504(R).
340. Bergeret F. S., A. F. Volkov, K.B. Efetov, Appl. Phys. A **89** (2007) 599.
341. Prischepa S.L., V.N. Kushnir, E.A. Ilyina, C. Attanasio, C. Cirillo, C. Iannone, C. Vecchione, R.T. Fittipaldi, J. Aarts, In: Physics, Chemistry and Applications of Nanostructures. Eds. V.E. Borisenko, S.V. Gaponenko, V.S. Gurin, World Sci., 2007, 39.
342. Kushnir V. N., S. L. Prischepa, C. Cirillo, C. Attanasio, J. Aarts, In: Lorentz Workshop “Physics of Nanoscale Superconducting Heterostructures”, 2-6 July 2007, Eds. J. Aarts, A. Golubov, A. Zaikin, Leiden 2007, 23.
343. Prischepa S.L., V.N. Kushnir, C. Cirillo, C. Attanasio, A. Vecchione, C. Bell, J. Aarts, M.Yu. Kupriyanov, Moscow international symposium on magnetism. Dedicated to the centenary of E.J. Kondorskii birth. June 20-25, 2008. Book of abstracts. M.V. Lomonosov State University, Faculty of Physics. Editors: N. Perov, V. Samsonova, A. Semisalova, Moscow 2008.429.
344. Prischepa S.L., C. Cirillo, C. Bell, V.N. Kushnir, J. Aarts, C. Attanasio, M.Yu. Kupriyanov, Письма в ЖЭТФ **88** (2008) 431.
345. Prischepa S.L., V.N. Kushnir, C. Cirillo, C. Attanasio, A. Vecchione, C. Bell, J. Aarts, M.Yu. Kupriyanov, Solid State Phenomena **152-153** (2009) 478.

346. Kushnir V.N., S.L. Prischepa, C. Cirillo, C. Attanasio, J. Aarts, Euro-Asian Symposium "Magnetism on a Nanoscale", Kazan 23-26 August 2007. Abstract Book. Kazan 2007, 170.
347. Кушнир В.Н., Доклады НАН Беларуси 52 (2008) 39.
348. Кушнир В.Н., Доклады БГУИР 5 (2007) 48.
349. Kushnir V.N., S.L. Prischepa, C. Attanasio, C. Cirillo, A. Vecchione, J. Aarts, C. Bell, M.Yu. Kupriyanov, Alexander von Humboldt Stiftung/Foundation Humboldt Kolleg "Integrating science and technology for a sustainable and secure future: energy, environment, informatics and human health SSF-2008", Book of abstracts, 15-18 May 2008, Minsk, Belarus, 51.
350. Кушнир В.Н., Третья международная конференция «Фундаментальные проблемы высокотемпературной сверхпроводимости» ФПС'08 13-18 октября 2008 года, г. Звенигород/ Сборник трудов. Москва ФИАН 2008. 309.
351. Moussy M., H. Courtois, B. Pannetier, Rev. Sci. Instrum. 72 (2001) 128.
352. Fujita K., I. Grigorenko, J. Lee, M. Wang, J. X. Zhu, J.C. Davis, H. Eisaki, S. Uchida, A.V. Balatsky, Phys. Rev. B 78 (2008) 054510; arXiv:0709.0632v1 [cond-mat.supr-con] 4 Sep 2007, 1 – 16.
353. Halterman K., O. T. Valls, Phys. Rev. B 65 (2002) 014509.
354. Halterman K., O. T. Valls, Phys. Rev. B 66 (2002) 224516.
355. Halterman K., O. T. Valls, Phys. Rev. B 69 (2004) 014517.
356. Halterman K., O. T. Valls, Phys. Rev. B 70 (2004) 104516.
357. Halterman K., O. T. Valls, Physica C 420 (2005) 111.
358. Halterman K., O. T. Valls, Phys. Rev. B 72 (2005) 060514(R).
359. Halterman K., P.H. Barsic, O. T. Valls, Phys. Rev. Lett 99 (2007) 127002.
360. Halterman K., O. T. Valls, P.H. Barsic, Phys. Rev. B 77 (2008) 174511.
361. Halterman K., O. T. Valls, Phys. Rev. B 80 (2009) 104502.
362. Barsic P.H., O. T. Valls, K. Halterman, Phys. Rev. B 73 (2006) 144514.
363. Barsic P.H., O. T. Valls, K. Halterman, Phys. Rev. B 75 (2007) 104502.
364. Sillanpää M.A., T.T. Heikkilä, R.K. Lindel, P.J. Hakonen, Europhys. Lett. 56 (2001) 590.
365. Sellier H., C. Baraduc, F. Lefloch, R. Calemczuk, Phys. Rev. Lett 92 (2004) 257005.
366. Guichard W., M. Aprili, O. Bourgeois, T. Kontos, J. Lesueur, P. Gandit, Phys. Rev. Lett 90 (2003) 167001.
367. Baladié I., A. Buzdin, Phys. Rev. B 67 (2003) 014523.
368. Tollis S., Phys. Rev. B 69 (2004) 104532.
369. Božović M., Radović Z., Europhys. Lett. 70 (2005) 513; arXiv:cond-mat/0409544v3 [cond-mat.supr-con] 25 Mar 2005.
370. Žutić I., J. Fabian, S. Das Sarma., Rev. Mod. Phys. 76 (2004) 323.

371. Ortlepp T., Ariando, O. Mielke, C.J.M. Verwijs, K.F.K. Foo, H. Rogalla, F.H. Uhlmann, H. Hilgencamp, *Science* **312** (2006) 1495.
372. Della Rocca M.L. M. Aprili, T. Kontos, A. Gomez, P. Spathis, *Phys. Rev. Lett.* **94** (2005) 197003.
373. Якубович В.А., В.М. Старжинский, *Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения*. М.: Наука, 1972.
374. *Справочник по специальным функциям*, под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979.
375. Movshovitz D., N. Wisner, *Phys. Rev. B* **41** (1990) 10503.
376. Ландау Л.Д., Е.М. Лифшиц, *Квантовая механика: Нерелятивистская теория*. М.: Наука, 1974.
377. Ашкрофт Н., Н. Мермин, *Физика твердого тела*. М.: Мир, 1979.
378. Cirillo Carla. Superconducting proximity effect in Nb/PdNi hybrids: probing the role of the ferromagnet// *Tesi di dottorato di Ricerci in Fisica*. 2005 The M.C. Escher Company – the Netherlands.
379. Kuplevakhsky S.V., S.V. Naydenov, *Phys. Rev. B* **56** (1997) 2764.
380. Свидзинский А.В. *Пространственно-неоднородные задачи теории сверхпроводимости*. М.: Наука, 1982.
381. Yamafuji K., E. Kusayanagi, F. Irie, *Phys. Lett.* **21** (1966) 11.
382. Frölich H., *Phys. Rev.* **79** (1950) 845.
383. Bardeen J., *Phys. Rev.* **79** (1950) 167.
384. Bardeen J., *Phys. Rev.* **80** (1950) 567.
385. Bardeen J., *Rev. Mod. Phys.* **23** (1951) 261.
386. Bardeen J., D. Pines, *Phys. Rev.* **99** (1955) 1140.
387. Гинзбург В.Л., *УФН* **48** (1952) 25.
388. *Теория сверхпроводимости*, М., ИЛ, 1960.
389. Frölich H., *Proc. Roy. Soc.*, **A223** (1954) 296.
390. Мигдал А. Б., *ЖЭТФ* **37** (1960) 249.
391. Frölich H., *Proc. Roy. Soc.* **A215** (1952) 291.
392. Bardeen J., *Phys. Rev.* **97** (1955) 1724.
393. Cooper L. N., *Phys. Rev.* **104** (1956) 1189.
394. Шриффер Дж. *Теория сверхпроводимости*. М.: Наука, 1970.
395. Bardeen J., L.N. Cooper, J.R. Schrieffer, *Phys. Rev.* **106** (1957) 162.
396. Боголюбов Н.Н., Ю.А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*. М.: Наука, 1974.
397. Боголюбов Н.Н., *Изв. АН СССР. Сер. физ.* **11** (1947) 77.
398. Боголюбов Н.Н., *Укр. математический журнал* **2** (1950) 3.
399. Боголюбов Н.Н., *ЖЭТФ* **34** (1958) 58.
400. Боголюбов Н.Н., *ЖЭТФ* **34** (1958) 73.
401. Боголюбов Н.Н., *ДАН СССР* **119** (1958) 244.

402. Боголюбов Н.Н., Вестник Академии наук СССР 28 (1958) 36.
403. Боголюбов Н.Н., В.Г. Соловьев, ДАН СССР 124 (1959) 1011.
404. Боголюбов Н.Н., Д.Н. Зубарев, Ю.А. Церковников, ДАН СССР, 117 (1959) 788.
405. Боголюбов Н.Н., Д.Н. Зубарев, Ю.А. Церковников, ЖЭТФ 39 (1960) 120.
406. Боголюбов Н.Н., Препринт Р-511 ОИЯИ. Лаб. теор. физ. Матем. инст. им. В.А. Стеклова АН СССР, Дубна, 1960.

Научное издание

КУШНИР Василий Николаевич

СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ  
СЛОИСТЫХ СТРУКТУР

Монография

---

Подписано в печать 17.09.2010.

Формат 60×84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная.

Отпечатано на ризографе. Гарнитура Таймс.

Усл. печ. л. 13,60. Уч.-изд. л. 10,64. Тираж 100. Заказ 842.

---

Издатель и полиграфическое исполнение:

Белорусский национальный технический университет.

ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009.

Проспект Независимости, 65. 220013, Минск.