УДК 620.174 (075.8)

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРОГИБА ДВУХОПОРНОЙ БАЛКИ

студент гр.103131 Ярош В.И.
студент гр.10107114 Крупкевич С.Н.
Научный руководитель – доц. Реут Л.Е.
Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь

Надежность элементов конструкций, работающих на изгиб, зависит от выполнения условий прочности и жесткости. Первое условие определяется максимальными напряжениями, которые могут безопасно выдержать элементы конструкции, второе – деформациями элементов. Рассмотрим задачу определения деформаций, а именно максимального прогиба сечения, на примере двухопорной балки, нагруженной сосредоточенной силой. Помимо величины максимального прогиба важно так же знать и его положение, что и будет определено далее. Расчетная схема балки приведена на рис.1.

Реакции опор на балке равны: $R_A = Fb / l$; $R_B = Fa / l$. (1)

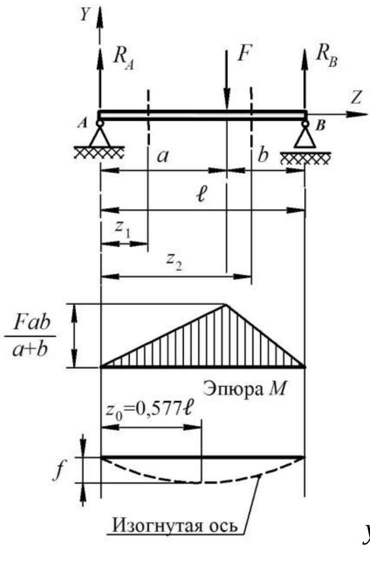

Рис. 1

Балка имеет два участка, поэтому интегрирование дифференциального уравнения изогнутой оси балки

$$y'' = M_z / EI_x \qquad (2)$$

производим по обоим участкам:

Сечение 1: $0 \le z_1 \le a$.

Для данного сечения:

$$M_{z_1} = R_A z_1 = \left(Fb / l\right) z_1 . \qquad (3)$$

Производим двойное интегрирование уравнения (2) и получаем уравнения углов поворота и прогибов:

$$y' = \Theta_{z_1} = \frac{1}{EI_x} \int M_{z_1} \, dz = \frac{Fb\, z_1^2}{2l\, EI_x} + C_1 . \qquad (4)$$

$$y_{z_1} = \int \Theta_{z_1} \mathrm{dz} = \frac{Fb\, z_1^{\,3}}{6\ell\, EI_x} + C_1 z_1 + D_1 . \qquad (5)$$

Выполняем аналогичные операции для сечения на правом участке:

Сечение 2: $a \le z_1 \le \ell$.

$$M_{z_2} = R_A z_2 - F\left(z_2 - a\right) = \frac{Fb}{\ell} z_2 - F\left(z_2 - a\right); \qquad (6)$$

$$y' = \Theta_{z_2} = \frac{1}{EI_x} \int M_{z_2}\, \mathrm{dz} = \frac{Fb\, z_2^{\,2}}{2\ell\, EI_x} - \frac{F\left(z_2 - a\right)^2}{2EI_x} + C_2; \qquad (7)$$

$$y = \int \Theta_{z_2} \mathrm{dz} = \frac{Fb\, z_2^{\,3}}{6\ell\, EI_x} - \frac{F\left(z_2 - a\right)^3}{6EI_x} + C_2 z_2 + D_2 . \qquad (8)$$

Постоянные интегрирования определяем из кинематических условий на балке C_1, C_2, D_1, D_2:

а) из граничного условия на опоре A согласно выражению (5):

$$y_{z_1 / z_1 = 0} = y_A = 0 \;\to\; D_1 = 0;$$

б) из условия сопряжения смежных сечений на основании соответствующих выражений (4), (7) и (5), (8):

$$\Theta_{z_1 / z_1 = a} = \Theta_{z_2 / z_2 = a} \;\to$$

$$\frac{Fba^2}{2\ell\, EI_x} + C_1 = \frac{Fba^2}{2\ell\, EI_x} - \frac{F\left(a - a\right)^2}{2EI_x} + C_2 \;\to\; C_1 = C_2;$$

$$y_{z_1 / z_1 = a} = y_{z_2 / z_2 = a} \;\to$$

$$\frac{Fba^3}{6\ell\, EI_x} + C_1 a + D_1 = \frac{Fba^3}{6\ell\, EI_x} - \frac{F\left(a - a\right)^3}{6EI_x} + C_2 a + D_2 \;\to\; D_1 = D_2;$$

в) Из граничного условия на опоре B согласно выражению (8):

$$y_{z_2 / z_2 = \ell} = 0 \;\to$$

$$\frac{Fb\ell^2}{6EI_x} - \frac{F\left(\ell - a\right)^3}{6EI_x} + C_2 \ell = 0 \;\to\; C_2 = -\frac{Fb}{6\ell\, EI_x}\left(\ell^2 - b^2\right).$$

Учитывая, что $C_1 = C_2$ и $D_1 = D_2$, получаем окончательные *уравнения углов поворота* и *прогибов* для данной балки:

Участок 1:

$$\Theta_{z_1} = \frac{Fb}{6l\,EI_x}\left(3z_1^{\,2} - \left(l^{\,2} - b^2\right)\right); \qquad (9)$$

$$y_{z_1} = \frac{Fb}{6l\,EI_x}\left(z_1^{\,3} - z_1\left(l^{\,2} - b^2\right)\right). \qquad (10)$$

Участок 2:

$$\Theta_{z_1} = \frac{F}{6l\,EI_x}\left(3bz_2^{\,2} - 3l\left(z_2 - a\right)^2 - b\left(l^{\,2} - b^2\right)\right); \qquad (11)$$

$$y_{z_2} = \frac{F}{6l\,EI_x}\left(bz_2^{\,3} - l\left(z_2 - a\right)^3 - bz_2\left(l^{\,2} - b^2\right)\right). \qquad (12)$$

Как видно из решения, уравнение углов поворота и упругой линии балки на каждом участке имеют свое аналитическое выражение.

Определим на балке величину и положение наибольшего прогиба. Известно, что при изгибе угол поворота сечения является производной функции прогибов, т.е. $\Theta = \mathrm{d}y / \mathrm{d}z$, поэтому чтобы исследовать функцию на экстремум, ее производную следует приравнять к нулю. Приравниваем для соответствующих участков уравнения (9) и (11) к нулю и для полученной точки экстремума z_0 по выражениям (10) и (12) находим максимальный прогиб f :

Участок 1

$$\Theta_{z_0} = \frac{Fb}{6l\,EI_x}\left(3z_0^{\,2} - \left(l^{\,2} - b^2\right)\right) = 0 \;\rightarrow\; z_0 = \sqrt{\frac{l^{\,2} - b^2}{3}}. \qquad (13)$$

$$f = \frac{Fb\left(l^{\,2} - b^2\right)}{9l\,EI_x}\sqrt{\frac{l^{\,2} - b^2}{3}}. \qquad (14)$$

Участок 2

$$\Theta_{z_0} = \frac{F}{6l\,EI_x}\left(3bz_0^{\,2} - 3l\left(z_0 - a\right)^2 - b\left(l^{\,2} - b^2\right)\right) = 0 \;\rightarrow$$

$$3bz_0^2 - 3l\left(z_0 - a\right)^2 - b\left(l^2 - b^2\right) = 0.$$

Приведем последнее выражение к виду квадратного уравнения

$$z_0^2\left(3b - 3l\right) + 6la\,z_0 - \left(3la^2 + bl^2 - b^3\right) = 0,$$

решение которого дает два корня:

$$z_{2_{1,2}} = \frac{-6la \pm \sqrt{36l^2a^2 - 12\left(l - b\right)\left(3la^2 + bl^2 - b^3\right)}}{6\left(b - l\right)}. \qquad (15)$$

Учитывая, что $l - b = a$ (см. рис. 1), значения корней (15) после преобразования принимают вид:

$$z_{2_{1,2}} = l \pm \sqrt{\frac{b\left(2l - b\right)}{3}}. \qquad (16)$$

Анализ выражений (16) показывает, что ни один из корней не удовлетворяет ***участку 2***: $z_2 = l + \sqrt{b\left(2l - b\right)/3} > l$, т.е. сечение выходит за пределы балки; $z_2 = l - \sqrt{b\left(2l - b\right)/3} < a$, что также не соответствует действительности, т.к. z_2 находится в пределах участка b (см. рис. 1). Следовательно, точки экстремума на ***участке 2*** не существует.

Полученный расчет показывает, что наибольший прогиб будет возникать на первом участке и его положение и величина будут определяться выражениями (13) и (14). Математический анализ проведенных расчетов также доказывает, что при нагружении двухопорной балки сосредоточенной силой независимо от места ее приложения наибольший прогиб ***всегда будет возникать на участке большей длины***.

В частном случае, когда сила F приложена посередине пролета, здесь же будет возникать максимальный прогиб, который можно определить, подставив в выражение (14) $b = l/2$:

$$f = \frac{Fl^3}{48EI_x}. \qquad (17)$$

Следует заметить, что максимальный прогиб при любом расположении груза на балке всегда возникает вблизи середины пролета. Если силу F перемещать к правой опоре (см. рис. 1), уменьшая, тем самым, участок b, то в пределе при $b \to 0$, точка экстремума займет положение $0{,}577l$ от левой опоры, т.е. очень близко к середине балки. Столь незначительное изменение координаты максимального прогиба — от $0{,}5l$ до $0{,}577l$, и естественно, незначительная разница в его величине позволяет в практических расчетах рассматривать только прогиб в середине пролета, и принимать его значение, вычисленное по формуле (17).

Литература

1. Татур, Г.К. Общий курс сопротивления материалов / Г.К. Татур. – Минск: Вышейшая школа, 1974. – 462 с.

2. Биргер, И.А. Сопротивление материалов / И.А. Биргер, Р.Р. Мавлютов. – М.: Наука, 1986. – 560 с.