УДК 629.734/.73.5.03

РАСШИРЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЭЙЛЕРА ДЛЯ ПРАКТИКИ РАСЧЕТОВ НА ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ

студент гр.10111114 Смарчков В.А.
Научный руководитель – к.т.н.,доц. Якубовский Ч.А.
Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь

Данное сообщение можно рассматривать как развитие расчета на устойчивость сжатых стержней и расширение решения Эйлера для определения критической силы. Полученные результаты могут успешно применяться на практике при расчетах на продольный и поперечный изгиб.

Рассмотрим стержень (балку) с шарнирными закреплениями, представленную на рисунке 1, с приложенной к нему продольной сжимающей силой F. Под действием этой силы ось балки искривляется.

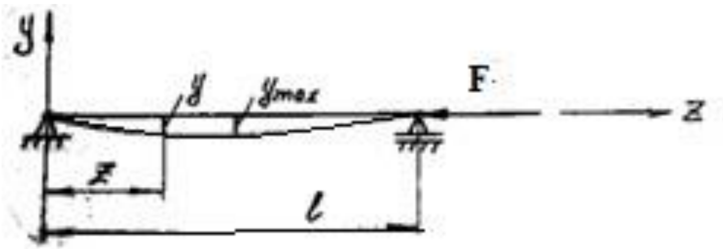

Рисунок 1 – Стержень (балка) с шарнирными закреплениями, с приложенной к нему продольной сжимающей силой F

При увеличении силы F наступает такое состояние балки, при котором первоначальная прямолинейная форма равновесия достигает безразличного состояния. Это состояние возникает не при фиксированном значении силы $F_{кр}$, как в решении Эйлера, а в некотором диапазоне сил, определяемом размерами поперечного сечения, и обусловлено принципом Сен-Венана. Изгибающий момент в любом сечении балки будет равен:

$$M = Fy.$$

Тогда сила, удерживающая балку в состоянии безразличного равновесия, определяется по формуле:

$$F_{кр} = \frac{M_{max}}{y_{max}}. \qquad (1)$$

Рассмотрим далее такую же балку, но нагруженную посередине пролета сосредоточенной силой F.

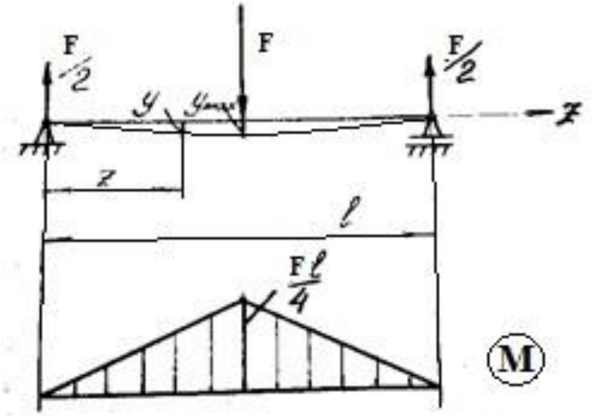

Рисунок 2 – Стержень (балка) с шарнирными закреплениями, нагруженная посередине пролета сосредоточенной силой F

Запишем известные формулы для определения M_{max} и y_{max}:

$$M_{max} = \frac{Fl}{4}, \qquad y_{max} = \frac{Fl^3}{48EJ}.$$

Подставляя эти формулы в уравнение (1), получим:

$$F_{кр} = \frac{\frac{Fl}{4}}{\frac{Fl^3}{48EJ}} = \frac{12EJ}{l^2}. \qquad (2)$$

В начале координат (на левой опоре) имеем: $M = 0$ и $y = 0$ и формула (1) дает неопределенность. Раскрывая ее по правилу Лапиталя, получим:

$$\frac{M}{y} = \frac{\frac{dM}{dz}}{\frac{dy}{dz}} = \frac{Q}{\theta}.$$

В начале координат имеем: $Q = \frac{F}{2}$, $|\theta| = \frac{Fl^2}{16EJ}$.

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}. \tag{4}$$

$$F_{кр} = \frac{\frac{F}{2}}{\frac{Fl^2}{16El}} = \frac{8EJ}{l^2}. \tag{3}$$

Подставляя в уравнение (1), получим:

Как известно, формула Эйлера для определения критической силы имеет вид:

Найдем сечение балки, в котором точно выполняется равенство (4). Запишем прогиб произвольного сечения балки (рис. 2) по методу начальных параметров:

$$EJy = EJ\theta_0 z + \frac{\frac{F}{2}z^3}{6},$$

где $EJ\theta_0 = -\frac{Fl^2}{16}$.

Тогда:

$$y = -\frac{Fl^2}{16}z + \frac{Fz^3}{12EJ} = \frac{4Fz^3 - 3Fl^2 z}{48EJ}.$$

В этом сечении изгибающий момент равен:

$$M = \frac{F}{2}z.$$

Подставляя в формулу (1), получим:

$$F_{кр} = \frac{M}{y} = \frac{\frac{Fz}{2}}{\frac{4Fz^3 - 3Fl^2 z}{48EJ}} = \frac{24EJ}{4z^2 - 3l^2}, \left(0 \le z \le \frac{l}{2}\right). \tag{5}$$

Или:

$$F_{кр} = \frac{24EJ}{3l^2 - 4z^2};$$

При $z = 0$ $\left|F_{кр}\right| = \frac{8EJ}{l^2}$.

При $z = \frac{l}{2}$ $\left|F_{кр}\right| = \frac{12EJ}{l^2}$, т.е. получаем равенства (2) и (3).

Сравнивая далее формулы (4) и (5) запишем:

$$M_п + Fy = M, \qquad (6)$$

$$\frac{\pi^2}{l^2} = \frac{24}{-4z^2 + 3l^2}.$$

Отсюда находим z:

$$-4\pi^2 z^2 + 3\pi^2 l^2 - 24l^2 = 0,$$

$$z = \frac{l}{2\pi}\sqrt{3\pi^2 - 24} = 0{,}376l.$$

При продольно-поперечном изгибе имеем (рисунок 3):

где $M -$ полный изгибающий момент в сечении z,

$M_п -$ изгибающий момент в этом сечении от действия поперечной нагрузки.

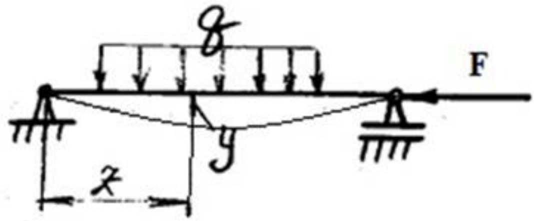

Рисунок 3 – Стержень (балка) с шарнирными закреплениями, при продольно-поперечном изгибе

С другой стороны запишем:

$$\frac{M_п}{M} = \frac{y_п}{y}, \text{ или } \quad M_п y = y_п M. \qquad (7)$$

Решая совместно уравнения (6) и (7), получим:

$$M = \frac{{M_п}^2}{M_п - F y_п}, \;\; y = \frac{M_п y_п}{M_п - F y_п}.$$

Или:

$$M = \frac{M_п}{1 - \frac{F y_п}{M_п}} = \frac{M_п}{1 - \frac{F}{F_э}}, \qquad (8)$$

$$y = \frac{y_п}{1 - \frac{F y_п}{M_п}} = \frac{y_п}{1 - \frac{F}{F_э}}, \qquad (9)$$

где $F_э = \frac{M_п}{y_п} = \frac{M}{y}$, (см. формулу (1)).

Вывод.

Полученные формулы являются более точными и более общими по сравнению с известным решением продольно-поперечного изгиба. Данное решение может служить в качестве тестового при рассмотрении задач продольно-поперечного изгиба любых стержней сложных поперечных сечений

Литература

1. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1986. 512с.
2. Старавойтов Э.И. Сопротивление материалов. Гомель: БелГУТ, 2004. 376с.