Доклады Национальной академии наук Беларуси
2013 март–апрель Том 57 № 2

УДК 517.977

А. В. МЕТЕЛЬСКИЙ

ЗАДАЧА НАЗНАЧЕНИЯ КОНЕЧНОГО СПЕКТРА (FSA) ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

(Представлено академиком И. В. Гайшуном)

Белорусский национальный технический университет, Минск
Поступило 04.03.2013

1. Постановка задачи. Рассмотрим линейную автономную дифференциальную систему с распределенными запаздываниями

$$\dot{x}(t)=\sum_{j=0}^{m}A_j x(t-jh)+\sum_{j=0}^{m-1}\int_0^h R_j(s)x(t-jh-s)ds+bu(t),\quad t>0,\qquad x(t)=\eta(t),\quad t\in[-mh,0]. \tag{1}$$

Здесь $x=[x_1,\ldots,x_n]'$ – n-вектор решения системы (1) ($n\geq 2$); $0<h$ – постоянное запаздывание; A_j – постоянные $n\times n$-матрицы ($j=\overline{0,m}$); $R_j(s)=\sum_{l=1}^{\tilde{L}}e^{\alpha_l s}(\cos(\beta_l s)P_{jl}(s)+\sin(\beta_l s)Q_{jl}(s))$ ($P_{jl}(s)$, $Q_{jl}(s)$ – полиномиальные $n\times n$-матрицы, $\alpha_l,\beta_l\in\mathbf{R}$); b – постоянный n-вектор; η – начальная n-вектор-функция из банахова пространства непрерывных функций с равномерной нормой; u – скалярное управление. Векторные величины полагаем записанными в столбец, штрих «′» обозначает операцию транспонирования. Не умаляя общности, считаем, что в уравнении (1) $b=e_n=[0;\ldots;0;1]'$.

Пусть λ_D – оператор сдвига: $\lambda_D^j\varphi(t)=\varphi(t-jh)$ (φ – функция, $j=0,1,\ldots$), применяя формулы Эйлера к функциям $e^{\alpha_l s}\cos(\beta_l s)$, $e^{\alpha_l s}\sin(\beta_l s)$, получаем

$$\sum_{j=0}^{m-1}\int_0^h R_j(s)\lambda_D^j x(t-s)ds=\sum_{k=1}^{L_1}\sum_{i=0}^{N_1}\int_0^h e^{p_k s}s^i/i!B_{ki}(\lambda_D)x(t-s)ds,\quad t>0, \tag{2}$$

где $p_k\in\{\alpha_l\pm\mathbf{i}\beta_l,\ l=\overline{1,\tilde{L}}\}$ ($\mathbf{i}$ – мнимая единица) – набор комплексных чисел (если $\operatorname{Im}p_k\neq 0$, то данному набору принадлежит и сопряженное число $\bar{p}_k$); $B_{ki}(\lambda_D)$ – полиномиальные матрицы, вообще говоря, с комплексными коэффициентами.

Пусть $\lambda\in\mathbf{C}$ ($\mathbf{C}$ – множество комплексных чисел), обозначим

$$A(p,\lambda)=\sum_{j=0}^{m}A_j\lambda^j+\sum_{k=1}^{L_1}\sum_{i=0}^{N_1}B_{ki}(\lambda)\int_0^h e^{-(p-p_k)s}s^i/i!ds,$$

$W(p,e^{-ph})=pE-A(p,e^{-ph})$ – характеристическая матрица ($p\in\mathbf{C}$, E – единичная матрица n-го порядка), $w(p,e^{-ph})=\left|W(p,e^{-ph})\right|$ – характеристический определитель системы (1). Здесь и далее $|W|$ – определитель произвольной квадратной матрицы W.

Множество корней $\sigma=\{p\in\mathbf{C}\mid w(p,e^{-ph})=0\}$ характеристического уравнения называют спектром системы (1). Поскольку коэффициенты характеристического определителя $w(p,e^{-ph})$ действительны, то комплексные числа входят в σ сопряженными парами.

Основная часть исследований по замыканию системы (1) регулятором по типу обратной связи посвящена задаче FSA (finite spectrum assignment) [1] – назначения произвольного конечного (самосопряженного) спектра. Известно [2], что спектр замкнутой системы может содержать инвариантные значения $p^*\in\mathbf{C}$, которые входят в спектр при любом выборе дифференциально-разностного регулятора. В [1] доказано, что для разрешимости задачи FSA для системы (1) с сосредоточенными запаздываниями $R_j(s)=0,\ j=\overline{0,m-1}$, в классе регуляторов с распределенными запаздываниями необходимо, чтобы

$$\operatorname{rank}[pE-(A_0+A_1e^{-ph}+\ldots+A_m e^{-pmh}),b]=n\forall p\in\mathbf{C}. \tag{3}$$

Затем было установлено [3], что условие (3) достаточно для разрешимости названной задачи. В настоящей работе дано конструктивное доказательство того, что условие [4]

$$\operatorname{rank}[pE-A(p,e^{-ph}),b]=n\forall p\in\mathbf{C} \tag{4}$$

спектральной управляемости системы (1) необходимо и достаточно для разрешимости задачи FSA для системы (1) в классе регуляторов с распределенными запаздываниями.

Рассмотрим статический регулятор по типу обратной связи

$$u(t)=-\alpha(\lambda_D,x(t))+\widehat{g}'(\lambda_D)x(t)+\sum_{k=1}^{L}\sum_{i=0}^{N}\int_0^h\widehat{q}'_{ki}(\lambda_D)x(t-s)e^{p_k s}s^i/i!ds, \tag{5}$$

где $\alpha(\lambda_D,x(t))=e'_n\left(\sum\limits_{j=0}^{m}A_jx(t-jh)+\sum\limits_{j=0}^{m-1}\int\limits_0^h R_j(s)x(t-jh-s)ds\right)$; $\widehat{g}'(\lambda_D)=[\widehat{g}_1(\lambda_D),\ldots,\widehat{g}_n(\lambda_D)]$ – векторный полином с действительными коэффициентами; $\widehat{q}'_{ki}(\lambda_D)=[\widehat{q}_{ki1}(\lambda_D),\ldots,\widehat{q}_{kin}(\lambda_D)]$ – векторные полиномы, возможно, с комплексными коэффициентами; $P^*=\{p_k\in\mathbf{C},k=\overline{1,L}\}$ – набор комплексных чисел. После приведения выражения $\sum\limits_{k=1}^{L}\sum\limits_{i=0}^{N}\int\limits_0^h\widehat{q}'_{ki}(\lambda_D)x(t-s)e^{p_k s}s^i/i!ds$ к виду левой части (2) (здесь $R_j(s)$ – n-векторные квазиполиномы) все коэффициенты регулятора (5) должны быть действительными. Для отрицательных значений аргумента переменные $x_i(t)$, если они не заданы, считаем произвольными кусочно-непрерывными функциями.

Регулятор вида (5) естественен для изучаемой системы, поскольку, как и система (1), содержит только сосредоточенные и распределенные запаздывания. Более простой вид регулятора (5), скажем, только со сосредоточенными запаздываниями, неприемлем, так как в более узком классе регуляторов, рассматриваемая задача не разрешима [1].

Пусть $d(p)=\prod\limits_{i=1}^{s_1}(p-\tilde{p}_i)^{k_i}=\sum\limits_{i=0}^{n}\gamma_i p^{n-i}$ – заданный характеристический полином замкнутой системы, $\tilde{P}=\{\tilde{p}_i\in\mathbf{C},i=\overline{1,s_1}\}$ – его различные действительные или комплексно сопряженные корни с алгебраическими кратностями k_i.

З а д а ч а: при выполнении (4) подобрать множество P^* и векторные коэффициенты $\widehat{g}'(\lambda_D),\widehat{q}'_{ki}(\lambda_D)$ регулятора (5) так, чтобы характеристическая матрица $pE-\tilde{A}(p,e^{-ph})$ замкнутой системы (1), (5) имела действительные коэффициенты и выполнялось равенство $\left|pE-\tilde{A}(p,e^{-ph})\right|=d(p)$. Такой регулятор назовем FSA-регулятором. Ниже приводится схема построения FSA-регулятора для системы (1).

2. Исследование структуры FSA-регулятора. В записи регулятора (5) присутствуют слагаемые со сосредоточенным запаздыванием $\lambda_D^j x_i(t)$ и с распределенным запаздыванием $\int\limits_0^h\lambda_D^j x(t-s)e^{p_k s}s^i/i!ds$. Будем говорить, что регулятор (5) имеет D-структуру (запаздывающую структуру). В замкнутой системе последняя строка характеристической матрицы такова ($\lambda=e^{-ph}$):

$$pe'_n-\left(\widehat{g}'(\lambda)+\sum_{k=1}^{L}\sum_{i=0}^{N}\widehat{q}'_{ki}(\lambda)\int_0^h e^{-(p-p_k)s}s^i/i!ds\right). \tag{6}$$

Обозначим $\tilde{q}'_{jki}(\lambda)=-\widehat{q}'_{jki}(\lambda)/\lambda_k\quad(\lambda_k=e^{-p_k h},\ j=\overline{1,n},\ i=\overline{0,N})$,

$$f_j(p,\lambda)=\hat{g}_j(\lambda)+\sum_{k=1}^{L}\hat{f}_{jk}(p,\lambda),\quad j=\overline{1,n}, \tag{7}$$

где $\hat{f}_{jk}(p,\lambda)=\dfrac{\tilde{q}_{jk0}(\lambda)(\lambda-\lambda_k)}{p-p_k}+\sum\limits_{i=1}^{n}\tilde{q}_{jki}(\lambda)\left(\dfrac{(\lambda-\lambda_k)}{(p-p_k)^{i+1}}+\sum\limits_{l=1}^{i}\dfrac{\lambda h^l}{l!(p-p_k)^{i-l+1}}\right);$ $\hat{g}_j(\lambda),\tilde{q}_{jki}(\lambda)$ $(j=\overline{1,n},\ i=\overline{0,N})$ – полиномы. Вычисляя интеграл в (6), получаем, что последняя строка характеристической матрицы замкнутой системы имеет вид $[-f_1(p,\lambda),\dots,p-f_n(p,\lambda)]$. Про функции $f_j(p,\lambda)$ также будем говорить, что они имеют D-структуру.

Пусть $f_j(p,\lambda)$ – произвольная функция вида (7). Приведя к общему знаменателю, получим

$$f_j(p,\lambda)=\frac{K(p,\lambda)}{d_1(p)},$$

где

$$d_1(p)=\prod_{k=1}^{L}(p-p_k)^{l_k} \tag{8}$$

– общий знаменатель суммы $\sum\limits_{k=1}^{L}\hat{f}_{jk}(p,\lambda)\,(j\in\overline{1,n})$; $K(p,\lambda)$ – полином, степень которого относительно переменной p не больше степени $d_1(p)$. Очевидно, что функция вида $f_j(p,e^{-ph})$ – целая. Верно и обратное утверждение.

Т е о р е м а 1. *Дробно-рациональная функция* $\dfrac{K(p,\lambda)}{d_1(p)}$ *имеет D-структуру, если и только если степень переменной p в полиноме* $K(p,\lambda)$ *не больше степени переменной p в полиноме* $d_1(p)$ *и производные функции* $K(p,e^{-ph})$ *по переменной p удовлетворяют равенствам*

$$K^{(i)}(p_k,e^{-p_k h})=0,\quad i=\overline{0,l_k-1},\quad k=\overline{1,L}. \tag{9}$$

3. Достаточные условия FSA-регулятора. Пусть $M(p,\lambda)=[M_1(p,\lambda),\dots,M_n(p,\lambda)]'$ – алгебраические дополнения к элементам (начиная с первого) последней строки матрицы $pE-A(p,\lambda)$, $d_0(p)$ – общий знаменатель дробей $M_i(p,\lambda)$, $i=\overline{1,n}$. На основании теоремы 1 последнюю строку матрицы $\tilde{A}(p,\lambda)$ замкнутой системы, соответствующую регулятору (5), будем искать в виде

$$e'_n\tilde{A}(p,\lambda)=[g_1(\lambda)+f_1(p,\lambda),\dots,g_n(\lambda)+f_n(p,\lambda)], \tag{10}$$

где полиномы $f_j(p,\lambda)$, $j=\overline{1,n}$, имеют вид (7). Обозначим

$$K(p,\lambda)=-d(p)-[g_1(\lambda),g_2(\lambda),\dots,g_n(\lambda)-p]M(p,\lambda). \tag{11}$$

Для построения FSA-регулятора полиномы $g_i(\lambda)$, $i=\overline{1,n}$, далее подбираются так, чтобы функция $K(p,\lambda)$ удовлетворяла условиям теоремы 1. Разлагая характеристический определитель $|pE-A(p,\lambda)|$ замкнутой системы по последней строке, получаем лемму.

Л е м м а 1. *Чтобы замкнутая система (1), (5) имела характеристический полином d(p), необходимо и достаточно равенство*

$$[f_1(p,\lambda),f_2(p,\lambda),\dots,f_n(p,\lambda)]M(p,\lambda)=K(p,\lambda). \tag{12}$$

Рассмотрим полиномы

$$\widehat{M}(p,\lambda)=d_0(p)M(p,\lambda),\ \widehat{M}_i(p,\lambda)=d_0(p)M_i(p,\lambda),\ i=\overline{1,n}. \tag{13}$$

Пусть $P_1^*=\{p_k^*\in\mathbf{C},\ k=\overline{1,\mu_1}\}$ – множество различных чисел таких, что при некотором $\lambda_k\in\mathbf{C}$ число p_k^* – решение системы

$$\widehat{M}_i(p,\lambda_k)=0,\ i=\overline{1,n}. \tag{14}$$

Набор P_1^* содержит корни полинома $d_0(p)$ и инвариантные [2] спектральные значения, которые не «убираются» дифференциально-разностным регулятором.

Ввиду условия (4) полиномы $\widehat{M}_i(p,\lambda)=0, i=\overline{1,n}$, не имеют [2] общего множителя, зависящего от λ, поэтому множество P_1^* конечно. Согласно теореме Гильберта о нулях, найдется векторный полином $\tilde{\varphi}'(p,\lambda)=[\tilde{\varphi}_1(p,\lambda),\ldots,\tilde{\varphi}_n(p,\lambda)]$, при котором

$$\tilde{\varphi}'(p,\lambda)\widehat{M}(p,\lambda)=\tilde{d}(p), \tag{15}$$

где полином

$$\tilde{d}(p)=\prod_{k=1}^{\mu_1}(p-p_k^*)^{l_k} \tag{16}$$

имеет корнями все числа $p_k^*\in P_1^*$, найденные из системы (14). Ввиду (13)

$$\tilde{d}(p)=d_0(p)\hat{d}(p),$$

$\hat{d}(p)$ – некоторый полином.

З а м е ч а н и е 1. Степень переменной p в $K(p,\lambda)$ не больше (см. (11)), чем $n-1$. Ввиду теоремы 1 далее (см. теорему 2) требуется, чтобы степень переменной p в числителе каждой дроби $\tilde{\varphi}_i(p,\lambda)K(p,\lambda)/\hat{d}(p), i=\overline{1,n}$, была не больше степени переменной p в знаменателе. Если это не так (в предположении, что $\deg_p K(p,\lambda)=n-1$), то поступим следующим образом.

Компоненты $\widehat{M}_i(p,\lambda), i=\overline{1,n}$, векторного полинома $\widehat{M}(p,\lambda)$ относительно p имеют степень не выше n_0+n-2, $n_0=\deg(d_0(p))$. Если степень $\tilde{\mu}$ полинома $\tilde{d}(p)$ меньше, чем $2n_0+2n-3$, то обе части равенства (15) домножим на произвольный полином $d_2(p)$ с действительными коэффициентами степени $2n_0+2n-3-\tilde{\mu}$. В частности, можно в выражении (16) увеличить кратности l_k корней p_k^* так, чтобы степень полинома $\tilde{d}_1(p)=\tilde{d}(p)d_2(p)$ стала $2n_0+2n-3$.

Если степень переменной p полинома $d_2(p)\tilde{\varphi}_i(p,\lambda), i=\overline{1,n-1}$, не меньше, чем n_0+n-1, то представим его в виде $d_2(p)\tilde{\varphi}_i(p,\lambda)=\xi_i(p,\lambda)\widehat{M}_n(p,\lambda)+\varphi_i(p,\lambda)$, где $\xi_i(p,\lambda), \varphi_i(p,\lambda)$ – полиномы. Поскольку степень полинома $\tilde{d}_1(p)=\tilde{d}(p)d_2(p)$ равна $2n_0+2n-3$, то после указанных преобразований степень полинома $\varphi_n(p,\lambda)$ в разложении

$$\varphi_1(p,\lambda)\widehat{M}_1(p,\lambda)+\ldots+\varphi_n(p,\lambda)\widehat{M}_n(p,\lambda)=\tilde{d}_1(p), \tag{17}$$

полученном из (15), относительно p будет равна n_0+n-2.

Поскольку $\tilde{d}_1(p)=d_0(p)d_2(p)\hat{d}(p)$, то, разделив обе части (17) на $d_0(p)$, получим

$$\varphi_1(p,\lambda)M_1(p,\lambda)+\ldots+\varphi_n(p,\lambda)M_n(p,\lambda)=d_1(p). \tag{18}$$

Здесь $d_1(p)=d_2(p)\hat{d}(p)$, $\deg_p(\varphi_i(p,\lambda)K(p,\lambda))\le\deg_p(d_1(p))$, $i=\overline{1,n}$.

Т е о р е м а 2. *Пусть выполнено условие спектральной управляемости (3). Для того чтобы регулятор (5) был FSA-регулятором достаточно:*

1) чтобы функция $K(p,\lambda)/d_1(p), i=\overline{1,n}$, удовлетворяла условию (9);

2) чтобы в разложении (18) степень переменной p в числителе каждой дроби $\varphi_i(p,\lambda)K(p,\lambda)/d_1(p), i=\overline{1,n}$, была не больше степени переменной p в знаменателе;

3) чтобы в соотношении (10)

$$[f_1(p,\lambda), f_2(p,\lambda),\ldots,f_n(p,\lambda)]=[\varphi_1(p,\lambda),\varphi_2(p,\lambda),\ldots,\varphi_n(p,\lambda)]K(p,\lambda)/d_1(p). \tag{19}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду условий 1)–3) доказываемой теоремы и теоремы 1 функции $\varphi_i(p,\lambda)K(p,\lambda)/d_1(p)$, $i=\overline{1,n}$, а значит, и компоненты вектор-функции $[f_1(p,\lambda), f_2(p,\lambda),\ldots,f_n(p,\lambda)]$ имеют D-структуру.

Умножая обе части (19) справа на $M(p,\lambda)$ и учитывая (18), получаем равенство (12)

$$[f_1(p,\lambda), f_2(p,\lambda),\ldots,f_n(p,\lambda)]M(p,\lambda)=K(p,\lambda)(\varphi'(p,\lambda)M(p,\lambda))/d_1(p)=K(p,\lambda),$$

из которого следует (лемма 1), что замкнутая система (1), (5) имеет конечный спектр с полиномом $d(p)$. Теорема доказана.

Идейная сторона данной работы видна из теоремы 2: введением дробно-рациональной функции $K(p,\lambda)$ согласно формуле (11) задача построения FSA-регулятора решается в два этапа. На первом этапе за счет полиномов $g_1(\lambda),\ldots,g_n(\lambda)$ реализуется условие 1) теоремы 2), на втором этапе за счет функций $\varphi_1(p,\lambda),\ldots,\varphi_n(p,\lambda)$ – условие 2). Это делает рассуждения конструктивными и позволяет предложить процедуру построения FSA-регулятора.

4. Реализация FSA-регулятора.

Теорема 3. *Условие спектральной управляемости (3) необходимо и достаточно для существования FSA-регулятора (5).*

Доказательство. Необходимость условия (3) устанавливается аналогично [1].

Достаточность. Считая выполненным условие спектральной управляемости (3), построим для системы (1) FSA-регулятор вида (5), обеспечивающий замкнутой системе произвольный конечный спектр. С этой целью реализуем требования теоремы 2.

Покажем, как выбрать полиномы $g_1(\lambda),g_2(\lambda),\ldots,g_n(\lambda)$, чтобы функция $K(p,\lambda)$ удовлетворяла условию (9), т. е. чтобы обеспечить условие 1) теоремы 2. Обозначим $g'(\lambda)=[g_1(\lambda), g_2(\lambda),\ldots,g_n(\lambda)]$. Функцию $K(p,\lambda)$ запишем так

$$K(p,\lambda)=pM_n(p,\lambda)-d(p)-g'(\lambda)M(p,\lambda).$$

Пусть полином $d_1(p)$ имеет вид (8) и $P^*=\{p_k\in\mathbf{C},k=\overline{1,L}\}$ – множество его различных корней, тогда должно выполняться условие (9), равносильное следующему

$$\left.\frac{d^i(g'(e^{-ph})M(p,e^{-ph}))}{dp^i}\right|_{p=p_k}=\left.\frac{d^i(pM_n(p,e^{-ph})-d(p))}{dp^i}\right|_{p=p_k},\quad i=\overline{0,l_k-1},\quad k=\overline{1,L}.\tag{20}$$

В результате получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных

$$g_j^{(i)}(\lambda_k),\quad j=\overline{1,n},\quad i=\overline{0,l_k-1},\quad k=\overline{1,L},\quad \lambda_k\in\Lambda^*=\{\lambda_k=e^{-p_kh}\,\big|\,p_k\in P^*,k=\overline{1,L}\}.\tag{21}$$

Поскольку выполнено условие спектральной управляемости (3), то среди чисел $M_j(p_k,e^{-p_kh})$, $j=\overline{1,n}$, при любом $k=\overline{1,L}$, есть отличное от нуля число. Поэтому при каждом $k\in\overline{1,L}$ из первого уравнения ($i=0$) найдем $g_j(\lambda_k)$, $j=\overline{1,n}$, из второго уравнения ($i=1$) найдем $g_j^{(1)}(\lambda_k)$, $j=\overline{1,n}$, и т. д. Окончательно полиномы $g_1(\lambda),g_2(\lambda),\ldots,g_n(\lambda)$ получаем как интерполяционные полиномы Лагранжа–Сильвестра по значениям (21), найденным из системы (20). Согласно [5, с. 110] полиномы $g_1(\lambda),g_2(\lambda),\ldots,g_n(\lambda)$, полученные по интерполяционным значениям (21), будут иметь действительные коэффициенты.

Как обеспечить условие 2) доказываемой теоремы, описано вслед за замечанием 1.

Дробно-рациональные функции $f_1(p,\lambda),f_2(p,\lambda),\ldots,f_n(p,\lambda)$ получаем по формуле (19), которой предшествует вычисление функции $K(p,\lambda)$ по формуле (11). FSA-регулятор построен. Теорема доказана.

Замечание 2. Полиномы $g_i(\lambda)$, $i=\overline{1,n}$, в регуляторе (5) можно находить методом неопределенных коэффициентов, как решение системы (20). Степени полиномов $g_i(\lambda)$, $i=\overline{1,n}$, получаем из совокупности интерполяционных значений (21): $\deg(g_i(\lambda))\le\sum_{k=1}^{L}l_k-1$.

Процедуру построения FSA-регулятора проиллюстрируем примером.

Пример. Рассмотрим систему управления второго порядка с матрицами

$$A(p,\lambda)=\begin{bmatrix}(1-\lambda)/p & \lambda\\ 1 & 0\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\quad h=\ln 2.\tag{22}$$

Ее характеристический определитель $w(p,e^{-ph})=p^2-1$ – полином, следовательно, система имеет конечный спектр.

Найдем алгебраические дополнения $M_1(p,\lambda)=\lambda$, $M_2(p,\lambda)=(p^2+\lambda-1)/p$ к элементам последней строки матрицы $pE-A(p,\lambda)$. Решаем систему уравнений $M_i(p,\lambda)=0$, $i=\overline{1,2}:(p,\lambda)=(\pm1;0)\Rightarrow e^{-ph}\ne\lambda$, т. е. система (22) спектрально управляема.

Пусть желаемый характеристический полином замкнутой системы $d(p) = (p+1)(p+2)$. Векторный полином $M(p,\lambda) = [M_1(p,\lambda), M_2(p,\lambda)]'$ имеет вид $[\lambda, (p^2+\lambda-1)/p]'$. Поскольку данная система имеет конечный спектр, то чтобы получить (18), разложим определитель $|pE - A(p,\lambda)|$ по последней строке $[-1, p]M(p,\lambda) = p^2 - 1$. В данном случае $d_0(p) = p$, согласно теореме 2 функция $K(p,\lambda)/(p^2-1)$ или, что равносильно, функция

$$\frac{d_0(p)K(p,\lambda)}{p^2-1} = \frac{-pd(p) - [g_1(\lambda), g_2(\lambda) - p]\widehat{M}(p,\lambda)}{p^2-1}$$

должна быть целой. Полиномы $g_1(\lambda) = -5$, $g_2(\lambda) = -6$ находим из системы (9), где вместо $K(p,\lambda)$ подставлено $d_0(p)K(p,\lambda)$, $p_{1,2} = \pm 1$, $l_{1,2} = 1$. Отсюда $K(p,\lambda) = 3(1+p)(-2+p+2\lambda)/p$.

В разложении (19) $\varphi'(p,\lambda) = (-1, p)$, $d_1(p) = p^2 - 1$. Согласно (10), (19) последняя строка матрицы $\tilde{A}(p,\lambda)$ замкнутой системы имеет вид $\left[-5 + \frac{6(-1+\lambda)}{p} - \frac{3(-1+2\lambda)}{-1+p}, -3 + \frac{3(-1+2\lambda)}{-1+p}\right]$. Поэтому искомый регулятор (5) будет таким:

$$u(t) = -5x_1(t) - 3x_2(t) - 6\int_0^h x_1(t-s)ds + 3\int_0^h (x_1(t-s) - x_2(t-s))e^s ds, \quad t > 0.$$

Литература

1. *Manitius A. Z., Olbrot A. W.* // IEEE Transactions on Autom. Control. 1979. AC-24, N 4. P. 541–553.
2. *Булатов В. И.* // Вестн. БГУ. Сер. 1. 1979. № 3. С. 78–80.
3. *Watanabe K., Ito M., Kaneko M.* // Int. J. Contr. 1983. Vol. 38, N 5. P. 913–926.
4. *Manitius A., Triggiani R.* // SIAM J. Contr. Optimiz. 1978. Vol. 16, N 4. P. 599–643.
5. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М., 1988.

A. V. METELSKII

ametelski@bntu.by

FINITE SPECTRUM ASSIGNMENT (FSA) PROBLEM FOR THE DIFFERENTIAL SYSTEM WITH DELAY

Summary

For a spectrally controllable linear autonomous system with distributed delays the static state feedback, that provides an arbitrary finite spectrum of a closed system, is constructed. By choosing the latter the closed-loop system can be made asymptotically stable. The results are illustrated by the example.