ГЕОДЕЗИЯ

УДК 528.063

АЛГОРИТМ ПЕРЕХОДА ОТ НЕЛИНЕЙНОГО К ЛИНЕЙНОМУ ОБОБЩЁННОМУ МЕТОДУ LP-ОЦЕНОК

А.Ю. БУДО
(Белорусский национальный технический университет, Минск);
д-р техн. наук, проф. В.И. МИЦКЕВИЧ
(Полоцкий государственный университет)

Исследуется алгоритм перехода от нелинейного к линейному обобщённому методу Lp-оценок. Выполнено теоретическое обоснование обобщённого метода Lp-оценок, не имеющего аналогов на постсоветском пространстве при обработке зависимых результатов геодезических измерений в альтернативных методах уравнивания. На тестовом примере показано, что для данной задачи нелинейные методы всегда имеют устойчивое, но неоднозначное решение, что подтверждает теоретические выводы авторов.

Метод Lp-оценок принадлежит к группе методов уравнивания. Различают коррелатный и параметрический способы уравнивания. В данной статье уделено внимание параметрическому способу. Если уравнивание выполняется средствами линейной алгебры, методы называют линейными. В противном случае – нелинейными, использующими алгоритмы решения систем нелинейных уравнений, методами нелинейного программирования.

Обратимся к основному критерию метода наименьших квадратов:

$$V^T P V \to \min\,, \tag{1}$$

где $V_{N\times 1}$ – вектор поправок в результаты измерений; $P_{N\times N}$ – диагональная матрица весов измерений, число которых равно N.

Компоненты вектора V являются числами, не подлежащими дифференцированию, так как производная скаляра равна 0. Поэтому при решении задач уравнивания методом итерации переходят от условия (1) к критериальной функции:

$$\Phi(X) = L^T(X)\cdot P\cdot L(X)\,, \tag{2}$$

где $X_{t\times 1}$ – вектор координат определяемых пунктов при числе параметров t; $L(X)$ – вектор свободных членов, в общем случае нелинейных параметрических уравнений, записываемых в виде

$$L(X) = \varphi(X) - T = T^{выч} - T^{изм}\,, \tag{3}$$

где $\varphi(X)$ – функция координат; $T_{N\times 1}$ – вектор результатов измерений.

Если достигнут минимум целевой функции (2), вектор X обозначают $\hat{X}$ – оценки параметров, для которых справедливо равенство:

$$V = L(\hat{X}) - \varphi(\hat{X}) - T = T^{уравн} - T^{изм}. \tag{4}$$

Минимизацию функции (2) выгодно осуществлять методами нелинейного программирования, записывая её следующим образом:

$$\Phi(X) = \sum_{i=1}^{N} P_i L_i^2(X)\,. \tag{5}$$

Здесь свободный член берётся в квадрате, поэтому метод назван методом наименьших квадратов (МНК). Если вместо цифры 2 подставить n, получим

$$\Phi(X) = \sum_{i=1}^{N} P_{ni} \left|L_i(X)\right|^n\,, \tag{6}$$

где при $n = 2$ – МНК; $n = 1$ – метод наименьших модулей (МНМ); $n = 3$ – метод наименьших кубов и т.д.

Минимизация функции (6) соответствует методу Lp-оценок (метод наименьших степеней). Этот метод основан на минимизации n-х степеней остаточных уклонений:

$$\sum_{i=1}^{N} P_{ni} \left| L_i(\hat{X}) \right|^n = \sum_{i=1}^{N} P_{ni} |V|^n$$

и обладает свойствами робастного уравнивания [1, с. 200].

По аналогии перехода от целевой функции (5) к критериальной (2) для функции (6) запишем

$$\Phi(X) = \left(|L(X)|^{\frac{n}{2}} \right)^T \cdot P_n \cdot |L(X)|^{\frac{n}{2}}, \tag{7}$$

где P_n – диагональная матрица весов измерений для различных n.

Формула (7) реализует необобщённый метод Lp-оценок, так как P_n – диагональная неполная матрица. Для корреляционной матрицы K вместо (7) имеем

$$\Phi(X) = \left(|L(X)|^{\frac{n}{2}} \right)^T \cdot K_n^{-1} \cdot |L(X)|^{\frac{n}{2}}. \tag{8}$$

Цель исследования – перейти от нелинейного варианта Lp-оценок к линейному для целевых функций (7) и (8), реализующих необобщённый (классический) и обобщённый методы уравнивания.

Для этого сначала рассмотрим алгоритм минимизации целевых функций по методу Ньютона, который предусматривает итерационный процесс [2, с. 87]:

$$X^{(j+1)} = X^{(j)} - H^{-1}(X^{(j)}) \nabla \Phi(X^{(j)}), \tag{9}$$

где $X^{(j)}$ – вектор неизвестных в j-том приближении;

$$H(X^{(j)}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Phi(X^{(j)})}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 \Phi(X^{(j)})}{\partial x_1 \partial x_t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \Phi(X^{(j)})}{\partial x_t \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \Phi(X^{(j)})}{\partial x_t^2} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Формула (10) – матрица Гессе вторых частных производных, взятых в точках $X^{(j)}$, а градиент целевой функции имеет вид

$$\nabla \Phi(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi(X^{(j)})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Phi(X^{(j)})}{\partial x_t} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Если частные производные, входящие в (10) и (11), вычислять численно, метод называется нелинейным, а если вторые производные целевой функции брать аналитически, метод будет линеаризованный, т.е. такой, когда используются методы линейной алгебры.

Далее выполним аналитический контроль формул классического (необобщённого) метода Lp-оценок. Американскими учёными Флетчером, Грантом и Хебденом [3, с. 277] на основе метода Ньютона для целевой функции (7) были получены следующие замкнутые аналитические формулы для матриц H и $\nabla \Phi(X)$ в случае неравноточных измерений:

$$\nabla \Phi(X) = n \cdot A^T \cdot C \cdot L(X); \tag{12}$$

$$H(X) = n(n-1) A^T C A, \tag{13}$$

что привело к равенствам [4, с. 10; 5, с. 6]:

$$X^{(j+1)} = X^{(j)} - \frac{1}{n-1} (A^T C A)^{-1} A^T C L(X^{(j)}), \tag{14}$$

где
$$C = P\left(diag\left|L(X^{(j)})\right|^{n-2}\right). \tag{15}$$

Методом дифференцирования целевой функции (7) $\frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_1}$ и $\frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_2}$ получим градиент целевой функции:

$$\nabla \Phi(X) = n\begin{pmatrix} a_{11} \cdot P_1 \cdot |L_1(X)|^{n-2} L_1(X) + a_{21} \cdot P_2 \cdot |L_2(X)|^{n-2} L_2(X) + a_{31} \cdot P_3 \cdot |L_3(X)|^{n-2} L_3(X) \\ a_{12} \cdot P_1 \cdot |L_1(X)|^{n-2} L_1(X) + a_{22} \cdot P_2 \cdot |L_2(X)|^{n-2} L_2(X) + a_{32} \cdot P_3 \cdot |L_3(X)|^{n-2} L_3(X) \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Продифференцировав $\nabla\Phi(X)$, получим:

$$\frac{\partial^2 \Phi(X)}{\partial x_1^2} = n\cdot(n-1)\cdot\left(a_{11}\cdot a_{11}\cdot P_1\cdot|L_1(X)|^{n-2} + a_{21}\cdot a_{21}\cdot P_2\cdot|L_2(X)|^{n-2} + a_{31}\cdot a_{31}\cdot P_3\cdot|L_3(X)|^{n-2}\right);$$

$$\frac{\partial^2 \Phi(X)}{\partial x_1 \partial x_2} = n\cdot(n-1)\cdot\left(a_{11}\cdot a_{12}\cdot P_1\cdot|L_1(X)|^{n-2} + a_{21}\cdot a_{22}\cdot P_2\cdot|L_2(X)|^{n-2} + a_{31}\cdot a_{32}\cdot P_3\cdot|L_3(X)|^{n-2}\right);$$

$$\frac{\partial^2 \Phi(X)}{\partial x_2^2} = n\cdot(n-1)\cdot\left(a_{12}\cdot a_{12}\cdot P_1\cdot|L_1(X)|^{n-2} + a_{22}\cdot a_{22}\cdot P_2\cdot|L_2(X)|^{n-2} + a_{32}\cdot a_{32}\cdot P_3\cdot|L_3(X)|^{n-2}\right).$$

Далее применим метод неполной индукции для обобщённого метода Lp-оценок, для которого можно записать

$$\Phi(X) = \left(|L(X)|^{\frac{n}{2}}\right)^T \cdot D \cdot |L(X)|^{\frac{n}{2}},$$

где
$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & \cdots & D_{1N} \\ D_{21} & D_{22} & \cdots & D_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{N1} & D_{N2} & \cdots & D_{NN} \end{pmatrix}.$$

Для числа измерений $N = 3$ и числа параметров $t = 2$ имеем:

$$\begin{aligned}\Phi(x_1,x_2) &= D_{11}|L_1(x_1,x_2)|^{\frac{n}{2}}|L_1(x_1,x_2)|^{\frac{n}{2}} + D_{12}|L_2(x_1,x_2)|^{\frac{n}{2}}|L_1(x_1,x_2)|^{\frac{n}{2}} + D_{13}|L_3(x_1,x_2)|^{\frac{n}{2}}|L_1(x_1,x_2)|^{\frac{n}{2}} + \\ &+ D_{12}|L_1(x_1,x_2)|^{\frac{n}{2}}|L_2(x_1,x_2)|^{\frac{n}{2}} + D_{22}|L_2(x_1,x_2)|^{\frac{n}{2}}|L_2(x_1,x_2)|^{\frac{n}{2}} + D_{23}|L_3(x_1,x_2)|^{\frac{n}{2}}|L_2(x_1,x_2)|^{\frac{n}{2}} + \\ &+ D_{13}|L_1(x_1,x_2)|^{\frac{n}{2}}|L_3(x_1,x_2)|^{\frac{n}{2}} + D_{23}|L_2(x_1,x_2)|^{\frac{n}{2}}|L_3(x_1,x_2)|^{\frac{n}{2}} + D_{33}|L_3(x_1,x_2)|^{\frac{n}{2}}|L_3(x_1,x_2)|^{\frac{n}{2}}.\end{aligned}$$

Найдём производные $\frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_1}$ и $\frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_2}$ по правилу $(uv)' = u'v + uv'$.

Окончательно получим

$$\nabla \Phi(X) = n \cdot A^T_{t\times N} \cdot D_{N\times N} .\times S_{N\times N} \cdot \left\{ |L(X)|^{\frac{n-2}{2}}_{N\times 1} \cdot \left[|L(X)|^{\frac{n}{2}}\right]^T_{1\times N} \right\} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}_{N\times 1}. \tag{17}$$

Продифференцировав градиент, найдём вторые частные производные для матрицы Гессе. В результате получим следующие формулы для целевой функции (8), в которой принято обозначение $D = K_n^{-1}$:

$$C_1 = K_n^{-1} .\times \left\{ |L(X)|^{\frac{n-4}{2}} \cdot \left[|L(X)|^{\frac{n}{2}}\right]^T \right\}; \tag{18}$$

$$C_2 = K_n^{-1} .\times S \cdot \left\{ |L(X)|^{\frac{n-2}{2}} \cdot \left[S \cdot |L(X)|^{\frac{n-2}{2}}\right]^T \right\}; \tag{19}$$

$$C_3 = K_n^{-1} \ .\times \ S \cdot \left\{ \left| L(X) \right|^{\frac{n-2}{2}} \cdot \left[\left| L(X) \right|^{\frac{n}{2}} \right]^T \right\}, \tag{20}$$

где знак .× означает поэлементное умножение матриц, A .× B = $\left(a_{i,j} \cdot b_{i,j}\right)$; $S_{N\times N}$ – диагональная матрица сигналов (единица на диагонали, умноженная на знак числа $L(X)$);

$$x = -H^{-1}G. \tag{21}$$

Здесь $H_{t\times t}$ – матрица Гессе (вторых частных производных от функции (8)):

$$H = \frac{n|n-2|}{2} Z + \frac{n \cdot n}{2} A^T C_2 A, \tag{22}$$

где $Z_{t\times t}$ – матрица, элементы которой вычисляются с использованием A и C_1 по формуле:

$$Z_{i,j} = \sum_{k=1}^{N} \sum_{r=1}^{N} a_{k,i} \cdot a_{k,j} \cdot \left(C_1\right)_{k,r}. \tag{23}$$

Матричную запись для матрицы Z найти не удалось.

Матрица для градиента, входящего в (21), вычисляется по формуле

$$G = n \cdot A^T \cdot C_3 \cdot l, \tag{24}$$

где

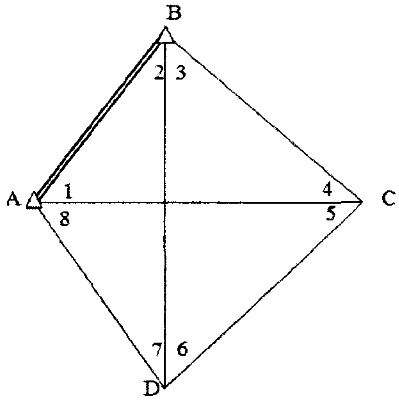
$$l_{N\times 1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}_{N\times 1}. \tag{25}$$

Формулы (18) – (25) решают новую задачу обобщённого метода Lp-оценок. При этом в них используется новая формула для корреляционной матрицы

$$K_n^{-1} = P_n^{\frac{1}{2}} R^{-1} P_n^{\frac{1}{2}}, \tag{26}$$

полученная путём обобщения для случая Lp-оценок.

В качестве тестового приведём *пример* уравнивания геодезического четырехугольника (рисунок) с результатами измерений, представленными в таблице 1 [6].



Геодезический четырёхугольник

Таблица 1

Измеренные углы

Номер угла	Величина угла
1	37°58′22″
2	39 18 30
3	61 01 37
4	41 41 41
5	50 01 55
6	27 14 40
7	26 57 40
8	75 45 05

В таблице 2 приведены результаты уравнивания по направлениям, при составлении уравнений поправок для углов и использовании матрицы K_n. При этом в колонках 1, 3, 5 даны результаты уравнивания по нелинейному методу Ньютона, а в колонках 2, 4, 6 – с использованием формул (18) – (26).

Координаты исходных пунктов: x_A = 1100,00 м; y_A = 100,00 м; x_B = 1650,00 м; y_B = 640,00 м.

Предварительные координаты определяемых пунктов: x_C = 1250 м; y_C = 1230 м; x_D = 100 м; y_D = 500 м.

Таблица 2

Уравнивание геодезического четырёхугольника

Обозначения	n = 1,5		n = 2,0		n = 2,5	
	1	2	3	4	5	6
x_C	1249,932	1249,843	1249,849	1249,919	1249,876	1249,918
y_C	1230,103	1230,103	1230,104	1230,071	1230,090	1230,058
x_D	99,929	99,973	100,003	99,926	99,972	99,958
y_D	500,005	499,930	499,914	499,983	499,941	499,982
μ	8,38	6,88	3,83	5,17	2,16	3,42
M_C	1,088	0,042	0,116	0,065	0,142	0,027
M_D	0,161	0,093	0,173	0,137	0,194	0,041
V_1	–18,9	–0,3	0,7	–14,7	–6,5	–14,7
V_2	12,1	8,8	6,7	16,4	10,3	15,8
V_3	–8,6	–18,3	–14,7	–12,8	–14,1	–15,0
V_4	5,5	–0,2	–2,7	1,1	0,3	3,7
V_5	–2,0	–2,3	1,6	4,2	–2,6	3,1
V_6	30,2	27,8	22,8	14,5	23,4	15,1
V_7	23,2	–0,4	–10	–1,8	0	0,7
V_8	6,7	14,9	25,6	23,2	19,2	21,0
δ	0,01 м		0,01 м		0,01 м	

Анализ данных таблицы 2 свидетельствует о том, что нелинейные методы уравнивания в случае применения зависимых величин оказались неустойчивыми к выбору шага численного дифференцирования (см. колонки 1, 3, 5 таблицы 2); расхождение координат в нелинейных методах по сравнению с линейными составило более 7 см.

В заключение проведенного исследования можно сделать следующие **выводы:**

1) формулы (12) и (13) для необобщённого метода Lp-оценок можно получить методом неполной индукции, который изложен в данной статье;

2) для целевой функции (8) равенства (18) – (25) можно получить только методом неполной индукции из-за сложности применения нелинейного метода Ньютона;

3) на примере тестового примера доказано (см. табл. 2), что нелинейный метод Ньютона даёт неоднозначное решение в случае обработки зависимых результатов измерений, что усиливает важность вывода формул (18) – (26) для целевой функции (8).

ЛИТЕРАТУРА

1. Маркузе, Ю.И. Геодезия. Вычисление и уравнивание геодезических сетей / Ю.И. Маркузе, Е.Г. Бойко, В.В. Голубев; под ред. Ю.И. Маркузе. – М.: Картгеоцентр – Геодезиздат, 1994. – 431 с.
2. Химмельблау, Д.М. Прикладное нелинейное программирование / Д.М. Химмельблау; пер. с англ. – М.: Мир, 1975. – 534 с.
3. Fletcher, R. The calculation of linear best Lp-apparoximations / R. Fletcher, I.A. Grant, M.D. Hebden // Computer Journal. – 1971. – V. 14, № 3. – P. 277 – 279.
4. Мещеряков, Г.А. Об уравнивании геодезических измерений с учётом закона распределения ошибок измерений / Г.А. Мещеряков, С.Д. Волжанин, В.В. Киричук // Геодезия и картография. – 1984. – № 2. – С. 9 – 11.
5. Мицкевич, В.И. Уравнивание и оценка точности геодезических сетей методом Ньютона / В.И. Мицкевич, В.В. Ялтыхов; Полоц. гос. ун-т. – Новополоцк, 1999. – 6 с. – Деп в ОНТИ ЦНИИГАиК 22.03.99, № 658. – гд 1999 // РЖ: 52. Геодезия и аэрофотосъёмка. – 1999. – № 8. – 08.52.198ДЕП. – С. 27.
6. Мицкевич, В.И. О невозможности поиска грубых ошибок измерений при параметрическом способе уравнивания / В.И. Мицкевич // Геодезия и картография. – 1994. – № 4. – С. 24 – 26.

Поступила 29.03.2012

ALGORITHM FOR THE TRANSITION FROM LINEAR TO NONLINEAR GENERALIZED METHOD OF LP-ESTIMATES

A. BUDO, V. MICKEVICH

The algorithm for the transition from nonlinear to linear generalized method of Lp-estimates is under consideration. Theoretical justification of the generalized method of Lp-estimates, which has no analogues in the post-Soviet countries, processing of dependent results of geodesic measurements in alternative compensation methods, is carried out. It is shown on the test example that for the given task nonlinear methods always have invariable, but ambiguous solution, that is proved by the theoretical conclusions.