

На правах рукописи

ДОЛГОВА Татьяна Александровна

УДК 539.3:517.962.1

**РАЗРАБОТКА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ
ВНЕШНИХ АППРОКСИМАЦИЙ ТРЕХМЕРНЫХ
ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ**

01.02.04 — Механика деформируемого
твёрдого тела

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Работа выполнена в Белорусской государственной политехнической академии.

Научный руководитель —

кандидат техн. наук,
доцент В.Н.Апанович

Научный консультант —

кандидат техн. наук,
доцент В.В.Напрасников

Официальные оппоненты:

доктор физ.-мат.наук,
профессор В.Н.Абрашин,

кандидат техн.наук,
ст. науч. сотр. И.С.Куликов

Ведущая организация: **Белорусский государственный университет**

Защита состоится ¹⁶ декабря 1994 года в на заседании специализированного совета К 056.02.04 в Белорусской государственной политехнической академии / 220027, г. Минск, пр. Ф.Скорины, 65, главный корпус к.20I.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Белорусской государственной политехнической академии.

Автореферат разослан

1994 года.

Ученый секретарь
доцент



Г.Л.Бахмат

© Долгова Т.А., 1994

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

А к т у а л ь н о с т ь т е м ы . Теория упругости является фундаментальной научной дисциплиной при проектировании современных строительных конструкций, при расчете элементов машин и механизмов. За исключением очень простых случаев, математические уравнения, описывающие трехмерные задачи теории упругости, решаются с помощью численных методов, среди которых метод конечных элементов (МКЭ) является одним из самых мощных и универсальных.

В машиностроении широко используются системы автоматизированного проектирования, составной частью которых являются программы расчета непряжено-деформированного состояния методом конечных элементов. Полностью автоматизированный подход к прочностным расчетам требует более высокой степени надежности и точности результатов при минимизации затрат на их получение. Поэтому представляется актуальной разработка более совершенных высокоточных и эффективных вариантов МКЭ.

При применении МКЭ для решения трехмерных задач теории упругости приходится сталкиваться и со специфическими проблемами, которые снижают эффективность расчетов и сужают область применения трехмерных конечных элементов. К таким проблемам относятся :

"проблема размерности", возникающая из-за необходимости введения большого числа степеней свободы для конечноэлементного представления трехмерного тела;

проблема построения конечных элементов (КЭ), обладающих широкими возможностями представления сложной геометрии конструкции. В частности, большие погрешности возникают при использовании в одной модели существенно трехмерных элементов и элементов, геометрия которых такова, что один или два пространственных размера непропорционально малы по сравнению с другими;

"проблема точности". В силу ограниченных ресурсов ЭВМ (память, быстродействие) конструкции представляются весьма небольшим набором конечных элементов, что приводит к большим погрешностям вычислений. В этой связи является актуальным построение более точных конечных элементов, позволяющих представлять конструкцию с помощью меньшего числа элементов.

Данная работа посвящена развитию нового подхода в МКЭ - ме-

тоту внешних конечноэлементных аппроксимаций - применительно к решению трехмерных задач теории упругости.

Отличительной особенностью метода внешних конечноэлементных аппроксимаций (МВКА) является построение несогласованных конечных элементов (КЭ) на основе теории внешних аппроксимаций пространств Соболева и вариационных уравнений краевых задач механики. Метод позволяет строить конечные элементы произвольной формы, предоставляет большую свободу выбора аппроксимирующих функций и ведет к значительному сокращению вычислительных затрат.

Имеющееся в настоящее время строгое математическое обоснование сходимости МВКА и указанные возможности практического характера позволяют предположить высокую прикладную эффективность метода в решении трехмерных задач, на что и направлена данная диссертационная работа.

Ц е л ь и з а д а ч и р а б о т ы. Цель работы состоит в разработке схемы метода внешних конечноэлементных аппроксимаций применительно к решению трехмерных задач теории упругости и исследование ее прикладной эффективности.

Для достижения поставленной цели потребовалось решить следующие задачи:

вывести соотношения для построения полиномиальных базисных функций произвольного трехмерного КЭ с плоскими гранями; на основе дискретизированной вариационной задачи теории упругости получить формулы для построения матрицы жесткости и вектора нагрузки этого элемента с учетом граничных условий;

разработать способ описания геометрии трехмерной модели и схему контроля корректности задаваемой геометрии; разработать эффективный единый алгоритм анализа сложной геометрии трехмерного КЭ с произвольно расположенными плоскими гранями (определение внешних нормалей плоских участков граней, построение локальных систем координат и др.);

разработать и реализовать в виде исследовательской программы алгоритм расчета по МВКА напряженно-деформируемого состояния трехмерного упругого тела; исследовать эффективность использования предлагаемого КЭ при решении различных трехмерных задач теории упругости и его практическую сходимость в зависимости от различных параметров аппроксимации и степени нерегулярности расчетной области.

Научная новизна работы заключается в следующем:

разработана схема метода внешних конечноэлементных аппроксимаций применительно к решению трехмерных задач теории упругости;

разработана эффективная методика построения по методу внешних конечноэлементных аппроксимаций трехмерного конечного элемента упругого тела с произвольно расположенными плоскими гранями; разработана научно-исследовательская программа для ЭВМ реализующая расчет перемещений и напряжений трехмерного упругого тела на базе метода внешних конечноэлементных аппроксимаций;

на примере различных типов трехмерных задач теории упругости продемонстрирована высокая точность численных решений; проведено практическое исследование влияния на результаты порядков внутренней и граничной аппроксимации и степени нерегулярности расчетной области.

Достоверность научных положений и полученных результатов обеспечивается корректным использованием вариационной постановки трехмерной задачи теории упругости в перемещениях; имеющимся строгим математическим доказательством сходимости МКЭ и теоретическими оценками точности, а также тщательными исследованиями точности и сходимости полученных численных решений путем сравнения их с точными аналитическими решениями и численными решениями других авторов.

Практическая значимость работы заключается в разработке схемы метода внешних конечноэлементных аппроксимаций применительно к решению трехмерных задач теории упругости и оценке ее практической эффективности.

На примере решения различных задач трехмерной теории упругости показано, что применение предлагаемого элемента МКЭ в десятки раз снижает потребности в вычислительных ресурсах.

Показано, что рассматриваемые трехмерные элементы позволяют проводить расчет комбинированных конструкций, состоящих из различных массивных и тонкостенных частей на базе единого ЭЭ.

Продemonстрировано, что использование произвольных (возможно - сильно вогнутых) многогранных ЭЭ позволяет аппроксимировать сложную геометрию небольшим числом элементов, т.к. один конечный элемент способен моделировать целый фрагмент конструкции.

Использование трехмерных КЭ с плоскими гранями позволяет сократить объемы вводимой информации. Вместе с тем, произвольное расположение плоских граней позволяет аппроксимировать криволинейные границы с необходимой точностью, что продемонстрировано в работе на примере различных криволинейных объектов.

На защиту выносятся:

схема метода внешних конечноэлементных аппроксимаций для решения трехмерных задач теории упругости;

методика построения в соответствии с МКЭ трехмерного полиномиального конечного элемента с произвольно расположенными плоскими гранями;

результаты исследования точности и сходимости метода при решении различных задач трехмерной теории упругости.

Апробация работы. Основные положения диссертации докладывались и обсуждались на Международной конференции "Колебания и волны в экологии, технологических процессах и диагностике" (Минск, 1993); Межреспубликанской научно-практической конференции творческой молодежи "Актуальные проблемы информатики (Минск, 1992); 47-й научно-технической конференции, посвященной 70-летию Белорусского политехнического института (Минск, 1992); научно-технических конференциях Белорусской государственной политехнической академии (Минск, 1993, 1994); Молодежной научно-технической конференции "XIX Гагаринские чтения" (Москва, 1993); на семинаре кафедры численных методов и программирования Белорусского государственного университета (Минск, 1994).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 8 печатных работ.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы (133 наименования). Работа изложена на 122 страницах, содержит 31 рисунок, 19 таблиц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована важность и актуальность вопросов, решению которых посвящена диссертация, сформулированы цель и задачи работы, приведены аргументы, подтверждающие научную и практическую значимость полученных результатов, сформулированы основные положения выносимые на защиту.

Первая глава содержит обзор работ, посвященных применению метода конечных элементов для решения трехмерных задач теории упругости. Рассмотрены трудности, возникающие при этом и существующие пути их устранения. В частности, уделено внимание проблемам большой размерности трехмерных задач, проблемам связанным с аппроксимацией геометрии сложных конструкций, а также касающимся повышения точности вычисления напряжений.

Рассмотрено современное состояние вопросов обеспечения достаточной гладкости аппроксимирующих функций для выполнения условий сходимости. Для сплошного тела, разбитого на дискретные элементы, соединенные между собой в узлах, не всегда удается достигнуть непрерывности функций перемещений вдоль поверхности контакта между смежными элементами. Тогда условия непрерывности вдоль межэлементных границ выполняются приближенно. Функции, везде удовлетворяющие условию непрерывности, называются конформными, а не удовлетворяющие этим условиям - неконформными. Конечный элемент считается C^1 совместным при обеспечении межэлементной непрерывности Z частных производных.

Отказ от требования межэлементной непрерывности аппроксимирующих функций значительно упрощает построение КЭ, которые в этом случае будут несовместными (неконформными).

Одним из новых подходов в этой области является метод внешних конечноэлементных аппроксимаций (МВКА), строгое математическое обоснование которого дано В.Н.Апановичем.

Рассмотренные в литературе плоские и осесимметричные задачи и задачи изгиба пластин позволяют охарактеризовать МВКА как метод, который, наряду с сохранением лучших черт классического МКЭ, обладает новыми перспективными возможностями. Во первых, это свобода выбора формы КЭ и аппроксимирующих функций, что значительно облегчает аппроксимацию границ и дискретизацию расчетной области, снимает вопрос чувствительности элемента к искажению и сильному изменению соотношения размеров КЭ. Метод продемонстрировал сокращение числа степеней свободы отдельного элемента и общего числа этих элементов при высокой точности расчетов как перемещений, так и напряжений. Кроме того МВКА, обладает возможностью простого уточнения результатов без переразбиения области путем увеличения порядков внутренней аппроксимации и граничной аппроксимации по любому из направлений. Опираясь на строгие мате-

математические доказательства и численное исследование сходимости метода для двумерных задач, сделан вывод о возможности его эффективного применения для решения трехмерных задач теории упругости.

Вторая глава посвящена разработке схемы метода внешних конечноэлементных аппроксимаций применительно к решению трехмерных задач теории упругости.

В первом параграфе изложены теоретические основы построения конечного элемента по МКЭ, приведены основные определения.

Пространство векторных функций V аппроксимируется некоторым конечномерным пространством X_h , называемым пространством конечных элементов. Классические схемы МКЭ основаны на использовании таких пространств аппроксимирующих функций, для которых X_h является конечномерным подпространством пространства Соболева $X_h \subset V$. Такие аппроксимации называются внутренними.

При внешних аппроксимациях подпространство аппроксимирующих функций строится так, что это включение не выполняется. На межэлементной границе имеет место разрыв аппроксимирующих функций. Функции из X_h должны удовлетворять определенным требованиям, чтобы в пределе при $h \rightarrow 0$ (сгущение сетки КЭ или увеличение размерности пространства аппроксимирующих функций) требуемое качество гладкости восстанавливалось т.е. выполнялось $\lim X_h \subset V$, тогда имеет место внешняя аппроксимация.

Согласно теории внешних аппроксимаций, для удовлетворения критерия сходимости, степени свободы должны иметь вид

$$\varphi_i(p) = \int_{\partial K_{r_i}} \vartheta_{r_i j} \delta_{r_i j} p d\delta \quad (1)$$

где ∂K_{r_i} - гладкий участок грани; $\vartheta_{r_i j}$ - функции j слоя, определенные на границе КЭ; $\delta_{r_i j}$ - оператор дифференцирования.

При этом структура аппроксимирующего пространства конечного элемента P^K представима в виде прямой суммы двух подпространств

$$P^K = P_\Sigma + P_2$$

где $P_2 = \{p \in P^K \mid \varphi_i(p) = 0, i \in M\}$,

P_Σ - некоторое дополнение P_2 . В пространстве P_Σ существует базис $\{p_i^\Sigma\}$, удовлетворяющий условию:

$$\varphi_i(p_k^\Sigma) = \begin{cases} 1, & i=k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$

Любой элемент $p \in P^K$ однозначно представим в виде

$$p = \sum_{l=1}^M \varphi_l(p) p_l^{\Sigma} + \sum_{K=1}^{N-M} \beta_K(p) p_K^{\Sigma} \quad (2)$$

где $\alpha_K (1 \leq K \leq N-M)$ - коэффициенты, называемые внутренними степенями свободы, $\varphi_l (1 \leq l \leq M)$ - граничными степенями свободы.

Таким образом, конечный элемент определяет четверка:

$$(K, G^K, P^K, P_{\Sigma}) ,$$

где K - замкнутая область в R^n с непустым множеством внутренних точек и кусочно-гладкой липшицевой границей; P^K - конечномерное пространство определенных на области K функций, отвечающее требованиям линейной независимости набора функционалов $\varphi_l(p)$; G^K - конечномерное пространство граничных аппроксимирующих функций области K ; P_{Σ} - подпространство пространства P^K .

Связный участок δK_r границы элемента $K \in R^n$, который состоит из гладкого числа участков граней $\delta K_{r,j}$ (подобластей той же размерности), можно взаимно однозначно и непрерывно отобразить на область D евклидова пространства R^{n-1} .

$$\varphi : D \subset R^{n-1} \rightarrow \delta K_{r,j} \subset R^n \quad (3)$$

Такое отображение называется локальной картой поверхности δK_r . Прообраз D гладкого участка называют областью параметров карты. Эта область параметров подвергается разбиению на так называемые поверхностные элементы $K_{r,j}$. При рассмотрении внешних аппроксимаций пространств Соболева H^m на границах КЭ необходимо определить M слоев поверхностных элементов $K_{r,j}$, $0 \leq j \leq M$. На каждом поверхностном элементе необходимо определить пространства $P_{r,j}^k$ аппроксимирующих функций. Таким образом, поверхностный элемент полностью определяется двумя множествами:

$$(K_{r,j}, P_{r,j}^k) .$$

Второй параграф посвящен построению трехмерного конечного элемента теории упругости с произвольно расположенными плоскими гранями. Приводятся доводы в пользу такой геометрии КЭ, обсуждаются вопросы параметризации границ плоских участков граней, выводятся формулы для определения элементов матрицы перехода A из глобальной системы координат элемента (x, y, z) в систему координат участка грани (t^1, t^2) . В случае плоских многоугольных участков граней отображение (3) переводит многоугольник из R^2 на поверхность в R^3 и имеет вид

$$(x, y, z) = (t_1, t_2, 0) A + (x_0, y_0, z_0) \quad (4)$$

где (X_0, Y_0, Z_0) - начальная точка локальной системы координат.

Однако начальное описание геометрии является недостаточным для дальнейшего вычисления необходимых интегралов. Топологическая информация должна быть дополнена сведениями о том, какая из сторон участка грани является внешней по отношению к определенному КЭ. Автором разработаны подробные алгоритмы построения внешних нормалей к участкам граней произвольного (выпукло-вогнутого) многогранника. В процессе решения этой задачи выделены и решены три подзадачи: об определении пространственных координат точки, строго принадлежащей плоской внутренней области N -угольника; плоская задача о местоположении точки относительно N -угольника; пространственная задача о местоположении точки относительно многогранника.

Далее рассматриваются полиномиальные базисы аппроксимации. Решения вариационных уравнений, соответствующих краевым задачам $2M$ -ного порядка, ищутся в пространствах Соболева $H^m(\Omega)$. Порядок пространственных задач теории упругости $2M=2$. При $M=1$ имеем один слой поверхностных элементов $K_{r-1} = K_r$, область которых совпадает с областью соответствующего гладкого участка грани.

Базисные функции поверхностных элементов являются полными полиномами δ -ой степени:

$$\{t_1^{\beta_1} t_2^{\beta_2}\}, \quad 0 \leq \beta_1 + \beta_2 \leq \delta.$$

Эти функции порождают граничные степени свободы (I), которые в данном случае примут вид

$$\varphi_{j,l}(u_i) = \int_{\partial K_{r,i}} t_1^{\beta_1} t_2^{\beta_2} u_i |d\delta|_{\partial K_{r,i}}, \quad l = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,N}, \quad (5)$$

где $u_i|_{\partial K_{r,i}}$ - сужение функции на участок $\partial K_{r,i}$, $d\delta$ - элемент поверхности, N - число элементов базиса. Таким образом, для одного участка грани строится $3N$ граничных степеней свободы.

Пусть пространство аппроксимирующих функций P_K - полное пространство полиномов K -ой степени. Тогда каждая компонента вектора перемещений $U = (U_1, U_2, U_3)$ может быть представлена в виде

$$u_i = \sum_{|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = 0}^K \beta_\alpha x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} z^{\alpha_3}, \quad l = \overline{1,3} \quad (6)$$

где β_α - некоторый коэффициент.

Порядки полиномов K и ϕ называются порядками внутренней и граничной аппроксимации соответственно.

Базис исходного пространства P_n алгебраически преобразуется для получения системы базисных функций элемента K . В пространстве конечных элементов X^n создаются базисные функции двух видов: N^E с областью определения из двух смежных КЭ и N^Z , областью определения которой является отдельный КЭ. Тогда при аппроксимации H^1 пространством X^n любой функции $u \in H^1$ ставится в соответствие аппроксимант $u_n \in X_n$, который с учетом (2.2) имеет вид

$$u_n = \sum_{l=1}^M \varphi_l(u) N_l^E + \sum_{k=1}^{N-M} \alpha_k(u) N_k^Z. \quad (7)$$

Далее подробно рассмотрен переход от дискретизированной вариационной задачи теории упругости к системе линейных алгебраических уравнений метода конечных элементов. Краевой задаче трехмерной теории упругости эквивалентна вариационная задача отыскания функции u из W , такой что

$$a(u, v) = f(v) \quad (8)$$

$\forall v \in W$, где $W = \{v \in (H^1(\Omega))^3, v|_{\Gamma_1} = 0\}$, $\Gamma_1 \subset \Gamma$, граничное множество Γ элемента состоит из двух подмножеств Γ_1, Γ_2 . Соотношение (8) в развернутой форме имеет вид.

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v) dx = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 f_i v_i dx + \int_{\Gamma_2} \sum_{i=1}^3 g_i v_i d\delta. \quad (9)$$

Елинейная форма $a(u, v)$ этого вариационного уравнения с учетом известных соотношений, включающих зависимость компонент тензоров напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} от частных производных компонент вектора перемещений, будет состоять из слагаемых

$$\text{вида} \quad C \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{\partial v_i}{\partial x} dx, \quad \text{где } C - \text{коэффициент, зависящий}$$

от упругих постоянных материала. При решении дискретизированной вариационной задачи линейная форма a^n состоит из вкладов по всем элементам разбиения

$$a^n(u, v) = \sum_K a_K^n = \sum_K \int_K \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \Big|_K \frac{\partial v_i}{\partial x} \Big|_K + \dots \right) dx. \quad (10)$$

где $u_{i|k}$, $\bar{u}_{i|k}$ — непрерывные аппроксимирующие функции элемента K .

Дискретизированное вариационное уравнение должно удовлетворяться для любой базисной функции W_1^E , W_2^E из X_n , т.е.

$$\begin{cases} a^h(u_n, W_1^E) = f(W_1^E) \\ a^h(u_n, W_2^E) = f(W_2^E) \end{cases} \quad i = \overline{1, \dim X_n} \quad (II)$$

Система (II) линейных алгебраических уравнений $N_n \times N_n$, позволяет найти значения коэффициентов φ_i и v_i разложения (2). Для одного КЭ, подставив в (II) выражение (?) для u_n , получим соотношение в матричной форме

$$\begin{bmatrix} \Phi_1 & B_1 \\ B_1^T & \Phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix},$$

где Φ_1 — подматрица с элементами $a_k^h(\rho_1^E, \rho_2^E)$, Φ_2 — с элементами $a_k^h(\rho_1^E, \rho_1^E)$, B_1 — с элементами $a_k^h(\rho_1^E, \rho_2^E)$, φ и v — подвектора граничных и внутренних степеней свободы, причем v конденсируется путем стандартной процедуры. Вектор правой части F вычисляется как сумма интегралов в соответствии с (9).

Далее, в соответствии со стандартной технологией МКЭ, на основе матриц жесткости и векторов правых частей всех элементов разбиения формируется общая разрешающая система уравнений. При ее решении вычисляются значения граничных степеней свободы, а затем находятся значения внутренних степеней свободы. Полученные описанным способом коэффициенты используются для построения аппроксиманта (?) вектора перемещений. Значения напряжений находятся по известным формулам с использованием частных производных базисных функций. Последние, в случае полиномиального базиса, вычисляются по аналитическим формулам.

Автором, на основании (5) и (6) выведены формулы вычисления граничных степеней свободы для формирования базиса элемента. Подробно рассмотрены выражения для них при порядках граничной аппроксимации $\delta=0, 1, 2$. Вычисление граничных степеней свободы сведено к суммированию с коэффициентами интегралов от мономов по поверхности участка грани. Коэффициенты при интегралах зависят от элементов матрицы перехода A из (4).

Для вычисления элементов матрицы жесткости, как видно из (10) необходимы интегралы от мономов по объему КЭ, которые рассчитываются по формуле Грина. Таким образом, поверхностные интегралы вида $I(v_1, v_2, v_3) = \int_{SK_n} x^{b_1} y^{b_2} z^{b_3} d\gamma$, $0 < b_1, b_2, b_3 < MI$

удобно вычислить заранее, причем максимальный порядок интегрируемых по поверхности мономов MI определится как наибольший из порядков, необходимых для решения указанных выше задач

$$MI = \max (2(K-1) \cdot I , K \cdot \delta)$$

В конце главы рассмотрено вычисление по аналитическим формулам интегралов $I(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ через двойные интегралы по области участков граней с использованием параметрических уравнений участков граней и выражений для N -ой степени суммы трех слагаемых.

Третья глава посвящена исследованию практической эффективности метода внешних конечноэлементных аппроксимаций при решении различных задач теории упругости в трехмерной постановке. В качестве модельных (тестовых) рассмотрены хорошо изученные с помощью других подходов задачи, для которых имеются многочисленные результаты. Исследование сходимости метода при решении данных задач проводилось для различных сочетаний порядков внутренней и граничной аппроксимации, при различных разбиениях расчетной области и разной форме КЭ. Проведена оценка эффективности использования трехмерных элементов с плоскими гранями для расчета как массивных тел, так пластин и стержней, как объектов с прямолинейными границами, так и криволинейных областей.

В задаче об одноосном растяжении параллелепипеда $I/4$ расчетной области разбивалась на четыре шестигранных элемента, порядки внутренней и граничной аппроксимации принимались равными $K=2, 3$ и 4 ; $\delta=0$ и I соответственно. Практически точные (погрешность $< 1\%$) значения возникающих в пластине напряжений ($\sigma_x = q$) получены при всех сочетаниях K и δ . Расчеты проводились для различных значений соотношения толщины и длины стороны параллелепипеда (от $4/5$ до $1/10$). Для оценки влияния нерегулярности разбиения параллелепипеда на получаемые результаты были проведены вычисления для нестандартных вариантов разбиения расчетной области. Рассматривались разбиения, когда межэлементные грани отклонены от вертикального положения на угол от 60° до 30° и разбиение, полученное смещением центрального межэлементного ребра AA вдоль диагонали верхней грани первого КЭ (рис. 1). Во всех случаях расчетные значения перемещений и напряжений не изменились по сравнению с результатами регулярного разбиения. Отметим только, что максимальные межэлементные разрывы, полученные на ре-

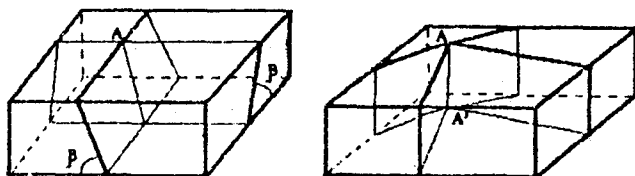


Рис. 1. Варианты нерегулярного разбиения параллелепипеда.

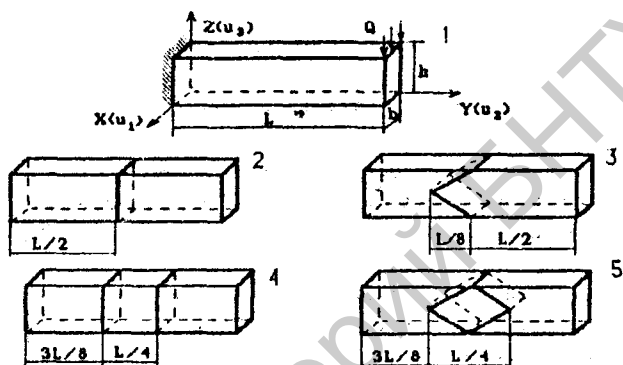


Рис. 2. Варианты разбиения консольного параллелепипеда.

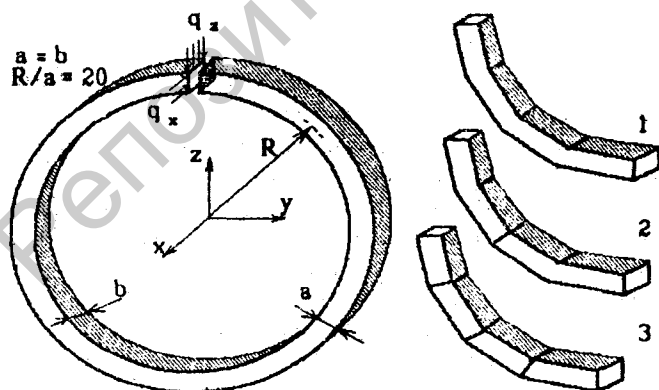


Рис.3. Изгиб кривого вруса.

бре, принадлежащем всем четырем КЭ, не превысили 3.5% от максимального значения соответствующей расчетной величины, что не оказало существенного влияния на результаты.

Затем рассмотрено НДС консольного параллелепипеда при изгибе. Расчеты по МКЭ проводились для пяти вариантов разбиения, представленных на рис. 2 при $\delta=1$ и различных $K = 2, 3, 4$. Величины прогибов W , нормальных σ и касательных τ напряжений сравнивались с теоретическими, полученными с учетом влияния сдвига. Наибольшая разница для W - 25.16% имеет место при $K=2$, то есть, когда перемещения аппроксимировались полиномами второй степени, которые не могут удовлетворительно моделировать изгибное напряженно-деформированное состояние бруса. При увеличении порядка внутренней аппроксимации до $K = 3$ погрешность определения W уменьшается до 1.25 %, для σ получено практически точное значение (погрешность $< 1\%$), для τ погрешность не превысила 5.6% по всем разбиениям. Дальнейший рост порядка внутренней аппроксимации не приводит к изменению результатов, что свидетельствует о быстрой сходимости метода.

Высокая точность определения перемещений обеспечивается для всех вариантов разбиения, в частности, для модели 5, где элементы с невыпуклой областью составляют 2/3 от общего числа КЭ, перемещения и напряжения практически не отличаются от трехэлементной модели 4. Для сравнения в диссертации приведены результаты других авторов, полученные на основе иных конечноэлементных подходов, когда для получения аналогичной точности требовались значительно большие вычислительные затраты при использовании лишь стандартных "кирпичных" КЭ. Например, разрешающая система алгебраических уравнений для разбиения I на рис. 2 включает всего девять уравнений, когда МКЭ с использованием стандартного 20-узлового шестигранного КЭ достигает той же точности по перемещениям при использовании 164 уравнений.

На этом же примере продемонстрирована высокая устойчивость решения по отношению к искажению, когда отношение длины КЭ к величине его поперечного сечения изменяется от 4 до 40. Проведена оценка межэлементных разрывов, величина которых по перемещениям составила от 0.02% до 0.12% по отношению к величине максимального прогиба. Для напряжений разрывы колебались от 0.7% до 13% в зависимости от формы КЭ и порядка граничной аппроксимации. Рас-

смотрена степень выполнения граничных условий, на закрепленном торце максимальные значения перемещений не превысили $1/160$ от перемещений свободного конца.

Для исследования универсальности использования трехмерного КЭ для расчета тонкостенных объектов проведен расчет изгиба параллелепипеда, у которого один размер существенно меньше других, т.е. рассмотрены задачи изгиба пластин в трехмерной постановке.

Для толстой пластины результаты сравнивались с аналитическим решением трехмерной теории толстых пластин. В расчетах, когда $1/4$ пластины разбивалась на 4 одинаковых КЭ, с порядками аппроксимации $K = 3$, $\delta = 1$ (общее число степеней свободы - 36), для $h/a = 5$ погрешность составила 5%.

На основании того же трехмерного элемента МКЭ был проведен расчет изгиба тонкой пластины ($h/a=0.01$). Погрешность результатов, по сравнению с теорией основанной на гипотезе Кирхгофа, как по прогибу, так и по нормальному напряжению не превысили 4.7%. Среди приводимых для сравнения результатов других авторов аналогичные получены только с помощью гибридных элементов изгибаемых пластин, считающихся наилучшими для расчета тонких пластин.

Для изучения возможности использования элементов с плоскими гранями при моделировании криволинейных областей были рассчитаны задачи изгиба кругового консольного бруса и толстой кривой пластины.

В первом случае (рис.3) аппроксимация границы расчетной области строилась путем замены ограничивающих область окружностей правильными вписанными 16-угольниками. На рис. 3 представлены различные варианты разбиения четверти бруса на 1, 2 и 4 КЭ. Задача рассматривалась для двух случаев распределенной по торцу нагрузки (в плоскости бруса и перпендикулярно ей). Погрешность определения перемещений, по сравнению с теорией круговых стержней сопротивления материалов, в обоих случаях практически совпадает. Для четырехэлементного разбиения она составила около 40%, снизившись до 4% при 16 КЭ.

Полученные данные приближаются по точности к современным криволинейным цилиндрическим элементам моментальной схемы метода конечных элементов и превосходят другие прямолинейные элементы. Рассмотренный пример демонстрирует возможность использования обсуждаемого КЭ и для расчета оболочек вращения.

Возможность использования элементов МКЭ нестандартной (для классического МКЭ) формы для аппроксимации криволинейной геометрии и достижения высокой точности результатов при невысоких вычислительных затратах была продемонстрирована и в задаче изгиба толстой кривой пластины (трехмерный аналог задачи Головина). На рис. 4 изображены два варианта разбиения половины пластины на шесть КЭ с различной степенью аппроксимации криволинейной геометрии. При грубой аппроксимации геометрии ошибка определения нормальных напряжений в поперечном сечении составила почти 8% и снизилась до 2.1% при втором варианте разбиения.

Приводимая в работе эпюра напряжений, изменяющихся по гиперболическому закону с наибольшим значением на внутренней поверхности, аналогична полученной на основе аналитического трехмерного решения.

В заключение главы рассмотрены задачи о концентрации напряжений при растяжении тонкой и толстой пластины с отверстием

Подобная задача в МКЭ решается при разбиении, в котором ширина слоя элементов, прилегающих к отверстию, не превышает 1/10 радиуса отверстия. На рис.5 показано используемое для расчета по МКЭ разбиение 1/4 пластины, ширина прилегающего слоя равняется радиусу отверстия, общее количество степеней свободы - 97, ширина ленты матрицы разрешающей системы уравнений - 51. При соотношении толщины пластины к радиусу отверстия $h/2 = 0.1$ получен коэффициент концентрации напряжения $K = 3.056$, что всего на 1.9% выше теоретически рассчитанного коэффициента задачи Кирша для бесконечной области.

В табл. I приведено отношение полученных для толстых пластин коэффициентов $K_{МКЭ}$ к решению трехмерной теории упругости $K_{ТВ}$. Коэффициенты рассматриваются для срединной поверхности пластины при различных соотношениях ее толщины и радиуса отверстия.

Таблица I

h/z	0.1	0.5	1.0	2.0	4.0
$K_{МКЭ} / K_{ТВ}$	1.016	0.987	0.976	0.995	1.015

Как видно из приводимых данных, ошибка определения K несущественна как для тонких, так и для толстых пластин (0.5% - 2.4%).

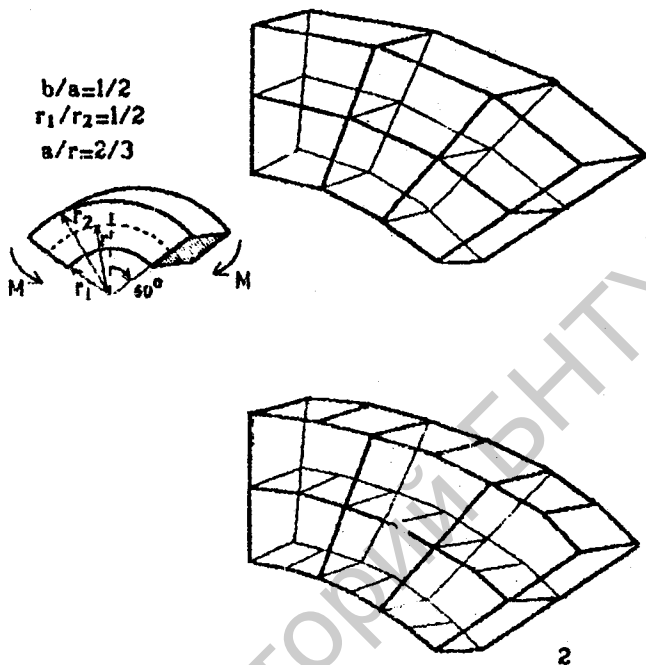


Рис. 4 Варианты аппроксимации геометрии половины толстой криволинейной пластины.

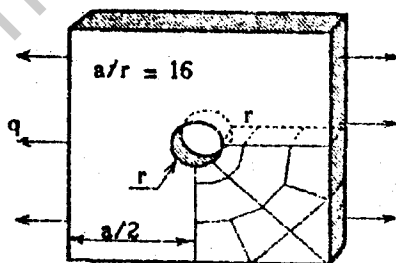


Рис.5 Растяжение пластины с отверстием

В табл.2 приведено значение напряжения σ_z в средних по высоте точках полости.

Таблица 2

h/z	0.1	0.5	1.0	2.0	4.0
σ_z	10^{-3}	10^{-3}	10^{-2}	0.18	0.22

Как видно, с увеличением толщины пластины, напряжение σ_z достигает существенных величин. Поэтому при оценке прочностных характеристик толстых пластин с полостью необходимо использование методов, содержащих все компоненты тензора напряжений.

Сравнение результатов с расчетами на основе различных формулировок МКЭ и метода граничных элементов вновь показывает превосходство предлагаемого метода.

Таким образом, приводимые примеры демонстрируют высокую точность, эффективность и универсальность трехмерных элементов МКЭ с произвольно расположенными плоскими гранями.

Четвертая глава посвящена расчетам элементов трубопровода со сложным поперечным сечением.

Рассмотрен элемент трубопровода, имеющего нестандартное поперечное сечение (рис.6) под внутренним давлением. Первоначально решена задача для стандартного поперечного сечения т.е. был рассмотрен толстостенный цилиндр (задача Ламе). Эта задача имеет аналитическое решение, что позволило оценить погрешность метода при расчете такого класса объектов. Четверть цилиндра разбивалась на 4КЭ (рис.7) с общим числом степеней свободы равным 36. Исследована точность определения максимальных напряжений, возникающих на внешнем контуре, в зависимости от толщины h прилегающего к этой поверхности слоя конечных элементов. Ошибка составила 15% и 9.3% при $h=1.25R_1$ и снизилась до 1% и 4% при $h=0.5R_1$ для σ_t и σ_r соответственно. Среди приводимых для сравнения результатов, полученных с помощью других вариантов МКЭ, только сплайновый элемент моментальной схемы сходимости МКЭ достигает той же точности при небольшом (9КЭ) количестве элементов.

Элемент трубопровода с нестандартным поперечным сечением разбивался при расчетах на 8 КЭ (90 степеней свободы), см.рис.6. Максимальные напряжения возникают на внутренней или на внешней

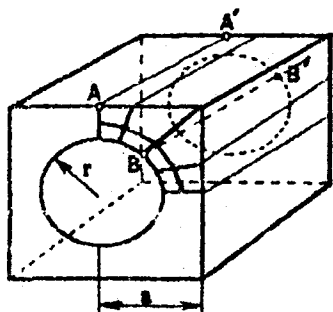


Рис.6 Элемент трубопровода под внутренним давлением

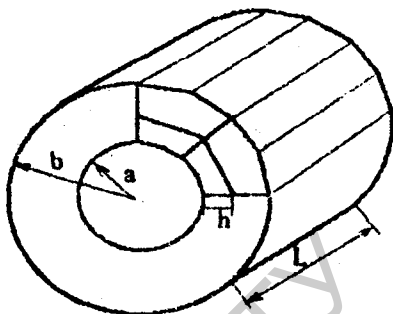


Рис.7 Толстостенный цилиндр под внутренним давлением.

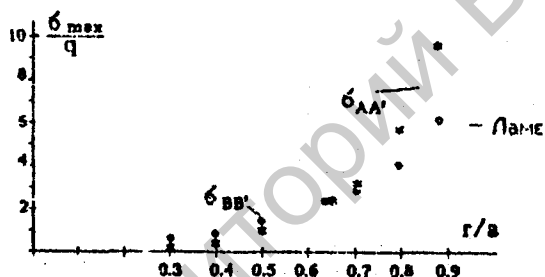


Рис.8 Напряжения на резах AA' и BB'.

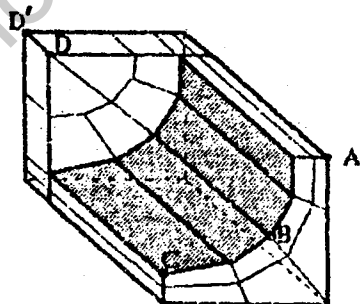


Рис.9 Разбиение 1/4 элемента трубопровода с фидемьчкой

поверхности, в зависимости от ширины перемычки. На рис. 8 представлен график изменения напряжений в точках ребра AA' и BB' при изменении внутреннего радиуса по отношению к полудлине стороны поперечного сечения Z/D . Для тонких перемычек ($Z/D > 0.7$) максимальные напряжения возникают на середине стороны внешнего контура; для толстых перемычек ($Z/D < 0.65$) - на контуре отверстия (по линии проведенной через углы). Эти результаты хорошо согласуются с известными экспериментальными данными.

Две следующие модификации расчетной области представляют собой исследованный выше объект с одной перегородкой и с периодической решеткой перегородок при соотношении $Z/D = 0.8$. Аналогичное для обоих случаев разбиение на 14 КЭ (360 степеней свободы) представлено на рис. 9. Расчеты проводились для различных значений длины L элемента трубопровода. Картина изменения напряжений σ в точках А и В в зависимости от длины элемента трубопровода практически одинаковая для обоих случаев. График зависимости отношения $\sigma/\sigma_{ном}$ ($\sigma_{ном}$ - напряжение в элементе трубопровода без перегородок) от нормированной длины элемента трубопровода L/r представлен на рис. 10. Как и следовало ожидать, при достаточно большой величине L ($L > 6Z$) перегородка практически не оказывает влияние на напряжения в противоположном крайнем поперечном сечении, особенно для точек внешнего контура. В случае одной перегородки, напряжения в точках D и D' (см. рис. 9) противоположны по знаку и превосходят напряжения в точке А почти в три раза, напряжения в центре периодических решеток не превысили 5% от значений в точке А.

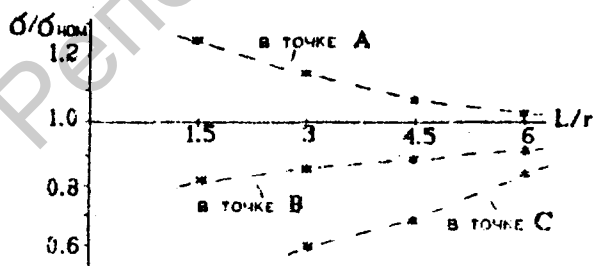


Рис. 10 Напряжения в точках, удаленных от перегородки

В з а к л ю ч е н и и сформулированы основные результаты и выводы диссертации :

1. Для решения трехмерных задач теории упругости предложено использовать метод внешних конечноэлементных аппроксимаций.

2. Разработана методика построения произвольного (выпукло-вогнутого) трехмерного конечного элемента для решения задач теории упругости.

3. Разработан алгоритм и научно-исследовательская программа для ЭЭМ на языке программирования ФОРТРАН, реализующая расчет напряженно-деформированного состояния трехмерного упругого тела по методу внешних конечноэлементных аппроксимаций.

4. Проведена оценка эффективности использования предлагаемого конечного элемента на различных задачах теории упругости, имеющих аналитические и численные решения. Показана быстрая сходимость метода и различные возможности уточнения результатов расчета. В частности:

а) на многочисленных примерах показано, что и в случаях, где успешно используются классические методики построения элементов, новый подход демонстрирует высокую точность расчета как перемещений, так и напряжений при значительно меньших вычислительных затратах;

б) продемонстрирована возможность использования элемента сложной нестандартной формы и элементов, у которых один или два размера сильно отличаются от остальных, что иллюстрирует широкие возможности метода при расчете комбинированных конструкций из толстостенных и тонкостенных элементов;

в) показана возможность эффективного использования многогранного элемента с плоскими гранями при аппроксимации криволинейных областей;

г) показана возможность расчета на базе единого трехмерного элемента МКЭ существенно трехмерных тел, пластин, оболочек, стержней, областей с концентраторами напряжений.

5. Исследованы некоторые конструктивные варианты трубопровода нестандартной формы и получены картины изменения напряжений в зависимости от соотношения их геометрических характеристик.

Основные положения работы изложены в следующих статьях:

1. Дюггва Т.А., Напрасников В.В. Разработка математического

- обеспечения для моделирования сложных корпусных деталей на основе метода внешних конечноэлементных аппроксимаций //Материалы межреспубл. научно-практ. конференции творческой молодежи "Актуальные проблемы информатики: математическое, программное и информационное обеспечение.-Мн., 1992.- С.196.
2. Долгова Т.А. Вычисление элементов матрицы жесткости для трехмерного конечного элемента одного класса //Материалы 47-й научно-технической конференции Белорусского политехнического института: В 3-х ч. - Мн., 1992.-Ч. I.-С. 82.
 3. Долгова Т.А. О новом подходе в конечноэлементном анализе сложных конструкций//Колебания и волны в экологии, технологических процессах и диагностике: Тезисы докладов международной конференции. - Мн., 1992.- С.54.
 4. Долгова Т.А., Апанович В.Н. Использование метода внешних конечноэлементных аппроксимаций для расчетов трехмерного напряженно-деформированного состояния //XIX Гагаринские чтения : Тезисы докладов молодежной научно-технической конференции, апрель 1993: В 3-х ч. - М.: МАТИ, 1993. - Ч.3.- С.70-71.
 5. Апанович В.Н., Долгова Т.А. Практическая сходимость метода внешних конечноэлементных аппроксимаций при решении трехмерных задач теории упругости.- Деп. в ВИНТИ 17.03.93, N 645-В93
 6. Апанович В.Н., Долгова Т.А. Метод внешних конечноэлементных аппроксимаций в задачах теории упругости//Тезисы докладов XXI научно-технической конференции в рамках "Международной недели науки".-Брест, 1994.
 7. Прокопчук (Долгова)Т.А., Напрасников В.В. Программное обеспечение по определению перемещений конструкций в методе конечных элементов при распространенных классах возмущений//XXXI студенческая научно-техническая конференция вузов Прибалтийских республик, Белорусской ССР и Молдавской ССР:Тезисы докладов: общественные науки, электрофизика. - Кишинев, 1987. - с 67.
 8. Долгова Т.А. Применение метода внешних конечноэлементных аппроксимаций для решения трехмерных задач теории упругости//Материалы 50-й научно-технической конференции БГПА: В 2-х ч. Мн., 1994 (в печати).

192

ДОЛГОВА Татьяна Александровна

РАЗРАБОТКА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ВНЕШНИХ АППРОКСИМАЦИЙ
ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

01.02.04 - Механика деформируемого твердого тела

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Корректор М.П. Антонова

Подписано в печать 27.10.94.

Формат 60x84¹/16. Бумага тип. № 2. Офсет. печать.

Усл.печ.л. 1,2. Уч.-изд.л. 1,0. Тир. 70. Зак. 1102.

Белорусская государственная политехническая академия.

Отпечатано на роталпринте БГПА. 220027, Минск, пр. Ф.Скорины, 65