

Белорусский национальный технический университет

УДК 539.3

СТАРОВОЙТОВА
Елена Эдуардовна

**ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТРЕХСЛОЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ
ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ С НЕРЕГУЛЯРНОЙ
ГРАНИЦЕЙ**

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

Минск, 2009

Работа выполнена в УО «Белорусский государственный университет транспорта»

Научный руководитель –

Плескачевский Юрий Михайлович,
член-корреспондент НАН Беларуси, доктор
технических наук, профессор
ГНУ «Институт тепло- и массообмена им.
А. В. Лыкова» НАН Беларуси, главный на-
учный сотрудник

Официальные оппоненты –

Чигарев Анатолий Власович,
доктор физико-математических наук,
профессор
Белорусский национальный технический
университет, зав. кафедрой теоретической
механики

Можаровский Валентин Васильевич,
доктор технических наук, профессор
УО «Гомельский государственный универ-
ситет им. Ф. Скорины», профессор кафедры
вычислительной математики и программ-
рования

Оппонирующая организация –

**УО «Белорусский государственный уни-
верситет» г. Минск.**

Защита состоится 5 февраля 2010 г. в 14-00 на заседании совета по защите диссертаций Д 02.05.07 при Белорусском национальном техническом университете по адресу: 220013, г. Минск, пр. Независимости, 65, корп. 1, ауд. 202. Тел. 292-02-04.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Белорусского национального технического университета.

Автореферат разослан 4 января 2010 г.

Ученый секретарь совета
по защите диссертаций
к. ф.-м. н., доцент

Нифагин Владимир
Александрович

© Старовойтова Е.Э., 2010

ВВЕДЕНИЕ

Тонкостенные конструкции, усиленные ребрами, накладками и вставками или же ослабленные вырезами или перфорацией, относятся к одному из самых распространенных видов комбинированных конструкций, так как они позволяют оптимально распределить материал в сооружениях при удовлетворении условий прочности и жесткости.

В наше время широкое применение в интенсивно развивающихся отраслях строительства и промышленности находят трехслойные элементы конструкций. Они состоят из двух несущих слоев и заполнителя, обеспечивающего их совместную работу. Несущие слои из материалов высокой прочности и жесткости предназначены для восприятия основной части механической нагрузки. Связующие слои обеспечивают перераспределение усилий между несущими слоями. Такое сочетание слоев позволяет обеспечивать надежную работу конструкции в неблагоприятных условиях окружающей среды, создавать конструкции, сочетающие высокую прочность и жесткость с относительно малой массой.

В связи с этим возникают проблемы исследования многообразия проявления их деформационных свойств и создания методов расчета напряженно-деформированного состояния. Зарождение исследований трехслойных элементов конструкций пришлось на конец первой половины XX столетия. Существенный вклад в развитие теории слоистых конструкций внесли А. Я. Александров, С. А. Амбарцумян, В. В. Болотин, В. В. Васильев, И. И. Ворovich, К. З. Галимов, А. Л. Гольденвейзер, А. Г. Горшков, Э. И. Григолюк, Я. М. Григоренко, А. В. Дятлов, В. И. Королев, Л. М. Куршин, С. Г. Лехницкий, Х. М. Муштари, Ю. Н. Новичков, Б. Л. Пелех, Ю. М. Плескачевский, А. П. Прусаков, А. В. Розе, Ю. М. Тарнапольский, Г. А. Тетерс, С. П. Тимошенко, А. П. Чулков, J. K. Ebsioğlu, A. C. Eringen, J. I. Foss, L. M. Nabip, E. J. Plantemma, E. Reissner, Soldatos K. P., J. Solvey, и др..

Поведение трехслойных систем с нерегулярной границей изучено мало, поэтому тема данной диссертационной работы является актуальной.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с крупными научными программами и темами

Работа входила составной частью в следующие программы:

1. Проект Т06Р–114 «Динамическое деформирование упругих тел при контактном взаимодействии», БРФФИ, 01.04.06–31.03.08; № 20066861 от 29.05.2008 г.
2. Проект Ф07М–040 «Упругопластическое деформирование трехслойных стержней на упругом основании с несжимаемым и сжимаемым заполнителями», БРФФИ, 01.04.2007–31.03.2009; № 20072443 от 14.04.2009 г.
3. Государственная комплексная программа научных исследований «Биомеханика» (№ 4195) «Исследование демпфирующей способности волокнисто-пористых материалов в качестве средств индивидуальной защиты от ударных нагрузок», 02.01.2006–31.12.2010; № 20063070 от 16.11.2006 г.

4. Проект Т09К–012 «Ударное деформирование механическими и терморadiационными нагрузками металлокомпозитных элементов конструкций», БРФФИ, 15.04.09–31.03.11; № 20091504 от 10.07.2009 г.

Цель и задачи исследования

Объект исследования: трехслойные стержни прямоугольного сечения с нерегулярной границей.

Предмет исследования: напряженно-деформированное состояние трехслойных стержней прямоугольного сечения с различными нерегулярностями на границе.

Цель работы: создание механико-математической модели деформирования трехслойных физически линейных и нелинейных стержней с нерегулярной границей, разработка методики решения соответствующих краевых задач.

К задачам исследования следует отнести:

- постановку и создание методов решения линейных и нелинейных краевых задач по расчету напряженно-деформированного состояния трехслойных стержней с нерегулярной границей;
- получение точных и итерационных аналитических решений;
- численный параметрический анализ зависимости перемещений, деформаций и напряжений от граничных условий, геометрических и механических характеристик слоев, величины и формы нагрузки, характера нерегулярности границы.

Положения, выносимые на защиту

- механико-математические модели деформирования трехслойных физически линейных и нелинейных стержней с нерегулярной границей, включающие уравнения равновесия, формулировки граничных условий и условий сопряжения для разрешающих функций;
- аналитические решения задач, содержащие формулы для расчета перемещений, напряжений и деформаций в упругих трехслойных стержнях, при непрерывных и локальных поверхностных нагрузках, отличающиеся учетом нерегулярности границы;
- итерационные методы и решения краевых задач для физически нелинейных трехслойных стержней с нерегулярной границей, распространяющие метод упругих решений Ильюшина на исследуемые объекты;
- численные результаты исследования параметров напряженно-деформированного состояния трехслойных стержней с нерегулярной границей в зависимости от физической нелинейности материалов, граничных условий, геометрических и упругих параметров слоев, величины и вида нагрузки, характера нерегулярности границы.

Личный вклад соискателя

Все основные результаты, выносимые на защиту, получены автором лично. Научный руководитель принимал участие в выборе направлений исследова-

дования и анализе полученных результатов. Другим соавторам принадлежат результаты, не вошедшие в работу.

Апробация результатов диссертации

Основные результаты работы докладывались и получили одобрение:

- XIII, XIV Международные симпозиумы «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» (Москва, 2008, 2009);
- X Республиканская научная конференция студентов и аспирантов «Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях» (Гомель, 2007);
- II Международная научно-практическая конференция «Проблемы и перспективы развития транспортных систем и строительного комплекса» (Гомель, 2008);
- X Белорусская математическая конференция (Минск, 2008);
- Международная конференция по математической физике и ее приложениям (Самара, 2008);
- III, IV Белорусские конгрессы по теоретической и прикладной механике (Минск, 2007, 2009);
- Вторая международная конференция «Проблемы нелинейной механики деформируемого твердого тела». (Казань, 2009).

Опубликованность результатов

По теме диссертации опубликовано 14 работ, в том числе 6 статей, соответствующих пункту 18 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь, общим объемом 2,45 а.л.; 8 материалов и тезисов докладов на научных конференциях.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, общей характеристики работы, 4 глав, заключения, библиографического списка. Объем диссертации составляет 121 страниц машинописного текста, включая 26 страниц с 37 иллюстрациями, список использованных источников из 132 наименований на 10 с., список публикаций автора из 12 наименований на 2 с.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Деформирование трехслойных стержней прямоугольного сечения с нерегулярной границей

Рассмотрено три типа упругих трехслойных несимметричных по толщине стержней с нерегулярной границей. Первый из них – ступенчатый с жестким наполнителем (рисунок 1). Система координат x, y, z связывается со срединной плоскостью наполнителя. Для описания кинематики пакета используется гипотеза «ломаной» нормали: в тонких несущих слоях 1, 2 справедливы гипотезы Кирхгофа, в жестком несжимаемом по толщине наполнителе 3 нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается

на некоторый дополнительный угол $\psi(x)$. Между слоями склейка, не допускающая взаимного проскальзывания. Деформации малые. На торцах предполагается наличие жестких диафрагм, препятствующих относительному сдвигу слоев, но не мешающих деформированию из своей плоскости.

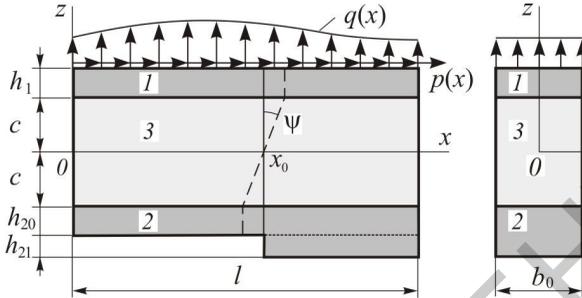


Рисунок 1 – Расчетная схема стержня со ступенчатой границей

На стержень действует распределенная силовая нагрузка $p(x)$, $q(x)$. Через $w(x)$ и $u(x)$ обозначены прогиб и продольное перемещение срединной плоскости заполнителя; h_k – толщина k -го слоя ($k = 1, 2, 3$ – номер слоя), при этом $h_3 = 2c$, $h_2 = h_{20} + h_{21}H_0(x - x_0)$, где $H_0(x)$ – функция Хевисайда.

Введенные геометрические гипотезы позволяют выразить продольные перемещения в слоях $u^{(k)}$ через три искомые функции $u(x)$, $\psi(x)$ и $w(x)$:

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u + c\psi - zw_{,x} \quad (c \leq z \leq c + h_1), \quad u^{(3)} = u + z\psi - zw_{,x} \quad (-c \leq z \leq c), \\ u^{(2)} &= u - c\psi - zw_{,x} \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c), \end{aligned} \quad (1)$$

где запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате; z – координата рассматриваемого волокна.

Компоненты тензора деформаций $\varepsilon_{ij}^{(k)}$ следуют из соотношений Коши, напряжения $\sigma_{ij}^{(k)}$ – из закона Гука. Внутренние силы и моменты вводятся в виде интегралов по высоте h_k каждого из слоев:

$$N^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} dz, \quad M^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} z dz, \quad Q^{(3)} = b_0 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} dz, \quad (2)$$

где $\sigma_x^{(k)}$, $\sigma_{xz}^{(3)}$ – компоненты напряжений, b_0 – ширина поперечного сечения.

Уравнения равновесия трехслойного стержня следуют из принципа возможных перемещений Лагранжа:

$$\delta A = \delta W, \quad (3)$$

где δA , δW – вариации работ внешних сил и внутренних напряжений

$$\begin{aligned} \delta A &= \iint_S (p\delta u + q\delta w) dS = b_0 \int_0^l (p\delta u + q\delta w) dx, \\ \delta W &= \iint_S \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} (\sigma_x^{(k)} \delta \varepsilon_x^{(k)} + 2\sigma_{xz}^{(3)} \delta \varepsilon_{xz}^{(3)} \delta_{k3}) dz dS = b_0 \int_0^l \left[\sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} \delta \varepsilon_x^{(k)} dz + 2 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} \delta \varepsilon_{xz}^{(3)} dz \right] dx. \end{aligned}$$

Подставив выражения (1), (5), (6) в (4) и проведя необходимые преобразования, получим систему дифференциальных уравнений равновесия упругого трехслойного стержня со ступенчато-переменной границей в перемещениях:

$$\begin{aligned} (a_1 + a_{10}H(x-x_0))u_{,xx} + (a_6 + a_{60}H(x-x_0))\psi_{,xx} - (a_7 + a_{70}H(x-x_0))w_{,xxx} &= -p, \\ (a_6 + a_{60}H(x-x_0))u_{,xx} + (a_2 + a_{20}H(x-x_0))\psi_{,xx} - (a_3 + a_{30}H(x-x_0))w_{,xxx} - a_5\psi &= 0, \\ (a_7 + a_{70}H(x-x_0))u_{,xxx} + (a_3 + a_{30}H(x-x_0))\psi_{,xxx} - (a_4 + a_{40}H(x-x_0))w_{,xxxx} &= -q, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= K_1^+ h_1 + K_2^+ h_{20} + 2K_3^+ c, \quad a_{10} = K_2^+ h_{21}, \quad a_2 = c^2 \left[K_1^+ h_1 + K_2^+ h_{20} + \frac{2}{3} K_3^+ c \right], \\ a_{20} &= c^2 K_2^+ h_{21}, \quad a_3 = c \left[K_1^+ h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1 \right) + K_2^+ h_{20} \left(c + \frac{1}{2} h_{20} \right) + \frac{2}{3} K_3^+ c^2 \right], \\ a_{30} &= c K_2^+ h_{21} \left(c + h_{20} + \frac{1}{2} h_{21} \right), \quad a_4 = K_1^+ h_1 \left(c^2 + c h_1 + \frac{1}{3} h_1^2 \right) + K_2^+ h_{20} \left(c^2 + c h_{20} + \frac{1}{3} h_{20}^2 \right) + \frac{2}{3} K_3^+ c^3, \\ a_{40} &= K_2^+ h_{21} \left(c \left(c + 2h_{20} + h_{21} \right) + h_{20} h_{21} + h_{20}^2 + \frac{1}{3} h_{21}^2 \right), \quad a_5 = 2G_3 c, \quad a_6 = c \left[K_1^+ h_1 - K_2^+ h_{20} \right], \\ a_{60} &= -c K_2^+ h_{21}, \quad a_7 = K_1^+ h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1 \right) - K_2^+ h_{20} \left(c + \frac{1}{2} h_{20} \right), \quad a_{70} = -K_2^+ h_{21} \left(c + h_{20} + \frac{1}{2} h_{21} \right). \end{aligned}$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (4) содержит разрывные коэффициенты (за счет функции Хевисайда). Ее решение нужно проводить раздельно во всех областях непрерывности этих коэффициентов.

Рассмотрим систему уравнений (4) в двух областях: I – до точки изменения толщины ($x < x_0$); II – после нее ($x \geq x_0$). В первой из них функция Хевисайда обращается в ноль и $h_2 = h_{20}$. Искомые перемещения в этой области пометим индексом «1» внизу. Система (4) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} a_1 u_{1,xx} + a_6 \psi_{1,xx} - a_7 w_{1,xxx} &= -p, \quad a_6 u_{1,xx} + a_2 \psi_{1,xx} - a_3 w_{1,xxx} - a_5 \psi_1 = 0, \\ a_7 u_{1,xxx} + a_3 \psi_{1,xxx} - a_4 w_{1,xxxx} &= -q. \end{aligned} \quad (5)$$

Общее решение системы дифференциальных уравнений (5) получено в виде:

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= C_{21} \text{sh}(\beta_1 x) + C_{31} \text{ch}(\beta_1 x) + \\ &+ \frac{1}{\beta_1} \left[\text{sh}(\beta_1 x) \int g_1(x) \text{ch}(\beta_1 x) dx - \text{ch}(\beta_1 x) \int g_1(x) \text{sh}(\beta_1 x) dx \right], \\ w_1(x) &= \frac{1}{\alpha_{21}} \left[\alpha_{11} \int \psi_1 dx - a_7 L_3^{-1}(p) + a_1 L_4^{-1}(q) + \frac{a_1 C_{11}}{6} x^3 \right] + \frac{C_{41}}{2} x^2 + C_{51} x + C_{61}, \\ u_1(x) &= \gamma_{31} \psi_1 + \frac{1}{\alpha_{21}} \left[-a_4 L_2^{-1}(p) + a_7 L_3^{-1}(q) + \frac{a_7}{2} C_{11} x^2 \right] + C_{71} x + C_{81}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь C_{11}, \dots, C_{81} – константы интегрирования, через $L_1^{-1}, L_2^{-1}, L_3^{-1}, L_4^{-1}$ обозначены линейные интегральные операторы

$$\begin{aligned} L_1^{-1}(g) &\equiv \int g dx, \quad L_2^{-1}(g) \equiv \iint g dx dx, \quad L_3^{-1}(g) \equiv \iiint g dx dx dx, \\ L_4^{-1}(g) &\equiv \iiiii g dx dx dx dx, \quad g_1(x) = \gamma_{21} p + \gamma_{11} \left(\int_0^x q dx + C_{11} \right), \end{aligned} \quad (7)$$

остальные параметры выражаются через коэффициенты, введенные в (4).

Теперь рассмотрим систему уравнений (4) во второй области, где функция Хевисайда равна единице ($x \geq x_0$) и $h_2 = h_{20} + h_{21}$. Искомые перемещения в этой области пометим индексом «2» внизу. Система (4) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} a_{11}u_{2,xx} + a_{61}\psi_{2,xx} - a_{71}w_{2,xx} &= -p, \\ a_{61}u_{2,xx} + a_{21}\psi_{2,xx} - a_{31}w_{2,xx} - a_5\psi_2 &= 0, \\ a_{71}u_{2,xxx} + a_{31}\psi_{2,xxx} - a_{41}w_{2,xxx} &= -q, \end{aligned} \quad (8)$$

Ее решение:

$$\begin{aligned} \psi_2(x) &= C_{22} \operatorname{sh}(\beta_2 x) + C_{32} \operatorname{ch}(\beta_2 x) + \\ &+ \frac{1}{\beta_2} \left[\operatorname{sh}(\beta_2 x) \int g_2(x) \operatorname{ch}(\beta_2 x) dx - \operatorname{ch}(\beta_2 x) \int g_2(x) \operatorname{sh}(\beta_2 x) dx \right], \\ w_2(x) &= \frac{1}{\alpha_{22}} \left[\alpha_{12} \int \psi_2 dx - a_{71} L_3^{-1}(p) + a_{11} L_4^{-1}(q) + \frac{a_{11} C_{12}}{6} x^3 \right] + \frac{C_{42}}{2} x^2 + C_{52} x + C_{62}, \\ u_2(x) &= \gamma_{32} \psi_2 + \frac{1}{\alpha_{22}} \left[-a_{41} L_2^{-1}(p) + a_{71} L_3^{-1}(q) + \frac{a_{71}}{2} C_{12} x^2 \right] + C_{72} x + C_{82}. \end{aligned} \quad (9)$$

Искомое решение исходной системы (4) можно теперь записать в виде:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \psi_1(x) + (\psi_2(x) - \psi_1(x))H(x - x_0), \\ u(x) &= u_1(x) + (u_2(x) - u_1(x))H(x - x_0), \\ w(x) &= w_1(x) + (w_2(x) - w_1(x))H(x - x_0). \end{aligned} \quad (10)$$

Константы интегрирования C_{11} , C_{81} , C_{12} , C_{82} определяются из 8 граничных условий на торцах стержня и дополнительных 8 условий равенства перемещений и их производных в точке нерегулярности границы $x = x_0$:

$$\begin{aligned} \langle \psi_2(x) - \psi_1(x) \rangle_{x=x_0} &= 0, \quad \langle \psi_{2,x}(x) - \psi_{1,x}(x) \rangle_{x=x_0} = 0, \quad \langle \psi_{2,xx}(x) - \psi_{1,xx}(x) \rangle_{x=x_0} = 0, \\ \langle w_2(x) - w_1(x) \rangle_{x=x_0} &= 0, \quad \langle w_{2,x}(x) - w_{1,x}(x) \rangle_{x=x_0} = 0, \quad \langle w_{2,xx}(x) - w_{1,xx}(x) \rangle_{x=x_0} = 0, \\ \langle u_2(x) - u_1(x) \rangle_{x=x_0} &= 0, \quad \langle u_{2,x}(x) - u_{1,x}(x) \rangle_{x=x_0} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

В случае жесткой заделки левого конца стержня при свободном правом торце граничные условия следующие:

$$x=0: w_1 = w_{1,x} = u_1 = \psi_1 = 0; \quad x=l: \psi_2 = N_2 = M_2 = M_{2,x} = 0. \quad (12)$$

Для шарнирно опертого по обоим торцам граничные условия:

$$x=0, l: u_{(1,2)} = \psi_{(1,2)} = w_{(1,2)} = M_{(1,2)} = 0, \quad (13)$$

где нижний индекс указывает область применения искомого решения.

Если стержень зажат по обоим торцам, то граничные условия:

$$x=0, l: u_{(1,2)} = \psi_{(1,2)} = w_{(1,2)} = w_{x(1,2)} = 0. \quad (14)$$

Подставив решение (10) в условия сопряжения (11) и одни из граничных условий (12)–(14), получим систему из 16 линейных алгебраических уравнений для определения 16 констант интегрирования, C_{11} , C_{81} , C_{12} , C_{82} . В явном виде решение выписано при постоянной распределенной нагрузке.

Численные результаты получены для стержня ($l = 1$ м) с несущими слоями из сплава Д16Т, наполнитель – фторопласт (ПТФЭ). На торцах – жесткая заделка. Модули упругости материалов (Па): $G_1 = G_2 = 0,267 \cdot 10^{11}$, $K_1 = K_2 = 0,8 \cdot 10^{11}$, $G_3 = 90 \cdot 10^6$, $K_3 = 4,700 \cdot 10^6$. Геометрические характеристики и перемещения отнесены к длине стержня, при этом толщины слоев $h_1 = 0,03$, $h_{20} = 0,02$, $h_{21} = 0,01$, $h_3 = 0,18$. Интенсивности нагрузок $p = 0$, $q = -1$ МПа.

На рисунке 2 приведены графики изменения a – прогиба w , b – относительного сдвига ψ_x вдоль оси x в зависимости от длины ступеньки: $1 - x_0 = 1$ (отсутствие ступеньки); $2 - x_0 = 0,75$, $3 - x_0 = 0,5$; $4 - x_0 = 0,25$; $5 - x_0 = 0$. Кривая (5) соответствует случаю распространению ступеньки по всей длине стержня, что приводит к увеличению жесткости и соответственно уменьшению прогиба. Аналогичные графики построены при шарнирном опирании торцов стержня и при консольной заделке.

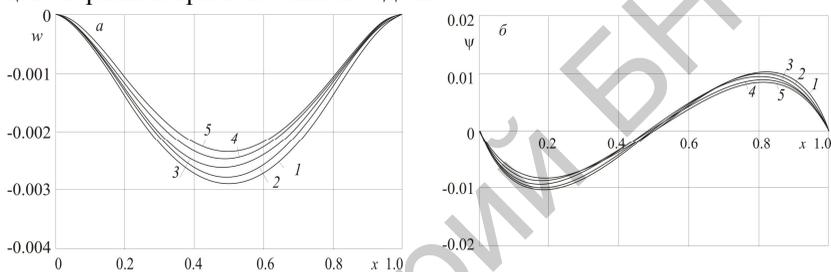


Рисунок 2 – Изменение a – прогиба w , b – относительного сдвига ψ вдоль оси x при различных координатах начала ступеньки x_0

Рисунок 3 показывает изменение нормальных напряжений $\sigma_{xx}^{(k)}$ на поверхностях слоев стержня при координате точки нерегулярности $x_0 = 0,25$: $1 - z = h_2 - c$; $2 - z = -c$ (слой 1); $3 - z = -c$ (заполнитель); $4 - z = c$ (заполнитель); $4 - z = c$ (слой 2); $4 - z = c + h_2$. Слои стержня деформируются практически однотипно: т. е. в тех областях, где верхняя поверхность слоя растянута, нижняя сжата, и наоборот. В правом торце стержня напряжения на внешних поверхностях несущих слоев одинаковы по модулю. На левом торце нижний несущий слой тоньше, и напряжения в нем больше на 23%.

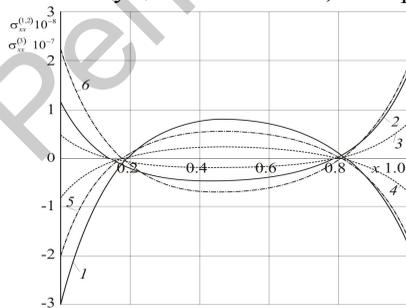


Рисунок 3 – Распределение нормальных напряжений на поверхностях слоев вдоль оси стержня x при $x_0 = 0,5$

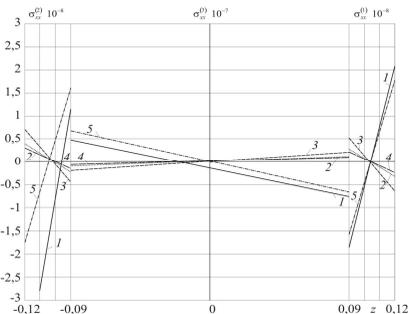


Рисунок 4 – Распределение нормальных напряжений в поперечных сечениях стержня x , вдоль оси z при $x_0 = 0,25$

Рисунок 4 показывает нормальные напряжения $\sigma_{xx}^{(k)}$ в поперечных сечениях с координатой x_s : 1 - $x_s = 0$; 2 - $x_s = 0,25$; 3 - $x_s = 0,5$; 4 - $x_s = 0,75$; 5 - $x_s = 1$. Напряжения внутри слоев изменяются линейно, меняя знак примерно по средней линии слоя, смещение происходит за счет наличия ступеньки.

Далее рассмотрены *нерегулярности типа накладки* шириной $\Delta l = x_1 - x_0$ (рисунок 5), тогда $h_2 = h_{20} + h_{21}[H_0(x_1 - x) - H_0(x_0 - x)]$; и *составного стержня* (рисунок 6) с $h_1 = h_{10} + h_{11}H_0(x - x_0)$, $h_2 = h_{20} + h_{21}H_0(x - x_0)$, несущие слои из составных частей которого могут быть выполнены из различных материалов.

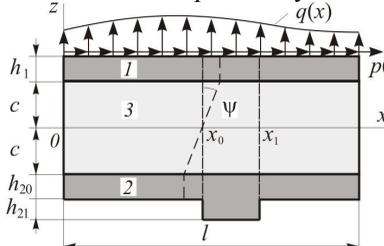


Рисунок 5 – Стержень с накладкой

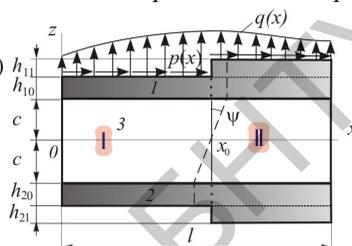


Рисунок 6 – Составной стержень

Для этих случаев приведены постановки и выписаны аналитические решения краевых задач, проведен их численный параметрический анализ.

Рисунок 7 иллюстрирует изменение перемещений вдоль оси x в зависимости от ширины накладки $\Delta l = x_1 - x_0$, расположенной симметрично относительно середины стержня: 1 - $\Delta l = 0,05$; 2 - $\Delta l = 0,1$; 3 - $\Delta l = 0,25$; 4 - $\Delta l = 0,5$; 5 - $\Delta l = 0,75$. Увеличение ширины накладки существенно влияет на прогиб, относительный сдвиг изменяется в малой степени.

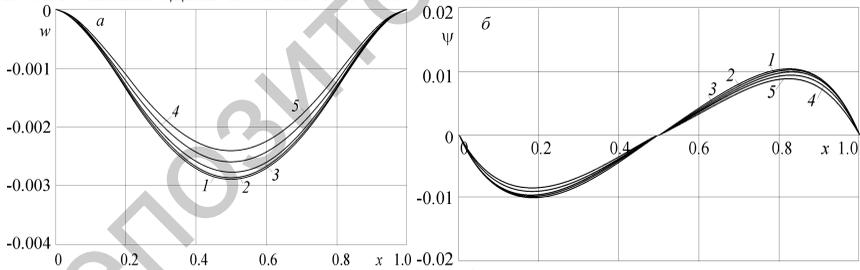


Рисунок 7 – Изменение a – прогиба w , b – относительного сдвига ψ вдоль оси x при различной ширине накладки Δl

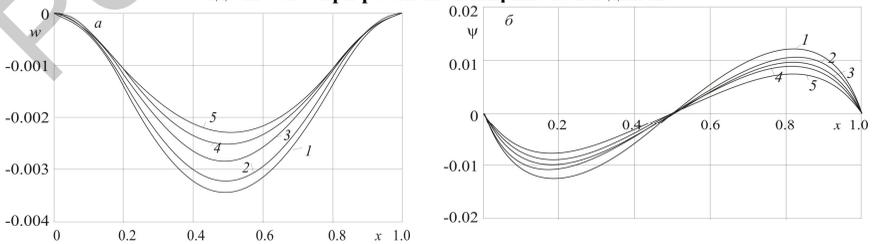


Рисунок 8 – Изменение a – прогиба w , b – относительного сдвига ψ вдоль оси x при различных координатах x_0 места сопряжения составных частей стержня

На рисунке 8 показано изменение перемещений вдоль оси стержня при различных координатах x_0 мест сопряжения составных частей стержня: $1 - x_0 = 1$; $2 - x_0 = 0,75$, $3 - x_0 = 0,5$; $4 - x_0 = 0,25$; $5 - x_0 = 0$. Появление составной части меньшего поперечного сечения приводит к уменьшению жесткости стержня, увеличению его прогиба и относительного сдвига.

Изгиб трехслойных стержней с нерегулярной границей под действием локальных нагрузок

Рассмотрим деформирование стержня с нерегулярной границей равномерно распределенной нагрузкой в интервале $[b, a]$. Для этого нагрузки $q(x)$, $p(x)$ представим в виде:

$$q(x) = q_0 (H_0(a-x) - H_0(b-x)), \quad p(x) = p_0 (H_0(a-x) - H_0(b-x)), \quad (15)$$

где q_0 , p_0 – постоянные величины, $H_0(x)$ – функция Хевисайда.

Пусть локальная нагрузка сосредоточена в области I ($a < x_0$, рисунок 9). В этом случае системы уравнений равновесия (5) и (8) принимают следующий вид:

- в области I

$$\begin{aligned} a_{11}u_{1,xx} + a_{61}\psi_{1,xx} - a_7w_{1,xxx} &= -p_0(H_0(a-x) - H_0(b-x)), \\ a_6u_{1,xx} + a_2\psi_{1,xx} - a_3w_{1,xxx} - a_5\psi_1 &= 0, \\ a_7u_{1,xxx} + a_3\psi_{1,xxx} - a_4w_{1,xxxx} &= -q_0(H_0(a-x) - H_0(b-x)). \end{aligned} \quad (16)$$

- в области II

$$\begin{aligned} a_{11}u_{2,xx} + a_{61}\psi_{2,xx} - a_7w_{2,xxx} &= 0, \\ a_{61}u_{2,xx} + a_{21}\psi_{2,xx} - a_{31}w_{2,xxx} - a_5\psi_2 &= 0, \\ a_{71}u_{2,xxx} + a_{31}\psi_{2,xxx} - a_{41}w_{2,xxxx} &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

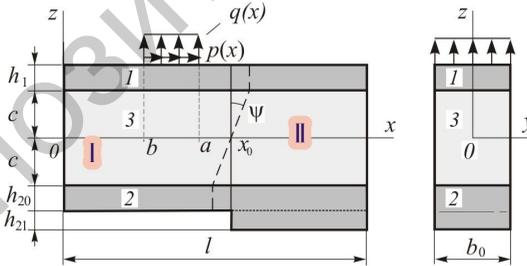


Рисунок 9 – Расчетная схема при действии локальной нагрузки в области I

При построении решения этой краевой задачи воспользуемся решениями (6) и (9). В результате получаем решение системы уравнений (16) в области I:

$$\begin{aligned} \psi_1(x) = & C_{21}\text{sh}(\beta_1 x) + C_{31}\text{ch}(\beta_1 x) + \frac{1}{\beta_1^2} [\gamma_{21} p_0 ((\text{ch}(\beta_1 x - a\beta_1) - 1)H_0(a-x) - \\ & - (\text{ch}(\beta_1 x - b\beta_1) - 1)H_0(b-x)) - \frac{\gamma_{11} q_0}{\beta_1} ((\beta_1 x - \beta_1 a - \text{sh}(\beta_1 x - \beta_1 a))H_0(a-x) - \\ & - (\beta_1 x - \beta_1 b - \text{sh}(\beta_1 x - \beta_1 b))H_0(b-x)) - \gamma_{11} C_{11}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_1(x) &= \gamma_{31} \psi_1(x) + \frac{1}{\alpha_{21}} (-a_4 p_0 (H_2(a-x) - H_2(b-x)) - \\
 &\quad - a_7 q_0 (H_3(a-x) - H_3(b-x)) + \frac{a_7 C_{11}}{2} x^2) + C_{71} x + C_{81}, \\
 w_1(x) &= \frac{1}{\alpha_{21}} \left[\alpha_{11} \int \psi_1(x) dx + a_7 p_0 (H_3(a-x) - H_3(b-x)) + a_1 q_0 (H_4(a-x) - \right. \\
 &\quad \left. - H_4(b-x)) + \frac{a_1 C_{11}}{6} x^3 \right] + \frac{C_{41}}{2} x^2 + C_{51} x + C_{61}, \quad (18)
 \end{aligned}$$

Во второй области решение системы (17) будет

$$\begin{aligned}
 \psi_2(x) &= C_{22} \operatorname{sh}(\beta_2 x) + C_{32} \operatorname{ch}(\beta_2 x) - \frac{\gamma_{12} C_{12}}{\beta_2^2}, \quad u_2(x) = \gamma_{32} \psi_2(x) + \frac{a_{71} C_{12}}{2 \alpha_{22}} x^2 + C_{72} x + C_{82}, \\
 w_2(x) &= \frac{1}{\alpha_{22}} \left[\alpha_{12} \int \psi_2(x) dx + \frac{a_{11} C_{12}}{6} x^3 \right] + \frac{C_{42}}{2} x^2 + C_{52} x + C_{62}, \quad (19)
 \end{aligned}$$

Аналогично строятся решения, если нагрузка сосредоточена в области II, или когда пятно нагрузки содержит точку нерегулярности границы x_0 .

Численные результаты по изгибу трехслойного стержня с нерегулярной границей локальными нагрузками получены при тех же условиях, что и ранее. Стержень Д16Т–фторопласт–Д16Т; перемещения и геометрические характеристики слоев отнесены к длине стержня $l = 1$ м, при этом: $c = 0,09$, $h_1 = 0,03$, $h_{20} = 0,02$, $h_{21} = 0,01$, $x_0 = 0,5$; на торцах – заделка, интенсивности нагрузки $q = -1$ МПа ($p = 0$), если другое не указано.

На рисунке 10 показано изменение прогиба a и сдвига в заполнителе b вдоль оси стержня при различных длинах и месте расположения пятна нагрузки: 1 – $\Delta l = 0,25$ ($b = 0$); 2 – $\Delta l = 0,5$ ($b = 0$); 3 – $\Delta l = 0,75$ ($b = 0$); 4 – $\Delta l = 1$ ($b = 0$); 5 – $\Delta l = 0,5$ ($b = 0,5$). В зависимости от места расположения нагрузки при вычислении перемещений использовались те или иные ранее полученные формулы. При увеличении длины пятна нагрузки максимумы перемещений сдвигаются к середине стержня. Рост их максимальных значений происходит нелинейно, при линейном увеличении длины участка под нагрузкой.

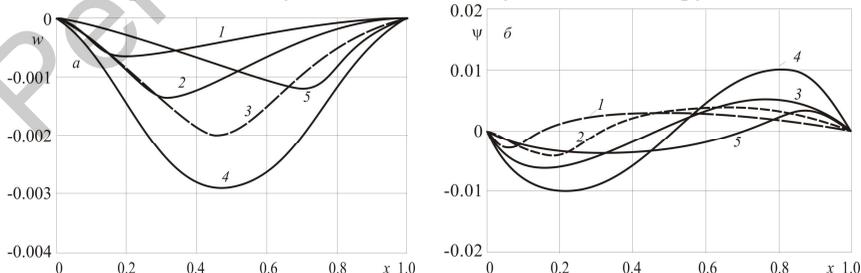


Рисунок 10 – Изменение a – прогиба w , b – относительного сдвига ψ вдоль оси x при различных длинах пятна нагрузки $\Delta l = a - b$

Рассмотрим деформирование стержня с нерегулярной границей *сосредоточенными силами* (распределенными по ширине сечения, рисунок 11).

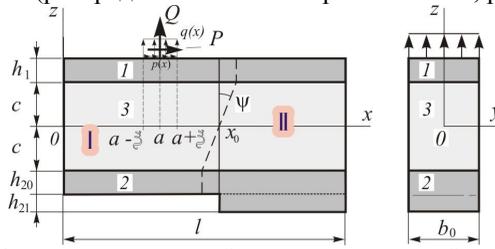


Рисунок 11 – Расчетная схема при действии сосредоточенной силы в области I

Для решения задачи воспользуемся результатами, полученными для локальных погонных нагрузок, действующих по малой длине стержня. Проведя предельный переход, получим решение задачи о деформировании упругого трехслойного стержня сосредоточенной силой (с составляющими Q и P), приложенной в области I в сечении $x = a$:

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= C_{21} \operatorname{sh}(\beta_1 x) + C_{31} \operatorname{ch}(\beta_1 x) + \frac{1}{\beta_1^2} [\gamma_{21} P \beta_1 \operatorname{sh}((\beta_1 a - \beta_1 x) H_0(a-x) + \\ &\quad + \gamma_{11} Q (1 - \operatorname{ch}(\beta_1 x - \beta_1 a)) H_0(a-x) - \gamma_{11} C_{11}], \\ w_1(x) &= \frac{1}{\alpha_{21}} (\alpha_{11} \int \psi_1 dx - a_7 P H_2(a-x) - a_1 Q H_3(a-x) + \frac{a_1 C_{11}}{6} x^3) + \frac{C_{41}}{2} x^2 + C_{51} x + C_{61}, \\ u_1(x) &= \gamma_{31} \psi_1(x) + \frac{1}{\alpha_{21}} [-a_4 P H_1(a-x) - a_7 Q H_2(a-x) + \frac{a_7 C_{11}}{2} x^2] + C_{71} x + C_{81}. \\ \psi_2(x) &= C_{22} \operatorname{sh}(\beta_2 x) + C_{32} \operatorname{ch}(\beta_2 x) - \frac{\gamma_{12} C_{12}}{\beta_2^2}, \quad u_2(x) = \gamma_{32} \psi_2(x) + \frac{a_{71} C_{12}}{2 \alpha_{22}} x^2 + C_{72} x + C_{82}, \\ w_2(x) &= \frac{1}{\alpha_{22}} \left[\alpha_{12} \int \psi_2(x) dx + \frac{a_{11} C_{12}}{6} x^3 \right] + \frac{C_{42}}{2} x^2 + C_{52} x + C_{62}. \end{aligned} \quad (20)$$

Если сила приложена в области II, то решение строится аналогично.

Численные результаты по изгибу рассматриваемого стержня сосредоточенной силой получены при $Q = -0,625$ МН/м ($P = 0$). На рисунке 12 показано изменение прогиба a и сдвига в заполнителе b вдоль оси стержня при силе, действующей в сечениях: $1 - a = 0,25$; $2 - a = 0,5$; $3 - a = 0,75$.

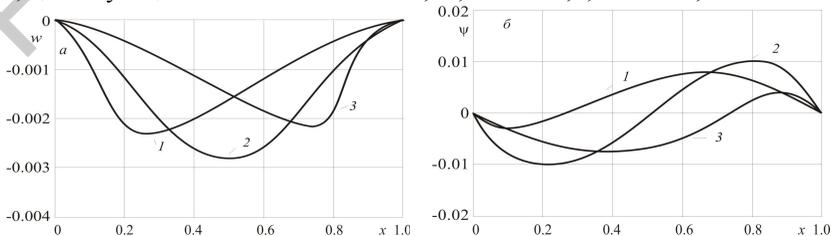


Рисунок 12 – Изменение a – прогиба w , b – относительного сдвига ψ вдоль оси x при различных местах приложения сосредоточенной силы

При изгибе стержня с нерегулярной границей сосредоточенными *моментами* (распределенными по ширине сечения), воспользуемся решениями, полученными для сосредоточенных сил. Нагрузку представим как сумму двух сосредоточенных сил, равных по величине, противоположно направленных и расположенных на малом расстоянии друг от друга (рисунок 13).

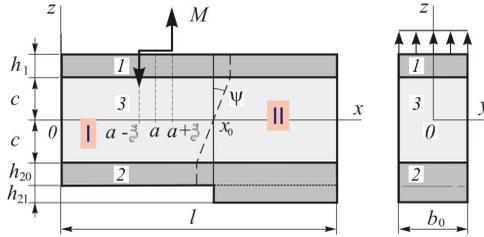


Рисунок 13 – Расчетная схема при действии сосредоточенного момента в области I

Пусть сосредоточенный момент приложен в области I. ($a < x_0$). Предельным переходом получим решение:

$$\psi_1(x) = C_{21} \operatorname{sh}(\beta_1 x) + C_{31} \operatorname{ch}(\beta_1 x) + \frac{1}{\beta_1^2} [\gamma_{11} M \beta_1 \operatorname{sh}(\beta_1 a - \beta_1 x) H_0(a-x) - \gamma_{11} C_{11}],$$

$$u_1(x) = \gamma_{31} \psi_1 + \frac{1}{\alpha_{21}} \left(\frac{a_7 C_{11}}{2} x^2 - a_7 M H_1(a-x) \right) + C_{71} x + C_{81},$$

$$w_1(x) = \frac{1}{\alpha_{21}} \left[\alpha_{11} \int \psi_1 dx + a_1 M H_2(a-x) + \frac{a_1 C_{11}}{6} x^3 \right] + \frac{1}{2} C_{41} x^2 + C_{51} x + C_{61}. \quad (21)$$

Перемещения во второй области определяются соотношениями (19).

Аналогично строится решение, если момент приложен в области II.

Численные результаты по изгибу рассматриваемого стержня получены при $M = 0,35$ МН. На рисунке 14 показано изменение прогиба $-a$ и сдвига в заполнителе $-b$ вдоль оси стержня при сосредоточенном моменте, действующем в различных сечениях: $1 - a = 0,25$; $2 - a = 0,5$; $3 - a = 0,75$. При переносе сосредоточенного момента из среднего сечения прогибы убывают по величине в более короткой области стержня и увеличиваются в большей области. Максимум достигается, если момент приложен в области I.

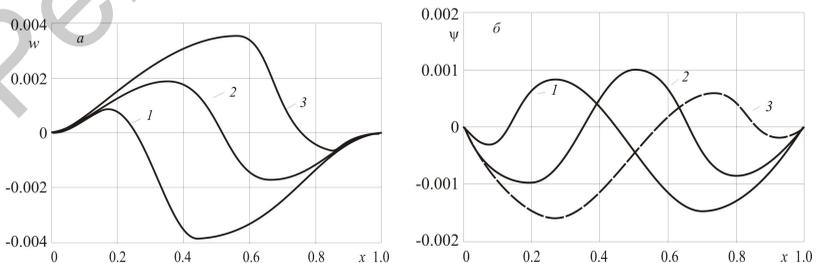


Рисунок 14 – Изменение a – прогиба w , b – относительного сдвига ψ вдоль оси x в зависимости от места приложения $x = a$ сосредоточенного момента

Деформирование физически нелинейных трехслойных стержней прямоугольного сечения со ступенчато-переменной границей

Рассматривается несимметричный по толщине трехслойный стержень с нерегулярной границей (рисунок 1), наружные несущие слои которого выполнены из упругопластического материала, а несжимаемый по толщине заполнитель – нелинейно упругий.

В слоях стержня используются физические уравнения состояния, соответствующие теории малых упругопластических деформаций Ильюшина:

$$s_{ij}^{(k)} = 2G_k(1 - \omega_k(\varepsilon_u^{(k)}))\varepsilon_{ij}^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k\varepsilon^{(k)} \quad (k = 1, 2, 3; i, j = x, y, z), \quad (22)$$

где $s_{ij}^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$ – девиаторная и шаровая части тензора напряжений; G_k , K_k – модули сдвиговой и объемной деформации k -го слоя; $\omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)})$ – при $k = 1, 2$ это функции пластичности Ильюшина, которые в случае $\varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_y^{(k)}$ следует положить равными нулю; $\varepsilon_u^{(k)}$ – интенсивность деформаций в k -м слое, $\varepsilon_y^{(k)}$ – предел текучести материалов несущих слоев; $\omega^{(3)}(\varepsilon_u^{(3)})$ – универсальная функция физической нелинейности заполнителя, причем $\omega^{(3)} \equiv 0$ при $\varepsilon_u^{(3)} \leq \varepsilon_s^{(3)}$; $\varepsilon_s^{(3)}$ – предел физической нелинейности материала заполнителя; $\varepsilon_{ij}^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ – девиаторная и шаровая части тензора деформаций.

Для решения краевой задачи для прямоугольных трехслойных упругопластических пластин используется итерационный подход, основанный на методе упругих решений Ильюшина. Предположим, что $\omega^{(k)} < 1$. Тогда для любого n -го приближения получаем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} (a_1 + a_{10}H(x-x_0))u_{,xx}^{(n)} + (a_6 + a_{60}H(x-x_0))\psi_{,xx}^{(n)} - (a_7 + a_{70}H(x-x_0))w_{,xxx}^{(n)} &= -p + p_{\omega}^{(n-1)}, \\ (a_6 + a_{60}H(x-x_0))u_{,xx}^{(n)} + (a_2 + a_{20}H(x-x_0))\psi_{,xx}^{(n)} - (a_3 + a_{30}H(x-x_0))w_{,xxx}^{(n)} - a_5\psi &= h_{\omega}^{(n-1)}, \\ (a_7 + a_{70}H(x-x_0))u_{,xxx}^{(n)} + (a_3 + a_{30}H(x-x_0))\psi_{,xxx}^{(n)} - (a_4 + a_{40}H(x-x_0))w_{,xxxx}^{(n)} &= q + q_{\omega}^{(n-1)}. \end{aligned} \quad (23)$$

Величины с индексом $(n-1)$, соответствуют нелинейным составляющим в (22), они носят название дополнительных «внешних» нагрузок и на первом шаге ($n = 1$) принимаются равными нулю, а в дальнейшем вычисляются по результатам предыдущего приближения:

$$p_{\omega}^{(n-1)} = \frac{1}{b_0} N_{,x}^{\omega(n-1)}, \quad h_{\omega}^{(n-1)} = \frac{1}{b_0} (H_{,x}^{\omega(n-1)} - Q^{\omega(n-1)}), \quad q_{\omega}^{(n-1)} = \frac{1}{b_0} M_{,xxx}^{\omega(n-1)},$$

$$N^{\omega(n-1)} = \sum_{k=1}^3 N^{(k)(n-1)} = \frac{4}{3} b_0 \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} G_k \omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)(n-1)}) \varepsilon_x^{(k)(n-1)} dz,$$

$$H^{\omega(n-1)} = c(N^{(1)\omega(n-1)} - N^{(2)\omega(n-1)}) + M^{(3)\omega(n-1)}, \quad Q^{\omega(n-1)} = 2b_0 \int_{-c}^c G_3 \omega^{(3)}(\varepsilon_u^{(3)(n-1)}) \psi^{(n-1)} dz,$$

$$M^{\omega(n-1)} = \sum_{k=1}^3 M^{(k)(n-1)} = \frac{4}{3} b_0 \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} G_k \omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)(n-1)}) \varepsilon_x^{(k)(n-1)} z dz.$$

Процедура получения решения системы уравнений (23) не отличается от примененной ранее для соответствующей задачи теории упругости.

В результате искомое решение выписываем в рекуррентном виде:

$$\begin{aligned}\psi^{(n)}(x) &= \psi_1^{(n)}(x) + (\psi_2^{(n)}(x) - \psi_1^{(n)}(x))H(x - x_0), \\ u^{(n)}(x) &= u_1^{(n)}(x) + (u_2^{(n)}(x) - u_1^{(n)}(x))H(x - x_0), \\ w^{(n)}(x) &= w_1^{(n)}(x) + (w_2^{(n)}(x) - w_1^{(n)}(x))H(x - x_0).\end{aligned}$$

Здесь перемещения с нижним индексом 1 – решения в области I:

$$\begin{aligned}\psi_1^{(n)}(x) &= C_{21}^{(n)} \operatorname{sh}(\beta_1 x) + C_{31}^{(n)} \operatorname{ch}(\beta_1 x) + \\ &+ \frac{1}{\beta_1} \left[\operatorname{sh}(\beta_1 x) \int g_1^{(n)}(x) \operatorname{ch}(\beta_1 x) dx - \operatorname{ch}(\beta_1 x) \int g_1^{(n)}(x) \operatorname{sh}(\beta_1 x) dx \right], \\ u_1^{(n)}(x) &= \gamma_{31} \psi_1^{(n)} + \frac{1}{\alpha_{21}} \left[-a_4 L_2^{-1}(p - p_\omega^{(n-1)}) + a_7 L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) + \frac{a_7}{2} C_{11}^{(n)} x^2 \right] + C_{71}^{(n)} x + C_{81}^{(n)}, \\ w_1^{(n)}(x) &= \frac{1}{\alpha_{21}} \left[\alpha_{11} \int \psi_1^{(n)} dx - a_7 L_3^{-1}(p - p_\omega^{(n-1)}) + a_{11} L_4^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) + \frac{a_{11} C_{11}^{(n)}}{6} x^3 \right] + \\ &+ \frac{C_{41}^{(n)}}{2} x^2 + C_{51}^{(n)} x + C_{61}^{(n)}, \\ g_1^{(n)}(x) &= \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}} \gamma_{11} h_\omega^{(n-1)} + \gamma_{21} (p - p_\omega^{(n-1)}) + \gamma_{11} \left(\int (q - q_\omega^{(n-1)}) dx + C_{11}^{(n)} \right).\end{aligned}$$

Перемещения с индексом 2 – решение во второй области – следующее:

$$\begin{aligned}\psi_2^{(n)}(x) &= C_{22}^{(n)} \operatorname{sh}(\beta_2 x) + C_{32}^{(n)} \operatorname{ch}(\beta_2 x) + \\ &+ \frac{1}{\beta_2} \left[\operatorname{sh}(\beta_2 x) \int g_2^{(n)}(x) \operatorname{ch}(\beta_2 x) dx - \operatorname{ch}(\beta_2 x) \int g_2^{(n)}(x) \operatorname{sh}(\beta_2 x) dx \right], \\ u_2^{(n)}(x) &= \gamma_{32} \psi_2^{(n)} + \frac{1}{\alpha_{22}} \left[-a_{41} L_2^{-1}(p - p_\omega^{(n-1)}) + a_{71} L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) + \frac{a_{71}}{2} C_{12}^{(n)} x^2 \right] + C_{72}^{(n)} x + C_{82}^{(n)}, \\ w_2^{(n)}(x) &= \frac{1}{\alpha_{22}} \left[\alpha_{12} \int \psi_2^{(n)} dx - a_{71} L_3^{-1}(p - p_\omega^{(n-1)}) + a_{11} L_4^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) + \frac{a_{11} C_{12}^{(n)}}{6} x^3 \right] + \\ &+ \frac{C_{42}^{(n)}}{2} x^2 + C_{52}^{(n)} x + C_{62}^{(n)}, \\ g_2^{(n)}(x) &= \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{12}} \gamma_{12} h_\omega^{(n-1)} + \gamma_{22} (p - p_\omega^{(n-1)}) + \gamma_{12} \left(\int (q - q_\omega^{(n-1)}) dx + C_{12}^{(n)} \right).\end{aligned} \tag{4.20}$$

Константы интегрирования $C_{11}^{(n)}, \dots, C_{81}^{(n)}, C_{12}^{(n)}, \dots, C_{82}^{(n)}$ следуют из 8 условий закрепления стержня по торцам и дополнительных 8 требований по сопряжении решений в точке нерегулярности.

Для обеспечения *сходимости* метода последовательных приближений установлено выполнение достаточного условия Ильюшина.

В дальнейших числовых расчетах функции пластичности и физической нелинейности $\omega(\varepsilon_n)$ принимались в следующем виде:

$$\omega(\varepsilon_u) = \begin{cases} 0, & \varepsilon_u \leq \varepsilon_y; \\ A(1 - \varepsilon_y / \varepsilon_u)^\alpha, & \varepsilon_u > \varepsilon_y. \end{cases} \quad (4.26)$$

Входящие сюда константы для сплава Д16Т – $A = 0,96$, $\alpha = 2,34$, $\varepsilon_y = 0,735\%$; для фторопласта – $A = 0,905$, $\alpha = 1,48$, $\varepsilon_s = 3,3\%$.

Все численные результаты получены для металлополимерного стержня ($l = 1$ м) с материалами слоев Д16Т–фторопласт–Д16Т. Перемещения и геометрические характеристики отнесены к длине стержня: $c = 0,09$, $h_1 = h_2 = 0,03$, $h_{20} = 0,02$, $h_{21} = 0,01$, $x_0 = 0,5$. Интенсивности нагрузок $p = 0$, $q = -10$ МПа.

Рисунок 15 иллюстрирует практическую сходимость метода на примере a – прогиба w , b – относительного сдвига ψ (номер кривой соответствует номеру итерации). За решение принято 6-е приближение, которое отличается от предыдущего менее чем на 1%. Упругопластические и упругие прогибы и сдвиги отличаются примерно на 23% и 25% соответственно.

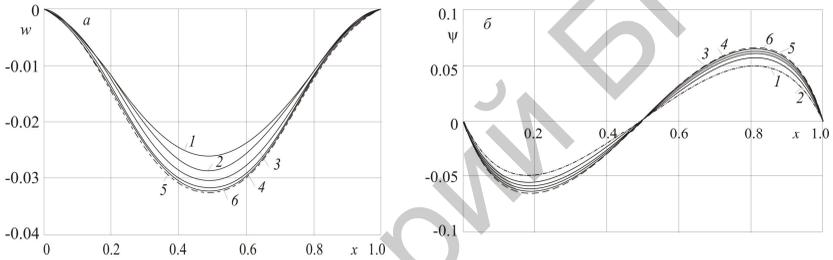


Рисунок 15 – Сходимость метода последовательных приближений (жесткая заделка)

Соответствующие области нелинейности в продольном сечении стержня показаны на рисунке 16. Рисунок 17 иллюстрирует распределение нормальных напряжений на левом торце стержня: 1 – упругая пластина; 2 – упругопластическая. При выходе на нелинейность материалов слоев растут перемещения и напряжения.

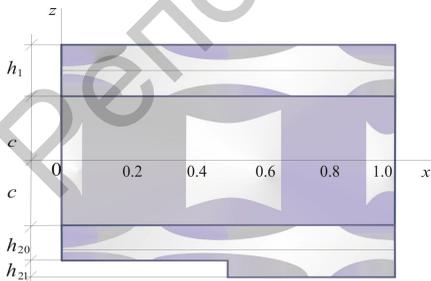


Рисунок 16 – Распределение областей физической нелинейности (темная заливка) в слоях стержня

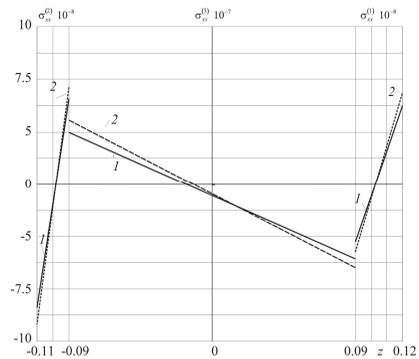


Рисунок 17 – Изменение нормальных напряжений на левом торце стержня

Для трехслойных стержней с другим типом нерегулярности границы построение решения проводится по предложенной в этой главе методике.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации. В работе приведены новые теоретические результаты, включающие:

- механико-математические модели деформирования трехслойных физически линейных и нелинейных стержней с нерегулярной границей (ступенчатой, с накладками, составные стержни), включающие уравнения равновесия, формулировки граничных условий и условий сопряжения для разрешающих функций [1–6];
- аналитические решения задач, содержащие расчетные формулы для перемещений, напряжений и деформаций в упругих трехслойных стержнях с нерегулярной границей при локальных поверхностных нагрузках, отличающиеся учетом нерегулярности границы [3, 4];
- итерационные методы и решения краевых задач для физически нелинейных трехслойных стержней с нерегулярной границей, распространяющие метод упругих решений Ильюшина на рассматриваемые объекты, позволившие алгоритмизировать процесс исследования параметров напряженно-деформированного состояния [5, 6];
- численные результаты исследования параметров напряженно-деформированного состояния трехслойных стержней в зависимости от физической нелинейности материалов, граничных условий, геометрических и упругих параметров слоев, величины и вида нагрузки, типа нерегулярности границы [3–14].

Рекомендации по практическому использованию результатов. Полученные результаты позволяют численно моделировать перемещения, деформации и напряжения в упругих и неупругих трехслойных стержнях с нерегулярной границей, давать практические рекомендации при проектировании комбинированных конструкций, что приводит к существенному снижению материальных затрат, необходимых для проведения экспериментальных исследований. Они могут быть использованы в расчетной практике проектных организаций строительного и машиностроительного профиля.

В настоящее время результаты исследований внедрены в учебный процесс БелГУТа, использованы в расчетной практике БелНИИЖТа, ОАО «Гомельский Техноприбор», ЧУП «Монолитсервисстрой», УП «Гомельское агентство по строительству и инвестициям» при Национальном Олимпийском комитете РБ, ИММС НАН Беларуси. Они применялись для расчета прямоугольных вставок для усиления покрытия промышленного здания; оптимизации толщины оконного металлополимерного профиля, с их помощью исследовано деформирование структурных элементов теплообменника, камер горения и дожига, проведен расчет трехслойных стержневых вставок для индивидуальных средств защиты. Все внедрения подтверждены соответствующими актами.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

Статьи в научных журналах

1. *Starovoitov, E.I.* Deformation of elastoplastic three-layer beam on elastic foundation / *E.I. Starovoitov, D.V. Tarlakovskiy, E.E. Starovoitova* // *Engineering & Automation Problems*. – 2008. – Vol. 2, N 1. – P. 89–94.
2. *Плескачевский, Ю. М.* Изгиб трехслойного стержня с нерегулярной границей / *Ю.М. Плескачевский, Е.Э. Старовойтова* // *Механика машин, механизмов и материалов*. 2008. – № 3 (4). – С. 52–55.
3. *Старовойтова, Е.Э.* Изгиб трехслойного стержня с нерегулярной границей локальными нагрузками / *Е.Э. Старовойтова* // *Материалы, технологии, инструменты*. – Гомель, 2009. – № 1 (14). – С. 10–16.
4. *Плескачевский, Ю. М.* Изгиб трехслойного металлополимерного стержня ступенчато-переменной толщины / *Ю.М. Плескачевский, Е.Э. Старовойтова* // *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. Сборник наукових робіт / Днепропетровский національний університет. Днепропетровск: ІМА-прес. 2009. – Вып 13. – С. 186–192.*
5. *Старовойтова, Е.Э.* Упругопластический изгиб трехслойного стержня со ступенчато-переменной границей / *Е.Э. Старовойтова* // *Материалы, технологии, инструменты*. – Гомель, 2009. – № 4 (14). – С. 9–13.
6. *Старовойтова, Е. Э.* Напряженное состояние металлополимерного трехслойного стержня прямоугольного сечения со ступенчато-переменной границей / *Е. Э. Старовойтова* // *Механика машин, механизмов и материалов*. 2010. – № 1 (10). – С. 58–62.

Материалы конференций

7. *Старовойтова, Е. Э.* Краевая задача для упругого трехслойного стержня ступенчато-переменной толщины / *Е. Э. Старовойтова* // *Новые функциональные материалы, современные технологии и методы исследования. IV Гомельская региональная конференция молодых ученых*. – Гомель, 2008. – С. 178–180.
8. *Старовойтова, Е. Э.* Физически нелинейное деформирование трехслойного стержня ступенчато-переменной толщины / *Е. Э. Старовойтова* // *Труды Второй международной конференции «Проблемы нелинейной механики деформируемого твердого тела»*. Казань, 8–11 ноября 2009 г. – Казань: Казан. гос. ун-т, 2009. – С. 363–366.

Тезисы докладов

9. *Старовойтова, Е.Э.* Уравнения равновесия упругого трехслойного стержня с нерегулярной границей / *Е.Э. Старовойтова* // *Мат. XIII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред»* М., 12–17 февраля 2007 г. / – М.: Изд-во МАИ, 2007. – С. 234–235.
10. *Старовойтова, Е.Э.* Деформирование упругого трехслойного стержня с нерегулярной границей / *Е.Э. Старовойтова* // *Мат. X Республиканской научной конференции студентов и аспирантов «Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных*

исследованиях». Гомель, 2007 г. / – Гомель: Изд-во ГГУ им. Ф.Скорины, 2007. – С. 103–104.

11. *Плескачевский, Ю. М.* Уравнения равновесия упругого трехслойного стержня ступенчато-переменной толщины / *Ю. М. Плескачевский, Е.Э. Старовойтова* // Проблемы и перспективы развития транспортных систем и строительного комплекса: Мат. II Международной научно-практической конференции. – Гомель: БелГУТ, 2008. – С. 246–247.

12. *Плескачевский, Ю. М.* Деформирование упругого трехслойного стержня с нерегулярной границей / *Ю. М. Плескачевский, Е. Э. Старовойтова* // Международная конференция по математической физике и ее приложениям. Самара, Россия, 8-13 сентября 2008. – Математический институт им. В.А. Стеклова РАН. Самарский государственный университет, 2008. – С. 157–158.

13. *Старовойтова, Е. Э.* Деформирование упругого трехслойного стержня / *Е. Э. Старовойтова* // X Белорусская математическая конференция: Тез. докладов Международной научной конференции, Минск. 3-7 ноября 2008 г. – Часть 2. – Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2008. – С. 146–147.

14. *Тарлаковский, Д.В.* Резонансные колебания круговых трехслойных пластин, связанных с упругим основанием / *Д.В. Тарлаковский, Е.Э. Старовойтова* // XV Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А. Г. Горшкова. Том 1. – М.: 2009. – С. 140–141.

РЕЗЮМЕ

Старовойтова Елена Эдуардовна

Деформирование трехслойных стержней с нерегулярной границей

Ключевые слова: трехслойные стержни, нерегулярная граница, деформирование, упругость, пластичность, локальные нагрузки.

Объект исследования: трехслойные стержни с нерегулярной границей; *предмет исследования:* напряженно-деформированное состояние объекта.

Цель работы: постановка краевой задачи и создание общей методики теоретического исследования напряженно-деформированного состояния трехслойных физически линейных и нелинейных стержней с нерегулярной границей при квазистатических силовых нагрузках различного вида.

Приведены постановки новых краевых задач о квазистатическом деформировании упругих и упругопластических трехслойных стержней с нерегулярной границей, предложены методы их решения. Получен ряд точных решений для упругих и итерационных решений для физически нелинейных трехслойных стержней. Численно исследованы параметры напряженно-деформированного состояния в зависимости от граничных условий, геометрических и механических характеристик слоев, величины и формы нагрузки, вида нерегулярности границы.

Результаты исследований являются новыми и могут быть использованы проектными организациями в аэрокосмическом, транспортном, энергетическом и электронном машиностроении, строительстве.

РЭЗІЮМЭ

Старавойтава Алена Эдуардаўна

Дэфармаванне трохслаёвых стрыжнёў з нерэгулярнай граніцай

Ключавыя словы: трохслаёвыя стрыжні, нерэгулярная граніца, дэфармаванне, выгіб, пругкасць, пластычнасць, лакальныя нагрузкі.

Аб'ект даследавання: трохслаёвыя стрыжні з нерэгулярнай граніцай;
прадмет даследавання: напружана-дэфармаваны стан аб'екту.

Мэта работы: пастанова краёвай задачы і стварэнне агульнай metodyкі тэрэтычнага даследавання напружана-дэфармаванага стану трохслаёвых фізічна лінейных і нелінейных стрыжнёў з нерэгулярнай граніцай пры квазістатычных сілавых нагрузках розных відаў.

Прыведзены пастаноўкі новых краёвых задач аб квазістатычным дэфармаванні пругкіх і пругкапластычных трохслаёвых стрыжнёў з нерэгулярнай граніцай, прапанаваны метады іх рашэння. Атрыманы точныя рашэнні для пругкіх і ітэрацыйныя рашэнні для фізічна нелінейных трохслаёвых стрыжнёў. Праведзена лікавае даследаванне параметраў напружана-дэфармаванага стану ў залежнасці ад гранічных умоў, геаметрычных і механічных уласцівасцей матэрыялаў слаёў, велічыні і формы нагрузкі, выгляду нерэгулярнасці граніцы.

Вынікі даследаванняў з'яўляюцца новымі і могуць быць выкарыставаны практычнымі ўстановамі ў аэракасічным, транспартным, энэргетычным і электронным машынабудаванні, будаўніцтве.

ABSTRACT

Starovoytova Elena Eduardovna

Deformation of three-layer beams with variable border

Keywords: three-layer beams, variable border, bending, deformation, elasticity, plasticity, local loadings.

Object of research: three-layer beams with variable border. *Subject of research:* the stress-strain condition of the object.

The purpose of work: statement of the boundary problem and creation of general methods of theoretical research of the stress-strain condition of three-layer physically linear and nonlinear beams with variable thickness of one of two stiff shells under an action of quasistatic force loads of various types.

Statements of new boundary value problems about quasistatic deformation of elastic and elasticoplastic three-layer beams with variable border are represented, methods of their solution are offered. A series of exact elastic and iterative solutions for physically nonlinear three-layer beams is received. Parameters of the stress-strain condition are numerically investigated in depending on different boundary conditions, geometrical and mechanical performances of stratum, magnitude and form of loadings and aspect of variable border.

New results are obtained and they can be used in the area of aerospace, transport, power and electronic mechanical engineering, construction.

Научное издание

СТАРОВОЙТОВА Елена Эдуардовна

**ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТРЕХСЛОЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ
ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ С НЕРЕГУЛЯРНОЙ ГРАНИЦЕЙ**

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать 28.12.2009 г. Формат бумаги 60×84¹/₁₆.
Бумага офсетная. Гарнитура Times. Печать на ризографе.

Печ. листов 1,5. Тираж 80 экз. Зак. № 3439

Типография УО «БелГУТ», 246022, г. Гомель, ул. Кирова, 34.
ЛП № 02330/0494150 от 03.04.2009 г.