

УДК 539.3

ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ ОСНОВАНИЙ

Канд. физ.-мат. наук КРУПОДЕРОВ А. В.

Белорусский государственный университет

Изучение свойств и НДС слоистых упругих тел имеет большое значение и широкий диапазон приложений в геомеханике, механике грунтов и геофизике. Породный массив, как правило, представляет собой многослойное тело. При

этом отдельные слои, составляющие массив, могут быть анизотропными. В большинстве своем грунты и породные слои являются трансверсально-изотропными.

Одним из первых наиболее полно изучившим НДС трансверсально-изотропного слоя, покоящегося на жестком основании, был С. Г. Лехницкий [1]. Исследованием НДС многослойного трансверсально-изотропного полупространства также занимались Н. Р. Гарг и Р. К. Шарма [2], С. Синг [3], П. К. Хадхури и С. Бовал [4], Ж. Куо [5], И. Пэн [6]. Более полный обзор работ приведен в [2].

Особое значение как для теории, так и для практики представляют собой аналитические выражения для осадки свободной поверхности слоистого полупространства, вызванной действием единичной сосредоточенной силы и называемой ядром основания [7–9].

В данной статье описывается подход к изучению объемного НДС многослойного трансверсально-изотропного полупространства в случае воздействия на полупространство нормальной нагрузки, распределенной по некоторой площади на его поверхности. Получены аналитические формулы для ядер оснований для слоя, покоящегося как на недеформируемом, так и на упругом основании. Так же данный подход может быть использован для получения решения для большего количества слоев [10]. Однако в силу громоздкости формул здесь приводятся конечные формулы только для слоя на недеформируемом и упругом основаниях.

Итак, рассмотрим многослойное трансверсально-изотропное основание. На его поверхности воздействует нормальная нагрузка, распределенная по некоторому закону. Будем предполагать, что массовые силы отсутствуют. В настоящей работе рассматриваются условия идеального контакта между слоями, хотя разработанный метод позволяет учитывать и другие типы условий. Уравнения равновесия и граничные условия для слоя записываются в виде [11]:

$$\left(c_{11}^j \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{66}^j \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c_{44}^j \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u_x^j + \left(c_{12}^j + c_{66}^j \right) \frac{\partial^2 u_y^j}{\partial x \partial y} + \left(c_{13}^j + c_{44}^j \right) \frac{\partial^2 u_z^j}{\partial x \partial z} = 0;$$

$$\left(c_{12}^j + c_{66}^j \right) \frac{\partial^2 u_x^j}{\partial x \partial y} + \left(c_{11}^j \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{66}^j \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c_{44}^j \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u_y^j + \left(c_{13}^j + c_{44}^j \right) \frac{\partial^2 u_z^j}{\partial x \partial z} = 0; \tag{1}$$

$$\left(c_{13}^j + c_{44}^j \right) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_x^j}{\partial x} + \frac{\partial u_y^j}{\partial y} \right) + \left(c_{44}^j \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + c_{33}^j \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u_z^j = 0,$$

$$u_i^j |_{z=h_j} = u_i^{j+1} |_{z=h_j}; \quad \sigma_{i3}^j |_{z=h_j} = \sigma_{i3}^{j+1} |_{z=h_j};$$

$$\sigma_{i3}^1 |_{z=0} = 0; \quad i = 1 \dots 3; \quad j = 1 \dots n;$$

$$u_x, u_y, u_z \rightarrow 0 \text{ при } \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty,$$

где индекс j обозначает номер слоя; n – количество слоев; $(c)_{kl}, k, l = \overline{1, 6}$ – матрица упругих констант, связывающая напряжения с деформациями (т. е. компоненты напряжений $\sigma_1 = \sigma_{xx}; \sigma_2 = \sigma_{yy}; \sigma_3 = \sigma_{zz}; \sigma_4 = \sigma_{yz}; \sigma_5 = \sigma_{xz}; \sigma_6 = \sigma_{xy}$ с деформациями $\varepsilon_1 = \varepsilon_{xx}; \varepsilon_2 = \varepsilon_{yy}; \varepsilon_3 = \varepsilon_{zz}; \varepsilon_4 = 2\varepsilon_{yz}; \varepsilon_5 = 2\varepsilon_{xz}; \varepsilon_6 = 2\varepsilon_{xy}$).

Для трансверсально-изотропной среды существует направление, в нашем случае вертикальное, поворот вокруг которого на любой угол не влечет за собой изменение упругих свойств, а ее состояние определяется заданием пяти констант: $E_1, \nu_1, E_2, \nu_2, G_2$. Здесь E_1, ν_1 – модуль Юнга и коэффициент Пуассона в горизонтальной плоскости (или плоскости изотропии), а E_2, ν_2, G_2 – модуль Юнга, коэффициент Пуассона и модуль сдвига в вертикальном направлении. Матрица упругости имеет следующий вид (за вертикальную ось принята ось z):

$$\begin{pmatrix} \frac{1 - \nu_{12}\nu_2}{E_1 E_2 \Delta} & \frac{\nu_1 + \nu_2 \nu_{12}}{E_1 E_2 \Delta} & \frac{\nu_2 + \nu_2 \nu_{12}}{E_1 E_2 \Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_1 + \nu_2 \nu_{12}}{E_1 E_2 \Delta} & \frac{1 - \nu_2 \nu_{12}}{E_1 E_2 \Delta} & \frac{\nu_2 + \nu_2 \nu_{12}}{E_1 E_2 \Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_2 + \nu_2 \nu_{12}}{E_1 E_2 \Delta} & \frac{\nu_2 + \nu_2 \nu_{12}}{E_1 E_2 \Delta} & \frac{1 - \nu_1^2}{E_1^2 \Delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E_1}{2(1 + \nu_1)} \end{pmatrix},$$

где $\nu_{12} = \frac{E_1}{E_2} \nu_2$; $\Delta = \frac{(1 + \nu_1)(1 - \nu_1 - 2\nu_2 \nu_{12})}{E_1^2 E_2}$.

Для нахождения решения поставленной задачи воспользуемся методом, описанным в [6]. В дальнейших выкладках верхний индекс j опускаем, подразумевая, что выкладки ведутся для каждого слоя. Представляем перемещения в следующем виде:

при $s_1 \neq s_2$

$$\begin{aligned} u_x &= \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial y}; \\ u_y &= \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial x}; \\ u_z &= \sum_{i=1}^2 \alpha_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial z_i}, \end{aligned} \quad (2)$$

при $s_1 = s_2$

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + z_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial y}; \\ u_y &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + z_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial x}; \\ u_z &= \alpha_1 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} + z_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_1} \right) - \alpha_3 \varphi_2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} s_i &= \sqrt{\frac{(C - c_{13})(C + c_{13} + 2c_{44})}{4c_{33}c_{44}}} + \\ &+ (-1)^{i+1} \sqrt{\frac{(C + c_{13})(C - c_{13} - 2c_{44})}{4c_{33}c_{44}}}, \quad i = \overline{1, 2}; \\ s_3 &= \sqrt{\frac{c_{66}}{c_{44}}}; \quad C = \sqrt{c_{11}c_{33}}; \quad z_i = s_i z. \end{aligned}$$

В общем случае упругие параметры таковы, что $s_1 \neq s_2$. Тогда с учетом данного обстоятельства величины, входящие в (2), имеют следующий вид (в дальнейшем будем рассматривать только этот случай, так как случай $s_1 = s_2$ получается из него с помощью предельного перехода):

$$\alpha_i = \frac{c_{11} - c_{44}s_i^2}{(c_{13} + c_{44})s_i^2}.$$

Подставляя выражения (2) в (1), найдем, что каждая из функций φ_i должна удовлетворять уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_i^2} \right) \varphi_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3),$$

а также системе граничных условий, которые получаются подстановкой выражений (2) в исходные граничные условия.

Для решения сформулированной выше системы уравнений применим преобразование Фурье по переменным x, y

$$f^F(w_1, w_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{i(xw_1 + yw_2)} dx dy.$$

Таким образом, получаем следующие обыкновенные дифференциальные уравнения для трансформант функций φ

$$\frac{d^2 \varphi_i^F}{dz^2} = s_i^2 w^2 \varphi_i^F,$$

где $w^2 = w_1^2 + w_2^2$.

Общее решение данных уравнений представляется в следующем виде (здесь возвращаемся к индексу j , так как для каждого слоя константы свои):

$$\varphi_i^j = C_{1i}^j e^{s_i^j w} + C_{2i}^j e^{-s_i^j w}. \quad (3)$$

Если подставить выражения (3) в систему граничных условий, то получится система линейных уравнений относительно констант C_{li}^j . Данная система довольно громоздка, поэтому представляется целесообразным решать ее с помощью систем компьютерной алгебры. В нашем случае решение проводилось с помощью метода Крамера. Стоит отметить, что в данном случае (действия нормальной нагрузке

ки) можно без ограничения общности положить $C_{13}^j = 0$. В итоге некоторые из уравнений системы становятся линейно зависимыми и таким образом уменьшается порядок системы, и, следовательно, она упрощается.

Опуская промежуточные вычисления, приведем аналитические выражения для ядер оснований для слоя, покоящегося на недеформируемом основании, и для слоя, жестко сцепленного с упругим полупространством.

В первом случае ядро имеет следующий вид:

$$u_z |_{z=0}(r) = \int_0^\infty J_0(wr) \frac{P(w)}{Q(w)} dw, \quad (4)$$

$$P(w) = -\frac{1}{2\pi} (((-1 + e^{2hws_1})(1 + e^{2hws_2})\alpha_1 - (1 + e^{2hws_1})(-1 + e^{2hws_2})\alpha_2)(k_{32}\alpha_1 - k_{31}\alpha_2)),$$

$$Q(w) = c_{66}(-k_{21}(-4e^{hw(s_1+s_2)}k_{31}\alpha_2 + k_{32}((1 + e^{2hws_1})(1 + e^{2hws_2})\alpha_1 - (-1 + e^{2hws_1})(-1 + e^{2hws_2})\alpha_2)) + k_{22}(4e^{hw(s_1+s_2)}k_{32}\alpha_1 + k_{31}((-1 + e^{2hws_1})(-1 + e^{2hws_2})\alpha_1 - (1 + e^{2hws_1})(-1 + e^{2hws_2})\alpha_2)));$$

$$k_{3i} = \frac{\alpha_i + s_i}{s_3^2}, k_{2i} = \frac{c_{33}\alpha_i s_i - c_{13}}{c_{66}}.$$

Для слоя, сцепленного с упругим основанием, функции P и Q имеют более сложный вид:

$$\begin{aligned} P(w) = & \frac{1}{2\pi} (((k_{32}^1\alpha_1^1 - k_{31}^1\alpha_2^1)(-c_{66}^2)^2(k_{22}^2k_{31}^2 - k_{21}^2k_{32}^2)((-1 + e^{2hws_1^1})(1 + e^{2hws_2^1})\alpha_1^1 - (1 + e^{2hws_1^1})(-1 + e^{2hws_2^1})\alpha_2^1) - \\ & -(c_{66}^1)^2((-1 + e^{2hws_1^1})(1 + e^{2hws_2^1})k_{22}^1k_{31}^1 - (1 + e^{2hws_1^1})(-1 + e^{2hws_2^1})k_{21}^1k_{32}^1)(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) + c_{66}^1c_{66}^2(k_{22}^2k_{32}^1\alpha_1^1(-1 + \\ & + e^{2hws_1^1} + e^{2hws_2^1} - e^{2hw(s_2^1+s_1^1)}) + k_{22}^2k_{31}^1\alpha_1^2(-1 + e^{2hws_1^1} - e^{2hws_2^1} + e^{2hw(s_2^1+s_1^1)}) + k_{22}^2k_{32}^1\alpha_1^2(1 + e^{2hws_1^1} - e^{2hws_2^1} + e^{2hw(s_2^1+s_1^1)}) + \\ & + k_{21}^1k_{32}^2\alpha_1^2(1 + e^{2hws_1^1} + e^{2hws_2^1} + e^{2hw(s_2^1+s_1^1)}) + k_{22}^2k_{31}^1\alpha_2^1(1 - e^{2hws_1^1} - e^{2hws_2^1} + e^{2hw(s_2^1+s_1^1)}) + \\ & + k_{21}^1k_{31}^2\alpha_2^1(1 + e^{2hws_1^1} - e^{2hws_2^1} - e^{2hw(s_2^1+s_1^1)}) + k_{21}^1k_{32}^2\alpha_2^1(-1 - e^{2hws_1^1} + e^{2hws_2^1} + e^{2hw(s_2^1+s_1^1)}) + \\ & + k_{21}^1k_{31}^2\alpha_2^2(-1 - e^{2hws_1^1} - e^{2hws_2^1} - e^{2hw(s_2^1+s_1^1)}) + (1 + e^{2hws_2^1})k_{22}^1(-k_{32}^2((-1 + e^{2hws_1^1})\alpha_1^1 + (1 + e^{2hws_1^1})\alpha_2^1) + \\ & + k_{31}^2((-1 + e^{2hws_1^1})\alpha_1^1 + (1 + e^{2hws_1^1})\alpha_2^2) + k_{21}^2((-1 + e^{2hws_2^1})k_{32}^1((-1 + e^{2hws_1^1})\alpha_1^1 + (1 + e^{2hws_1^1})\alpha_2^2) - (-1 + e^{2hws_1^1})k_{31}^1 \times \\ & \times (-1 + e^{2hws_2^1})\alpha_2^1 + (1 + e^{2hws_2^1})\alpha_2^2))))); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q(w) = & c_{66}^1 (-c_{66}^2)^2 (k_{22}^2 k_{31}^2 - k_{21}^2 k_{32}^2) (k_{21}^1 (-4e^{hw(s_1^1+s_2^1)} k_{31}^1 \alpha_2^1 + k_{32}^1 ((1+e^{2hws_1^1})(1+e^{2hws_2^1}) \alpha_1^1 - \\
 & - (-1+e^{2hws_1^1})(-1+e^{2hws_2^1}) \alpha_2^1)) + k_{22}^1 (-4e^{hw(s_1^1+s_2^1)} k_{32}^1 \alpha_1^1 + k_{31}^1 (-(-1+e^{2hws_1^1})(-1+e^{2hws_2^1}) \alpha_1^1 + \\
 & + (1+e^{2hws_1^1})(1+e^{2hws_2^1}) \alpha_2^1)) - (c_{66}^1)^2 (-(-1+e^{2hws_1^1})(-1+e^{2hws_2^1}) (k_{22}^1 k_{31}^1)^2 + 2(1+e^{2hws_1^1} + \\
 & + e^{2hws_2^1} - 4e^{hw(s_1^1+s_2^1)} + e^{2hw(s_1^1+s_2^1)}) k_{21}^1 k_{22}^1 k_{31}^1 k_{32}^1 - (-1+e^{2hws_1^1})(-1+e^{2hws_2^1}) (k_{21}^1 k_{32}^1)^2) (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) + \\
 & + c_{66}^1 c_{66}^2 (-(-1+e^{2hws_1^1}) (k_{22}^1)^2 k_{31}^1 (-k_{32}^2 ((-1+e^{2hws_1^1}) \alpha_1^1 + (1+e^{2hws_1^1}) \alpha_1^2) + k_{31}^2 ((-1+e^{2hws_1^1}) \alpha_1^1 + \\
 & + (1+e^{2hws_1^1}) \alpha_2^2)) + k_{21}^1 k_{32}^1 (k_{22}^2 (-(-1+e^{2hws_2^1}) k_{32}^1 ((1+e^{2hws_1^1}) \alpha_1^1 + (-1+e^{2hws_1^1}) \alpha_1^2) + \\
 & + k_{31}^1 ((1+e^{2hws_1^1} + e^{2hws_2^1} - 4e^{hw(s_1^1+s_2^1)} + e^{2hw(s_1^1+s_2^1)}) \alpha_1^2 + (1+e^{2hws_1^1})(-1+e^{2hws_2^1}) \alpha_2^1)) + \\
 & + (-1+e^{2hws_1^1}) k_{21}^1 (k_{32}^2 ((1+e^{2hws_2^1}) \alpha_1^2 + (-1+e^{2hws_2^1}) \alpha_2^1) - k_{31}^2 ((-1+e^{2hws_2^1}) \alpha_2^1 + (1+e^{2hws_2^1}) \alpha_2^2)) + \\
 & + k_{21}^2 ((-1+e^{2hws_2^1}) k_{32}^1 ((1+e^{2hws_1^1}) \alpha_1^1 + (-1+e^{2hws_1^1}) \alpha_2^1) + k_{31}^1 (-(-1+e^{2hws_1^1})(-1+e^{2hws_2^1}) \alpha_2^1 - \\
 & - (1+e^{2hws_1^1} + e^{2hws_2^1} - 4e^{hw(s_1^1+s_2^1)} + e^{2hw(s_1^1+s_2^1)}) \alpha_2^2)) + k_{22}^1 (k_{22}^2 k_{31}^1 (k_{32}^1 ((-1+e^{2hws_1^1})(1+e^{2hws_2^1}) \alpha_1^1 + \\
 & + (1+e^{2hws_1^1} + e^{2hws_2^1} - 4e^{hw(s_1^1+s_2^1)} + e^{2hw(s_1^1+s_2^1)}) \alpha_1^2) - (-1+e^{2hws_1^1}) k_{31}^1 ((-1+e^{2hws_2^1}) \alpha_1^2 + \\
 & + (1+e^{2hws_2^1}) \alpha_2^1)) + k_{21}^2 k_{31}^1 ((-1+e^{2hws_1^1}) k_{31}^1 ((1+e^{2hws_2^1}) \alpha_2^1 + (-1+e^{2hws_2^1}) \alpha_2^2) - \\
 & - k_{32}^1 ((-1+e^{2hws_1^1})(1+e^{2hws_2^1}) \alpha_1^1 + (1+e^{2hws_1^1} + e^{2hws_2^1} - 4e^{hw(s_1^1+s_2^1)} + e^{2hw(s_1^1+s_2^1)}) \alpha_2^2)) + \\
 & + k_{21}^1 (-k_{32}^2 (k_{32}^1 ((1+e^{2hws_2^1}) \alpha_1^1 + (1+e^{2hws_1^1} + e^{2hws_2^1} - 4e^{hw(s_1^1+s_2^1)} + e^{2hw(s_1^1+s_2^1)}) \alpha_1^2 + \\
 & + (-1+e^{2hws_1^1})(1+e^{2hws_2^1}) \alpha_2^1) + k_{31}^1 ((1+e^{2hws_1^1})(-1+e^{2hws_2^1}) \alpha_1^2 + \\
 & + (1+e^{2hws_1^1} + e^{2hws_2^1} - 4e^{hw(s_1^1+s_2^1)} + e^{2hw(s_1^1+s_2^1)}) \alpha_2^1)) + k_{31}^2 (k_{31}^1 ((1+e^{2hws_1^1} + e^{2hws_2^1} - \\
 & - 4e^{hw(s_1^1+s_2^1)} + e^{2hw(s_1^1+s_2^1)}) \alpha_2^1 + (1+e^{2hws_1^1})(-1+e^{2hws_2^1}) \alpha_2^2) + k_{32}^1 ((1+e^{2hws_1^1} + e^{2hws_2^1} - \\
 & - 4e^{hw(s_1^1+s_2^1)} + e^{2hw(s_1^1+s_2^1)}) \alpha_1^1 + (-1+e^{2hws_1^1})(1+e^{2hws_2^1}) \alpha_2^2)))).
 \end{aligned}$$

С помощью предельного перехода нетрудно убедиться, что для случая изотропного слоя и полупространства эти функции совпадают с известными решениями [4, 5].

На практике дробь $\frac{P(w)}{Q(w)}$ удобно представлять в виде

$$\frac{P(w)}{Q(w)} = C + g(w),$$

где $C = \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{P(w)}{Q(w)}$ – константа, соответствующая решению Буссинеска [12], $g(w)$ – гладкая

функция. Выражение для константы C в наших случаях имеет следующий вид:

- для слоя на недеформируемом основании

$$C = -\frac{1}{2\pi} \frac{k_{32}\alpha_1 - k_{31}\alpha_2}{c_{66}(k_{22}k_{31} - k_{21}k_{32})};$$

- для слоя, сцепленного с упругим полупространством:

$$C = -\frac{1}{2\pi} \frac{k_{32}^1\alpha_1^1 - k_{31}^1\alpha_2^1}{c_{66}^1(k_{22}^1k_{31}^1 - k_{21}^1k_{32}^1)}.$$

Использование формулы (4) в том виде, в котором она приведена, является крайне за-

труднительным, поэтому дробь $\frac{P(w)}{Q(w)}$ приближают некоторым выражением [3–5] так, чтобы интеграл в (4) брался аналитически. Для случая, когда полупространство изотропно, зачастую пользуются взятием нескольких членов ряда в следующем представлении:

$$\frac{P(w/h)}{Q(w/h)} = C_1 + e^{-2w} \sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k, \quad (5)$$

где a_k – коэффициенты ряда Маклорена функции $\left(\frac{P(w/h)}{Q(w/h)} - C_1\right)e^{2w}$. Выбор двойки связан с оценкой асимптотического поведения функции $\frac{P(w/h)}{Q(w/h)}$ на бесконечности. Однако попытка применить данный подход для transversально-изотропного массива оказывается неудачной, так как требуется довольно большое количество членов ряда для хорошей аппроксимации. На рис. 1 приведен пример аппроксимации вида

$$\frac{P(w/h)}{Q(w/h)} = C_1 + e^{-2ws_2} \sum_{k=0}^n a_k w^k,$$

при следующих значениях упругих свойств: $E_1 = E_2 = 10^9$ Па; $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$; $G_2 = 0,15G_1$. Здесь $n = 2$.

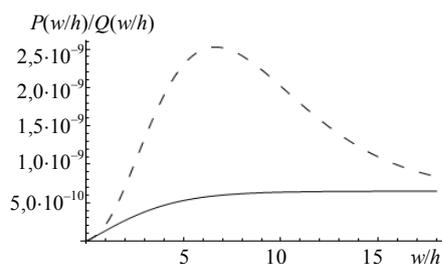


Рис. 1. Пример аппроксимации на основании формулы (5)

Как видно, выражение хорошо аппроксимирует поведение функции в 0 и на бесконечности, однако в остальных точках наблюдается довольно большое расхождение. Причем увеличение количества членов ряда не всегда приводит к улучшению результата.

Нами предлагается следующее представление для исходной функции

$$\frac{P(w/h)}{Q(w/h)} = C_1 + e^{-2ws_2} \sum_{k=0}^n a_k L_k(w), \quad (6)$$

где L_k – полиномы Лагерра;

$$a_k = \int_0^{\infty} e^{-w} \left(\frac{P(w/h)}{Q(w/h)} - C_1 \right) e^{2s_2 w} L_k(w) dw$$
 – коэффициенты Фурье. Аналитическое вычисление этих коэффициентов не всегда возможно. Однако при конкретных упругих постоянных их легко рассчитать численно. Для случая слоя на упругом основании в формуле (6) s_2 заменяется на s_2^1 .

На следующих рисунках приведены примеры указанного приближения. На рис. 2 – для слоя на недеформируемом основании. При этом были взяты следующие упругие свойства слоя: $E_1 = E_2 = 10^{10}$ Па; $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$; $G_2 = 0,35G_1$. В этом случае получаем значения коэффициентов: $a_0 = -6,45788 \cdot 10^{-11}$ Па⁻¹; $a_1 = 1,56765 \times 10^{-11}$ Па⁻¹; $a_2 = 4,38728 \cdot 10^{-12}$ Па⁻¹. На рис. 3 приведен пример приближения для слоя на упругом основании. При этом были взяты следующие упругие свойства слоя и полупространства:

$E_1^1 = E_2^1 = 10^{10}$ Па, $\nu_1^1 = \nu_2^1 = 0,2$, $G_2^1 = 0,35G_1^1$;
 $E_1^2 = E_2^2 = 5 \cdot 10^9$ Па, $\nu_1^2 = \nu_2^2 = 0,3$, $G_2^2 = 0,2G_1^2$.

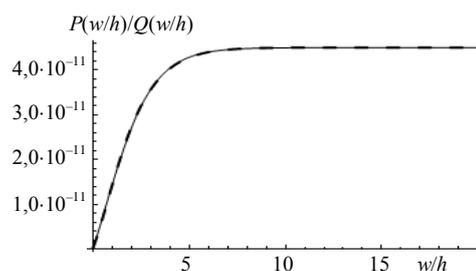


Рис. 2. Пример аппроксимации на основании разложения в ряд Фурье для слоя на недеформируемом основании

В данном случае имеем значения коэффициентов: $a_0 = 7,89831 \cdot 10^{-11}$ Па⁻¹; $a_1 = 3,79173 \times 10^{-12}$ Па⁻¹; $a_2 = -1,51824 \cdot 10^{-11}$ Па⁻¹.

И в том, и в другом случае n принималось равным 2.

$$P(w/h)/Q(w/h)$$

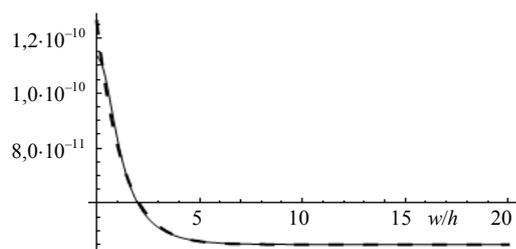


Рис. 3. Пример аппроксимации на основании разложения в ряд Фурье для слоя, сцепленного с полупространством

Максимальная погрешность не превышает 10 %, и, как известно из теории рядов Фурье, будет уменьшаться при добавлении новых членов ряда.

В итоге на основании указанного приближения интеграла в (4) берется аналитически и вертикальные перемещения границы слоя от сосредоточенной вертикальной силы имеют следующий вид ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$):

$$u(r)|_{z=0} = \frac{C_1}{r} + a_0 \frac{1}{h((r/h)^2 + 4s_2^2)^{1/2}} + a_1 \frac{(r/h)^2 + 2s_2(-1 + 2s_2)}{h((r/h)^2 + 4s_2^2)^{3/2}} + \dots$$

Приведем графики перемещений поверхности основания (рис. 4), вызванных сосредоточенной силой, для трех случаев: упругое полупространство (сплошная кривая), слой на недеформируемом основании (длинный пунктир), слой на упругом полупространстве (мелкий пунктир). Графики строились в соответствии с полученными приближениями.

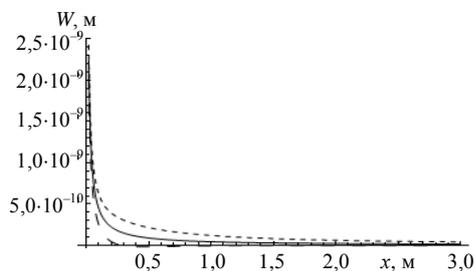


Рис. 4. Перемещения поверхности для различных типов основания

ВЫВОДЫ

Таким образом, получены решения для случая воздействия нормальной нагрузки на упру-

гое многослойное трансверсально-изотропное основание. Приведены аналитические выражения для ядер основания для случая упругого слоя на недеформируемом и упругом основаниях. Предложен подход для аппроксимации ядра основания с помощью полиномов Лагерра. Приведены примеры аппроксимации. Указанные решения могут быть использованы при анализе напряженно-деформированного состояния грунтов, вызванного поверхностной нагрузкой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий, С. Г. Упругое равновесие трансверсально-изотропного слоя и толстой плиты / С. Г. Лехницкий // Прикладная механика и математика. – 1962. – Т. 26, № 4. – С. 687–696.
2. Garg, N. R. Displacements and stresses at any point of a transversely isotropic multilayered half-space due to strip loading / N. R. Garg, R. K. Sharma // Indian. J. pure appl. Math. – 1991. – 22(10). – P. 859–877.
3. Garg, N. R. Residual response of a multilayered half-space to two-dimensional surface loads / N. R. Garg, S. J. Singh // Bull. Ind. Soc. Earthq. Tech. – 1985. – 22. – P. 39–52.
4. Chadhuri, P. K. Two-dimensional static response of a transversely-isotropic multilayered nonhomogeneous half-space to surface-loads / P. K. Chadhuri, S. Bowal // Geophys. Res. Bull. – 1989. – No. 27. – P. 77–87.
5. Kuo, J. T. Static response of a multilayered medium under inclined surface loads / J. T. Kuo // J. Geophys. Res. – 1969. – No. 74. – P. 3195–3207.
6. Pan, E. Static response of transversely isotropic and layered half-space to general surface loads / E. Pan // Phys. Earth Planet Inter. – 1989. – No. 54. – P. 353–363.
7. Босаков, С. В. Статические расчеты плит на упругом основании / С. В. Босаков. – Минск: БНТУ, 2002. – 128 с.
8. Алейников, С. М. Развитие метода специальной аппроксимации в контактных задачах теории упругости / С. М. Алейников, Е. В. Кутенков // Труды всерос. конф. «Математическое моделирование и краевые задачи», Самара, Россия, 2004 г. – Самара, 2004. – С. 9–13.
9. Алейников, С. М. Аппроксимация ядер упругих слоистых оснований / С. М. Алейников, Е. В. Кутенков // Труды всерос. конф. «Математическое моделирование и краевые задачи», Самара, Россия, 2005 г. – Самара, 2005. – С. 17–20.
10. Круподеров, А. В. Решение задачи о воздействии нормальной нагрузки на многослойное трансверсально-изотропное основание с помощью использования преобразования Фурье в объемной постановке / А. В. Круподеров, М. А. Журавков // Труды VI Междунар. симпозиума по трибофатике МСТФ 2010, Минск 25 окт. – 1 нояб. 2010 г. Ч. 2 / редкол.: М. А. Журавков [и др.]. – Минск: БГУ, 2010. – С. 359–364.
11. Ding, H. Elasticity of transversely isotropic materials / H. Ding, W. Chen, L. Zhang. – Springer, 2006. – 444 p.