

МНОГОФАКТОРНЫЕ ИНДЕКСНЫЕ МОДЕЛИ

Канд. техн. наук, доц. ШИЛО А. Ф.

Белорусский национальный технический университет

Во многих отраслях экономики, и не только экономики, широко используются многофакторные индексные модели. Так, перевозки пассажиров маршрутными автобусами можно представить 6-факторной моделью.

Пассажиры-километры (ПКМ) определяются произведением вместимости автобуса V и его полезным пробегом. Полезный пробег может быть представлен произведением трех факторов – среднесуточного пробега L_c , коэффициента полезного пробега α и его автомобиле-дней работы. В свою очередь количество автомобиле-дней работы зависит от общего числа автомобилей предприятия и коэффициента выпуска их на линию β .

Более того, поскольку автомобиле-дни можно представить произведением среднесписочного числа автомобилей $\bar{A}_{\text{сп}}$ и числа календарных дней отчетного периода $D_{\text{пер}}$, в итоге получим 6-факторную модель перевозки пассажиров

$$\text{ПКМ} = VL_c \alpha \bar{A}_{\text{сп}} D_{\text{пер}} \beta.$$

При анализе многофакторных моделей важно выяснить влияние каждого фактора на динамику результата. На наш взгляд, в этом вопросе есть определенные проблемы.

В [1, с. 77, 78] при анализе 2-факторной индексной модели грузооборота R за отчетный и базисный периоды (726,6 и 583,2 тыс. т·км) от объема перевезенного груза Q (42 и 36 тыс. т) и среднего расстояния перевозки 1 т груза \bar{l}_T (17,3 и 16,2 км) изложено следующее:

- абсолютный прирост грузооборота

$$\Delta R = 726,6 - 583,2 = 143,4;$$

- прирост ΔR за счет фактора \bar{l}_T :

$$\Delta R(\bar{l}_T) = (\bar{l}_T^1 - \bar{l}_T^0) Q^1 = (17,3 - 16,2) \cdot 42 = 46,2;$$

- прирост ΔR за счет фактора Q :

$$\Delta R(Q) = \bar{l}_T^0 (Q^1 - Q^0) = 16,2 \cdot (42 - 36) = 97,2.$$

Итак, выражение $\Delta R = 46,2 + 97,2 = 143,4$ является верным. Далее делается окончательный вывод о том, что зависимость грузооборота от среднего расстояния перевозки 1 т груза

составляет 32 %, а от объема перевезенного груза – 68 %.

Между тем, если в качестве первого фактора взять объем перевезенного груза, а второго – среднее расстояние перевозки 1 т груза, то получим:

$$\Delta R(Q) = (Q^1 - Q^0) \bar{l}_T^1 = (42 - 36) \cdot 17,3 = 103,8;$$

$$\Delta R(\bar{l}_T) = Q^0 (\bar{l}_T^1 - \bar{l}_T^0) = 36 \cdot (17,3 - 16,2) = 39,6.$$

Очевидно, тоже $\Delta R = 103,8 + 39,6 = 143,4$, но результат совсем иной: грузооборот на 28 % зависит от среднего расстояния перевозки 1 т груза и на 72 % – от объема перевезенного груза. Расхождение результатов составляет 4 %. Где тогда верно?

Отметим, что при большем числе факторов эти расхождения значительно возрастают и достигают величин влияния исследуемых показателей.

Причина заключается в «позиционности» применяемой факторной формулы

$$\Delta_{\text{пр}}(i_{\text{фак}}) = u_1^0 u_2^0, \dots, \Delta u_i u_{i+1}^1, \dots, u_n^1, \quad (1)$$

где u^0 – базисные уровни факторов; u^1 – отчетные уровни факторов; $\Delta u_i = u_i^1 - u_i^0$.

Итак, чем ближе i -й фактор к началу формулы, тем больше в формировании его величины сомножителей отчетных уровней других факторов. И, наоборот, при удалении его от начала число отчетных уровней уменьшается, а базисных – возрастает. Очевидно, рассчитывать на объективность результатов при таком подходе не приходится.

Формула обеспечивает баланс прироста результативного признака с его факторными приростами. Но для основной цели – выяснения величин факторных приростов – она как инструмент сродни топору вместо скальпеля в хирургии [2–4].

Предлагается инновационная факторная формула, устраняющая указанные выше недостатки:

$$\Delta_{\text{пр}}(i_{\text{фак}}) = \Delta u_i \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{i-1} \bar{u}_{i+1}, \dots, \bar{u}_n, \quad (2)$$

где $\Delta u_i = u_i^1 - u_i^0$; $\bar{u} = \frac{u^0 + u^1}{2}$ – среднее арифметическое базисного и отчетного уровней фактора.

Согласно предлагаемой формуле факторные приросты результата рассматриваемого примера составят:

$$\Delta R(Q) = (Q^1 - Q^0) \frac{\bar{l}_T^0 + \bar{l}_T^1}{2} = (42 - 36) \cdot \frac{16,2 + 17,3}{2} = 100,5;$$

$$\Delta R(\bar{l}_T) = (\bar{l}_T^1 - \bar{l}_T^0) \frac{Q^0 + Q^1}{2} = (17,3 - 16,2) \cdot \frac{36 + 42}{2} = 42,9.$$

Опять же $\Delta R = \Delta R(Q) + \Delta R(\bar{l}_T) = 100,5 + 42,9 = 143,4$.

Таким образом, объективные результаты рассматриваемого примера таковы: грузооборот на 30 % зависит от среднего расстояния перевозки 1 т груза и на 70 % – от объема.

Сохранение баланса прироста результативного признака и факторных приростов с применением (2) в приведенном примере не является случайным. Докажем это положение, выражая отчетные уровни факторов через базисные по формуле $u^1 = u^0 + \Delta u$.

Общее приращение признака составит

$$\begin{aligned} \Delta_{пр} &= u_1^1 u_2^1 - u_1^0 u_2^0 = (u_1^0 + \Delta u_1)(u_2^0 + \Delta u_2) - u_1^0 u_2^0 = \\ &= u_1^0 u_2^0 + u_1^0 \Delta u_2 + u_2^0 \Delta u_1 + \Delta u_1 \Delta u_2 - \\ &- u_1^0 u_2^0 = u_1^0 \Delta u_2 + u_2^0 \Delta u_1 + \Delta u_1 \Delta u_2. \end{aligned}$$

Найдем сумму факторных приращений признака

$$\Delta_{пр}(u_1) + \Delta_{пр}(u_2) = \Delta u_1 \frac{u_2^0 + u_2^0 + \Delta u_2}{2} +$$

$$\begin{aligned} + \Delta u_2 \frac{u_1^0 + u_1^0 + \Delta u_1}{2} &= \Delta u_1 u_2^0 + \Delta u_1 \frac{\Delta u_2}{2} + \Delta u_2 u_1^0 + \\ + \Delta u_2 \frac{\Delta u_1}{2} &= u_1^0 \Delta u_2 + u_2^0 \Delta u_1 + \Delta u_1 \Delta u_2. \end{aligned}$$

Правые части обоих равенств одинаковы.

Как показали дальнейшие математические исследования предлагаемой формулы (2), в случае 3- и более факторных моделей сумма факторных приростов признака не совпадает с его общим приростом, но этот дисбаланс незначителен (третьего и более порядка малости) и сопоставим с погрешностями вычислений. Так, для 3-факторной модели он составляет четверть произведения приращений уровней факторов, т. е. $\frac{1}{4} \Delta u_1 \Delta u_2 \Delta u_3$.

Ниже по данным однонаправленного изменения факторных уровней отчетного и базисного периодов (столбцы 2 и 3, табл. 1) приведены расчеты 4-факторной модели по позиционной формуле (1) (столбцы 5 и 6) и инновационной формуле (2) (столбцы 7 и 8). В первой половине табл. 1 при расчетах факторы брались в порядке их расположения (столбец 1), во второй – только первый и четвертый переставлены местами.

Как и следовало ожидать, по (1) наблюдается большой разброс абсолютных факторных приростов и их долей в общем приросте результативного признака. В самом деле, даже по не меняющему позиции 2-го фактора его доля колеблется от 35 до 28 %, т. е. разброс составляет более 7 %. По первому фактору разброс составил 5 % и превышает его долю 4,1 %, т. е. величина погрешности превышает результат.

Таблица 1

| Фактор | Уровень u | | Δu | Позиционная формула | | Инновационная формула | |
|--------------|-------------|----------|------------|---------------------|------|-----------------------|------|
| | базисный | отчетный | | $\Delta_{факт}$ | % | $\Delta_{факт}$ | % |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 1 | 131 | 138 | 7 | 234080 | 9,0 | 162435 | 6,3 |
| 2 | 75 | 95 | 20 | 922240 | 35,3 | 734370 | 28,3 |
| 3 | 34 | 44 | 10 | 786000 | 30,1 | 800275 | 30,8 |
| 4 | 6 | 8 | 2 | 668100 | 25,6 | 900440 | 34,6 |
| Произведение | 2004300 | 4614720 | Σ | 2610420 | 100 | 2597520 | 100 |
| 4 | 6 | 8 | 2 | 1153680 | 44,2 | 900440 | 34,6 |
| 2 | 75 | 95 | 20 | 728640 | 27,9 | 734370 | 28,3 |
| 3 | 34 | 44 | 10 | 621000 | 23,8 | 800275 | 30,8 |
| 1 | 131 | 138 | 7 | 107100 | 4,1 | 162435 | 6,3 |
| Произведение | 2004300 | 4614720 | Σ | 2610420 | 100 | 2597520 | 100 |

Таким образом, прирост составит $\Delta_{пр} = 4614720 - 2004300 = 2610420$.

Более того, при применении позиционной формулы (1) можно получить 24 варианта ответа (число перестановок из 4).

Оценим качество расчетов по инновационной формуле (2). Во-первых, абсолютные факторные приросты результативного признака и их доли при любом расположении однозначны. Во-вторых, погрешность, порождаемая дисбалансом, не превышает 0,5 %. В самом деле, дисбаланс прироста результативного признака и суммы факторных

$$2610420 - 2597520 = 12900.$$

Тогда относительная погрешность

$$(12910 : 2610420) \cdot 100 \% = 0,5 \%$$

В табл. 2 представлены расчеты 4-факторной модели с теми же исходными данными, но с разнонаправленным изменением уровней факторов. А именно, по 4-му фактору отчетный уровень 6 меньше базисного 8.

Прежде всего заметим, что при разнонаправленном изменении факторных уровней абсолютная величина отдельного факторного прироста может превышать их сумму, что невозможно при однонаправленности. Следовательно, и доленое участие такого фактора возможно больше 100 %, что наблюдается по обеим формулам (столбцы 6 и 8).

тельная погрешность расчетов по инновационной формуле и составила

$$(796640 - 788640) : 788640 \cdot 100 \% = 1 \%$$

ВЫВОДЫ

Предлагаемая инновационная формула проста и удобна при исследованиях индексных многофакторных моделей. Она позволяет получить объективные (как и должно быть!) результаты с высокой степенью надежности.

Величины факторных долей результативного признака всегда однозначны. Приоритетность того или иного фактора устанавливается после расчетов, а не до них, как по позиционной формуле.

В случае 2-факторной модели баланс прироста результативного признака с факторными сохраняется. Это значит, что результаты исследований достоверны на 100 %.

В случае трех и более факторов наблюдается дисбаланс прироста результативного признака с его факторными приростами. Но он незначителен (третьего и более порядка малости). Так, для 3-факторной модели он составляет четверть произведения приращений уровней факторов, т. е. $\frac{1}{4} \Delta u_1 \Delta u_2 \Delta u_3$. Это значит, что погрешность результатов исследований составляет доли процента.

Таблица 2

| Фактор | Уровень u | | Δu | Позиционная формула | | Инновационная формула | |
|--------------|-------------|----------|------------|------------------------|--------|------------------------|--------|
| | базисный | отчетный | | $\Delta_{\text{факт}}$ | % | $\Delta_{\text{факт}}$ | % |
| | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 1 | 131 | 138 | 7 | 175560 | 22,3 | 162435 | 20,4 |
| 2 | 75 | 95 | 20 | 691680 | 87,7 | 734370 | 92,2 |
| 3 | 34 | 44 | 10 | 589500 | 74,7 | 800275 | 100,5 |
| 4 | 8 | 6 | -2 | -668100 | -84,7 | -900440 | -113,1 |
| Произведение | 2672400 | 3461040 | Σ | 788640 | 100 | 796640 | 100 |
| 4 | 8 | 6 | -2 | -1153680 | -146,3 | -900440 | -113,1 |
| 2 | 75 | 95 | 20 | 971520 | 123,4 | 734370 | 92,2 |
| 3 | 34 | 44 | 10 | 828000 | 104,8 | 800275 | 100,5 |
| 1 | 131 | 138 | 7 | 142800 | 18,1 | 162435 | 20,4 |
| Произведение | 2672400 | 3461040 | Σ | 788640 | 100 | 796640 | 100 |

Таким образом, прирост составит $\Delta_{\text{пр}} = 3461040 - 2672400 = 788640$.

В остальном выводы проведенного выше сравнительного анализа обеих формул имеют место и при разнонаправленности изменения факторных уровней. Только разброс итоговых величин по позиционной формуле увеличился (столбец 6). Возросла на 0,5 % и относительная

ЛИТЕРАТУРА

1. **Статистика** автомобильного транспорта / И. М. Алексеева [и др.]. – М., 2005.
2. **Захаренков, С. Н.** Статистика / С. Н. Захаренков. – Минск: БГУ, 2010.
3. **Ивуть, Р. Б.** Статистика автомобильного транспорта / Р. Б. Ивуть. – Минск, 2003.
4. **Статистика** / под ред. И. И. Елисеевой. – М., 2009.

Поступила 30.03.2011